บทที่ 3

ผลของงานวิจัย

3.1 คำตอบตรรกยะของสมการพหุนาม $p_2 = 0$

เนื่องจาก $(a, b, c) \in \mathcal{A}$ จะได้ว่า สมการพหุนาม $p_2 = 0$ สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$p_2 := nx^2 + (n+d)x - (n+2d) = 0 \tag{3.1}$$

โดยที่ n, d เป็นจำนวนเต็มบวก จะสังเกตได้ว่า รากของ p_2 จะเป็นจำนวนตรรกยะ ก็ต่อเมื่อ ดิสคริมิแนนท์ (discriminant) ของ p_2 เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์ นั่นคือ

$$D = (n+d)^2 + 4n(n+2d) = M^2 \quad \text{หรือ} \quad 5n^2 + 10nd + (d^2 - M^2) = 0 \tag{3.2}$$

สำหรับบางค่า $M \in \mathbb{Z}$

จากการหาผลเฉลยของ (3.2) ทำให้ได้เงื่อนไข ของ M เป็น

$$n = -d \pm \sqrt{\frac{4d^2 + M^2}{5}} \tag{3.3}$$

จะสังเกตได้ว่าค่าของ n ในสมการ (3.3) เป็นจำนวนเต็ม ก็ต่อเมื่อ $\frac{4d^2+M^2}{5}$ เป็นจำนวนเต็ม และเป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์ นั่นหมายความว่า $4d^2 + M^2$จะต้องหารด้วย 5 ลงตัว ดังนั้น

$$\begin{aligned} 4d^2 + M^2 &\equiv 0 \mod 5 \\ M^2 &\equiv d^2 \mod 5 \\ M &\equiv \pm d \mod 5 \end{aligned} \tag{3.4}$$

แต่อย่างไรก็ตามเงื่อนไขของ M ใน (3.4) เป็นเงื่อนไขที่จำเป็นเท่านั้นแต่ไม่เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอ จึงทำให้ไม่สามารถหาค่า n ทั้งหมดได้

สำหรับแต่ละ d พิจารณา

$$\mathcal{M}_d = \left\{ M \in \mathbb{N} \mid M \equiv \pm d \mod 5 \ \& \ \frac{4d^2 + M^2}{5} \text{ กำลังสองสมบูรณ์} \right\}$$

ต่อไปจะแสดงว่า $\mathcal{M}_d$ เป็นเซตอนันต์ โดยพิจารณาบทตั้ง ต่อไปนี้

บทตั้ง 3.1 *แต่ละ n ให้ F_n และ L_n จำนวนฟีโบนักชี และจำนวนลูคัสตามลำดับ แล้วจากเอกลักษณ์ของจำนวนฟีโบนักชี และจำนวนลูคัส จะได้ว่า*

$$L_n^2 = 5F_n^2 + 4(-1)^n, \tag{3.5}$$

และ สำหรับแต่ละ $d \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า $(dL_n)^2 = 5(dF_n)^2 + 4d^2(-1)^n$.

บทพิสูจน์ เนื่องจาก

$$F_n^2 - F_{n-1}^2 = F_{n-1}F_n - (-1)^n \text{ และ } L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$$

จึงได้ว่า

$$L_n^2 = 5F_n^2 + 4(-1)^n$$

จากบทตั้ง 3.1 จะได้บทตั้งต่อไปนี้

บทตั้ง 3.2 *สำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{N}$ และ $d \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า $dL_{2k+1} \in \mathcal{M}_d$ ดังนั้น $\mathcal{M}_d$ เป็นเซตอนันต์*

บทพิสูจน์ โดยบทตั้ง 3.1 จะได้ว่า

$$(dL_{2k+1})^2 = 5(dF_{2k+1})^2 + 4d^2(-1)^{2k+1} = 5(dF_{2k+1})^2 - 4d^2$$

ให้ $M = dL_{2k+1}$ ดังนั้น $(dF_{2k+1})^2 = \dfrac{M^2 + 4d^2}{5}$ ทำให้ได้ว่า $M \in \mathcal{M}_d$.

ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก จะพิสูจน์บทตั้งต่อไปนี้

บทตั้ง 3.3 *กำหนดให้ $x_1 + y_1\sqrt{D}$ เป็นผลเฉลยปฐมฐานของสมการ $x^2 - Dy^2 = -4$ โดยที่ D เป็นจำนวนเต็มบวกที่ไม่เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์ จะได้ว่าผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกทั้งหมดของสมการ $x^2 - Dy^2 = -4$ คือ*

$$x_n + y_n\sqrt{D} = \frac{\left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)^{2n-1}}{2^{2n-2}}$$

โดยที่ n เป็นจำนวนนับ

บทพิสูจน์ ดูการพิสูจน์ได้จากอ้างอิง [1],[3]

บทตั้ง 3.4 *กำหนดให้ $d \in \mathbb{N}$ ถ้า $5x^2 - 4d^2$ เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์ และ x เป็นจำนวนเต็มบวกที่หารด้วย d ลงตัว แล้วจะได้ว่า $x = dF_{2k-1}$ สำหรับบางค่า k*

บทพิสูจน์ ให้ $d \in \mathbb{N}$ สมมติให้ $5x^2 - 4d^2$ เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์ และ x หารด้วย d ลงตัว และ x เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วจะได้ว่ามีจำนวนเต็ม l ซึ่ง $x = dl$ ดังนั้น

$$5x^2 - 4d^2 = 5(dl)^2 - 4d^2 = d^2(5l^2 - 4)$$

เนื่องจาก $5x^2 - 4d^2$ เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์ จึงทำให้ได้ว่า $5l^2 - 4$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์ด้วย ดังนั้น $5l^2 - 4 = r^2$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก r

ต่อไปจะแสดงว่า $l = F_{2k-1}$ สำหรับบางค่า k พิจารณา สมการเพล

$$x^2 - 5y^2 = -4 \tag{3.6}$$

จะเห็นได้ชัดว่าผลเฉลยปฐมฐานคือ $1 + 1 \cdot \sqrt{5}$ ดังนั้นโดยบทตั้ง 3.3 จะได้ว่า ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกทั้งหมดคือ

$$x_n + y_n\sqrt{5} = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{2n-1}}{2^{2n-2}}. \tag{3.7}$$

โดยการกระจายและเทียบสัมประสิทธิ์ จะได้ว่า

$$y_n = \frac{1}{(\sqrt{5})2^{2n-2}} \sum_{t \text{ เลขคี่}} \binom{2n-1}{t} (\sqrt{5})^t.$$

เราทราบว่า ลำดับฟีโบนักชี F_n นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

โดยที่ $F_0 = 0$ และ $F_1 = 1$ และ จำนวนฟีโบนักชีลำดับที่ m อยู่ในรูปแบบ

$$F_m = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m$$

ดังนั้นสำหรับ $m = 2n - 1$

$$\begin{aligned}
F_{2n-1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1} \\
&= \frac{1}{(\sqrt{5})2^{2n-1}}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^{2n-1} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{2n-1}\right] \\
&= \frac{2}{(\sqrt{5})2^{2n-1}} \sum_{t \text{ เลขคี่}} \binom{2n-1}{t} (\sqrt{5})^t \\
&= \frac{1}{(\sqrt{5})2^{2n-2}} \sum_{t \text{ เลขคี่}} \binom{2n-1}{t} (\sqrt{5})^t \\
&= y_n
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $5l^2 - 4 = r^2$ ทำให้ได้ว่า (r, l) เป็นผลเฉลยของสมการ (3.6) ดังนั้น $l = y_k = F_{2k-1}$ สำหรับบางค่า $k \in \mathbb{N}$ ดังนั้น $x = dF_{2k-1}$ สำหรับบางค่า k สำหรับบทตั้ง 3.4, ถ้า d หาร x ไม่ลงตัว ไม่สามารถสรุปได้ว่า มี k ซึ่ง $x = dF_{2k-1}$ ตัวอย่างเช่น ถ้า $d = 11$ และ $x = 13$ จะเห็นได้ว่า $5(13)^2 - 4(11)^2 = 19^2$ แต่ $x \neq 11F_{2k-1}$ สำหรับทุกค่าของ k

ต่อไปจะพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักของบทความนี้

ทฤษฎีบท 3.1 *ให้ $d \in \mathbb{N}$ และ $a, b, c \in \mathbb{N}$ เป็นจำนวนที่ (a, b, c) เรียงกันเป็นลำดับเลขคณิตที่มีผลต่างร่วมเท่ากับ d ถ้า d หาร $\gcd(a, b, c)$ ลงตัว แล้ว $p_2(x) = ax^2 + bx - c = 0$ มีรากเป็นตรรกยะ ก็ต่อเมื่อ $b = dF_{2k-1}$ สำหรับบางค่า k โดยที่ F_{2k-1} จำนวนฟีโบนัชชีลำดับที่ $2k - 1$*

บทพิสูจน์ สำหรับขากลับของทฤษฎีบทนี้ได้มาจากบทตั้ง 3.2 ต่อไปสมมติให้ $p_2(x) = ax^2 + bx - c = 0$ มีรากเป็นจำนวนตรรกยะ ดังนั้นจะได้ว่า ดิสคริมิแนนท์ D เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์ นั่นคือ $D = b^2+4ac = 5n^2+10dn+d^2 = M^2$ สำหรับบางค่า $M, n \in \mathbb{N}$ จากสมการ (3.3) จะได้ว่า $5b^2 - 4d^2 = M^2$ เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์ และเนื่องจาก d หาร $\gcd(a, b, c)$ ลงตัว จะได้ว่า d หาร b ลงตัว ดังนั้นโดยบทตั้ง 3.4 จะได้ว่า $b = dF_{2k-1}$ สำหรับบางค่า k

3.2 คำตอบตรรกยะของสมการพหุนาม $p_1 = 0$

รากของสมการพหุนาม $p_1 = 0$ จะเป็นจำนวนตรรกยะ ก็ต่อเมื่อ ดิสคริมิแนนท์ p_1 จะต้องเป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์ ดังนั้น

$$D = (n+d)^2 - 4n(n+2d) = N^2 \quad \text{หรือ} \quad 3n^2 + 6nd - d^2 + N^2 = 0 \tag{3.8}$$

สำหรับบางค่า $N \in \mathbb{N}$ และจะสังเกตได้ว่า D เป็นตัวแปรที่ขึ้นอยู่กับ n และมีโอกาสเป็นลบได้ ดังนั้นเงื่อนไขที่ได้สำหรับ n คือ

$$\lfloor -d - \frac{2}{\sqrt{3}}|d| \rfloor + 1 \le n \le \lfloor -d + \frac{2}{\sqrt{3}}|d| \rfloor$$

จากการจัดรูปสมการ (3.8) จะได้

$$n = -d \pm \sqrt{\frac{4d^2 - N^2}{3}} \tag{3.9}$$

ค่าของ n ในสมการ (3.9) จะเป็นจำนวนเต็ม ก็ต่อเมื่อ ค่าของตัวถูกถอดกรณฑ์ในสมการ (3.9) เป็นจำนวนเต็มและเป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์ นั่นหมายความว่า $4d^2 - N^2$ จะต้องหารด้วย 3 ลงตัว ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} 4d^2 - N^2 &\equiv 0 \mod 3 \\ N^2 &\equiv d^2 \mod 3 \\ N &\equiv \pm d \mod 3 \end{aligned} \tag{3.10}$$

แต่อย่างไรก็ตามเงื่อนไขของ N ในสมการ (3.10) เป็นเงื่อนไขที่จำเป็นแต่ไม่ใช่เงื่อนไขที่เพียงพอ ที่จะทำให้ได้ค่าของ n ทั้งหมด

สำหรับแต่ละ d พิจารณา

$$\mathcal{N}_d = \left\{ N \in \mathbb{N} \mid N \equiv \pm d \mod 3 \ \& \ \frac{4d^2 - N^2}{3} \text{ เป็นกำลังสองสมบูรณ์} \right\}$$

$$P_d = \{(a,b,c) \in \mathcal{A} \mid q(x) = ax^2 + bx + c = 0 \text{ มีรากตรรกยะ}\}$$

จะสังเกตได้ว่า $\mathcal{N}_d \neq \emptyset$ ก็ต่อเมื่อ $P_d \neq \emptyset$ ต่อไปจะแสดงว่า P_d เป็นเซตจำกัด

ทฤษฎีบท 3.2 *ให้ a, b, c, d เป็นจำนวนเต็มบวกที่ซึ่ง $(a,b,c) \in \mathcal{A}$ ถ้า $p_1 : ax^2+bx+c = 0$ มีคำตอบเป็นตรรกยะ แล้ว $\mathcal{N}_d$ และ P_d เป็นเซตจำกัด*

บทพิสูจน์ ให้ $a = n$ สำหรับบางค่า $n \in \mathbb{N}$ เนื่องจาก $p_1 : ax^2+bx+c = 0$ มีคำตอบตรรกยะ จะได้ว่า

$$\lfloor -d - \frac{2}{\sqrt{3}}|d| \rfloor + 1 \leq n \leq \lfloor -d + \frac{2}{\sqrt{3}}|d| \rfloor$$

ดังนั้น $\mathcal{N}_d < \infty$ และ $n(P_d) < \infty$

แต่อย่างไรก็ตาม P_d อาจเป็นเซตว่างได้ ตัวอย่างเช่น $P_d = \emptyset$ ถ้า $d = 1,2,3,4,5,6$ ดังนั้นจึงเป็นสิ่งที่น่าสนใจว่า จะมีค่า d ใดบ้างที่ทำให้ P_d ไม่เป็นเซตว่าง ผลที่ได้จากบทตั้งต่อไปนี้ เป็นการแสดงว่า มีค่า d เป็นจำนวนอนันต์ที่ทำให้ P_d ไม่เป็นเซตว่าง

บทตั้ง 3.5 *กำหนดให้ $N \in \mathbb{N}$ สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก k นิยาม*

$$d_k = \frac{N}{4}\left((2+\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})^k + (2-\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})^k\right)$$
$$n_k = \frac{N}{4\sqrt{3}}\left((7+4\sqrt{3})^k - (7-4\sqrt{3})^k\right)$$

แล้วจะได้ว่า $p(x) = n_k x^2 + (n_k + d_k)x + (n_k + 2d_k) = 0$ มีรากเป็นจำนวนตรรกยะ

บทพิสูจน์ การพิสูจน์บทตั้งนี้ แค่แสดงว่าสำหรับแต่ละ k, d_k และ n_k เป็นจำนวนเต็มและสอดคล้องกับ

$$3n_k^2 + 6n_k d_k - d_k^2 + N^2 = 0$$

ก็เพียงพอแล้ว เนื่องจาก

$$\frac{d_k - 3n_k}{N} = \frac{(7+4\sqrt{3})^k + (7-4\sqrt{3})^k}{2}$$

และ โดยเอกสารอ้างอิง [3]

$$\frac{n_k}{N} = \frac{(7+4\sqrt{3})^k - (7-4\sqrt{3})^k}{4\sqrt{3}}$$

เป็นผลเฉลยของสมการเพลล์ $x^2 - 12y^2 = 1$ นั่นคือ $(d_k - 3n_k)^2 - 12n_k^2 = N^2$ ดังนั้นทำให้เราได้ว่า $3n_k^2 + 6n_k d_k - d_k^2 + N^2 = 0$

3.3 สมบัติที่น่าสนใจ

บทตั้ง 3.6 *ถ้า α และ β เป็นรากของพหุนาม p_2 แล้ว $(\alpha-2)(\beta-2)=5$ และทำให้ได้ว่า ถ้า α และ β เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $(\alpha,\beta)\in\{(3,7),(7,3),(1,-3),(-3,1)\}$*

บทพิสูจน์ สมมติให้ α และ β เป็นคำตอบของสมการพหุนาม $p_2 := nx^2+(n+d)x-(n+2d)=0$ สำหรับบางค่าของ d และ n ดังนั้น $\alpha+\beta=-(\frac{n+d}{n})$ และ $\alpha\beta=-\frac{n+2d}{n}$ จึงส่งผลให้

$$\begin{aligned}(\alpha-2)(\beta-2)&=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4\\&=-(\frac{n+2d}{n})-2(-\frac{n+d}{n})+4\\&=5\end{aligned}$$

ถ้า α และ β เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $\alpha-2,\beta-2\in\{\pm1,\pm5\}$ นั่นคือ $(\alpha,\beta)\in\{(3,7),(7,3),(1,-3),(-3,1)\}$

บทตั้ง 3.7 *ถ้า α และ β เป็นรากของสมการพหุนาม $p_1=0$ แล้ว $(\alpha+2)(\beta+2)=3$ ทำให้ได้ว่า ถ้า α และ β เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $(\alpha,\beta)\in\{(-1,1),(1,-1),(-3,-5),(-5,-3)\}$*

บทพิสูจน์ สมมติให้ α และ β เป็นคำตอบของสมการพหุนาม $p_2 := nx^2+(n+d)x+(n+2d)=0$ สำหรับบางค่าของ d และ n แล้วจะได้ว่า $\alpha+\beta=-(\frac{n+d}{n})$ และ $\alpha\beta=\frac{n+2d}{n}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}(\alpha+2)(\beta+2)&=\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4\\&=\frac{n+2d}{n}+2(-\frac{n+d}{n})+4\\&=3\end{aligned}$$

ถ้า α และ β เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $\alpha+2,\beta+2\in\{\pm1,\pm3\}$ ดังนั้น $(\alpha,\beta)\in\{(-1,1),(1,-1),(-3,-5),(-5,-3)\}$

บทตั้ง 3.8 *สำหรับแต่ละ i ให้ n_i เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $p_2^i := n_ix^2+(n_i+d)x-(n_i+2d)=0$ มีคำตอบเป็นจำนวนตรรกยะ ถ้า α_i และ β_i เป็นคำตอบตรรกยะของ $p_2=0$ โดยที่ $\alpha_i<\beta_i$ แล้ว ลำดับ $\{\alpha_i\}$ ลู่เข้าสู่ $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ และ ลำดับ $\{\beta_i\}$ ลู่เข้าสู่ $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$*

บทพิสูจน์ จะสังเกตได้ว่า $\alpha_i+\beta_i=-\frac{n_i+d}{n_i}$ และ $\alpha_i\beta_i=-\frac{n_i+2d}{n_i}$ ดังนั้น เมื่อ n_i ลู่เข้าสู่อนันต์ ลำดับ $\alpha_i+\beta_i$ และ ลำดับ $\alpha_i\beta_i$ ลู่เข้าสู่ -1 ยิ่งไปกว่านี้ α_i และ β_i เป็นคำตอบของสมการพหุนาม $x^2-(\alpha_i+\beta_i)x+\alpha_i\beta_i=0$ เนื่องจาก $\alpha_i<\beta_i$ จึงทำให้ได้ว่า

$$\beta_i=\frac{(\alpha_i+\beta_i)+\sqrt{(\alpha_i+\beta_i)^2-4(\alpha_i\beta_i)}}{2}\to\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

และ

$$\alpha_i=\frac{(\alpha_i+\beta_i)-\sqrt{(\alpha_i+\beta_i)^2-4(\alpha_i\beta_i)}}{2}\to\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

3.4 ระเบียบขั้นตอนวิธี

หัวข้อนี้จะนำเสนอขั้นตอนวิธีสำหรับโปรแกรมที่ใช้ในการหาพหุนามทั้งหมดภายใต้เงื่อนไขของบทตั้งและทฤษฎีบทที่กล่าวมาแล้วข้างต้น โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป scilab เวอร์ชัน 5.5.0 ซึ่งเป็นโปรแกรมที่ไม่มีลิขสิทธิ์ สามารถโหลดได้จาก *https://www.scilab.org*

พิจารณา $p_2(x) = 0$ กำหนดให้ d เป็นจำนวนเต็ม ต้องการหา M ที่ซึ่ง

$$n = -d \pm \sqrt{\frac{4d^2 + M^2}{5}}$$

เป็นจำนวนเต็ม และสมการ $p_2 := nx^2 + (n + d)x - (n + 2d) = 0$ มีคำตอบเป็นจำนวนตรรกยะ ในการคำนวนหาพหุนามทั้งหมดจะมีฟังก์ชันอยู่ 2 ฟังก์ชัน คือ ฟังก์ชัน "findm" และฟังก์ชัน "getperfect" สำหรับแต่ละ d ฟังก์ชัน "findm" จะทำหน้าที่ค้นหาค่าของ M ที่ซึ่ง $5|(4d^2 + M^2)$ หลังจากนั้น ฟังก์ชัน "getperfect" จะคำนวณหาค่าของ M ทั้งหมดที่ทำให้ $\frac{4d^2+M^2}{5}$ เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์

ผลลัพธ์ของโปรแกรมจะอยู่ในรูปแบบของเวกเตอร์ m ซึ่งจะประกอบด้วย สัมประสิทธิ์ n และ จำนวนเต็ม M ที่ทำให้สมการมีคำตอบเป็นจำนวนตรรกยะ ตัวอย่างเช่น สำหรับ $d = 1$ และ M ทั้งหมด 1500 จำนวน แรก จากการใช้โปรแกรมทำให้เราทราบว่า มีเพียง M ทั้งหมด 7 ตัว คือ 4,11, 29,76, 199, 521 และ 1364 ซึ่ง $\dfrac{4d^2 + M^2}{5}$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์ และค่าของสัมประสิทธิ์ n ของ $p_2(x)$ คือ 1, 4, 12 , 33, 88, 232, และ 609

สำหรับ $n = 232$ จะได้ $232x^2 + 233x - 234 = (8x - 13)(29x + 18)$

สำหรับ $n = 609$ จะได้ $609x^2 + 610x - 611 = (21x - 13)(29x + 47)$

ตัวโปรแกรมแสดงได้ดังนี้

```
function [m]=findm(d, n),
    //give an integer d > 1:
    //consider p2(x) = nx^2 + (n + d)x - (n + 2d) = 0
    //to find m such that m ≡ ±d mod 5
    //n is the number of m we desire
i = 1;
if d <> 5 then
    k = 1;
    while i < n,
        m(i) = 5 * k - d;
        m(i + 1) = 5 * k + d;
        k = k + 1;
        i = i + 2;
    end
else for k = 1 : n,
        m(k) = 5 * k;
    end
end
endfunction
```

```
function [md]=getperfect(m, d)
n = max(size(m));
i = 1;
md = 0;
for k = 1 : n,
      c = (4*d∧2 + m(k)∧2)/5;
      if (c == (floor(sqrt(c))∧2) ) then
            md(i) = m(k);
            i = i + 1;
      end
end
endfunction
```

สำหรับโปรแกรมที่ใช้หาค่าของสัมประสิทธิ์ของ $p_1(x)$ ที่อยู่ในรูปแบบ $nx^2+(n+d)x+(n+2d) = 0$ ก็สามารถทำได้ในทำนองเดียวกัน โดยการปรับแก้ฟังก์ชันทั้งสองข้างต้นให้เงื่อนไขสอดคล้องกับเงื่อนไขการมีอยู่ของสัมประสิทธิ์ที่ทำให้ $p_1(x) = 0$ มีคำตอบเป็นจำนวนตรรกยะ ทั้งนี้ผู้เขียนได้นำผลลัพธ์บางส่วนมาแสดงดังตารางต่อไปนี้

n	$p_1(x)$	n	$p_1(x)$
1	$x^2+8x+15=(x+3)(x+5)$	-10	$-10x^2-3x+4=(5x+4)(-2x+1)$
-2	$-2x^2+5x+12=(2x+3)(-x+4)$	-12	$-12x^2-5x+2=(3x+2)(-4x+1)$
-4	$-4x^2+3x+10=(4x+5)(-x+2)$	-15	$-15x^2-8x-1=-(3x+1)(5x+1)$
-7	$-7x^2+7=-7(x+1)(x-1)$		

ตารางที่ 3.1: สัมประสิทธิ์ทั้งหมดสำหรับ $d=7$ ที่ทำให้ $p_1(x)=0$ มีรากตรรกยะ