สมบัติบางประการของจำนวนพีทาโกรัส
Some Property of Pythagorean Numbers

ศรัณณีญา วัชนุภาพร, ฐิตารีย์ ห้วยหงษ์ทอง, และจุฑามาศ วัชนุภาพร*

นักเรียนห้องเรียนพิเศษวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ เทคโนโลยีและสิ่งแวดล้อม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6/1

โรงเรียนราชินีบูรณะ อำเภอเมืองนครปฐม จังหวัดนครปฐม 73000

Sarunneeya Wacthanupapon, Thitaree Huaihongthong, and Jutamas Wacthanupapon *

Enrichment Program of Science Mathematics Technology and Environment

Mathayomsuksa 6/1 Students, Rachineeburana School

Meang Nakhon Pathom District, Nakhon Pathom Province, 73000

บทคัดย่อ

โครงงานคณิตศาสตร์เรื่อง สมบัติบางประการของจำนวนพีทาโกรัส จัดทำขึ้นโดยมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและพิสูจน์สมบัติของจำนวนพีทาโกรัสและเชื่อมโยงไปสู่คณิตศาสตร์เรื่องอื่นๆ การดำเนินการเป็นการศึกษาเกี่ยวกับชุดของจำนวนนับ 3 จำนวน a ,b, c ที่มีความสอดคล้องตามเงื่อนไข a ,$b < c$ และ $c^2 = a^2 + b^2$ โดยอาศัยความรู้ด้านทฤษฎีจำนวน และระเบียบวิธีพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย การพิสูจน์ทางตรง และการพิสูจน์โดยการแจงกรณี ในการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์

ผลการศึกษาในโครงงานคณิตศาสตร์นี้พบว่า 1) ผลคูณของจำนวนพีทาโกรัสทั้งสาม หารด้วยผลบวกของจำนวนพีทาโกรัสทั้งสามลงตัว 2) สำหรับจำนวนพีทาโกรัส a, b, c ถ้าผลหารระหว่างผลคูณและผลบวกของจำนวนพีทาโกรัสทั้งสามเท่ากับ N แล้ว จำนวนพีทาโกรัส ka, kb, kc จะมีค่าผลหารระหว่างผลคูณและผลบวกของจำนวนพีทาโกรัสทั้งสามเท่ากับ k^2N 3) สี่เท่าของปริมาตรของกล่องพีทาโกรัสหารด้วยผลรวมของความยาวด้านทั้งหมดลงตัว 4) เส้นทแยงมุมของกล่องพีทาโกรัสที่กว้าง a หน่วย ยาว b หน่วย และสูง c หน่วย ยาวเท่ากับ $2^{1/2}c$ หน่วย และ 5) เส้นทแยงมุมของกล่องพีทาโกรัสที่กว้าง a หน่วย ยาว b หน่วย และสูง c หน่วย ซึ่งวางซ้อนกันเป็นจำนวน n กล่อง ยาวเท่ากับ $(n^2+ 1)^{1/2} c$ หน่วย ผลการศึกษาครั้งนี้สามารถนำไปใช้ประโยชน์สำหรับการตั้งรหัสจากจำนวนพีทาโกรัสหรือรหัสพี และสามารถนำไปใช้ในการคำนวณเกี่ยวกับกล่องพีทาโกรัสได้โดยตรง

คำสำคัญ: จำนวนพีทาโกรัส, กล่องพีทาโกรัส, รหัสพี, การหารลงตัว

Abstract

The objective of mathematical project entitle of: some property of Pythagorean numbers was to study and proof the property of Pythagorean numbers and transfer to other

* **ผู้รับผิดชอบบทความ :** jutamaswatcha@gmail.com

mathematics. The operation was a study of 3-count numbers *a, b, c* was consistent with *a, b* $< c$ and $c^2 = a^2 + b^2$ by using of number theory and mathematical proof method comprising of direct proof and prove by case.

The result of this study founded that; 1) multiply of Pythagorean numbers divided by summation of them was dividing 2) for Pythagorean numbers a, b, c if the multiply of Pythagorean numbers divided by summation of them equal to *N*, then the multiply of Pythagorean numbers *ka, kb, kc* divided by summation of them equal to k^2N 3) Four times the volume of the Pythagorean box divided by the sum of all sides 4) the diagonal of Pythagorean box that wide *a* unit, long *b* unit, and high *c* unit was $2^{1/2}c$ unit and 5) the diagonal of Pythagorean box that wide *a* unit, long *b* unit, high *c* unit, and stacked in *n*-boxes was $(n^2+1)^{1/2}c$ unit. The results of this study can be used for setting codes from Pythagorean numbers or P codes. And can be used to calculate the Pythagorean box directly.

Keywords: Pythagorean numbers, Pythagorean box, P-codes, and division.

1. ที่มาและความสำคัญของโครงงาน

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดของมนุษย์ทำให้มนุษย์มีความคิด สร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ ระเบียบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วน รอบคอบ ทำให้สามารถคาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจและแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการศึกษาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ตลอดจนศาสตร์อื่นๆ ที่เกี่ยวข้อง คณิตศาสตร์จึงมีประโยชน์ต่อการดำรงชีวิตและช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้น นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังช่วยพัฒนาคนให้เป็นมนุษย์ที่สมบูรณ์ มีความสมดุลทั้งทางร่างกาย จิตใจ สติปัญญา และอารมณ์ สามารถคิดเป็น ทำเป็น แก้ปัญหาเป็น และสามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เกี่ยวข้องกับทักษะ ดังนั้น การทำโจทย์คณิตศาสตร์จะช่วยให้เก่งคณิตศาสตร์ได้ ปัจจุบันคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐานของศาสตร์อื่นๆ อีกหลายสาขาวิชา เช่น วิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ และเศรษฐศาสตร์ เป็นต้น

ทฤษฎีบทพีทาโกรัส (Pythagoras's Theorem) เป็นทฤษฎีบทที่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายคุ้นเคยเป็นอย่างดี เพราะว่านักเรียนทุกคนจะได้เรียนในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 2 และยังมีบทบาทสำคัญในการศึกษาเรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ อีกด้วย ตัวทฤษฎีบทกล่าวว่า “กำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉาก” ทฤษฎีบทนี้เป็นทฤษฎีบททางเรขาคณิตที่สำคัญและสามารถนำใช้พิสูจน์ทฤษฎีบทอื่นได้อีกมากมาย เช่น ของโคไซน์ (Cosine's Law) แต่ในอีกมุมมองหนึ่งทางทฤษฎีจำนวน (Number Theory) ได้มีผู้นิยามจำนวนสามจำนวนที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสว่า “จำนวนของพีทาโกรัส (The Pythagorean Numbers)” จากการสังเกตจำนวนพีทาโกรัสในเบื้องต้น พบว่า ถ้าจำนวนนับสามจำนวนสอดคล้องกับจำนวนของพีทาโกรัสแล้ว เมื่อนำค่าคงที่ค่าหนึ่งคูณ

ทั้งสามจำนวน สามจำนวนใหม่ที่เกิดขึ้นจะเป็นจำนวนพีทาโกรัสด้วย เช่น 3, 4, 5 เป็นจำนวนพีทาโกรัส ทำให้ 6, 8, 10 เป็นจำนวนพีทาโกรัสด้วย

ด้วยความสนใจในจำนวนพีทาโกรัสทำให้กลุ่มผู้จัดทำต้องการทราบว่าจำนวนพีทาโกรัสมีทั้งหมดกี่ชุด จึงนำปัญหานี้ไปปรึกษาอาจารย์ ซึ่งได้ข้อคิดจากอาจารย์กลับมาว่า ในเมื่อสามารถสร้างจำนวนพีทาโกรัส 6, 8, 10 โดยการคูณจำนวนพีทาโกรัส 3, 4, 5 ด้วย 2 นั่นย่อมแสดงว่าสามารถสร้างจำนวนพีทาโกรัสได้ไม่รู้จบ และในขณะเดียวกันอาจารย์ที่ปรึกษาได้ให้กลุ่มผู้จัดทำลองพิจารณาว่า หากต้องการหาจำนวนพีทาโกรัสที่ทุกจำนวนไม่เกินสองหลักจะมีกี่ชุด ซึ่งอาจารย์ทำการเฉลยปัญหานี้โดยรันในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่อาจารย์เขียนขึ้น ผลปรากฏว่าจำนวนพีทาโกรัสที่ทุกจำนวนไม่เกินสองหลักมีทั้งหมด 50 ชุด ยิ่งทำให้กลุ่มผู้จัดทำเกิดความสนใจในจำนวนพีทาโกรัสมากขึ้น และตัดสินใจที่จะศึกษาสมบัติของจำนวนพีทาโกรัส จากการศึกษาจำนวนพีทาโกรัส ทำให้กลุ่มผู้จัดทำค้นพบสมบัติที่น่าสนใจสมบัติหนึ่งและสามารถพิสูจน์เป็นทฤษฎีบทได้ สำหรับในเบื้องต้นนี้ให้ลองพิจารณาชุดจำนวนทางซ้ายและทางขวาแล้วสังเกตว่าหากนำผลคูณของจำนวนทั้งสามหารด้วยผลบวกของจำนวนทั้งสามเองนั้น ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นอย่างไร

ตารางที่ 1 ความแตกต่างระหว่างจำนวนเต็มชุดอื่นๆ กับจำนวนของพีทาโกรัส

Left - Hand Numbers			Right – Hand Numbers		
1	1	3	5	12	13
2	4	7	6	8	10
7	23	26	7	24	25
8	14	19	8	15	17
9	9	15	9	12	15

จุดเริ่มต้นของการศึกษาโครงงานคณิตศาสตร์นี้เกิดจากจำนวนที่ปรากฏอยู่ในตารางที่ 1 กลุ่มผู้จัดทำพบว่า หากจำนวนนับทั้งสามสอดคล้องกับจำนวนของพีทาโกรัสแล้ว ผลหารระหว่างผลคูณและผลบวกของจำนวนทั้งสามจะเป็นจำนวนนับ ซึ่งสิ่งที่พบนี้อาจไม่มีอยู่ในชุดของจำนวนนับอื่นๆ เหตุนี้กลุ่มผู้จัดทำจึงมีความสนใจที่จะทำการศึกษาสมบัติของจำนวนพีทาโกรัส และทำการพิสูจน์ให้เห็นจริง เพื่อให้ทราบว่าจำนวนพีทาโกรัสที่เป็นจำนวนนับนั้น มีสมบัติอะไรซ่อนอยู่บ้าง

2. จุดประสงค์ของโครงงาน

การจัดทำโครงงานคณิตศาสตร์ครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและพิสูจน์สมบัติของจำนวนพีทาโกรัส และเชื่อมโยงไปสู่คณิตศาสตร์เรื่องอื่นๆ

3. นิยามเชิงปฏิบัติการ

จำนวนพีทาโกรัส หมายถึง จำนวนสามจำนวน $a,b,c \in \mathbb{N}$ และ $a,b < c$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข $c^2 = a^2 + b^2$

4. นิยามและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

บทนิยาม 1 จำนวนคู่ หมายถึง จำนวนเต็มที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $2n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

บทนิยาม 2 จำนวนคี่ หมายถึง จำนวนเต็มที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $2n+1$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

บทนิยาม 3 จำนวนเต็มสองจำนวนมีพาริตี้เดียวกัน เมื่อจำนวนเต็มทั้งสองเป็นจำนวนคู่หรือจำนวนคี่เหมือนกัน และกล่าวว่าจำนวนเต็มสองจำนวนมีพาริตี้ต่างกัน เมื่อมีจำนวนใดจำนวนหนึ่งเป็นจำนวนคู่ในขณะที่อีกจำนวนหนึ่งเป็นจำนวนคี่

ทฤษฎีบท 1 ถ้า a เป็นจำนวนคู่ แล้ว a^2 เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์ ให้ a เป็นจำนวนคู่ ดังนั้น จะมีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $a=2k$
นั่นคือ $a^2=(2k)^2=4k^2=2(2k^2)$ เนื่องจาก $2k^2\in\mathbb{Z}$
ดังนั้น a^2 เป็นจำนวนคู่

ทฤษฎีบท 2 ถ้า a เป็นจำนวนคี่ แล้ว a^2 เป็นจำนวนคี่

พิสูจน์ ให้ a เป็นจำนวนคี่ ดังนั้น จะมีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $a=2k+1$
นั่นคือ $a^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$ เนื่องจาก $2k^2+2k\in\mathbb{Z}$
ดังนั้น a^2 เป็นจำนวนคี่

ทฤษฎีบท 3 ถ้า a และ b มีพาริตี้เดียวกัน แล้ว $a+b$ เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์ กำหนดให้ a และ b มีพาริตี้เดียวกัน
ถ้า a และ b เป็นจำนวนคู่ จะมีจำนวนเต็ม k_1,k_2 ที่ทำให้ $a=2k_1$ และ $b=2k_2$
พิจารณา $a+b=2k_1+2k_2=2(k_1+k_2)$ เนื่องจาก $k_1+k_2\in\mathbb{Z}$
ดังนั้น $a+b$ เป็นจำนวนคู่
ถ้า a และ b เป็นจำนวนคี่ จะมีจำนวนเต็ม m_1,m_2 ที่ทำให้ $a=2m_1+1$
และ $b=2m_2+1$ พิจารณา $a+b=(2m_1+1)+(2m_2+1)=2(m_1+m_2+1)$
เนื่องจาก $m_1+m_2+1\in\mathbb{Z}$ ดังนั้น $a+b$ เป็นจำนวนคู่
จากการพิสูจน์ทั้งสองกรณี จึงสามารถสรุปได้ว่า ถ้า a และ b มีพาริตี้เดียวกัน แล้ว $a+b$ เป็นจำนวนคู่

ทฤษฎีบท 4 ถ้า a และ b มีพาริตี้ต่างกัน แล้ว $a+b$ เป็นจำนวนคี่

พิสูจน์ กำหนดให้ a และ b มีพาริตี้ต่างกัน โดยไม่สูญเสียนัยสำคัญของกรณีทั่วไป
สมมติให้ a เป็นจำนวนคู่ และ b เป็นจำนวนคี่ นั่นคือ จะมีจำนวนเต็ม k_1,k_2
ที่ทำให้ $a=2k_1$ และ $b=2k_2+1$
พิจารณา $a+b=2k_1+(2k_2+1)=2(k_1+k_2)+1$ เนื่องจาก $k_1+k_2\in\mathbb{Z}$
ดังนั้น $a+b$ เป็นจำนวนคี่

5. ผลการดำเนินงาน

จากการสังเกตและทดลองเบื้องต้นพบว่าผลหารระหว่างผลคูณและผลบวกของจำนวนทั้งสามเป็นจำนวนนับ ซึ่งสิ่งที่พบนี้อาจไม่มีอยู่ในชุดจำนวนอื่นๆ จากนั้นกลุ่มของผู้จัดทำได้ร่วมกันทำการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์และพบว่าข้อความคาดการณ์นั้นเป็นจริง จึงได้แสดงการพิสูจน์ไว้เป็นทฤษฎีบทหลัก จากทฤษฎีบทดังกล่าวเป็นเหตุให้เกิดทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับจำนวนพีทาโกรัส และเกิดการนิยามกล่องพีทาโกรัส (The Pythagorean Box) และเกิดสมบัติต่างๆ ของกล่องพีทาโกรัสตามมา ทั้งนี้ขอนำเสนอผลการดำเนินงานในรูปทฤษฎีบท ตามลำดับ ดังนี้

ทฤษฎีบท 5 กำหนดให้ $a,b,c\in\mathbb{N}$ และ $a,b<c$ ซึ่ง $c^2=a^2+b^2$ แล้ว $\dfrac{abc}{a+b+c}\in\mathbb{N}$

พิสูจน์ ให้ $a,b,c\in\mathbb{N}$ และ $a,b<c$ ซึ่ง $c^2=a^2+b^2$ หรือ $c=\sqrt{a^2+b^2}$

พิจารณา
$$\begin{aligned}\frac{abc}{a+b+c} &= \frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}\\
&= \left(\frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}\right)\left(\frac{(a+b)-\sqrt{a^2+b^2}}{(a+b)-\sqrt{a^2+b^2}}\right)\\
&= \frac{\left(ab\sqrt{a^2+b^2}\right)\left((a+b)-\sqrt{a^2+b^2}\right)}{(a+b)^2-\left(a^2+b^2\right)}\\
&= \frac{\left(ab\sqrt{a^2+b^2}\right)\left((a+b)-\sqrt{a^2+b^2}\right)}{a^2+2ab+b^2-a^2-b^2}\\
&= \frac{\left(ab\sqrt{a^2+b^2}\right)\left((a+b)-\sqrt{a^2+b^2}\right)}{2ab}\\
&= \frac{\sqrt{a^2+b^2}\left((a+b)-\sqrt{a^2+b^2}\right)}{2}\\
&= \frac{c}{2}(a+b-c)\end{aligned}$$

ดังนั้น เราจะทำการพิสูจน์ว่า $\frac{c}{2}(a+b-c)$ เป็นจำนวนนับ

กรณีที่ 1 c เป็นจำนวนคู่

ถ้า c เป็นจำนวนคู่ จากบทนิยาม 1 จะมีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $c=2k$

ดังนั้น $\frac{c}{2}(a+b-c) = \frac{2k}{2}(a+b-2k)$

$$= k(a+b-c)$$

จาก $c \in \mathbb{N}$ ดังนั้น $k>0$ และจาก a,b,c เป็นความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมแสดงว่า $a+b>c$ ดังนั้น $a+b-c$ เป็นจำนวนนับ ทำให้ได้ว่า $k(a+b-c)$ เป็นจำนวนนับ

กรณีที่ 2 c เป็นจำนวนคี่

ถ้า c เป็นจำนวนคู่ จากบทนิยาม 2 จะมีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $c=2k+1$

กรณีที่ 2.1 a และ b มีพาริตี้เดียวกัน

ถ้า a และ b เป็นจำนวนคู่ โดยผลของทฤษฎีบท 1 ทำให้ได้ว่า a^2 และ b^2 เป็นจำนวนคู่ และผลจากทฤษฎีบท 3 ทำได้ว่า a^2+b^2 เป็นจำนวนคู่ด้วย และเนื่องจาก c เป็นจำนวนคี่ โดยผลจากทฤษฎีบท 2 ทำให้ได้ว่า c^2 เป็นจำนวนคี่ ทำให้ได้ว่า กรณีนี้จะไม่เกิดขึ้นสำหรับจำนวนพีทาโกรัส เพราะ $c^2=a^2+b^2$ ซึ่ง c^2 และ a^2+b^2 จะต้องมีพาริตี้เดียวกัน

กรณีที่ 2.2 a และ b มีพาริตี้ต่างกัน

เนื่องจากเราจะทำการพิสูจน์ว่า $\frac{c}{2}(a+b-c)$ เป็นจำนวนนับ ซึ่งสามารถสลับที่ระหว่างจำนวนนับ a และ b ได้ ดังนั้น โดยไม่สูญเสียนัยสำคัญของกรณีทั่วไป สมมติให้ a เป็นจำนวนคู่ และ b เป็นจำนวนคี่ โดยผลจากทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า $a+b$ เป็นจำนวนคี่ โดยบทนิยาม 2 จะมีจำนวนเต็ม m ที่ทำให้ $a+b=2m+1$,

พิจารณา

$$\begin{aligned}
\frac{c}{2}(a+b-c) &= \frac{(2k+1)}{2}\left(2m+1-(2k+1)\right) \\
&= \frac{(2k+1)}{2}(2m+1-2k-1) \\
&= \frac{(2k+1)}{2}(2m-2k) \\
&= \left\{\frac{(2k+1)}{2}\right\}2(m-k) \\
&= (2k+1)(m-k)
\end{aligned}$$

เหลือแต่เพียงแสดงว่า $m-k>0$

เนื่องจาก a,b,c เป็นความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยม ดังนั้น $a+b>c$ นั่นคือ

$$\begin{aligned}
2m+1 &> 2k+1 \\
2m &> 2k \\
m &> k
\end{aligned}$$

นั่นคือ $m-k > 0$

ดังนั้น $\frac{c}{2}(a+b-c)$ เป็นจำนวนนับ

จากการพิสูจน์ข้างต้นทำให้สรุปได้ว่า สำหรับ $a,b,c \in \mathbb{N}$ และ $a,b < c$ ซึ่ง $c^2 = a^2 + b^2$ แล้ว $\dfrac{abc}{a+b+c} \in \mathbb{N}$ นั่นคือ ข้อความคาดการณ์เป็นจริง

นอกจากนี้ กลุ่มผู้จัดทำยังค้นพบสมบัติที่เกี่ยวกับการนำค่าคงที่ไปคูณเข้ากับจำนวนพีทาโกรัส ซึ่งแสดงไว้ดังทฤษฎีบทที่ 6

ทฤษฎีบท 6 สำหรับจำนวนพีทาโกรัส ถ้าผลคูณของจำนวนทั้งสามหารด้วยผลบวกของจำนวนทั้งสาม เท่ากับ N แล้วผลคูณหารด้วยผลบวกของจำนวน ka, kb, kc เมื่อ $k \in \mathbb{R}$ จะเท่ากับ k^2N

พิสูจน์ ให้ $a,b,c \in \mathbb{N}$ เป็นจำนวนพีทาโกรัส โดยที่ $a,b < c$ และ $c^2 = a^2 + b^2$

จากผลคูณของจำนวนทั้งสามหารด้วยผลบวกของจำนวนทั้งสามเท่ากับ N

นั่นคือ $\dfrac{abc}{a+b+c} = N$

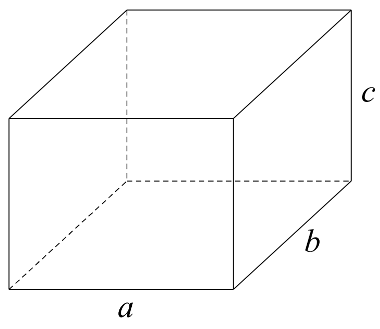
พิจารณา
$$\frac{(ka)(kb)(kc)}{ka+kb+kc} = \frac{k^3abc}{k(a+b+c)} = k^2\left(\frac{abc}{a+b+c}\right) = k^2N$$

ดังนั้น สำหรับจำนวนพีทาโกรัส ถ้าผลคูณของจำนวนทั้งสามหารด้วยผลบวกของจำนวนทั้งสามเท่ากับ N แล้วผลคูณหารด้วยผลบวกของจำนวน ka, kb, kc เมื่อ $k \in \mathbb{R}$ จะเท่ากับ k^2N

จากทฤษฎีบท 5 กลุ่มผู้จัดทำพบว่าสามารถเชื่อมโยงไปสู่วิชา คณิตศาสตร์ในเรื่อง ปริมาตรของกล่อง (The Volume of Box) ได้ เนื่องจากเล็งเห็นว่าพจน์ abc เทียบเท่ากับปริมาตรของกล่องที่กว้าง a หน่วย ยาว b หน่วย และสูง c หน่วย และพจน์ $a+b+c$ ก็เทียบเท่าได้กับผลรวมของความยาวด้าน a,b และ c ดังนั้น อาจมีความสัมพันธ์บางอย่างระหว่างปริมาตรของกล่องกับผลรวมของความยาวด้านของกล่องนั้น ในการแสดงสมบัติในข้อนี้ กลุ่มผู้จัดทำ ขอนิยามกล่องที่สร้างขึ้นจากจำนวนพีทาโกรัส ซึ่งมีความกว้าง a หน่วย ยาว b หน่วย และสูง c หน่วย โดยที่ $a,b,c \in \mathbb{N}$ และ $a,b < c$ ซึ่ง $c^2 = a^2 + b^2$ ว่า "กล่องพีทาโกรัส (The Pythagorean Box)"

ทฤษฎีบท 7 สี่เท่าของปริมาตรของกล่องพีทาโกรัส หารด้วยผลรวมของความยาวด้านทั้งหมดลงตัว

พิสูจน์ กำหนดกล่องพีทาโกรัส A กว้าง a หน่วย ยาว b หน่วย และสูง c หน่วย ดังภาพที่ 1 โดยมีปริมาตรเท่ากับ V หน่วย^3 และผลรวมของความยาวด้านเท่ากับ E



ภาพที่ 1 กล่องพีทาโกรัส A

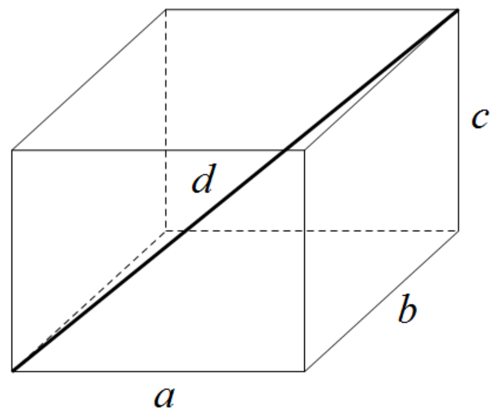
ดังนั้น V = abc และ E = $4(a+b+c)$

นั่นคือ
$$\frac{4\mathrm{V}}{\mathrm{E}} = \frac{4abc}{4(a+b+c)} = \frac{abc}{a+b+c} \in \mathbb{N}$$

(ผลจากทฤษฎีบท 5)

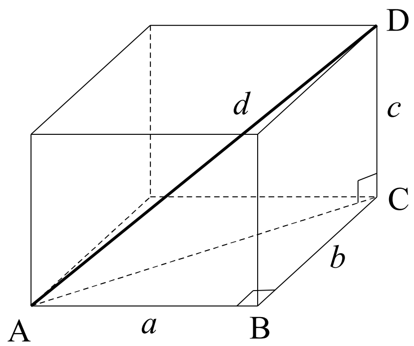
จากการพิสูจน์ ทำให้สรุปได้ว่า สี่เท่าของปริมาตรของกล่องพีทาโกรัสหารด้วยผลรวมของความยาวด้านทั้งหมดลงตัว

นอกจากนี้ในการสร้างกล่องพีทาโกรัส กลุ่มผู้จัดทำยังพบสมบัติที่น่าสนใจเกี่ยวกับเส้นทแยงมุมของกล่อง (Diagonal of Box) ซึ่งคือ ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากมุมกล่องด้านล่างด้านใดด้านหนึ่งไปยังมุมกล่องด้านบนที่อยู่ตรงกันข้าม แสดงดังภาพที่ 2



ภาพที่ 2 เส้นทแยงมุมของกล่อง (Diagonal of Box)

จากภาพที่ 2 ส่วนของเส้นตรง d เป็นเส้นทแยงมุมของกล่อง ซึ่งโดยทั่วไปเราสามารถหาความยาวของ d ของกล่องใดๆ ได้ โดยอาศัยทฤษฎีบทพีทาโกรัส ดังนี้ (ภาพอธิบายดังภาพที่ 3)



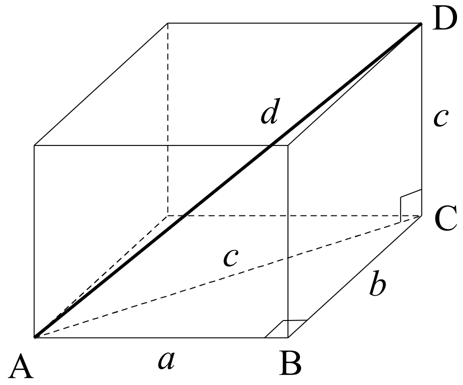
ภาพที่ 3 เส้นทแยงมุมของกล่องใดๆ

จากภาพที่ 3 ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มี B เป็นมุมฉากโดยอาศัยทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่าด้าน AC^2 มีความยาวเท่ากับ a^2+b^2 หน่วย ทำให้ได้ว่า รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ACD ที่มี C เป็นมุมฉาก มีด้านประกอบมุมฉากกำลังสองยาว a^2+b^2 และ c^2 หน่วย โดยอาศัยทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่า $d^2 = a^2+b^2+c^2$ นั่นคือ $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ หน่วย

แสดงว่า เราสามารถหาความยาวของเส้นทแยงมุมของกล่องใดๆ ได้จากรากที่สองของผลรวมของความกว้างกำลังสอง ความยาวกำลังสอง และความสูงกำลังสอง นั่นเอง แต่สำหรับกล่องพีทาโกรัส เราพบสมบัติที่น่าสนใจ ซึ่งแสดงไว้ในทฤษฎีบทที่ 8 ดังนี้

ทฤษฎีบท 8 เส้นทแยงมุมของกล่องพีทาโกรัสที่กว้าง a หน่วย ยาว b หน่วย และสูง c หน่วย โดยที่ $a,b,c\in\mathbb{N}$ และ $a,b<c$ ซึ่ง $c^2=a^2+b^2$ จะยาวเท่ากับ $\sqrt{2}c$ หน่วย

พิสูจน์ กำหนดกล่องพีทาโกรัส B กว้าง a หน่วย ยาว b หน่วย และสูง c หน่วย และมี d เป็นเส้นทแยงมุมของกล่อง ดังภาพที่ 4



ภาพที่ 4 กล่องพีทาโกรัส B

จากภาพที่ 4 รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มี B เป็นมุมฉาก โดยอาศัยทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่าด้าน AC^2 มีความยาวเท่ากับ a^2+b^2 หน่วย ทำให้ได้ว่า รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ACD ที่มี C เป็นมุมฉาก มีด้านประกอบมุมฉากกำลังสองยาว a^2+b^2 และ c^2 หน่วย อาศัยทฤษฎีบทพีทาโกรัสทำให้ได้ว่า d^2 = $a^2+b^2+c^2$ แต่เนื่องจาก $c^2=a^2+b^2$

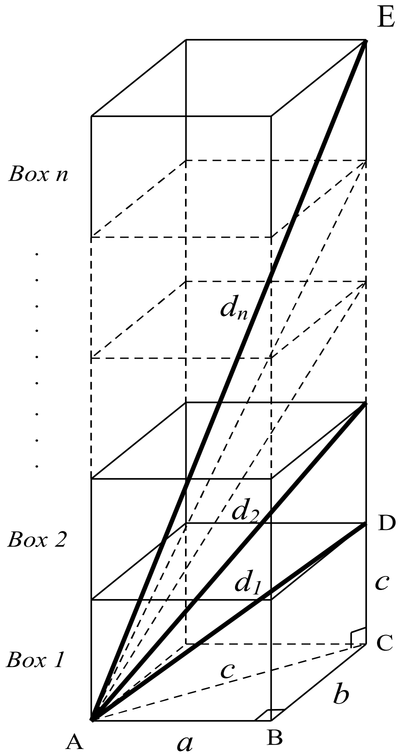
ดังนั้น
$$\begin{aligned} d^2 &= c^2+c^2 \\ &= 2c^2 \\ d &= \sqrt{2}c \end{aligned}$$

นั่นคือ เส้นทแยงมุมของกล่องพีทาโกรัสที่กว้าง a หน่วย ยาว b หน่วย และสูง c หน่วย โดยที่ $a,b,c \in \mathbb{N}$ และ $a,b<c$ ซึ่ง $c^2=a^2+b^2$ จะยาวเท่ากับ $\sqrt{2}c$ หน่วย

สำหรับสมบัติสุดท้ายที่กลุ่มผู้จัดทำค้นพบในการทำโครงงานคณิตศาสตร์ครั้งนี้ ยังเป็นเรื่องเกี่ยวกับกล่องพีทาโกรัส ด้วยความสงสัยที่ว่า หากนำกล่องพีทาโกรัสที่มีลักษณะเดียวกันมาซ้อนกันเป็นจำนวน n กล่อง แล้วความยาวของเส้นทแยงมุมของกล่องจะเท่ากับเท่าไร ซึ่งในการวางซ้อนกันนั้นมีลักษณะคือ ด้านที่เป็นความสูงทั้งสี่ด้านของทุกกล่องที่ซ้อนกันจะต้องอยู่ในแนวเดียวกันทั้งสี่ด้าน สำหรับการพิสูจน์กลุ่มผู้จัดทำได้แสดงบทพิสูจน์ให้เห็นจริงไว้ในทฤษฎีบทที่ 9

ทฤษฎีบท 9 เส้นทแยงมุมของกล่องพีทาโกรัสที่กว้าง a หน่วย ยาว b หน่วย และสูง c หน่วย โดยที่ $a,b,c \in \mathbb{N}$ และ $a,b<c$ ซึ่ง $c^2=a^2+b^2$ และซ้อนกันจำนวน n กล่อง จะยาวเท่ากับ $\sqrt{n^2+1}\cdot c$ หน่วย

พิสูจน์ กำหนดกล่องพีทาโกรัส P กว้าง a หน่วย ยาว b หน่วย สูง c หน่วย และวางกล่อง P ซ้อนกันเป็นจำนวน n กล่อง ดังภาพที่ 5 โดยให้เส้นทแยงมุมของกล่อง ยาว d_n หน่วย



ภาพที่ 5 กล่องพีทาโกรัส P ซ้อนกันจำนวน n กล่อง

เนื่องจากกล่องพีทาโกรัสแต่ละกล่องที่ซ้อนกัน n กล่อง มีความสูงเท่ากับ c หน่วย ดังนั้น ความสูงของการซ้อนกันทั้งหมดเท่ากับ nc หน่วย และจากกล่องพีทาโกรัส P กล่องที่ 1 มีด้าน AC ยาวเท่ากับ $\sqrt{a^2+b^2} = c$ หน่วย

จะได้ว่ารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ACE ที่มี C เป็นมุมฉาก มีด้าน AC ยาว c หน่วย ด้าน CE ยาว nc หน่วย โดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่า

$$\begin{aligned} d_n^2 &= c^2+(nc)^2 \\ &= c^2+n^2c^2 \\ &= (n^2+1)\cdot c^2 \end{aligned}$$

นั่นคือ $d_n = \sqrt{(n^2+1)}\cdot c$

สรุปได้ว่า เส้นทแยงมุมของกล่องพีทาโกรัสที่กว้าง a หน่วย ยาว b หน่วย และสูง c หน่วย โดยที่ $a,b,c \in \mathbb{N}$ และ $a,b<c$ ซึ่ง $c^2=a^2+b^2$ และซ้อนกันจำนวน n กล่อง จะยาวเท่ากับ $\sqrt{n^2+1}\cdot c$ หน่วย

6. สรุปผลการดำเนินงาน

การจัดทำโครงงานคณิตศาสตร์ครั้งนี้ก่อให้เกิดความรู้ใหม่ในทฤษฎีบทเกี่ยวกับจำนวนพีทาโกรัส จำนวน 5 ทฤษฎีบท ดังนี้

1. กำหนดให้ $a,b,c \in \mathbb{N}$ และ $a,b<c$ ซึ่ง $c^2=a^2+b^2$ แล้ว $\frac{abc}{a+b+c} \in \mathbb{N}$ (ผลคูณของจำนวนพีทาโกรัสหารด้วยผลบวกของจำนวนพีทาโกรัสนั้นลงตัว)

2. สำหรับจำนวนพีทาโกรัส ถ้าผลคูณของจำนวนทั้งสามหารด้วยผลบวกของจำนวนทั้งสามเท่ากับ N แล้วผลคูณหารด้วยผลบวกของจำนวน ka,kb,kc เมื่อ $k \in \mathbb{R}$ จะเท่ากับ k^2N

3. สี่เท่าของปริมาตรของกล่องพีทาโกรัส หารด้วยผลรวมของความยาวด้านทั้งหมดลงตัว

4. เส้นทแยงมุมของกล่องพีทาโกรัสที่กว้าง a หน่วย ยาว b หน่วย และสูง c หน่วย ($a,b,c \in \mathbb{N}$ และ $a,b<c$ ซึ่ง $c^2=a^2+b^2$) จะยาวเท่ากับ $\sqrt{2}c$ หน่วย

5. เส้นทแยงมุมของกล่องพีทาโกรัสที่กว้าง a หน่วย ยาว b หน่วย และสูง c หน่วย ($a,b,c \in \mathbb{N}$ และ $a,b<c$ ซึ่ง $c^2=a^2+b^2$) และซ้อนกันจำนวน n กล่อง จะยาวเท่ากับ $\sqrt{n^2+1}\cdot c$ หน่วย

7. อภิปรายผลการดำเนินงาน

สำหรับการทำโครงงานคณิตศาสตร์ เรื่อง สมบัติบางประการของจำนวนพีทาโกรัสในครั้งนี้ ทางคณะผู้จัดทำได้ทำการศึกษารวมทั้งเข้าใจถึงจำนวนพีทาโกรัสและเนื้อหาทางคณิตศาสตร์อื่นที่เกี่ยวข้อง จากการสังเกตจำนวนพีทาโกรัสที่เป็นจำนวนนับจำนวน 50 ชุด โดยความอนุเคราะห์จากอาจารย์ที่ปรึกษา ทำให้คณะผู้จัดทำเล็งเห็นถึงสมบัติการหารลงตัวระหว่างผลคูณและผลบวกของจำนวนพีทาโกรัสทั้งสามจำนวน นับได้ว่าเป็นจุดเริ่มต้นของการศึกษาจำนวนพีทาโกรัสในโครงงานคณิตศาสตร์ครั้งนี้ จากการศึกษาพบว่าสมบัติการหารลงตัวดังกล่าวเกิดขึ้นเฉพาะกับจำนวนพีทาโกรัสที่เป็นจำนวนนับ ดังนั้น กลุ่มผู้จัดทำจึงกำหนดขอบเขตของโครงงานเฉพาะในจำนวนนับเท่านั้น โดยอาศัยบทนิยามและทฤษฎีบทที่มีมาก่อนหน้า (ทฤษฎีบท 1-4) ซึ่งเกี่ยวกับจำนวนคู่ จำนวนคี่ และพาริตี้ของจำนวน ทำให้สามารถพิสูจน์สมบัติของการหารลงตัวระหว่างผลคูณและผลบวกของจำนวนพีทาโกรัสทั้งสามจำนวนได้ดังทฤษฎีบท 5 ซึ่งนับได้ว่าเป็นบทหลักของการทำโครงงานครั้งนี้ ทฤษฎีบท 5 นี้เอง ที่เป็นเครื่องมือสำคัญที่ทำให้เกิดสมบัติของจำนวนพีทาโกรัสอื่นๆ ตามมา ได้แก่ สมบัติว่าด้วยการคูณจำนวนพีทาโกรัสชุดเดิมด้วยค่าคงที่ค่าหนึ่ง ซึ่งจะทำให้ผลหารระหว่างผลคูณและผลบวกของจำนวนพีทาโกรัสของจำนวนพีทาโกรัสชุดใหม่เป็นค่าคงที่กำลังสองของผลหารเดิม (ทฤษฎีบท 6) และโดยการอาศัยหลักคิดความเชื่อมโยงในทฤษฎีบท 5 ซึ่งคณะผู้จัดทำเทียบเคียงผลคูณของจำนวนพีทาโกรัสทั้งสามกับปริมาตรของกล่อง ซึ่งคำนวณได้จากสูตร “กว้าง x ยาว x สูง” และเทียบเคียงผลรวมของจำนวนพีทาโกรัสทั้งสามกับผลรวมของความยาวด้านของกล่อง จนสามารถขยายแนวคิดไปสู่กล่องพีทาโกรัส ซึ่งได้นิยามขึ้นมาใช้ในโครงงานนี้ โดยกล่องพีทาโกรัสนี้จะสร้างขึ้นจากจำนวนพีทาโกรัส โดยมีความกว้างและความยาวเท่ากับสองด้านที่สั้นสุด และความสูงเท่ากับด้านที่ยาวที่สุด และคณะผู้จัดทำก็ได้ค้นพบสมบัติหนึ่งเกี่ยวกับปริมาตรและผลรวมความยาวด้านทั้ง 12 ของกล่องพีทาโกรัส นั่นคือ สี่เท่าของปริมาตรของกล่องพีทาโกรัส หารด้วยผลวมของความยาวด้านทั้งหมดลงตัว (ทฤษฎีบท 7)

อนึ่ง เมื่อทำการสร้างกล่องพีทาโกรัสขึ้นมาแล้วทำให้คณะผู้จัดทำนึกถึงเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เส้นทแยงมุมของกล่อง ในชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น และจากการศึกษาทำให้พบสมบัติหนึ่งที่น่าสนใจ คือ สำหรับกล่องพีทาโกรัสแล้ว เส้นทแยงมุมของกล่องมีความยาวเท่ากับรากที่สองของสองคูณกับจำนวนพีทาโกรัสที่มากที่สุดในชุดนั้น (ทฤษฎีบท 8) และยังค้นพบอีกว่าเมื่อนำกล่องพีทาโกรัสที่สร้างจากจำนวนพีทาโกรัสชุดเดียวกันมาวางซ้อนกันในแนวตั้ง เส้นทแยงมุมของกล่องซึ่งคำนวณจากกล่องที่อยู่ล่างสุดไปถึงกล่องที่อยู่บนสุด มีความยาวเท่ากับรากที่สองของจำนวนกล่องกำลังสองบวกหนึ่ง คูณอยู่กับจำนวนพีทาโกรัสที่มากที่สุดในชุดนั้น (ทฤษฎีบท 9)

จะเห็นว่า กลุ่มผู้จัดทำได้ทำการศึกษาและค้นพบสมบัติหลายประการเกี่ยวกับจำนวนพีทาโกรัส ทั้งนี้เป็นเพราะกลุ่มผู้จัดทำได้มีการกำหนดขอบเขตของจำนวนที่ต้องการศึกษาอย่างชัดเจนโดยเจาะจงศึกษาจำนวนพีทาโกรัสที่เป็นจำนวนนับเท่านั้น และเมื่อได้ทฤษฎีบทหลักแล้วจึงนำทฤษฎีบทดังกล่าวมาเทียบเคียงกับเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ที่เคยเรียน จึงสามารถค้นพบและพิสูจน์สมบัติอื่นๆ ตามมาได้ ซึ่งเงื่อนไขสำคัญของความสำเร็จในการค้นพบ คือ การสังเกตจำนวน การเชื่อมโยง การตีความในหลากหลายรูปแบบ และการใช้

แนวคิดที่ว่า “ทฤษฎีบทหนึ่งๆ จะเป็นเครื่องมือในการสร้างทฤษฎีบทถัดๆ ไป” ด้วยเหตุนี้จึงเป็นเหตุที่ทำให้เกิดทฤษฎีบทเกี่ยวกับจำนวนพีทาโกรัส และเกิดความสำเร็จในการศึกษาโครงงานคณิตศาสตร์ครั้งนี้

8. แนวทางการนำไปใช้

1. แนวทางการนำผลหารลงตัวระหว่างผลคูณของจำนวนพีทาโกรัสกับผลบวกของจำนวนพีทาโกรัสทั้งสามไปใช้ คณะผู้จัดทำเล็งเห็นว่าสามารถนำไปใช้ในการกำหนดรหัส (Code) กำกับสิ่งต่างๆ ได้ เช่น กำหนดรหัสพี (P-Numbers) ซึ่งประกอบด้วยตัวเลข 10 หลัก ที่สร้างขึ้นจากจำนวนพีทาโกรัส โดยมีรูปแบบคือ Pxxxxxxxxxx หกหลักแรกแทนจำนวนพีทาโกรัสทั้งสาม เช่น หากสร้างจากจำนวนพีทาโกรัส 3, 4 และ 5 หกหลักแรกจะกำหนดเป็น 030405 หากสร้างจากจำนวนพีทาโกรัส 48, 55 และ 73 หกหลักแรกจะเป็น 485573 สำหรับสี่หลักสุดท้ายจะเป็นตัวเลขที่ทำหน้าที่ตรวจสอบความถูกต้องของรหัสหกหลักแรก โดยคำนวณจากผลหารระหว่างผลคูณกับผลบวกของจำนวนพีทาโกรัสทั้งสามที่นำมาสร้างรหัส ซึ่งจะเป็นจำนวนนับเสมอ (ผลจากทฤษฎีบท 5) ดังนั้น รหัสพีจากจำนวนพีทาโกรัส 3, 4 และ 5 คือ P0304050005 รหัสพีจากจำนวนพีทาโกรัส 48, 55 และ 73 คือ P4855731095 นอกจากนี้ยังสามารถนำทฤษฎีบท 6 มาสร้างรหัสพีโดยการคูณค่าคงที่เข้าไปได้ เช่น เดิมรหัสพี คือ P0304050005 เมื่อคูณค่าคงที่ ซึ่งคือ 7 เข้าไป จะได้ว่าหกหลักแรกจะเปลี่ยนเป็น 212835 และสี่หลักสุดท้ายจะกลายเป็น 0245 ($7^2 \times 5$) ดังนั้น รหัสพีชุดใหม่ คือ P212835 0245 เป็นต้น แนวคิดในการสร้างรหัสพีนี้เพื่อแก้ไขปัญหาของการใช้เลขมอดุโลในการตรวจสอบรหัสดังที่เคยมีมา เช่น เลขประจำตัวประชาชน 13 หลัก จะใช้หลักที่ 13 ในการตรวจสอบความถูกต้องของตัวเลข 12 หลักก่อนหน้า ซึ่งเมื่อใช้เลขมอดุโล (mod 10) จะทำให้หลักที่ 13 มีค่าตั้งแต่ 0-9 เท่านั้น และไม่นิยมใช้วิธีการอื่นๆ โดยเฉพาะการหาร เนื่องจากมีเศษที่เกิดขึ้นจากการหารเมื่อการหารนั้นไม่ลงตัว ซึ่งสามารถแก้ไขได้โดยใช้แนวคิดของรหัสพีดังกล่าว

2. แนวทางการนำไปใช้สำหรับแนวคิดและทฤษฎีเกี่ยวกับกล่องพีทาโกรัส สามารถใช้ในการคำนวณความยาวของเส้นทแยงมุมของกล่องได้โดยตรง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 ความยาวเส้นทแยงมุมของกล่องที่กว้าง 13 เซนติเมตร ยาว 84 เซนติเมตร และสูง 85 เซนติเมตร เท่ากับเท่าไร

แนวคิด เนื่องจาก 13, 84 และ 85 เป็นจำนวนพีทาโกรัส
โดยทฤษฎีบท 8 ความยาวของเส้นทแยงมุมของกล่อง เท่ากับ $85\sqrt{2}$ เซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 2 จะต้องซ้อนกล่องพีทาโกรัสกว้าง 13 เซนติเมตร ยาว 84 เซนติเมตร จำนวนกี่กล่อง จึงจะมีความยาวของเส้นทแยงมุมของกล่องที่ซ้อนกันทั้งหมดเท่ากับ $85\sqrt{226}$ เซนติเมตร

แนวคิด กล่องพีทาโกรัสที่กว้าง 13 เซนติเมตร และยาว 84 เซนติเมตร จะสูง 85 เซนติเมตร
โดยทฤษฎีบท 9 ความยาวของเส้นทแยงมุมของกล่องพีทาโกรัสที่ซ้อนกัน n กล่อง
คือ $d_n = \sqrt{n^2+1}\cdot c$

จึงได้ว่า

$$
\begin{aligned}
85\sqrt{226} &= \sqrt{n^2+1}\cdot 85 \\
\sqrt{226} &= \sqrt{n^2+1} \\
226 &= n^2+1 \\
n^2 &= 225 \\
n &= 15
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น ต้องซ้อนกล่องพีทาโกรัสกว้าง 13 เซนติเมตร ยาว 84 เซนติเมตร จำนวน 15 กล่อง จึงจะมีความยาวของเส้นทแยงมุมของกล่องที่ซ้อนกันทั้งหมดเท่ากับ $85\sqrt{226}$ เซนติเมตร

9. ข้อเสนอแนะสำหรับการนำผลการดำเนินงานไปใช้

การศึกษาเกี่ยวกับจำนวนนับสามจำนวนในครั้งนี้ เป็นจำนวนที่สอดคล้องกันตามจำนวนพีทาโกรัส ดังนั้น ในการนำผลจากทฤษฎีที่ได้ไปใช้จำนวนนับทั้งสามจะต้องสอดคล้องตามเงื่อนไขของจำนวนพีทาโกรัสเท่านั้น

10. ข้อเสนอแนะสำหรับการทำโครงงานครั้งต่อไป

1. การศึกษาครั้งนี้อยู่ในระยะเวลาที่จำกัดจึงควรทำการศึกษาต่อไปเกี่ยวกับการขยายขอบเขตการศึกษาไปสู่จำนวน $a,b,c,d \in \mathbb{N}$ ที่สอดคล้องกับ $d^2 = a^2+b^2+c^2$ ซึ่งอาจจะมีสมบัติที่คล้ายคลึงกับจำนวนทั้งสามที่ได้ทำการศึกษาในครั้งนี้

2. จำนวนที่นำมาศึกษาในครั้งนี้คือเซตของจำนวนนับ ควรมีการศึกษาจำนวน $a,b,c \in \mathbb{R}$ และ $a,b < c$ ซึ่งสอดคล้องกับ $c^2 = a^2+b^2$ ว่าจะมีสมบัติอื่นๆ ที่น่าสนใจอยู่หรือไม่

11. บทสรุปจากการทำโครงงาน

จากการที่กลุ่มผู้จัดทำสามารถเขียนรายงานการดำเนินโครงงานคณิตศาสตร์ชิ้นนี้มาถึงบรรทัดนี้ได้ อันดับแรกต้องกล่าวว่ามีความรู้สึกภูมิใจเป็นอย่างยิ่งที่สามารถทำการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ที่สังเกตได้จนเกิดเป็นทฤษฎีบท ในการทำโครงงานครั้งนี้เกิดความย่อท้ออันเนื่องมาจากการที่ต้องคิดหาเหตุผลมาใช้ในการพิสูจน์อย่างหนัก แต่สุดท้ายเราก็ค้นพบว่าเราได้อะไรจากโครงงานนี้ ความงดงามทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งแรกที่กลุ่มของผู้จัดทำรู้สึกประหลาดใจ กลุ่มผู้จัดทำไม่เคยคิดมาก่อนว่าจะสามารถนำความรู้ที่เรียนจากโครงการห้องเรียนพิเศษวิทยาศาสตร์ เรื่อง ตรรกศาสตร์และการพิสูจน์มาใช้ได้อย่างไร จนกระทั่งเมื่อทำโครงงานนี้ ซึ่งทำให้เห็นว่าการเรียนคณิตศาสตร์ไม่ใช่แค่การเรียนให้ได้เนื้อหามากที่สุด แต่น่าจะเป็นการเรียนให้เข้าใจคณิตศาสตร์ให้มากที่สุด สุดท้ายนี้กลุ่มของผู้จัดทำหวังว่าแนวทางที่ได้แสดงไว้ในการทำโครงงานนี้จะเป็นจุดเริ่มต้นและเป็นแรงบันดาลใจสำหรับนักเรียนที่รักในคณิตศาสตร์ได้ใช้ในการแสวงหาความรู้ด้วยตนเองต่อไป

12. เอกสารอ้างอิง

คณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน. (2551). **หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551**. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.

โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน. (2552). **ทฤษฎีจำนวน**. กรุงเทพฯ : ด่านสุทธาการพิมพ์.

โครงการส่งเสริมอัจริยภาพคณิตศาสตร์สำหรับเด็ก. (2552). **ทฤษฎีจำนวน**. กรุงเทพฯ: องค์การค้า สกสค.

ดำรง ทิพย์โยธา. (2551). **คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 32 เสริมความรู้มุ่งสู่โอลิมปิกคณิตศาสตร์โลกเรขาคณิต**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ธิดาสิริ ภัทรากาญจน์. (2547). **คณิตคิดรื่นรมย์ สมความอยากรู้อยากเห็น**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

_________________. (2548). **คณิตคิดสนุก คณิตศาสตร์รอบตัวเรา**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

พัฒนี อุดมกะวานิช. (2555). **หลักคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2550). **พจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์**.กรุงเทพฯ: ราชบัณฑิตยสถาน.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2554). **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2**. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

___________________________________. (2554). **หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2**. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

___________________________________. (2554). **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1**. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

___________________________________. (2556). **เอกสารเสริมความรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ตรรกศาสตร์เบื้องต้นและวิธีการพิสูจน์**. กรุงเทพฯ : ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง.

สมัย เหล่าวานิชย์. (2545). **คู่มือเตรียมสอบคณิตศาสตร์ ม.4-5-6 สาระการเรียนรู้พื้นฐาน**. กรุงเทพฯ :ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง.