

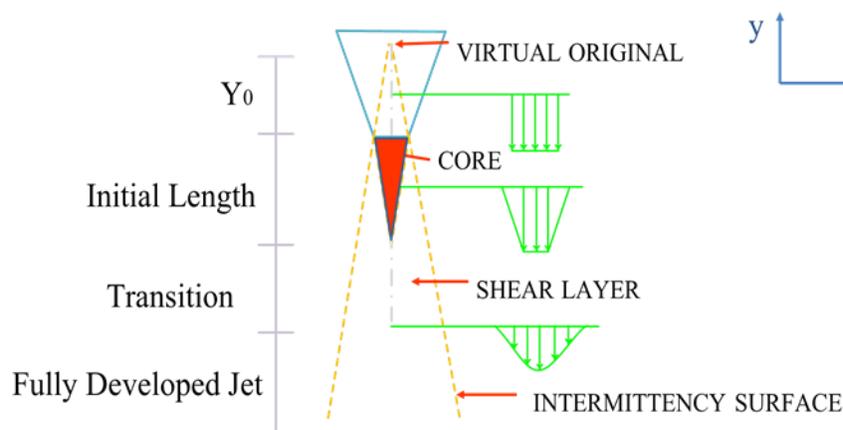
บทที่ 3

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

3.1 ทฤษฎีเจ็ท

3.1.1 โครงสร้างและการพัฒนาของเจ็ทอิสระ

เจ็ทอิสระ (Free jet) คือมวลของของไหลที่ถูกอัดฉีดเข้าไปในสภาพแวดล้อมขนาดใหญ่ของของไหลรอบนอก โครงสร้างของกระแสถูกศึกษาค้นคว้าโดยนักวิจัยจำนวนมาก ซึ่งสามารถบ่งชี้ลักษณะของเจ็ทออกเป็น 4 บริเวณ โดยแบ่งตามความเกี่ยวเนื่องกับความเร็วของของไหลที่ศูนย์กลาง ดังแสดงในรูปที่ 3.1 [19]



รูปที่ 3.1 ลักษณะกระแสการไหลของของเหลวที่ออกจากหัวฉีดพ่น

ลักษณะของของไหลในแต่ละบริเวณสามารถอธิบายได้ ดังนี้

บริเวณที่ 1: บริเวณที่กระแสลู่เข้า (The convergent zone) บริเวณนี้เรียกว่าแกนหลัก (Potential Core) ของเจ็ท ความเร็วที่เส้นแกนกลางมีค่าเท่ากับความเร็วที่ออกมาจากหัวฉีด บริเวณนี้อยู่ในช่วงระยะ $4D_j$ ถึง $6D_j$ นับจากปลายหัวฉีด

บริเวณที่ 2: บริเวณเปลี่ยนแปลง (The transition zone) เจ็ทพยายามสร้างรูปร่างการไหลเป็นวงกลม เป็นบริเวณที่ความเร็วเส้นแกนกลางเริ่มเสื่อมและลดลง ความเร็วที่ลดลงนั้นสามารถประมาณค่าเป็นฟังก์ชันแปรผกผันตรงกับ $x^{-0.5}$ โดย x คือระยะห่างจากปลายหัวฉีดในแนวเส้นแกนกลาง บริเวณนี้เกิดขึ้น

ในช่วงระยะ $6D_j$ ถึง $20D_j$ และทราบกันว่าเป็นบริเวณที่เกิดปฏิกิริยาการผสมเมื่อชั้นความเค้นจากทั้งสองด้านเริ่มบรรจบกัน

บริเวณที่ 3: บริเวณจำลองตัวเอง (The self similar zone) ในบริเวณนี้รูปร่างของความเร็วที่เส้นแกนกลางมีลักษณะคล้ายๆ กันในทุกๆ จุดบนระยะ x และความเร็วที่เส้นแกนกลางจะลดลงเป็นฟังก์ชันแปรผันตรงกับ x^{-1}

บริเวณที่ 4: บริเวณสลายตัว (The termination zone) ความเร็วที่เส้นแกนกลางของเจ็ทจะลดลงอย่างรวดเร็วในบริเวณนี้ ถึงแม้ว่ามีการศึกษาพฤติกรรมของของไหลในบริเวณนี้โดยนักวิจัยจำนวนมาก แต่กลไกของพฤติกรรมของของไหลในบริเวณนี้ยังคงไม่เป็นที่เข้าใจอย่างแท้จริง

ในบริเวณที่ 2 กระแสเจ็ทที่ถูกฉีดออกมาจะมีพฤติกรรมในการสร้างรูปร่างการไหลเป็นวงกลม ความสัมพันธ์ของความเร็วเส้นแกนกลางของเจ็ทกับความเร็วเริ่มต้นสามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\frac{\bar{U}_x}{\bar{U}_0} = K \frac{\sqrt{A_0}}{x} \quad (3.1)$$

หรือ

$$\bar{U}_x = \frac{K \bar{Q}_0}{\sqrt{A_0 x}} \quad (3.2)$$

เมื่อ \bar{U}_x = ความเร็วที่เส้นศูนย์กลางของกระแสเจ็ทที่ระยะ x ใดๆ, (m/s)

\bar{U}_0 = ความเร็วเริ่มต้นที่ช่องจ่ายของไหล, (m/s)

A_0 = พื้นที่หน้าตัดของช่องจ่ายของไหล, (m^2)

x = ระยะห่างระหว่างช่องจ่ายอากาศถึงจุดสังเกต, (m)

\bar{Q}_0 = อัตราการไหลของของไหลที่จุดจ่าย, (m^3)

K = ค่าคงที่ตามสัดส่วน

ในสองบริเวณแรกของเจ็ทอิสระในแนวแกนนั้น ได้รับผลกระทบจากตัวกระจาย (Diffuser) อย่างรุนแรง บริเวณที่ 3 คือเจ็ทที่พัฒนาแล้ว (The developed jet) และบริเวณที่ 4 คือบริเวณที่เจ็ทถูกทำลาย (Jet termination) ในสามบริเวณแรก ของไหลรอบเจ็ทถูกเหนี่ยวนำเข้ามาในกระแสหลักและผสมกันกับของไหลหลัก ในบริเวณที่ 4 เจ็ทสลายตัวจากภายในขอบและของไหลหลักกระจายออกสู่สภาพแวดล้อมในขณะที่กระแสของเจ็ทเสื่อมและสลายไป

เจ็ทขยายออกเนื่องจากการดึงของไหลรอบนอกเจ็ทมาผสม ของไหลเหนือบริเวณที่ 2 ถูกเหนี่ยวนำมาผสมกับของไหลปฐมภูมิ อัตราส่วนของปริมาตรสุทธิของกระแสเจ็ทต่อปริมาตรเริ่มต้นที่ระยะ

ใดๆจากปลายหัวฉีดหลักๆ แล้วขึ้นอยู่กับอัตราส่วนของความเร็วเริ่มต้น \bar{U}_0 ต่อความเร็วปลายทาง \bar{U}_x อัตราการเหนี่ยวนำ (Inducing ratio) คือ

$$\frac{\dot{Q}_x}{\dot{Q}_0} = C \frac{\bar{U}_0}{\bar{U}_x} \quad (3.3)$$

เมื่อ \dot{Q}_x = ของไหลผสมสุทธิที่ระยะ x จากหัวฉีด, (m/s^2)

C = สัมประสิทธิ์ความเหนี่ยวนำ (มีค่าเท่ากับ 2 สำหรับกระแสอิสระแบบหน้าตัดกลม)

ในกระบวนการทางวิศวกรรมส่วนมากนั้น ความรู้ความเข้าใจในสามบริเวณแรกก็เพียงพอแล้ว เพราะความแตกต่างของความเร็วที่พื้นผิวของช่วงที่ไม่ต่อเนื่องระหว่างเจ็ทและสภาวะแวดล้อมมีมาก อันทำให้เกิดกระแสไหลวน (Eddy) ซึ่งทำให้เกิดการผสมกันระหว่างของไหลหลักกับของไหลรอบนอกบริเวณด้านข้าง การผสมกันนี้ทำให้ของไหลภายในเจ็ทมีความเร็วลดลง ในขณะที่เดียวกันทำให้ของไหลรอบนอกเจ็ทมีความเร็วเพิ่มขึ้น และในความเป็นจริงนั้น ของไหลรอบนอกถูกเหนี่ยวนำเข้าสู่กระแสเจ็ท ซึ่งผลที่ตามมาคือความกว้างของเจ็ทเพิ่มขึ้นนั่นเอง

3.1.2 องค์ประกอบที่มีผลต่อการกระจายของเจ็ท

องค์ประกอบหลากหลายที่ส่งผลต่อการกระจายตัวของเจ็ท เช่น รูปแบบของความเร็วเจ็ท ณ ปลายหัวฉีด, รูปทรงของหัวฉีด, เลขเรย์โนลด์ของเจ็ท และอุณหภูมิของเจ็ทที่หัวฉีด ล้วนส่งผลกระทบต่อการกระจายตัวของเจ็ท องค์ประกอบและปรากฏการณ์ที่ส่งผลต่อการกระจายตัวของเจ็ทสามารถอธิบายอย่างง่ายในหัวข้อต่อไปนี้

3.1.2.1 รูปแบบของความเร็วเจ็ท ณ ปลายหัวฉีด (Inlet Velocity Profile)

สภาวะเริ่มต้นของเจ็ทส่งผลกระทบต่อการก่อตัวในกระแสการไหล รูปแบบของการไหลที่ปลายหัวฉีดโดยทั่วไปสามารถแบ่งออกเป็น 4 รูปแบบ คือ แบบราบเรียบ (Laminar), เสมือนราบเรียบ (Nominally laminar), ถูกรบกวนอย่างมาก (Highly disturbed) และ ปั่นป่วนอย่างสมบูรณ์ (Fully turbulent) กรณีการไหลแบบราบเรียบ ชั้นความเค้นมีรูปแบบแบบบลาสเซียส (Blasius's profile) ชั้นความเค้นที่ไม่มั่นคงเหนี่ยวนำให้เกิดความผันผวนขึ้น โดยความผันผวนนี้มีค่ามากที่สุดที่บริเวณขอบของเจ็ท การกำหนดค่าพารามิเตอร์ที่ปลายหัวฉีดในสภาวะต่างๆ สามารถกำหนดได้เป็น

- ค่าความหนาของการกระจัด (Displacement thickness), δ , คือระยะทางที่พื้นผิวของรูปแบบการไหลต้องเคลื่อนที่ไปในทิศตั้งฉากกับเวกเตอร์ปกติ จากระนาบอ้างอิงในกระแสของไหลไร้ความหนืดที่มีความเร็วเริ่มต้น \bar{U}_0 เพื่อให้อัตราการไหลคงเดิมดังที่เกิดขึ้นระหว่างพื้นผิวกับระนาบอ้างอิงในของไหลจริง

- ค่าความหนาโมเมนตัม (Momentum thickness), θ คือระยะทางที่พื้นผิวของรูปแบบการไหลต้องเคลื่อนที่ไปในทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ของระนาบอ้างอิง เพื่อให้ผลรวมของโมเมนตัมมีค่าคงเดิม (จากกฎอนุรักษ์โมเมนตัม)

พารามิเตอร์ดังกล่าวสามารถกำหนดค่าได้จากสมการต่อไปนี้

ความหนาของชั้นขอบเขต

$$\delta = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\bar{u}}{\bar{u}_0}\right) dy \quad (3.4)$$

ความหนาโมเมนตัม

$$\theta = \int_0^\infty \frac{\bar{u}}{\bar{u}_0} \left(1 - \frac{\bar{u}}{\bar{u}_0}\right) dy \quad (3.5)$$

สัดส่วนรูปร่าง (Shape factor)

$$H = \frac{\delta}{\theta} \quad (3.6)$$

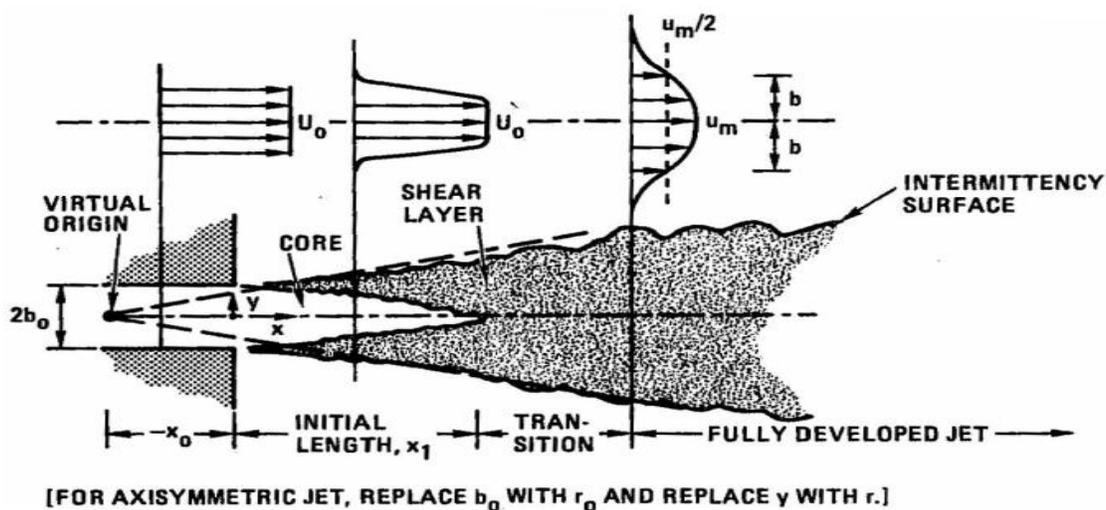
ค่าของสัดส่วนรูปร่างของสภาวะชั้นขอบเขตแบบราบเรียบ (Laminar boundary layer condition) ที่ปลายหัวฉีดมีค่าเป็น 2.5 และสำหรับสภาวะชั้นขอบเขตแบบปั่นป่วนสมบูรณ์ (Fully developed turbulent boundary layer condition) มีค่าเป็น 1.4 ค่าที่อยู่ระหว่างช่วงนี้หมายถึงชั้นขอบเขตเปลี่ยนแปลงไปตามธรรมชาติ

3.1.2.2 รูปทรงของหัวฉีด (Nozzle Geometry)

ลักษณะของกระแสเจ็ทได้รับผลกระทบอย่างมากจากรูปทรงของหัวฉีด และรูปแบบของผนังที่ล้อมรอบเจ็ท ฟังก์ชันค่าเฉลี่ยของความเร็วที่แกนกลางของเจ็ทแบบวงกลมกับแบบแผ่นนั้นต่างกัน โดยที่ฟังก์ชันของแบบวงกลมแปรผันตรงกับ x^{-1} ในขณะที่แบบแผ่นแปรผันตรงกับ $x^{0.5}$ ลักษณะเฉพาะของการเปลี่ยนแปลงของเจ็ทขึ้นอยู่กับลักษณะภาพตัดขวางของหัวฉีดด้วยเช่นเดียวกัน โดยเฉพาะอย่างยิ่งในหัวฉีดรูปทรงสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีอัตราส่วนความกว้างต่อยาวสูง รูปทรงชนิดนี้ก่อให้เกิดปรากฏการณ์การสับเปลี่ยนแกน ในขณะที่เกิดปรากฏการณ์นี้ มวลในแกนหลักและแกนรองจะสลับเปลี่ยนกันไปตลอดระยะแนวเส้นแกนกลาง สิ่งนี้เกิดขึ้นเนื่องจากอัตราการกระจายตัวที่แตกต่างกันของเจ็ทบริเวณด้านข้างทั้ง 2 ด้าน ซึ่งจะไม่เกิดในหัวฉีดแบบวงกลม รูปทรงของหัวฉีดมีผลอย่างมากในการนิยามรูปแบบของความเร็วเริ่มต้นของเจ็ท ออริฟิซ (Orifice) แบบขอบคมทำให้เกิดรูปแบบความเร็วเริ่มต้นแบบอานม้า (Saddle-backed profile) ในขณะที่รูปแบบแบบหมวกทรงสูง (Top hat profile) ได้จากหัวฉีดที่ขอบเรียบลื่น เป็นต้น

3.1.2.3 ครึ่งความกว้างและจุดกำเนิดเสมือนของเจ็ท (Half Width and Virtual Origin of the Jet)

ครึ่งหนึ่งของความกว้างของเจ็ทในแนวแกนตำแหน่งใดๆนิยามได้เป็น ระยะห่างระหว่างเส้นแกนกลางและระนาบทแยง โดยระนาบทแยงนี้คือระนาบที่ค่าเฉลี่ยของความเร็วตามแนวความกว้างที่ระยะนั้นมีค่าเป็นครึ่งหนึ่งของความเร็วแนวเส้นแกนกลาง ครึ่งความกว้างนี้โดยปกติจะเพิ่มขึ้นด้วยฟังก์ชันเชิงเส้นตลอดระยะ x ยกเว้นในกรณีที่มีบริเวณที่เกิดปรากฏการณ์การสลับแกนขึ้น ความชันของฟังก์ชันเชิงเส้นในทิศทางตามแนวแกนกลางเรียกว่าอัตราส่วนการกระจายตัว (Spread rate) ส่วนใหญ่แล้วค่าอัตราส่วนการกระจายตัวของเจ็ทแบบปั่นป่วนที่มีเลขเรย์โนลด์สูงๆ คือ 0.11 (ทำมุม 6 องศา กับแนวแกน) ในขณะที่เจ็ทแบบราบเรียบมีค่าอัตราส่วนการกระจายตัวประมาณ 0.4 (ทำมุม 21 องศา กับแนวแกน) จุดกำเนิดเสมือนของเจ็ทคือจุดที่เป็นเสมือนจุดกำเนิด (จุดยอด) ของรูปกรวยของเจ็ท ดังแสดงในรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 ตำแหน่งของจุดกำเนิดเสมือนและระยะครึ่งความกว้าง

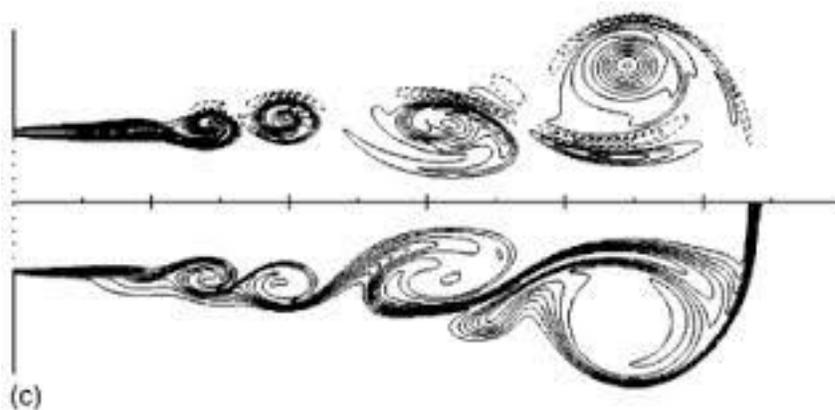
จุดกำเนิดเสมือนนี้ในบางครั้งอาจแตกต่างกับจุดกำเนิดตามรูปทรงเรขาคณิตและอาจอยู่ภายนอกหัวฉีดก็เป็นได้ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับรูปแบบของความเร็วของของไหลที่ปลายหัวฉีด จุดกำเนิดเสมือนนี้เกี่ยวข้องกับครึ่งความกว้างตามสมการต่อไปนี้

$$\frac{b_u}{D_j} = K_{2u} \left(\frac{x}{D_j} \pm C_{2u} \right) \quad (3.7)$$

- เมื่อ C_{2u} = จุดกำเนิดเสมือน (Virtual origin)
 K_{2u} = อัตราส่วนการกระจายตัว (Spread ratio)
 b_u = ครึ่งความกว้างของเจ็ท (Jet half width)
 D_j = เส้นผ่าศูนย์กลางหัวฉีด (Nozzle diameter), (mm)
 x = ระยะห่างจากปลายหัวฉีด, (mm)

3.1.2.4 ความไม่เสถียรของเจ็ท (Jet Instability)

เจ็ทที่ถูกอัดฉีดจากหัวฉีดนั้นมีการแกว่งของชั้นความเค้นขึ้นในกระแส โดยการแกว่งนี้ขึ้นอยู่กับรูปแบบความเร็วเริ่มต้นของของไหลในบริเวณเหนือขึ้นไปจากระยะตามแนวแกนทั่วไป การแกว่งเหล่านี้จะม้วนตัวและสร้างกระแสมุขวนวนซึ่งมีขนาดและความแข็งแรงเพิ่มขึ้นตามระยะในแนวแกน กระแสมุขวนวนเหล่านี้จะส่งผลกระทบต่อการเหนี่ยวนำของไหลภายนอกเจ็ทมาสมต่อของไหลหลักในเจ็ท ปฏิกริยาของกระแสมุขวนวนเหล่านี้มีผลยังให้การเปลี่ยนแปลงของกระแสไปเป็นแบบปั่นป่วน การศึกษาภาพการไหลของกระแสนั้นแสดงให้เห็นว่ามีความแตกต่างแบบตายตัวระหว่างการสร้างกระแสบวมกลมและกระแสแบบไม่เป็นวงกลม การเกิดขึ้นของกระแสมุขวนวนในชั้นความเค้นและการเปลี่ยนแปลงยิ่งยวดของกระแสราบเรียบไปเป็นกระแสบวมแสดงได้ดังรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 ความปั่นป่วนในเจ็ท

3.1.2.5 ความต่อเนื่องของโครงสร้าง (Coherent Structures)

โครงสร้างต่อเนื่องนิยามได้ตามมวลของของไหลแบบปั่นป่วนขนาดใหญ่ที่เชื่อมต่อกัน ร่วมกับกระแสมุขวนวนร่วมกันตลอดขอบเขตความยาว นั่นคือ ภายใต้ความผันผวนของกระแสมุขวนวนแบบปั่นป่วนทั้ง 3 แกนนั้น มีการจัดวางส่วนประกอบของการหมุนวนซึ่งมีสภาวะร่วมกัน

(Coherent) ตลอดทั้งโครงสร้าง การสร้างโครงสร้างต่อเนื่องในเจ็ทนั้นขึ้นอยู่กับเงื่อนไขสถานะเริ่มต้น ดังนั้น การควบคุมจึงสามารถทำได้ ความถี่ของรูปแบบการหมุนวนในโครงสร้างนี้สามารถคำนวณได้ และสามารถควบคุมได้โดยการใช้การกระตุ้นด้วยคลื่นเสียง (Acoustic excitation) การกระตุ้นมูลฐานนี้ทำให้กระแสเปลี่ยนรูปไปในทางที่ทำให้กลไกการไหลแบบละเอียดถูกทำลายไป การไหลปั่นป่วนค่อยๆเสื่อมสลายลงตามระยะทางเนื่องด้วยการกระจายความหนืด ทำให้โครงสร้างต่อเนื่องนี้เพิ่มขึ้นและกระจายออก โครงสร้างเหล่านี้เริ่มก่อตัวขึ้นที่ชั้นความเค้นที่ไม่เสถียรอย่างมากบริเวณปากหัวฉีด จากนั้นจะเติบโตขึ้นโดยการรวมตัวกับของไหลรอบนอกจนถึงระยะ 20 เท่าของเส้นผ่าศูนย์กลางหัวฉีดในกระแสเจ็ท จากนั้นโครงสร้างเกิดการรวมตัวกันและสร้างเป็นโครงสร้างที่ใหญ่ขึ้น ดังนั้น แม้ในระยะที่ห่างจากปลายหัวฉีดมากๆ โครงสร้างเหล่านี้ก็ยังคงมีและสามารถระบุได้อยู่

3.1.2.6 การกระจายตัวแบบอุณหภูมิคงที่และไม่คงที่ (Isothermal and Non-isothermal Jet)

เจ็ทที่มีอุณหภูมิสม่ำเสมอ (isothermal jet) คือกระแสเจ็ทซึ่งของไหลภายในเจ็ทและของไหลรอบๆมีอุณหภูมิเหมือนกัน ในอีกกรณีหนึ่ง เจ็ทที่อุณหภูมิไม่สม่ำเสมอ (Non-isothermal jet) คือเจ็ทที่มีอุณหภูมิของของไหลหลักที่ออกจากปลายหัวฉีดกับอุณหภูมิของของไหลในสถานะแวดล้อมไม่เท่ากัน เจ็ทที่มีอุณหภูมิไม่สม่ำเสมออาจลอยตัวขึ้นหรือไม่ก็ได้ ขึ้นอยู่กับอุณหภูมิเฉลี่ยของเจ็ทเทียบกับอุณหภูมิสถานะแวดล้อมและปัจจัยอื่นๆ เมื่อคาร์บอเนตสันนิษฐานว่ามีค่าน้อยมากๆ อุณหภูมิของของไหลมีหน้าที่เป็นปริมาณสเกลาร์พื้นฐานและผลกระทบจากแรงลอยตัวมีผลมากในกรณีนี้ พลศาสตร์ความไม่คงที่และการเกิดการปั่นป่วนถูกพิจารณาในอีกรูปแบบหนึ่งในกรณีของการไหลที่มีอุณหภูมิไม่คงที่นี้

3.1.2.7 การจำลองตัวเอง (Self Similarity)

การอนุรักษ์ตัวเองหรือจำลองตัวเองนั้น กล่าวกันว่าเกิดขึ้นเมื่อรูปแบบของความเร็วของการไหล (หรือปริมาณอื่นใด) สามารถทำให้สอดคล้องกันได้โดยมาตราส่วนอย่างง่าย ซึ่งขึ้นอยู่กับ การเปลี่ยนแปลงลักษณะตามพิกัดเพียงพิกัดเดียว ผลที่ตามมาจากการอนุรักษ์นี้ คือสมการควบคุมของกระแสเจ็ทสามารถลดรูปลงได้ หรือพูดในอีกรูปแบบหนึ่งก็คือ กระแสนุรักษ์เกิดขึ้นถ้ามีสมการที่เป็นผลคำตอบต่อสมการพลศาสตร์และเงื่อนไขขอบของของไหลนั้นๆ ซึ่งตลอดการเปลี่ยนแปลงของกระแส พจน์ทุกพจน์มีค่าที่เกี่ยวข้องกันที่จุดซึ่งสัมพันธ์กัน ดังนั้น การอนุรักษ์นี้จึงเป็นการบอกว่า กระแสนี้ได้ไปถึงจุดที่สมดุลซึ่งค่าและผลกระทบทางพลศาสตร์ได้เปลี่ยนแปลงไปด้วยกัน และไม่จำเป็นต้องคำนวณทางองค์ประกอบทางพลศาสตร์อื่นซึ่งส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงรูปแบบของความเร็วเพียงเล็กน้อย ดังนั้นกระแสเจ็ทอนุรักษ์ คือสถานะตามแนวเส้นซึ่งกระแสได้ถึงจุดที่โมเลกุลจัดเรียงตัวกันเรียบร้อยแล้ว สถานะของกระแสอนุรักษ์มีหลายชนิดที่เป็นไปได้ อาทิเช่น 1) กระแสสามารถอนุรักษ์ตัวเองได้โดยสมบูรณ์ในทุกลำดับชั้นของช่วงที่มีการไหลแบบปั่นป่วน และทุกขนาดของการเคลื่อนที่และ

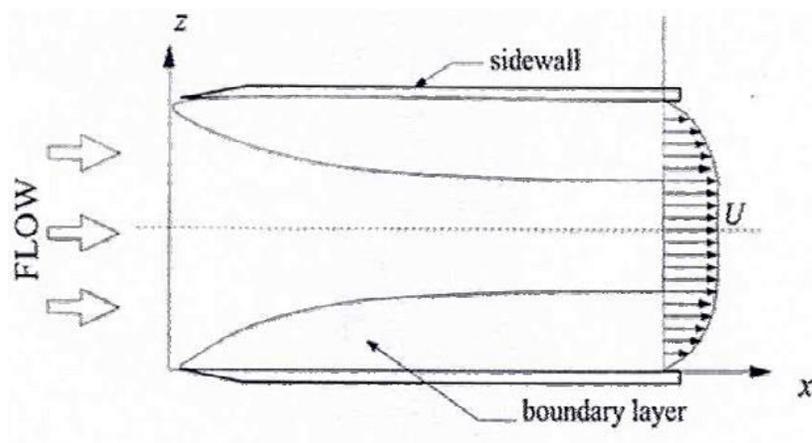
2) กระแสสามารถอนุรักษ์ตัวเองได้บางบริเวณ เพื่อให้เป็นไปตามกฎอนุรักษ์โมเมนตัมหรือขึ้นอยู่กับความหนาแน่นของลำดับในการไหลแบบปั่นป่วนหรือในมาตราส่วน ยกตัวอย่างเช่น สมการทั่วไปที่อธิบายกระแสเจ็ทที่ถึงจุดอนุรักษ์สำหรับความเร็วเฉลี่ยคือ

$$\frac{U}{U_c} = f\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (3.8)$$

สมการนี้อธิบายได้ว่า ค่าอัตราส่วนระหว่างความเร็วใดๆและความเร็วที่แกนกลางของระนาบทแยงจะเป็นฟังก์ชันของระยะตามแนวแกน y ต่อค่าความหนาของการกระจัดในแนวระนาบนั้นๆ

3.1.2.8 บทบาทของผนังด้านข้างต่อกระแสเจ็ท (Role of Side Walls in Jet Flow)

ผนังที่ถูกวางในระนาบขนานกับระนาบ x - y จะบีบและเปลี่ยนพฤติกรรมของการขยายตัวในสองมิติของเจ็ทโดยการป้องกันการเกิดการเหนี่ยวนำจากทางด้านข้าง ถึงแม้ว่าการบีบอัดในบริเวณใกล้เคียง ชั้นขอบเขตก็เริ่มเติบโตขึ้นที่บริเวณผนังด้านข้าง ดังนั้น การก่อตัวขึ้นของกระแสจะแตกต่างกันสำหรับเจ็ทระนาบที่ถูกฉีดผ่านหัวฉีดทรงสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งมีผนังด้านข้างและไม่มีผนัง และถึงแม้ว่าการมีอยู่ของผนังสามารถยืดขอบเขตสองมิติ การเกิดชั้นขอบเขตที่ผนังด้านข้างนั้นก็เป็นสิ่งสำคัญที่ต้องพิจารณา ซึ่งจะส่งผลกระทบต่อ การเปลี่ยนแปลงของเจ็ทในพื้นที่ที่ห่างออกไป ดังแสดงในรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 พฤติกรรมของรูปแบบความเร็วของเจ็ทเมื่อมีผนังด้านข้าง

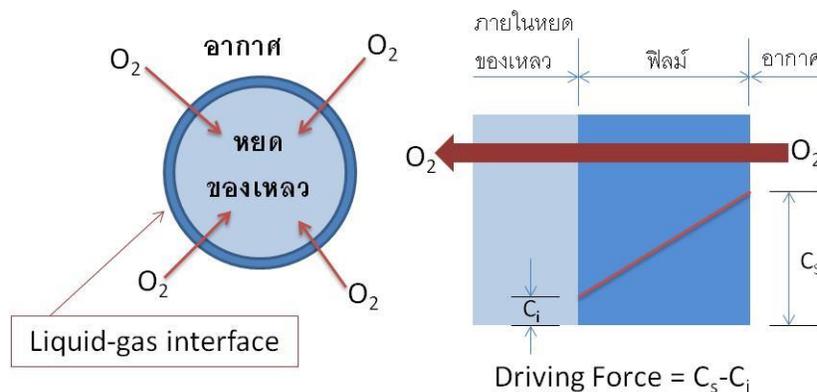
3.1.2.9 มาตรฐานความยาวของความปั่นป่วน (Turbulent Length Scales)

กระแสแบบปั่นป่วนประกอบด้วยกระแสวน (Eddy flow) ในหลายๆ ขนาดต่างๆ กัน พลังงานจลน์ของกระแสหลักถูกถ่ายทอดไปเป็นการเกิดขึ้นของกระแสวนที่ส่วนที่ใหญ่ที่สุดของการเคลื่อนที่ พลังงานในส่วนนี้ได้ถูกส่งผ่านไปยังมาตราส่วนที่เล็กกว่าและเล็กลงเรื่อยๆ ตลอดขั้นตอนการ

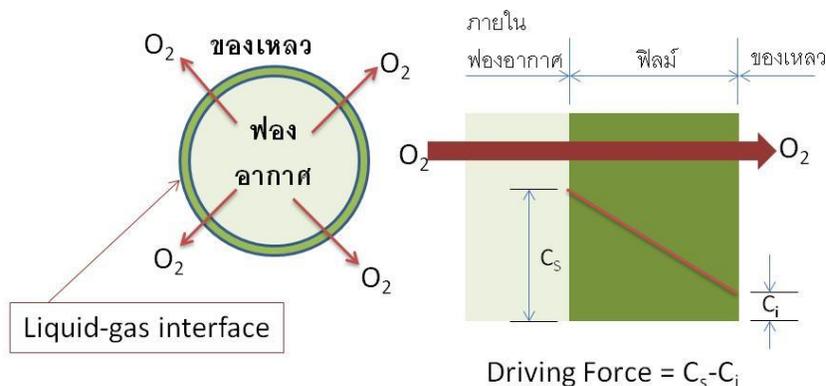
ไหลไร้ความหนืด เรียกว่าการยืดตัวของกระแสม่วนวน (Vortex stretching) ที่มาตราส่วนที่เล็กที่สุดนั้น พลังงานจลน์ของกระแสนี้ค่อยๆ น้อยลงจนหายไปซึ่งเป็นผลมาจากความหนืด ในมาตราส่วนขนาดใหญ่ ส่วนมากเป็นแบบไม่เท่ากันในทุกทิศทาง (Non-isotropic) และมีแนวโน้มไปในทิศทางใดทิศทางหนึ่งมากกว่า อย่างไรก็ตาม สำหรับกระแสบ่บ่วนหลายชนิด มาตราส่วนการเคลื่อนที่โดยละเอียดเป็นไปแบบเท่ากันทุกทิศทาง (Isotropic) ค่าเฉลี่ยของขนาดของกระแสนี้เรียกว่าผลรวมมาตราส่วนความยาวขนาดของกระแสนี้เล็กที่สุดซึ่งค่อยๆ สลายไปนั้นเรียกว่า มาตราส่วนคอลโมโกรอฟ (Kolmogorov scale)

3.2 ทฤษฎีการเติมอากาศและการถ่ายเทมวลระหว่างฟองอากาศและน้ำ

การถ่ายเทออกซิเจนจากอากาศให้กับน้ำเกิดขึ้นได้ 2 วิธี คือ ออกซิเจนถ่ายเทจากอากาศให้กับหยดน้ำขนาดเล็กที่เกิดจากการตีน้ำของเครื่องเติมอากาศ และออกซิเจนถ่ายเทจากฟองอากาศให้กับน้ำที่ห่อหุ้ม ดังแสดงในรูปที่ 3.5 และ 3.6 ตามลำดับ [18]



รูปที่ 3.5 การถ่ายเทออกซิเจนจากอากาศสู่หยดน้ำ



รูปที่ 3.6 การถ่ายเทออกซิเจนจากฟองอากาศสู่ของเหลวที่ห่อหุ้ม

การเติมอากาศหรือออกซิเจนให้กับน้ำทั้งสองวิธีขึ้นอยู่กับปัจจัยต่อไปนี้

- ขนาดของหยดน้ำหรือฟองอากาศเนื่องจากการถ่ายเทออกซิเจนเกิดขึ้นผ่านผิวสัมผัสระหว่างน้ำกับอากาศ การทำให้หยดน้ำหรือฟองอากาศมีขนาดเล็กจึงเป็นการเพิ่มพื้นที่ผิวสัมผัส
- ปริมาณความเข้มข้นของออกซิเจนในอากาศซึ่งแสดงรูปความดันย่อยของออกซิเจน (Partial pressure of oxygen)
- เวลาที่ใช้ในการสัมผัสระหว่างน้ำกับอากาศ
- แรงสนับสนุนให้เกิดการถ่ายเทออกซิเจน นั่นคือ ผลต่างระหว่างออกซิเจนอิ่มตัวและออกซิเจนละลายในน้ำที่มีอยู่ในขณะทำการเติมอากาศ

3.2.1 หลักการคำนวณมวลสารที่ถูกถ่ายเท

จากการถ่ายเทของออกซิเจนลงไปใต้น้ำ สามารถเขียนได้ในรูปสมการดังนี้

$$r_m = K_G A (C_S - C) \quad (3.9)$$

เมื่อ r_m = อัตราของการถ่ายเทมวลสาร, (kg/day)

K_G = ค่าสัมประสิทธิ์ในการกระจายของก๊าซ, (kg/(day.m².(mm/l)))

A = พื้นที่ผิวที่ก๊าซได้กระจาย, (m²)

C_S = ความเข้มข้นอิ่มตัวของก๊าซในสารละลาย, (mg/l)

C = ความเข้มข้นของสารในสารละลาย, (mg/l)

จากสมการ (3.9) สมการเขียนใหม่ได้ในรูปสมการดังนี้

$$r_m = V \frac{dC}{dt} = K_G A (C_S - C) \quad (3.10a)$$

เมื่อ V = ปริมาตรของสารละลาย, (l)

เพราะฉะนั้น

$$\frac{dC}{dt} = K_G \frac{A}{V} (C_S - C) \quad (3.10b)$$

ในทางปฏิบัติค่า A เป็นค่าที่หาได้ยาก ดังนั้นจึงรวมตัวแปร A และ V เป็นตัวแปรใหม่คือ a โดยที่ $a = \frac{A}{V}$ และพิจารณา K_G เป็นค่าสัมประสิทธิ์ในการถ่ายเทก๊าซผ่านชั้นฟิล์มของของเหลว ซึ่งกำหนดให้เป็น K_L ดังนั้น $K_G \frac{A}{V}$ จึงสามารถเขียนใหม่ได้เป็น $K_L a$ ซึ่งเป็นค่าสัมประสิทธิ์ทั้งหมดในการถ่ายเทก๊าซ (ออกซิเจน) ค่า $K_L a$ นี้ขึ้นอยู่กับระบบการเติมอากาศ รูปร่างของถังเติมอากาศ ลักษณะของน้ำ และ

อุณหภูมิจึง โดยทั่วไปค่า $K_L a$ หาได้จากการทดลองในห้องปฏิบัติการ หรือในสนามจริง และจะไม่นิยมคำนวณหาค่า $K_L a$ โดยแยกออกเป็น K_L และ a เพราะค่า a เป็นค่าที่คำนวณหาได้ยากในทางปฏิบัติ จากสมการ (3.10) สามารถเขียนได้ใหม่เป็นสมการดังนี้

$$\frac{dC}{dt} = K_L a (C_S - C) \quad (3.11)$$

เมื่อ $\frac{dC}{dt}$ = ค่าความเข้มข้นของก๊าซที่เปลี่ยนแปลงต่อเวลา, (mg/l.s)

$K_L a$ = ค่าสัมประสิทธิ์ทั้งหมดในการถ่ายเทก๊าซต่อวินาที

จากสมการที่ได้กล่าวมานำมาวิเคราะห์ต่อจะได้เป็น

$$\int_{C_1}^{C_2} \frac{dC}{(C_S - C)} = K_L a \int_{t_1}^{t_2} dt \quad (3.12)$$

$$\ln \left[\frac{C_S - C_2}{C_S - C_1} \right] = K_L a (t_2 - t_1) \quad (3.13)$$

$$K_L a = \frac{\ln \left[\frac{C_S - C_2}{C_S - C_1} \right]}{(t_2 - t_1)} \quad (3.14)$$

เมื่อพิจารณา $t_1 = 0$ โดยมี $C_1 = 0$, $t_2 = t_1$ และ $C_2 = C_t$ จะได้

$$\ln \left[\frac{C_S - C_t}{C_S - C_0} \right] = K_L a t \quad (3.15)$$

ถ้าระบบมีของเหลวที่อิ่มตัวด้วยก๊าซ ทำให้ก๊าซถ่ายเทออกจากของเหลว ดังนั้นสมการเขียนใหม่ได้เป็น

$$\ln \left[\frac{C_t - C_S}{C_0 - C_S} \right] = K_L a t \quad (3.16)$$

จากหลักการข้างต้นสามารถนำมาใช้คำนวณหาปริมาณออกซิเจนที่ต้องการเติมลงในน้ำทิ้ง โดยสมมติให้อัตราการเติมออกซิเจนลงไปใต้น้ำที่มีค่าเท่ากับ $\frac{dm}{dt}$ จะได้

$$\frac{dm}{dt} = K_T V (C_S - C) \quad (3.17)$$

เมื่อ K_T = ค่าสัมประสิทธิ์ในการถ่ายเทของออกซิเจน ณ อุณหภูมิ T ($^{\circ}\text{C}$) จะได้

$$K_T = K_{20}(1.024)^{T-20} \quad (3.18)$$

กำหนดให้ประสิทธิภาพการของการเติมออกซิเจนลงไปใต้น้ำที่ขังเป็น (Aeration Efficiency, E)

$$E = \frac{\left(\frac{dm}{dt}\right)_{20}}{M} \quad (3.19)$$

เมื่อ $(dm/dt)_{20}$ = อัตราการเติมออกซิเจน ณ 20 องศาเซลเซียส และมี DO = 0 mg/l

M = อัตราการเติมออกซิเจนลงไปใต้น้ำที่ขัง, (g/s)

จะได้

$$M = \frac{\left(\frac{dm}{dt}\right)_{20}}{E} \quad (3.20)$$

$$M = \frac{\left(\frac{dm}{dt}\right)_T \left(\frac{dm}{dt}\right)_{20}}{E \left(\frac{dm}{dt}\right)_T} \quad (3.21)$$

กำหนดให้

$$\frac{dm}{dt} = V \frac{dC}{dt} = QdC \quad (3.22)$$

เมื่อ V = ปริมาตรของน้ำที่ขัง, (m³)

Q = อัตราไหลเข้าของน้ำที่ขัง, (m³/s)

$$dM = \frac{Q}{E} \frac{(C_s)_{20}}{(1.024)^{T-20}} \left(\frac{dC}{(C_s - C)_T} \right) \quad (3.23)$$

$$\int_0^M dM = \frac{Q}{E} \frac{(C_s)_{20}}{(1.024)^{T-20}} \int_{C_1}^{C_0} \frac{dC}{(C_s - C)} \quad (3.24)$$

$$M = \frac{Q}{E} \frac{(C_s)_{20}}{(1.024)^{T-20}} \ln \left(\frac{C_s - C_i}{C_s - C_0} \right)_T \quad (3.25)$$

$$Q = 0.00353 \frac{Q}{E} \frac{(C_s)_{20}}{(1.024)^{T-20}} \ln \left(\frac{C_s - C_i}{C_s - C_0} \right)_T \quad (3.26)$$

เมื่อ Q_s = ปริมาณอากาศที่ต้องการเติมลงไปใต้น้ำทิ้ง, (m^3/s)

เพื่อให้เหมาะสมกับสภาพจริงคือปริมาณอากาศที่เติมลงไปใต้น้ำทิ้ง หรือน้ำเสียจึงนิยมคูณด้วย 1.10 ($1.1 = 1/0.9$; $0.9 =$ ค่าความเข้มข้นอิ่มตัวของออกซิเจนในน้ำเสีย/ค่าความเข้มข้นอิ่มตัวของออกซิเจนในน้ำสะอาด) ทำให้ปริมาณอากาศที่ต้องการเติมลงไปใต้น้ำทิ้ง เป็นดังสมการ (3.27)

$$OC = \frac{V(K_L a)(C_s)}{1000} \quad (3.27)$$

เมื่อ OC = ความสามารถในการเติมออกซิเจน, (kg/hr)

V = ปริมาตรของน้ำ, (m^3)

$K_L a$ = ค่าสัมประสิทธิ์ทั้งหมดในการถ่ายเทก๊าซต่อวินาที

C_s = ความเข้มข้นอิ่มตัวของก๊าซในสารละลาย, (mg/l)

3.2.2 ปัจจัยที่ทำให้ออกซิเจนในน้ำมีมากหรือน้อย

ออกซิเจนในน้ำ จะมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับ

1. อุณหภูมิของน้ำ ออกซิเจนจะละลายในน้ำได้มากเมื่อน้ำมีอุณหภูมิต่ำและจะลดลงเมื่อน้ำมีอุณหภูมิสูงขึ้น
2. พื้นผิวสัมผัสของอนุภาคออกซิเจน ยิ่งพองอากาศมีพื้นที่สัมผัสมากและมีขนาดเล็กของอนุภาค ออกซิเจนก็ยิ่งมีโอกาสละลายน้ำได้สูง
3. ปริมาณก๊าซออกซิเจนที่ละลายในน้ำอยู่ก่อนแล้ว หากมีปริมาณก๊าซออกซิเจนละลายในน้ำอยู่ก่อนแล้ว มากจนเกือบจะถึงจุดอิ่มตัว อัตราการละลายของออกซิเจนใหม่ที่เติมลงในน้ำก็จะต่ำลง
4. พื้นผิวสัมผัสของน้ำ (ต่างจากข้อ 2) กรณีที่มีการพ่นน้ำออกแบบเหนือน้ำในลักษณะน้ำพุหรือน้ำตก เพื่อเพิ่มออกซิเจนในน้ำนั้น ยิ่งน้ำที่พ่นออกมาสัมผัสกับอากาศมากเท่าไร ก็ยิ่งเพิ่มโอกาสการแลกเปลี่ยนก๊าซระหว่างน้ำและอากาศมากขึ้นเท่านั้น
5. ปริมาณสารละลายต่างๆ ที่อยู่ในน้ำ น้ำที่มีสารละลายต่างๆ ในระดับความเข้มข้นสูง จะส่งผลให้ความสามารถในการละลายของออกซิเจนลดต่ำลง
6. ระยะเวลาในการสัมผัสระหว่างน้ำและก๊าซออกซิเจน
7. ปริมาณและลักษณะสิ่งมีชีวิตที่อาศัยอยู่ในบ่อเลี้ยง ปริมาณสารอินทรีย์ต่างๆที่อยู่ในบ่อเลี้ยงที่ต้องใช้ออกซิเจนในการย่อยสลาย

3.3 รูปแบบไร้มิติของสมการการขนถ่ายของไหล (Dimensionless Forms of Fluid Transport Equations)

ปริมาณไร้มิตินั้นจะไม่ขึ้นอยู่กับตัวแปรควบคุมต่างๆ เช่น ขนาดในการคำนวณ ความดัน ฯลฯ ดังนั้น องค์ประกอบต่างๆในการค้นคว้าจะถูกแปลงให้เป็นปริมาณไร้มิติทั้งสิ้น ในหัวข้อนี้จะแสดงให้เห็นว่าสมการที่ใช้ในการคำนวณสามารถแปลงให้เป็นรูปแบบไร้มิติได้ สมการต่างๆ เช่นสมการความต่อเนื่อง สมการโมเมนตัม และสมการพลังงานจะถูกนำเสนอในหัวข้อนี้

สมการอนุรักษ์มวลหรือสมการความต่อเนื่องคือ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.28)$$

เมื่อ ρ = ความหนาแน่นของของไหล, (kg/m^3)

t = เวลา, (s)

\vec{v} = ความเร็วของของไหลในรูปของเวกเตอร์, (m/s)

∇ = องค์ประกอบตามแนวแกน

สมการอนุรักษ์โมเมนตัมสำหรับของไหลอัดตัวได้คือ

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\bar{v} P_{static} + \mu \nabla^2 \vec{v} + 2\bar{v} \mu \cdot \nabla \vec{v} + \bar{v} \mu \times (\nabla \times \vec{v}) + \frac{1}{3} \mu \bar{v} (\nabla \cdot \vec{v}) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v}) \bar{v} \mu + K \bar{v} (\nabla \cdot \vec{v}) + (\nabla \cdot \vec{v}) \bar{v} K + \rho g + j \times \bar{B} \quad (3.29)$$

เมื่อ $\frac{Dv}{Dt}$ = อนุพันธ์ของของไหล

P_{static} = ความดันสถิตย, (Pa)

μ = ความหนืดของของไหล, (N.m)

∇^2 = กระบวนการลาปลาซ

K = ความหนืดบัลค์, (N.m)

g = ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วง, (m/s^2)

j = ทิศทางของกระแส

\bar{B} = สนามของกระแสแม่เหล็ก

ผลกระทบของค่า K ต่อพลศาสตร์ของของไหลจะยากต่อการตรวจสอบและส่วนมากจะถูกมองข้ามไป และเนื่องจากไม่มีกระแสแม่เหล็ก พจน์สุดท้ายในสมการจึงตัดทิ้งได้ ทำให้สมการที่ 3.29

ดูง่ายขึ้นนั้น สามารถใช้ค่าความดันพลศาสตร์ (Dynamic Pressure) เพิ่มเข้ามาในการคำนวณแทนค่าความดันสถิตยและความเร่งแรงโน้มถ่วงได้ ความสัมพันธ์ของพลศาสตร์ความดันสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\bar{V}P_{dynamic} = \bar{V}P_{static} - \rho\bar{g} \quad (3.30)$$

เมื่อ $P_{dynamic}$ = พลความดัน, (Pa)

3.3.1 กฎอนุรักษ์มวล (กฎความต่อเนื่อง)

สมการทั่วไปของการไหลต่อเนื่องคือ

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \bar{V}(bv) = -\bar{V} \cdot f + B_V \quad (3.31)$$

เมื่อ b = ความเข้มข้นของปริมาณใดปริมาณหนึ่ง, (m^3)

t = เวลา, (s)

\bar{V} = ระบบองค์ประกอบ

v = ความเร็วของของไหล, (m/s)

f = ส่วนขยายของฟลักซ์ในปริมาณนั้น

B_V = อัตราของการเกิดขึ้นของปริมาณนั้นต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร

ในสมการความต่อเนื่อง ความเข้มข้นคือความหนาแน่นทั้งหมดของมวล ดังนั้น ค่า b จะถูกแทนที่ด้วยความหนาแน่นของของไหล และเนื่องจากไม่มีฟลักซ์ที่เกี่ยวข้องกับความเร็วของผลเฉลี่ยมวล ค่า f จะเท่ากับ 0 และในกรณีของหัวฉีดในโรงงานนี้ จะไม่มีแหล่งกำเนิดมวลหรือเกิดการจมหายของมวล ดังนั้น ค่า B_V จะเท่ากับ 0 เช่นกัน

จากการตัดพจน์ข้างต้น สมการความต่อเนื่องจะลดรูปได้ ดังนี้

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{V} \cdot (\rho v) = 0 \quad (3.32)$$

ในระบบจำลองแบบ 2 มิติ สมการความต่อเนื่องจะแสดงดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot (\rho \bar{v}_x) + \frac{\partial}{\partial r} \cdot (\rho \bar{v}_r) + \frac{\rho \bar{v}_r}{r} = 0 \quad (3.33)$$

ในสมการข้างต้น X คือระบบพิกัดฉากแนวแกน และ r คือระบบพิกัดฉากแบบรัศมี ค่า \bar{v} คือความเร็วของของไหล

3.3.2 สมการอนุรักษ์โมเมนตัม

จากสมการอนุรักษ์ของระบบ สมการอนุรักษ์โมเมนตัมจะสามารถพิสูจน์ได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้
ขั้นแรกคือ ค่า b จะถูกแทนที่ด้วยพจน์ของโมเมนตัม $(\rho\bar{v})$ ในขณะเดียวกัน ค่าพลาซที่เพิ่มขึ้นเนื่องจากความเร็วจะถูกแทนที่ด้วยความดันสถิตย ความเค้น และพลาซจากแรงโน้มถ่วง ในระบบหัวฉีด ค่า B_V จะเป็นศูนย์ เพราะฉะนั้น สมการอนุรักษ์โมเมนตัมจะเขียนได้ดังสมการที่ 3.34 ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\bar{v}) + \bar{v}(\rho\bar{v}\bar{v}) = -\bar{v}P + \bar{v} \cdot (\bar{\tau}) + \rho\bar{g} \quad (3.34)$$

โดยที่ P = ความดันสถิตย, (Pa)

$\bar{\tau}$ = เทนเซอร์ความเค้น, (J)

\bar{g} = แรงต่อหนึ่งหน่วยเนื่องจากแรงโน้มถ่วง, (m/s^2)

สำหรับการจำลองระบบแบบ 2 มิติในรูปสมมาตรนั้น สมการอนุรักษ์โมเมนตัมในระบบพิกัดในแนวแกนและในแนวรัศมีจะแสดงดังสมการที่ 3.35 และ 3.36 ตามลำดับ
ระบบพิกัดฉาก

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\bar{v}_x) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x}(r\rho\bar{v}_x\bar{v}_x) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\rho\bar{v}_r\bar{v}_x) = & -\frac{\partial P}{\partial x} \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left[r\mu \left(2\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial x} - \frac{2}{3}(\bar{v} \cdot \bar{v}) \right) \right] \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial r} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial\bar{v}_r}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.35)$$

พิกัดแนวรัศมี

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\bar{v}_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x}(r\rho\bar{v}_x\bar{v}_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\rho\bar{v}_r\bar{v}_r) = & -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left[r\mu \left(\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial r} - \frac{\partial\bar{v}_r}{\partial x} \right) \right] \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r\mu \left(2\frac{\partial\bar{v}_r}{\partial r} - \frac{2}{3}(\bar{v} \cdot \bar{v}) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2\mu \frac{\bar{v}_r}{r^2} + \frac{2\mu}{3r} (\bar{\nabla} \cdot \bar{v}) \\
 & + \rho \frac{\bar{v}_z^2}{r}
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

โดยที่

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{v} = \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \frac{\bar{v}_r}{r} \tag{3.37}$$

3.4 การคำนวณทางพลศาสตร์ของไหล

3.4.1 ขั้นตอนการคำนวณทางพลศาสตร์ของไหล

หากพิจารณาการคำนวณทางพลศาสตร์ของไหลในมุมมองการโปรแกรม จะกล่าวได้ว่าเป็นโครงสร้างของอัลกอริทึมที่สามารถนำไปสู่การจำลองสถานะการไหลได้ โปรแกรมคำนวณทางพลศาสตร์ของไหลในเชิงพาณิชย์ ส่วนมากมีระบบที่ให้ผู้ใช้งานสามารถป้อนค่าต่างๆ ที่ต้องการแล้วจึงนำไปคำนวณโดยแบ่งเป็น 3 ขั้นตอนหลักดังนี้ [16]

3.4.1.1 ขั้นตอนประมวลผล

ขั้นตอนประมวลผล (pre-processing) คือขั้นตอนเตรียมการ โดยระบุรายละเอียดของการกำหนดปัญหา และพารามิเตอร์ต่างๆที่เกี่ยวข้อง ดังต่อไปนี้

1. กำหนดรูปร่าง และระบุขนาดที่สนใจ เรียกว่า การกำหนดสนามการคำนวณ (computation domain)
2. กำหนดจำนวน และรูปแบบการจัดวางกริด (grid or mesh) ซึ่งคือการแบ่งสนามคำนวณออกเป็นปริมาณเล็กๆ รูปแบบการจัดแบ่ง และจัดวางกริด ขึ้นอยู่กับปัญหาที่พิจารณาการจัดที่เหมาะสมทำให้การหาผลเฉลยประมาณค่า (approximation solution) แม่นยำขึ้น
3. เลือกแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ให้เหมาะสมกับธรรมชาติของปัญหา เลือกโดยใช้องค์ความรู้ทางทฤษฎีพื้นฐานที่เกี่ยวข้อง
4. กำหนดคุณสมบัติของของไหล เช่นพิจารณาอุณหภูมิอากาศของของไหล
5. กำหนดเงื่อนไขขอบเขต (boundary condition)

3.4.1.2 ขั้นตอนประมวลผลขั้นประมวลผล (solving) เป็นขั้นที่ต้องใช้ระเบียบวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขเพื่อแก้ปัญหา

1. ประมาณตัวแปรไม่ทราบค่าโดยหาค่าเฉลี่ยของฟังก์ชัน (มักใช้ในปัญหาแบบปั่นป่วน) สร้างเป็นสมการอนุพันธ์ย่อย โดยรวมกับสมการควบคุมการไหล

2. หาผลเฉลยวีค (weak solution) ของสมการควบคุมด้วยวิธีน้ำหนักตกค้าง (weight residual) จากนั้นดิสcretize โดยประมาณแต่ละเทอมความสัมพันธ์ด้วยแบบแผนวิธีที่เลือกไว้ เพื่อให้ได้ผลลัพธ์เป็นพีชคณิต

3. แก้สมการพีชคณิต ผลเฉลยที่ได้เรียกว่า ผลเฉลยประมาณค่า

3.4.1.3 ชั้นแสดงผล

ชั้นแสดงผล (post-processing) คือการแสดงผลเฉลยประมาณค่าของตัวแปรที่สนใจ และใช้เป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์ เช่น รูปแบบความเร็ว รูปแบบการหมุน เป็นต้น

3.4.2 คุณสมบัติของวิธีการคำนวณทางพลศาสตร์ของไหล

การคำนวณทางพลศาสตร์ของไหลเพื่อจำลองพฤติกรรมตามธรรมชาติ ควรตระหนักว่าธรรมชาติก็มีพฤติกรรมซับซ้อน ดังนั้นสิ่งที่พึงระมัดระวังอย่างยิ่งคือ ความถูกต้องของผลเฉลย ผลการคำนวณที่ดีที่สุด เป็นเพียงค่าประมาณที่ดีที่สุดเท่าที่มนุษย์สามารถหาคำตอบได้เท่านั้น ไม่ใช่ผลเฉลยแม่นยำตรงคุณสมบัติของวิธีการคำนวณ คือปัจจัยบ่งบอกความเที่ยงตรงของผลเฉลยประมาณค่า เมื่อเทียบกับพฤติกรรมจริงที่เกิดขึ้น แบ่งได้หลายประการดังนี้

3.4.2.1 ความเข้ากันได้

ความเข้ากันได้ (consistency) หมายถึงความเหมือน (equivalent) ระหว่างสมการควบคุม (สมการอนุพันธ์ย่อย) และสมการพีชคณิตที่ผ่านกระบวนการดิสcretize เมื่อระยะกริด (grid spacing) และ หรือค่าขั้นเวลา (time step) ลดลงใกล้ศูนย์โดยปกติเรียกความแตกต่างหลังจากกระบวนการดิสcretize ว่า ความผิดพลาดแบบทรานเคชัน (truncation error) ซึ่งลดลงเมื่อมีความเข้ากันได้มากขึ้น

3.4.2.2 เสถียรภาพการคำนวณ

เสถียรภาพการคำนวณ (stability) เป็นลักษณะการคำนวณที่มีค่าผิดพลาดน้อยลงเมื่อคำนวณซ้ำ (damping of error) เรียกความผิดพลาดที่เกิดจากการคำนวณซ้ำว่าความผิดพลาดแบบเร้าออฟ (round-off error) เช่นความผิดพลาดในการคำนวณทศนิยมตำแหน่งที่ 12 ของคอมพิวเตอร์ เป็นต้น อย่างไรก็ตามหากวิธีการคำนวณไม่มีเสถียรภาพ ผลการคำนวณอาจมีลักษณะลู่ออก (divergence) โดยมักเกิดจากความเลือกแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ไม่ถูกต้อง หรือแบบแผนการคำนวณเชิงตัวเลขไม่เหมาะสมกับปัญหาที่พิจารณาซึ่งการตรวจสอบเสถียรภาพการคำนวณต้องใช้ความรู้ของทฤษฎีการรบกวน (perturbation theory) เป็นแนวทาง

3.4.2.3 การลู่เข้าของผลเฉลย

ผลการคำนวณที่มีการลู่เข้าของผลเฉลย (convergence) หมายถึงผลเฉลยประมาณค่ามีแนวโน้มเข้าใกล้ผลเฉลยแม่นยำตรง สำหรับปัญหาไม่เชิงเส้น (nonlinear problem) ยากที่จะตรวจสอบการลู่เข้าของผลเฉลย เนื่องจากไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรงได้ อย่างไรก็ตามการตรวจสอบทำได้ด้วยวิธีเปรียบเทียบผลการคำนวณที่มีระยะกริดลดลง กระทั่งผลเฉลยไม่มีการเปลี่ยนแปลงตามระยะกริด (grid independent) เรียกได้ว่ามีคุณสมบัติการลู่เข้าของผลเฉลยที่ดี

3.4.2.4 การอนุรักษ์

คุณสมบัติการอนุรักษ์ (conservation) เป็นคุณสมบัติที่มีอยู่ในกฎการอนุรักษ์ เนื่องจากผลการคำนวณมาจากสมการควบคุม ดังนั้นวิธีการคำนวณจึงมีคุณสมบัติดังนี้ด้วย โดยคุณสมบัติการอนุรักษ์เป็นจุดเด่นที่สำคัญของระเบียบวิธีปริมาตรสืบเนื่อง กล่าวคือคำนึงถึงความสมดุลของการส่งถ่ายปริมาณข้ามขอบเขตที่พิจารณา เช่นรอบผิวปิดของปริมาตรเล็กๆที่แบ่งตามระยะกริดเป็นต้น

3.4.2.5 ความจำกัดขอบ

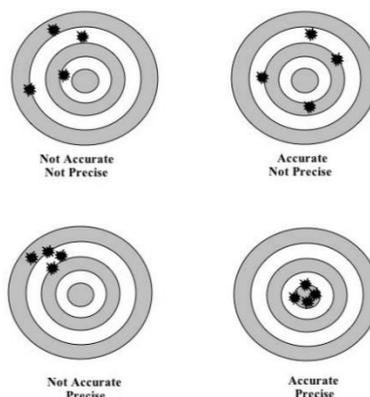
ความจำกัดขอบ (bounded ness) หมายถึงผลเฉลยควรมีค่าอยู่ในขอบเขตจำกัด เช่นความหนาแน่น ความเข้มข้น ต้องมีค่ามากกว่าศูนย์เสมอ หรือระบบการถ่ายเทความร้อนที่ทราบอุณหภูมิต่ำสุด-สูงสุด ผลเฉลยที่ควรได้ต้องมีค่าอยู่ในช่วงนั้นด้วยเช่นกัน โดยวิธีการคำนวณที่มีอันดับสูง (higher order) มีแนวโน้มความจำกัดขอบต่ำลง ดังนั้นจึงไม่ควรเลือกใช้วิธีการคำนวณที่มีอันดับสูงมากเกินไปจนความจำเป็น

3.4.2.6 ความเสมือนจริง

ความเสมือนจริง (realizability) หมายถึงแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ที่จำลองพฤติกรรมธรรมชาติที่ซับซ้อน เช่นจำลองการไหลปั่นป่วน แบบจำลองการเผาไหม้ เป็นต้น ควรเลือกแบบจำลองที่มีความเสมือนจริงเมื่อเทียบกับความหมายทางกายภาพ หากเลือกใช้ หรือนำมาใช้สอดคล้องกับปัญหา ผลเฉลยที่ได้อาจไม่สื่อความหมายทางกายภาพที่ถูกต้อง

3.4.2.7 ความหนาแน่น

บ่อยครั้งในงานทางวิศวกรรมกล่าวถึงความแน่นอน (accuracy) ซึ่งมักใช้สับสนกับความแม่นยำ (precision) พิจารณารูปที่ 3.7 แสดงความแตกต่างระหว่างแนวความคิดทั้งสองอย่างชัดเจน ตรงกลางเป่าเป็นเสมือนค่าแม่นยำ โดยเห็นได้ว่าความแน่นอนสูงหมายถึงค่าโดยเฉลี่ยไม่ต่างจากค่าแม่นยำ และความแม่นยำสูง หมายถึงค่าส่วนใหญกระจายตัวน้อย ดังนั้นงานวิเคราะห์ทางวิศวกรรมจึงควรให้ความสำคัญกับความแน่นอน มากกว่าความแม่นยำ ซึ่งช่วยในการวิเคราะห์ที่ได้ถูกต้อง มีแนวโน้มกับสภาพความจริงมากขึ้น แต่ในงานออกแบบต้องการความผิดพลาดลดน้อยที่สุด จึงควรใช้ทั้ง 2 แนวคิดประกอบรวมกัน



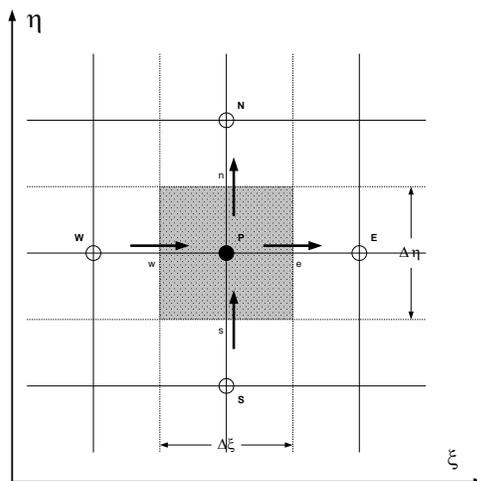
รูปที่ 3.7 แนวคิดของความแม่นยำและความแม่นยำ

วิธีคำนวณทางพลศาสตร์ของไหล แบ่งปัจจัยของความแม่นยำได้เป็น 3 ปัจจัยดังนี้

1. ความแม่นยำจากแบบจำลอง (modeling accuracy) เกิดจากความเหมือนจริงของแบบจำลอง เทียบกับพฤติกรรมจริงธรรมชาติ
2. ความแม่นยำจากการ discretization (discretization accuracy) เกิดจากความเข้ากันได้ของสมการพีชคณิต เทียบกับสมการควบคุม (สมการอนุพันธ์ย่อย)
3. ความแม่นยำจากการแก้สมการพีชคณิต (iteration accuracy) เกิดจากการลู่เข้าของผลเฉลยประมาณค่า เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงของสมการพีชคณิต

3.4.3 รูปแบบการจัดวางกริด

รูปแบบการจัดวางกริดโดยทั่วไปแบ่งได้ 3 แบบคือ แบบโครงสร้างปกติ (structured grid) แบบกลุ่มโครงสร้าง (block structured grid) และแบบไม่เป็นโครงสร้าง (unstructured grid) เพื่อให้ง่ายต่อความเข้าใจกระบวนการ discretization ในกระบวนการถัดไป จึงได้ใช้รูปแบบการวางกริดดังรูปที่ 3.8 (แบบโครงสร้างปกติ) และเพื่อความกระชับได้ discretization กริด 2 มิติเท่านั้น ซึ่งสามารถขยายไปสู่กริด 3 มิติได้โดยตรง



รูปที่ 3.8 รูปแบบการจัดวางกริดแบบโครงสร้างปกติ

จากรูปที่ 2 ตำแหน่ง P คือตำแหน่งโนด (node) ที่สนใจ ตัวอักษรพิมพ์เล็ก เช่น w, e แสดงถึงปริมาณที่เข้า-ออกจากปริมาตรควบคุมที่แรง (cell volume) เช่น ความเร็ว เป็นต้น เรียกว่า ตำแหน่งผิวเซล (cell face) ลูกศรที่ปรากฏแสดงทิศเป็นบวกของปริมาณเวกเตอร์ที่ตำแหน่งผิวเซล รูปแบบลักษณะนี้เรียกว่า การจัดเรียงแบบตำแหน่งรวม (co-located arrangement) กล่าวคือ ปริมาณสเกลาร์ และเวกเตอร์มีตำแหน่งเดียวกัน (มวล ความเร็ว ความดัน)

3.4.4 แบบแผนการคำนวณเชิงตัวเลข

ปัจจุบันมีนักวิจัยที่คิดค้นแบบแผนการคำนวณเชิงตัวเลข (numerical scheme) มากมายซึ่งขอกล่าวถึงเฉพาะแบบแผนในงานวิจัยนี้ ประกอบด้วย 4 แบบคือ

3.4.4.1 แบบแผนวิธีผลต่างกึ่งกลาง

แบบแผนวิธีผลต่างกึ่งกลาง (central differencing scheme ,CDS) คือการประมาณค่าที่ตำแหน่งผิวเซลต่างๆ ด้วยหลักการหาค่าเฉลี่ยกึ่งกลาง เป็นไปตามสมการ (3.38) , ϕ แทนปริมาณที่สนใจใดๆ

$$\begin{aligned}
 \phi_e &= (\phi_p + \phi_E)/2 \\
 \phi_w &= (\phi_W + \phi_p)/2 \\
 \phi_n &= (\phi_p + \phi_N)/2 \\
 \phi_s &= (\phi_s + \phi_p)/2
 \end{aligned}
 \tag{3.38}$$

จากสมการ (3.38) เห็นได้ว่าการประมาณค่าที่ผิวเซลล์ด้วยค่าที่ตำแหน่งโนด โดยถ่วงน้ำหนักโนด ประชิด (adjacent node) เท่ากัน แบบแผนวิธีนี้จึงขึ้นอยู่กับระยะกริดเป็นสำคัญ ซึ่งระยะกริดที่ลดลง ทำให้ผลเฉลยมีความแน่นอนสูงขึ้น

3.4.4.2 แบบแผนวิธีผลต่างต้นลมอันดับหนึ่ง

การประมาณค่าที่ผิวเซลล์รูปที่ 2 ของแบบแผนวิธีผลต่างต้นลมอันดับหนึ่ง (1^{st} –order upwind differencing scheme, UDS-1,FOU) ให้ปริมาณที่ตำแหน่งท้ายลมมีค่าเท่ากับ ปริมาณที่ตำแหน่งต้นลม ดังสมการ (3.39) เมื่อ ϕ แทนปริมาณที่สนใจ และ u แทนความเร็วที่ตำแหน่ง ผิวเซลล์นั้นเช่น u_e แทนความเร็วที่ตำแหน่งผิวเซลล์ e เป็นต้น

$$\begin{aligned}\phi_e &= a_e \phi_P + (1 - a_e) \phi_E \text{ เมื่อ } u_e > 0 \Rightarrow a_e = 1 \text{ และ } u_e < 0 \Rightarrow a_e = 0 \\ \phi_w &= a_w \phi_W + (1 - a_w) \phi_P \text{ เมื่อ } u_w > 0 \Rightarrow a_w = 1 \text{ และ } u_w < 0 \Rightarrow a_w = 0 \\ \phi_n &= a_n \phi_P + (1 - a_n) \phi_N \text{ เมื่อ } u_n > 0 \Rightarrow a_n = 1 \text{ และ } u_n < 0 \Rightarrow a_n = 0 \\ \phi_s &= a_s \phi_E + (1 - a_s) \phi_P \text{ เมื่อ } u_s > 0 \Rightarrow a_s = 1 \text{ และ } u_s < 0 \Rightarrow a_s = 0\end{aligned}\quad (3.39)$$

แบบแผนวิธีผลต่างต้นลมอันดับหนึ่งมีคุณสมบัติจำกัดขอบสูง ทำให้ผลเฉลยไม่กระเพื่อม (oscillatory solution) เป็นข้อดีทั้งในเสถียรภาพการคำนวณ และการลู่เข้าของผลเฉลย แต่ในขณะเดียวกัน ทำให้เกิดพฤติกรรมการแพร่เชิงตัวเลข (numerical diffusive) เนื่องจากลักษณะผลเฉลย เหมือนถูกถ่วงน้ำหนักจากค่าที่ตำแหน่งต้นลมเป็นหลัก สำหรับกรณีที่มีการไหลซับซ้อน แบบแผนวิธีนี้จะทำให้คุณสมบัติความเข้ากันได้ลดลง

3.4.4.3 แบบแผนวิธีผลต่างต้นลมอันดับสอง

แบบแผนวิธีผลต่างต้นลมอันดับสอง (2^{nd} –order upwind differencing scheme, UDS-2,SOU) ได้พัฒนาให้มีความแน่นอนสูงขึ้น พิจารณาที่ตำแหน่งโนด P เมื่อใช้อนุกรมขยายของเทเลอร์ (Taylor series expansion) ตามหลักผลต่างต้นลม เขียนความสัมพันธ์ที่ผิวเซลล์ e ได้ว่า

$$\phi_e = \phi_P + \delta_{eP} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_P + \frac{\delta_{eP}^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_P + \text{H.O.T} \text{ เมื่อ } u_e > 0 \quad (3.40)$$

สมการ (3.40) เป็นตัวอย่างแบบแผนในกรณีวิธี 1มิติ พิจารณาเฉพาะที่ผิวเซลล์ e เมื่อ δ_{eP} แทน ระยะห่างระหว่างผิวเซลล์ e และโนดต้นลม P (เนื่องจาก $u_e > 0$) สำหรับกรณีแบบแผนวิธีผลต่างต้นลม อันดับหนึ่งจะใช้เฉพาะเทอมแรกทางขวาของสมการ และแบบแผนวิธีผลต่างต้นลมอันดับสองนี้จะใช้สอง เทอมแรกทางขวาของสมการ เทอม $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_P$ คือ ความชันของเซลล์ต้นลม ซึ่งประมาณโดยการเฉลี่ยถ่วง

นำหน้าด้วยปริมาตรของเซลล์นั้น ดังสมการ (3.41) จากนั้นใช้ทฤษฎีของเกาส์ (Gauss theorem) จะเขียนได้ในสมการ (3.42) ดังนี้

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_P = \frac{1}{V} \int \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) dV \quad (3.41)$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_P = \frac{1}{V} \oint \phi \cdot \hat{n} dA \quad (3.42)$$

เมื่อ V แทนขนาดปริมาณของเซลล์ A แทนพื้นที่ผิวเซลล์และ \hat{n} แทนเวกเตอร์ตั้งฉากกับผิวเซลล์ สมการ (3.41) ทำการดิสครีไทต์ด้วยระเบียบวิธีปริมาตรสี่บ้องใน 2 มิติ (กรณีที่มีการจัดวางกริดตามรูปที่ 3.8 จะลดรูปได้เป็น

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_P = \frac{1}{A_P} \phi_e L_e + \phi_w L_w + \phi_n L_n + \phi_s L_s \quad (3.43)$$

จากสมการ (3.42) เมื่อ L แทนระยะความกว้างของเซลล์ในแต่ละด้านตามตัวห้อย เช่น L_e แทนระยะความกว้างของผิวเซลล์ e เป็นต้น และ A_P แทนพื้นที่เซลล์ที่ตำแหน่งโนด P อยู่เช่น A_P มีค่าเท่ากับพื้นที่แรกในรูปที่ 3.8 เป็นต้น ซึ่งค่า ϕ ที่ผิวเซลล์ต่างๆของสมการ (3.43) หาได้หลายวิธี แต่ในที่นี้เลือกใช้แบบแผนวิธีผลต่างกึ่งกลางดังสมการ (3.38) ดังนั้นสมการ (3.40) เขียนใหม่ได้ว่า

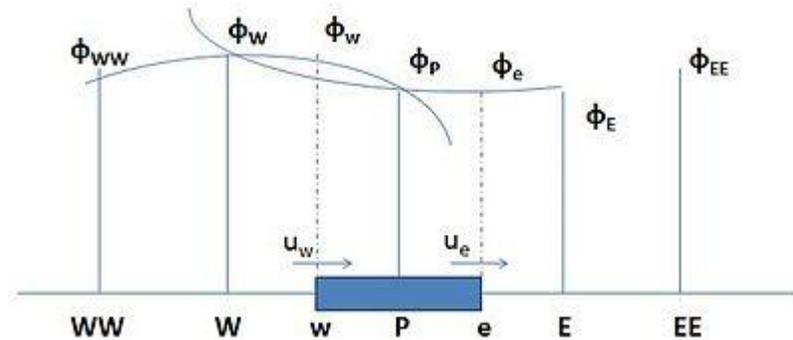
$$\phi_e = \phi_P + \frac{\delta_{eP}}{A_P} \left(\left(\frac{\phi_P + \phi_E}{2}\right) \cdot L_e + \left(\frac{\phi_w + \phi_P}{2}\right) \cdot L_w + \left(\frac{\phi_P + \phi_N}{2}\right) \cdot L_n + \left(\frac{\phi_S + \phi_P}{2}\right) \cdot L_s \right) \text{เมื่อ } u_e > 0 \quad (3.44)$$

ในทำนองเดียวกันเมื่อ $u_e < 0$ จะเขียนได้ดังสมการ (3.45) และสมการของ ϕ_w, ϕ_n, ϕ_s สามารถหาได้ด้วยสมการเดียวกัน ซึ่งไม่กล่าวถึงในรายละเอียด

$$\begin{aligned} \phi_e = \phi_E + \frac{\delta_{eE}}{A_E} & \left(\left(\frac{\phi_E + \phi_{EE}}{2}\right) \cdot L_{ee} + \left(\frac{\phi_E + \phi_P}{2}\right) \cdot L_{we} \right. \\ & \left. + \left(\frac{\phi_{NE} + \phi_E}{2}\right) \cdot L_{ne} + \left(\frac{\phi_E + \phi_{SE}}{2}\right) \cdot L_{se} \right) \text{เมื่อ } u_e < 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

3.4.4.4 แบบแผนวิธีผลต่างควอดราติก

แบบแผนวิธีผลต่างควอดราติก (Quadratic upstream interpolation for convective kinetics differencing scheme, QUICK) เริ่มนำเสนอโดย Leonard (1988) เป็นแบบแผนวิธีที่ใช้โนด 3 ตำแหน่งในการประมาณค่าของแต่ละผิวเซล (2 โหนดที่ต้นลม และ 1 โหนดที่ท้ายลม) ดังแสดงในรูปที่ 3.9



รูปที่ 3.9 รูปแบบแนวคิดของแบบแผนวิธีผลต่างควอดราติกในปริมาณควบคุมแบบ 1 มิติ

ตามรูปที่ 3 เมื่อ $u_w > 0$ และ $u_e > 0$ การประมาณค่า ϕ_w ที่ผิวเซล w จะใช้ค่าที่โนดต้นลมคือ WW และ W ประกอบกับที่โนดท้ายลมคือ W และ P ในทำนองเดียวกันกับการประมาณค่า ϕ_e ที่ผิวเซล e จะใช้ค่าที่โนดต้นลมคือ W และ P ประกอบกับที่โนดท้ายลมคือ E ตามลำดับ

ด้วยหลักการความคล้ายคลึง กรณีที่ $u_w < 0$ และ $u_e < 0$ การประมาณค่า ϕ_w ใช้โนด E และ P ประกอบกับโนด W และการประมาณค่า ϕ_e ใช้โนด EE, E และ P ตามลำดับ ซึ่งความสัมพันธ์ต่างๆ สามารถเขียนได้ในสมการ (3.46) ถึง (3.49) โดย $u_x > 0$ แล้ว $a_x = 1$ และ $u_x < 0$ แล้ว $a_x = 0$ เมื่อ $x = w, e, s, n$ ตามลำดับ

$$\phi_w = \frac{3}{8}[(1 + a_w) \cdot \phi_W + (2 - a_w)\phi_P] - \frac{1}{8}[(1 - a_w) \cdot \phi_E + a_w \cdot \phi_{WW}] \quad (3.46)$$

$$\phi_e = \frac{3}{8}[(1 + a_e) \cdot \phi_P + (2 - a_e)\phi_E] - \frac{1}{8}[(1 - a_e) \cdot \phi_{EE} + a_e \cdot \phi_W] \quad (3.47)$$

$$\phi_s = \frac{3}{8}[(1 + a_s) \cdot \phi_S + (2 - a_s)\phi_P] - \frac{1}{8}[(1 - a_s) \cdot \phi_N + a_s \cdot \phi_{SS}] \quad (3.48)$$

$$\phi_n = \frac{3}{8}[(1 + a_n) \cdot \phi_P + (2 - a_n)\phi_N] - \frac{1}{8}[(1 - a_n) \cdot \phi_{NN} + a_n \cdot \phi_S] \quad (3.49)$$

แบบแผนวิธีผลต่างควอดราติกมีความแน่นอนอันดับสาม ซึ่งสูงกว่าทั้งแบบแผนวิธีผลต่างต้นลมอันดับหนึ่งและสอง เป็นเทคนิคการผสมผสานความได้เปรียบของแบบแผนวิธีผลต่างกึ่งกลางและแบบแผนวิธีผลต่างต้นลม อย่างไรก็ตามแบบแผนวิธีผลต่างเข้าด้วยกัน กล่าวคือมีคุณสมบัติอนุรักษ์ และความ

เข้ากันได้มากกว่าแบบแผนวิธีผลต่างต้นลม อย่างไรก็ตามแบบแผนวิธีผลต่างอันดับสูง จะมีเงื่อนไขเสถียรภาพการคำนวณ (conditionally stable) เพิ่มขึ้น และคุณสมบัติจำกัดขอบลดลง

3.4.5 การ discretize สมการควบคุม

การคำนวณด้วยวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยม ต้องการผลเฉลยวิคของสมการควบคุมด้วยวิธีน้ำหนักตกค้าง โดยการเลือกใช้ 1 (unit) เป็นฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (weight function) ผลที่ได้เป็นสมการอินทิกรัล (integral equation) บนขอบเขตปริมาตรควบคุมเล็กๆจากทฤษฎีของเกาส์ทำให้สามารถพิจารณาปริมาณที่ส่งถ่ายเข้า-ออก เฉพาะที่ขอบเขต เป็นตัวแทนทั้งปริมาตรได้ รวมเรียกว่าการ discretize สมการอนุพันธ์ย่อย โดยจะกล่าวถึงในหัวข้อถัดไปโดยจะเป็นการ discretize สมการอนุพันธ์มวล

3.4.6 การ discretize สมการอนุรักษ์มวล

จากสมการอนุรักษ์มวลแบบไร้อัตตาวิค จะได้ผลเฉลยวิคดังสมการ (3.50) และใช้ทฤษฎีของเกาส์ จะได้สมการ (3.51)

$$\int \frac{\partial u_i}{\partial x_i} d\Omega = 0 \quad (3.50)$$

$$\oint u_i n_i dA = 0 \quad (3.51)$$

เมื่อ A แทนพื้นที่ผิวเซลล์ และ \mathbf{n} แทนเวกเตอร์ตั้งฉากกับผิวเซลล์ จากสมการ (3.42) ให้ทำการ discretize สมการด้วยระเบียบวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยมใน 2 มิติ (กรณีจัดวางกริดตามรูปที่ 3.8 จะได้สมการ (3.52) ซึ่งเรียกว่า สมการอนุรักษ์มวลแบบ discretize สมการ เมื่อ L แทนระยะความกว้างของผิวเซลล์ในแต่ละด้านตามตัวห้อย เช่น L_e แทนระยะความกว้างของผิวเซลล์ e เป็นต้น

$$(uL)_e - (uL)_w - (uL)_n - (uL)_s = 0 \quad (3.52)$$

3.4.7 ลำดับวิธีการคำนวณหาผลเฉลยของสมการควบคุมในการไหลคงตัว

ในการคำนวณทางพลศาสตร์ของไหล ตามระเบียบวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยมมีลำดับวิธีการคำนวณหาผลเฉลยของสมการควบคุมหลายวิธี โดยลำดับวิธีที่นิยมกันทั่วไปคือ ลำดับวิธี SIMPLE ลำดับวิธี SIMPLER ลำดับวิธี SIMPLE และลำดับวิธี PISO ซึ่งในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงวิธีแบบ SIMPLE เพียงอย่างเดียว ลำดับวิธีการคำนวณหาผลเฉลยแบบ SIMPLE (semi-implicit method for pressure link equation) เป็นวิธีที่ใช้หลักการเดาค่าความดัน แล้วนำไปคำนวณหาค่าความเร็วและปริมาณสเกลาร์อื่นๆ จากสมการนาเวียร์-สโตกส์ และตรวจสอบโดยสมการอนุรักษ์มวล หากค่าทั้งหมดมีความสอดคล้องกับสมการควบคุมแสดงว่าค่าความดันที่เดามีความถูกต้อง หากไม่สอดคล้องจะเดาค่าความดันใหม่บนฐานของค่าความดัน และความเร็วที่คำนวณได้

3.4.8 การจำลองโมเดลแบบปั่นป่วน

กระแสของของไหลที่มีความเร็วและเลขเรย์โนลด์สูงจะเรียกว่าการไหลแบบปั่นป่วน (Turbulent Flow) เนื่องจากกระแสไหลเป็นการไหลแบบปั่นป่วน การจำลองการไหลแบบปั่นป่วนจึงถูกนำมาพิจารณาและใช้ในการคำนวณคุณสมบัติของของไหลในโปรแกรมนี้

ในการไหลแบบปั่นป่วนนั้น สนามความเร็วจะไม่คงที่ ความผันผวนนี้จะรวมเข้ากับปริมาณที่ส่งผ่านได้เช่น โมเมนตัม พลังงาน และความเข้มข้นเฉพาะ อย่างไรก็ตาม สมการของระบบที่ถูกต้องนั้นสามารถเป็นได้ทั้งแบบเฉลี่ยเวลาและเฉลี่ยผลรวมเพื่อทำการกำจัดความผันผวน สมการและตัวแปรต่างๆ ได้ถูกสร้างขึ้นเพื่อกระบวนการนี้

ในโปรแกรม Fluent มีแบบจำลองการไหลแบบปั่นป่วน 5 รูปแบบ ดังนี้

- (1) Spalart-Allmaras Model
- (2) $k-\epsilon$ models
 - Standard $k-\epsilon$ model
 - Renormalization-group (RNG) $k-\epsilon$ model
 - Realizable $k-\epsilon$ model
- (3) $k-\omega$ models
 - Standard $k-\omega$ model
 - Shear-stress transport (SST) $k-\omega$ model
- (4) Reynolds Stress Model (RSM)
- (5) Large eddy simulation (LES) Model

เนื่องจากในโครงการนี้ใช้รูปแบบของ Renormalization-group (RNG) $k-\epsilon$ model หลักการใช้ งานและวิธีการคำนวณของโมเดลนี้จะถูกอธิบายในหัวข้อถัดไป

3.4.9 Renormalization-group (RNG) $k-\epsilon$ model

เป็นรูปแบบจำลองที่มีความแม่นยำในช่วงการไหลแบบปั่นป่วนที่กว้างโดยการใช้เทคนิคทางสถิติอย่างแม่นยำและมีความคล้ายคลึงกับ Standard $k-\epsilon$ model ซึ่งเป็นโมเดลมาตรฐานที่ใช้กันอย่าง กว้างขวาง โดยมีข้อดีที่เพิ่มขึ้นมาดังนี้

1. เพิ่มเติมเทอมลงในสมการของ ϵ ซึ่งช่วยเพิ่มความแม่นยำอย่างมากสำหรับกระแสที่มีความเครียดสูง
2. ผลกระทบของการไหลวนในกระแสปั่นป่วนได้ถูกนำมาคำนวณ เพิ่มความแม่นยำใน กระแสที่มีการไหลวน

3. มีสูตรสำหรับเลขพลังค์ (Prandtl Numbers) สิ่งเหล่านี้จะช่วยเพิ่มความแม่นยำในการคำนวณปริมาณต่างๆ ในการจำลองการไหลของกระแส แต่ทว่าการคำนวณจะกินเวลากว่าการใช้โมเดลแบบมาตรฐาน Standard $k-\epsilon$ model อยู่ค่อนข้างมาก

3.4.10 Mathematical Algorithm of the Renormalization $k-\epsilon$ model เมื่อค่า k คือพลังงานศักย์ปั่นป่วนและค่า ϵ คืออัตราการกระจายตัว สมการที่จะใช้คำนวณในโมเดลนี้มีดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_k \mu_{eff} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + G_k + G_b - \rho \epsilon - Y_M + S_k \quad (3.53)$$

และ

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \epsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_\epsilon \mu_{eff} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} (G_k + C_{3\epsilon} G_b) - C_{2\epsilon} \rho \frac{\epsilon^2}{k} - R_\epsilon + S_\epsilon \quad (3.54)$$

โดยที่

$$C_1 = \max \left[0.43, \frac{n}{n+5} \right], n = S \frac{k}{\epsilon}, S = \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}} \quad (3.55)$$

เมื่อ	t	= เวลา, (s)
	ρ	= ความหนาแน่น, (kg/m^3)
	k	= พลังงานจลน์ปั่นป่วน, ($\text{J} \cdot \text{m}^3/\text{kg}$)
	v	= ความเร็ว, (m/s)
	x	= ระยะห่าง, (m)
	μ	= ความหนืด, ($\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$)
	μ_t	= ความหนืดปั่นป่วน, ($\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$)
	G_k	= พลังงานศักย์ปั่นป่วนเนื่องจากผลเฉลยองค์ประกอบความเร็ว, (J)
	G_b	= พลังงานศักย์ปั่นป่วนเนื่องจากแรงลอยตัว, (J)
	ϵ	= อัตราการกระจายตัว, ($(\text{J} \cdot \text{m}^3)/(\text{kg} \cdot \text{s})$)
	Y_M	= ค่าที่เกิดขึ้นเมื่อมีการขยายพื้นที่อย่างผันผวนในกระแสนปั่นป่วนบีบอัดได้ในการกระจายตัวทั้งหมด, (J)
	$C_{1\epsilon}$	= ค่าคงที่ในโมเดล = 1.42
	$C_{2\epsilon}$	= ค่าคงที่ในโมเดล = 1.68