บทที่ 1

บทนำ

1.1 บทนำ

พหุนาม (Polynomials) เป็นฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูป

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่มากกว่าหรือเท่ากับ 1 และ $a_i \in \mathbb{R}$ สำหรับ $i = 1, \ldots, n$ เป็นสัมประสิทธิ์ของพหุนาม

พหุนาม เป็นฟังก์ชันที่มีรูปแบบอย่างง่าย กล่าวคือ เขียนอยู่ในรูปของผลบวกหรือผลคูณของ ตัวแปรกับตัวแปร หรือตัวแปรกับค่าคงตัว แต่มีบทบาทสำคัญในการศึกษาขั้นสูง และมีการประยุกต์ใช้ในวิทยาศาสตร์ทุกสาขา ทั้งคณิตศาสตร์ สถิติ วิศวกรรม ฯลฯ เนื่องจากเป็นฟังก์ชันที่มีสมบัติพิเศษและสำคัญหลายอย่าง เช่น พหุนามสามารถนิยามได้ตลอดบนเซตของจำนวนจริง พหุนามเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องและ หาอนุพันธ์ได้ โดยที่อนุพันธ์ของพหุนามยังคงเป็นพหุนาม ทำนองเดียวกัน อินทิกรัลของพหุนามก็ยังเป็น พหุนาม นอกจากนี้ฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้บางฟังก์ชัน สามารถประมาณได้ด้วยฟังก์ชันพหุนาม โดยอาศัยทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ ดังนั้น การศึกษาเรื่องพหุนามจึงได้รับความสนใจ และมีผู้ศึกษา สมบัติต่าง ๆ ของรากและการประยุกต์ของพหุนามอยู่ตลอดเวลา เราทราบว่า รากของพหุนาม $P_n(x)$ คือสมาชิก x ในโดเมนที่ทำให้ $P_n(x) = 0$ และถ้า $r_1, r_2, \ldots, r_n$ เป็นรากของ $P_n(x)$ แล้ว เราสามารถเขียน $P_n(x)$ ได้เป็น

$$P_n(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$$

นั่นคือเราสามารถเขียนพหุนาม ในรูปของตัวประกอบ (ผลคูณของพหุนามอันดับที่ต่ำกว่า) ของ $P_n(x)$ ได้ รากของพหุนามนั้นสามารถแบ่งได้เป็น 2 ประเภทใหญ่ ๆ คือ รากจริง กับรากเชิงซ้อน ในกรณีที่เป็นรากจริง ก็สามารถแยกพิจารณาได้อีกเป็นรากตรรกยะ กับรากอตรรกยะ สมบัติการมีอยู่ของรากจริงของพหุนามและปัจจัยที่ทำให้พหุนามมีรากจริง (ตรรกยะหรืออตรรกยะ) หรือรากเชิงซ้อนเป็นสมบัติอีกอย่างหนึ่งที่มีการศึกษากันอย่างกว้างขวาง ในการประยุกต์ ถ้ารากของพหุนามเป็นจำนวนอตรรกยะ จะมีความยุ่งยากในการนำไปใช้ และจะต้องมีความคลาดเคลื่อนในการคำนวณอย่างหลีกเลี่ยงไม่

ได้ เนื่องจากในทางทฤษฎีจำนวนอตรรกยะ คือจำนวนที่เขียนอยู่รูปทศนิยมไม่ซ้ำไม่รู้จบ ในขณะที่จำนวนตรรกยะ คือจำนวนที่สามารถเขียนในรูปทศนิยมซ้ำ หรือทศนิยมจำกัดได้ การคำนวณที่มีจำนวนอตรรกยะเข้ามาเกี่ยวข้อง จะต้องประมาณจำนวนนั้นด้วยจำนวนตรรกยะก่อน การปัดเศษทศนิยมของจำนวนอตรรกยะ ที่มีทศนิยมไม่ซ้ำไม่รู้จบให้เป็นจำนวนตรรกยะซึ่งมีทศนิยมจำกัด เพื่อให้สามารถนำไปคำนวณได้ จึงมีความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นเสมอ ดังนั้นการมีอยู่ของรากตรรกยะของพหุนามจึงเป็นเรื่องที่สำคัญในแง่ของการนำไปใช้และน่าสนใจมากกว่ารากอตกรรยะ โดยทั่วไป ถึงแม้ว่าจะสามารถสร้างพหุนามที่ให้รากเป็นจำนวนตรรกยะได้เสมอ ก็ตาม แต่เมื่อกระจายพหุนามนั้นให้อยู่ในรูปทั่วไปแล้ว พบว่า สัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์ จะมีรูปแบบที่ไม่แน่นอน ในทางกลับกันหากเราเลือกสัมประสิทธิ์ของพหุนาม ให้เป็นไปตามที่เราต้องการ ก็ไม่แน่ว่าพหุนามที่ได้ จะให้รากตรรกยะหรือไม่ และยิ่งกว่านั้นถ้าเราต้องการให้สัมประสิทธิ์เรียงกันเป็นลำดับใด ลำดับหนึ่งเราก็ไม่อาจแน่ใจได้ว่าพหุนามนั้นจะให้รากเป็นจำนวนตรรกยะหรือไม่ ในกรณีของพหุนามกำลังสอง (Quadratic polynomial) คือ $n = 2$ และ $P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ โดยที่ $a_2 \neq 0$ พบว่า ถ้าสัมประสิทธิ์ของพหุนามกำลังสองเป็นจำนวน Fibonacci F_n ที่เรียงต่อกันเป็น $F_nx^2 + F_{n+1}x - F_{n+2}$ แล้วสมการ $F_nx^2 + F_{n+1}x - F_{n+2} = 0$ จะมีรากตรรกยะเป็น -1 และ $\dfrac{F_{n+2}}{F_n}$ ในขณะที่ถ้าสัมประสิทธิ์ของพหุนามกำลังสอง เป็นลำดับเลขคณิต ที่มีผลต่างร่วมเป็น 1 ซึ่งเขียนอยู่ในรูป $nx^2 + (n+1)x - (n+2)$ แล้ว Schwartzman ([4]) พบว่าจะมี n บางตัวที่สมการพหุนาม ให้รากเป็นจำนวนตรรกยะ และเมื่อเขียนสมการพหุนามนั้นในรูปตัวประกอบพบว่าจะได้เป็น

$$(F_{n+1}x - F_n)(L_nx + L_{n+1}) = 0 \text{ สำหรับ } n \text{ ที่เป็นจำนวนคี่}$$

$$(L_{n+1}x - L_n)(F_nx - F_{n+1}) = 0 \text{ สำหรับ } n \text{ ที่เป็นจำนวนคู่}$$

เมื่อ F_n เป็นจำนวน ฟีโบนักชี และ (L_n) เป็นจำนวน ลูคัส งานวิจัยชิ้นนี้ ถือว่าเป็นการค้นพบความสัมพันธ์ ที่สวยงามระหว่างสัมประสิทธิ์ที่เป็นลำดับเลขคณิต กับรากตรรกยะทั้งคู่ที่มีสามารถเขียนได้ในรูปของจำนวน ฟีโบนักชี และจำนวนลูคัส อย่างไรก็ตาม Schwartzman ได้ศึกษาเฉพาะกรณีลำดับเลขคณิตที่มีผลต่างร่วมเท่ากับ 1 จึงเป็นที่น่าสนใจว่า ถ้าสัมประสิทธิ์ของพหุนามกำลังสอง เป็นลำดับเลขคณิต ที่มีผลต่างร่วมเป็นจำนวนเต็มใด ๆ แล้ว พหุนามกำลังสองจะให้รากเป็นจำนวนตรรกยะในกรณีใดบ้างหรือไม่ และถ้ามี รากที่ได้จะยังคงมีความสัมพันธ์กับจำนวนฟีโบนักชี และจำนวนลูคัส หรือจำนวนอื่นใดหรือไม่

1.2 วัตถุประสงค์

1. ศึกษาการมีอยู่ของรากตรรกยะของสมการพหุนามกำลังสอง

$$nx^2 \pm (n+d)x \pm (n+2d) = 0$$

สำหรับจำนวนนับ n และจำนวนเต็ม d ใด ๆ

2. ศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของรากของสมการพหุนามกำลังสองที่ได้

1.3 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้ผลงานวิจัยที่เป็นองค์ความรู้ใหม่เกี่ยวกับการมีอยู่ของรากตรรกยะของพหุนามกำลังสอง ภายใต้เงื่อนไขการเรียงกันเป็นลำดับใดลำดับหนึ่งของสัมประสิทธิ์
2. มีการทำวิจัยด้านคณิตศาสตร์พื้นฐานอย่างต่อเนื่อง
3. ได้โปรแกรมสำหรับหาสัมประสิทธ์ที่เรียงกันเป็นลำดับเลขคณิตของพหุนาม และทำให้พหุนามมีรากตรรกยะ
4. (คาดว่า) ได้งานวิจัยที่สามารถลงตีพิมพ์ในวารสารวิชาการระดับชาติได้