บทที่ 2

เอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

กำหนดให้ $a, b, c \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $a \neq 0$ สมการพหุนามกำลังสองคือสมการที่อยู่ในรูป

$$p := ax^2 + bx + c = 0 \tag{2.1}$$

รากของสมการพหุนามนี้จะมีหลากหลายรูปแบบและหาได้จากสูตร

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ตัวอย่างเช่น $p_1(x) = x^2 + 2x + 4 = 0$ มีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อน แต่ $p_2(x) = x^2 + 2x - 4 = 0$ มีรากเป็นจำนวนจริง $p_3(x) = x^2 + 2x - 3 = 0$ และ $p_4(x) = 66c^2 + 68x - 70 = 0$ มีรากเป็นจำนวนตรรกยะทั้งคู่ และนอกจากนี้จะพบว่า $(|1|, |2|, |-3|)$ และ $(|66|, |68|, |-70|)$ เป็นสามจำนวนที่เรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต โดยมีผลต่างร่วมเท่ากับ 1 และ 2, ตามลำดับ ซึ่งทำให้น่าสนใจว่าจะมีพหุนามอื่นอีกหรือไม่ที่มีรากเป็นจำนวนตรรกยะ และ สัมประสิทธิ์ $(|a|, |b|, |c|)$ เรียงกันเป็นลำดับเลขคณิตที่มีผลต่างร่วมเท่ากับ $d \in \mathbb{Z}$

เราสามารถเขียนสมการพหุนาม (2.1) ได้ทั้งหมด 8 รูปแบบ โดยกำหนดให้ $a, b, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\begin{array}{ll} p_1 := ax^2 + bx + c = 0 & p_2 := ax^2 + bx - c = 0 \\ p_3 := ax^2 - bx + c = 0 & p_4 := ax^2 - bx - c = 0 \\ p_5 := -ax^2 + bx + c = 0 & p_6 := -ax^2 + bx - c = 0 \\ p_7 := -ax^2 - bx + c = 0 & p_8 := -ax^2 - bx - c = 0 \end{array} \tag{2.2}$$

จะสังเกตได้ว่า $p_1 = -p_8$, $p_2 = -p_7$, $p_3 = -p_6$, และ $p_4 = -p_5$ และถ้า r เป็นราก ของ p_1 และ s เป็นรากของ p_2 แล้ว $-r$ และ $-s$ จะเป็นรากของ p_3 และ p_4 ตามลำดับ

ให้ $p_1^* = cx^2 + bx + a = 0$ และ $p_2^* = -cx^2 + bx + a = 0$ ถ้า $r, s \neq 0$ เป็นรากของพหุนาม p_1 และ p_2 ตามลำดับ แล้ว $\frac{1}{r}$ และ $\frac{1}{s}$ จะเป็นรากของ p_1^* และ p_2^* ตามลำดับด้วยเช่นกัน

กำหนดให้ $\mathcal{A}$ เป็นเซตของ (a, b, c) โดยที่ $a, b, c \in \mathbb{N}$ $a \neq 0$ และ (a, b, c) เป็นสามจำนวนที่เรียงกันเป็นลำดับเลขคณิตและมีผลต่างร่วมเท่ากับ $d \in \mathbb{N}$.

จากการพิจารณาข้างต้น เพียงพอที่จะพิจารณา สมการพหุนามกำลังสองที่อยู่ในรูปแบบ

$$\begin{array}{l} p_1 := ax^2 + bx + c = 0 \\ p_2 := ax^2 + bx - c = 0 \end{array} \tag{2.3}$$

โดยที่ $(a,b,c) \in \mathcal{A}$

Schwartzman [4] ได้พิสูจน์ว่ามีสมการที่อยู่ในรูปแบบ p_2 เป็นจำนวนอนันต์ที่มีรากเป็นจำนวนตรรกยะและสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนที่เรียงกันเป็นลำดับเลขคณิตที่มีผลต่างร่วมเท่ากับ 1 และ $a \geq 1$ และในบทความไม่ได้พิจารณาพหุนามที่อยู่ในรูปแบบ p_1 เนื่องจากรากของพหุนามดังกล่าวเป็นจำนวนเชิงซ้อนทั้งหมด นอกจากนี้ยังได้แสดงว่าสัมประสิทธิ์ b ในสมการ p_2 คือจำนวนฟีโบนักชี(Fibonacci numbers) นั่นคือ ถ้า b ไม่เป็นจำนวนฟีโบนักชี แล้ว $p_2 = 0$ ไม่มีรากเป็นจำนวนตรรกยะ

สำหรับในบทความนี้ จะแบ่งออกเป็น 4 ส่วน

ส่วนที่ 1 จะขยายงานของ Schwartzman ให้อยู่ในรูปแบบทั่วไป และพิสูจน์ข้อความจริงดังกล่าว

ส่วนที่ 2 จะหาเงื่อนไขของ d ที่ทำให้ p_1 มีรากเป็นจำนวนตรรกยะ ซึ่งจะแสดงว่าจำนวนพหุนามในรูปแบบ p_1 ที่รากเป็นจำนวนตรรกยะและสัมประสิทธิ์เรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต มีจำนวนจำกัด นั่นคือจะแสดงว่า

$$P_d = \{(a,b,c) \in \mathcal{A} \mid q(x) = ax^2 + bx + c = 0 \text{ มีรากตรรกยะทั้งหมด } \}$$

เป็นเซตจำกัด และนอกจากนี้จะหาขอบเขตบน $n(P_d)$ เมื่อกำหนดค่า d

ส่วนที่ 3 ศึกษาสมบัติต่างๆของคำตอบของสมการพหุนาม $p_1 = 0$ และ $p_2 = 0$

ส่วนที่ 4 จะพัฒนาโปรแกรมเพื่อใช้ในการคำนวนหาพหุนาม ที่อยู่ในรูปแบบ p_1 และ p_2 ทั้งหมด เมื่อกำหนด d และขอบเขตของ $a, b,$ และ c