บทที่ 4

สรุปผล

ในบทความนี้จะแบ่งออกเป็น 4 ส่วน คือ

1. การพิจารณาคำตอบของสมการพหุนาม $p_2 = 0$
2. การพิจารณาคำตอบของสมการพหุนาม $p_1 = 0$
3. สมบัติที่น่าสนใจบางประการของสมการพหุนาม $p_1 = 0$ และ $p_2 = 0$
4. ระเบียบขั้นตอนวิธี

1. การพิจารณาคำตอบของสมการพหุนาม $p_2 = 0$

บทตั้ง 3.1 แต่ละ n ให้ F_n และ L_n จำนวนฟีโบนักชี และจำนวนลูคัสตามลำดับ แล้วจากเอกลักษณ์ของจำนวนฟีโบนักชี และจำนวนลูคัส จะได้ว่า

$$L_n^2 = 5F_n^2 + 4(-1)^n,$$

และ สำหรับแต่ละ $d \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า $(dL_n)^2 = 5(dF_n)^2 + 4d^2(-1)^n$.

บทตั้ง 3.2 สำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{N}$ และ $d \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า $dL_{2k+1} \in \mathcal{M}_d$ ดังนั้น $\mathcal{M}_d$ เป็นเซตอนันต์

โดยบทตั้ง 3.2 จะเป็นบทตั้งที่สำคัญที่ทำให้ทราบว่า เซตของ $\mathcal{M}_d$ เป็นเซตอนันต์ จึงทำให้จำนวนพหุนามของ p_2 มีเป็นจำนวนอนันต์ด้วยเช่นเดียวกัน และนอกจากนี้บทตั้งถัดไปจะเป็นตัวบทที่มีความสำคัญที่ทำให้เราสามารถตรวจสอบได้ว่าพหุนาม p_2 จะมีรากตรรกยะหรือไม่

บทตั้ง 3.4 กำหนดให้ $d \in \mathbb{N}$ ถ้า $5x^2 - 4d^2$ เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์ และ x เป็นจำนวนเต็มบวกที่หารด้วย d ลงตัว แล้วจะได้ว่า $x = dF_{2k-1}$ สำหรับบางค่า k

ดังนั้นจากบทตั้ง 3.4 ทำให้ได้ทฤษฎีบทหลักที่สำคัญดังนี้

ทฤษฎีบท 3.1 ให้ $d \in \mathbb{N}$ และ $a, b, c \in \mathbb{N}$ เป็นจำนวนที่ (a, b, c) เรียงกันเป็นลำดับเลขคณิตที่มีผลต่างร่วมเท่ากับ d ถ้า d หาร $\gcd(a, b, c)$ ลงตัว แล้ว $p_2(x) = ax^2 + bx - c = 0$ มีรากเป็นตรรกยะ ก็ต่อเมื่อ $b = dF_{2k-1}$ สำหรับบางค่า k โดยที่ F_{2k-1} จำนวนฟิโบนัชชีลำดับที่ $2k - 1$

2. การพิจารณาคำตอบของสมการพหุนาม $p_1 = 0$

เมื่อกำหนดค่า d เราพบว่าจำนวนพหุนามในรูปแบบ p_1 นั้นมีเป็นจำนวนจำกัดดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2 ให้ a, b, c, d เป็นจำนวนเต็มบวกที่ซึ่ง $(a, b, c) \in \mathcal{A}$ ถ้า $p_1 : ax^2 + bx + c = 0$ มีคำตอบเป็นตรรกยะ แล้ว $\mathcal{N}_d$ และ P_d เป็นเซตจำกัด

แต่อย่างไรก็ตามเราพบว่า มีจำนวนค่า d เป็น จำนวนอนันต์ที่ทำให้ พหุนามในรูปแบบ p_1 มีรากเป็นจำนวนตรรกยะซึ่งแสดงดังบทตั้งต่อไปนี้

บทตั้ง 3.5 กำหนดให้ $N \in \mathbb{N}$ สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก k นิยาม

$$d_k = \frac{N}{4}\left((2+\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})^k + (2-\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})^k\right)$$
$$n_k = \frac{N}{4\sqrt{3}}\left((7+4\sqrt{3})^k - (7-4\sqrt{3})^k\right)$$

แล้วจะได้ว่า $p(x) = n_k x^2 + (n_k + d_k)x + (n_k + 2d_k) = 0$ มีรากเป็นจำนวนตรรกยะ

3. สมบัติที่น่าสนใจบางประการของสมการพหุนาม $p_1 = 0$ และ $p_2 = 0$

สมบัติต่างๆ ที่น่าสนใจสำหรับ สมการพหุนาม $p_1 = 0$ และ $p_2 = 0$ แสดงได้ดังนี้ บทตั้ง 3.6 และ บทตั้ง 3.7 ทำให้เราทราบถึงพหุนามในรูปแบบ p_1 และ p_2 ทั้งหมดที่มีรากเป็นจำนวนเต็ม และบทตั้งสุดท้ายทำให้ทราบถึงแนวโน้มการลู่เข้าของคำตอบของสมการพหุนาม $p_2 = 0$

บทตั้ง 3.6 ถ้า α และ β เป็นรากของพหุนาม p_2 แล้ว $(\alpha - 2)(\beta - 2) = 5$ และทำให้ได้ว่า ถ้า α และ β เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $(\alpha, \beta) \in \{(3, 7), (7, 3), (1, -3), (-3, 1)\}$

บทตั้ง 3.7 ถ้า α และ β เป็นรากของสมการพหุนาม $p_1 = 0$ แล้ว $(\alpha + 2)(\beta + 2) = 3$ ทำให้ได้ว่า ถ้า α และ β เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $(\alpha, \beta) \in \{(-1, 1), (1, -1), (-3, -5), (-5, -3)\}$

บทตั้ง 3.8 สำหรับแต่ละ i ให้ n_i เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $p_2^i := n_i x^2 + (n_i + d)x - (n_i + 2d) = 0$ มีคำตอบเป็นจำนวนตรรกยะ ถ้า α_i และ β_i เป็นคำตอบตรรกยะของ $p_2 = 0$ โดยที่

$\alpha_i < \beta_i$ แล้ว ลำดับ $\{\alpha_i\}$ ลู่เข้าสู่ $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ และ ลำดับ $\{\beta_i\}$ ลู่เข้าสู่ $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

4. ระเบียบขั้นตอนวิธีการหาพหุนาม p_1 และ p_2

ในส่วนจะกล่าวถึงตัวขั้นตอนวิธีในการหาพหุนาม p_1 และ p_2 ทั้งหมด เมื่อกำหนดค่า d และค่า M โดยสามารถดูได้จากบทที่ 3 ในหัวข้อ 3.4

บรรณานุกรม

[1] W.J. LeVeque. Topics in Number Theory, Volume I and II. Dover Publications, New York, 2002.

[2] A.M.S. Ramasamy. Polynomial solutions for the pell's equation. Indian J. pure appl. math., 25(6):577– 581, 1994.

[3] J.P. Robertson. Solving the generalized pell equation $x^2 - dy^2 = n$. http:// hometown. aol.com/jpr2718/pell.pdf, 2003.

[4] Schwartzman, Steven. 1986. Factoring Polynomials and Fibonacci. Mathematics Teacher. 79(1), 54-56, 65.