บทที่ 2
ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 การวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นตรงแบบพหุ

2.1.1 รูปแบบการถดถอยเชิงเส้นตรงแบบพหุ

ปัจจัยที่มีผลต่อความผันแปรของตัวแปรตามอาจมีเพียงปัจจัยเดียว หรือมากกว่าหนึ่งปัจจัย เช่นผลผลิตข้าวต่อไร่ นอกจากจะขึ้นอยู่กับปริมาณปุ๋ยที่ใช้ต่อไร่แล้ว ยังจะขึ้นอยู่กับปัจจัยอื่นๆ อีกได้แก่ ความเจริญทางเทคโนโลยีที่แทนด้วยปัจจัยเวลาและปริมาณน้ำในฤดูทำนา ส่วนยอดขายสินค้าของห้างสรรพสินค้านอกจากจะขึ้นอยู่กับยอดโฆษณาแล้วยังจะขึ้นกับปัจจัยอื่นๆ อีกได้แก่ ราคาสินค้าที่กำหนดขึ้น จำนวนห้างสรรพสินค้าที่เป็นคู่แข่งขันและการให้บริการ เป็นต้น

การวิเคราะห์การถดถอยเมื่อมีตัวแปรที่เกี่ยวข้องหลายตัวแปร จะทำการกำหนดให้ตัวแปรหนึ่งที่สนใจเป็นตัวแปรตาม ส่วนตัวแปรที่เหลือแทนปัจจัยที่มีอิทธิพลต่อตัวแปรที่สนใจศึกษาเป็นตัวแปรอิสระ การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามและตัวแปรอิสระจะทำตามรูปแบบการถดถอยที่กำหนดขึ้น เช่น ในกรณีมีตัวแปรอิสระ 3 ตัวแปรได้แก่ X_1 X_2 และ X_3 รูปแบบการถดถอยเชิงเส้นตรงได้แก่

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon$$

เรียกรูปแบบการถดถอยนี้ว่า รูปแบบการถดถอยเชิงเส้นตรงแบบพหุ(multiple linear regression model) โดยมีข้อสมมติของรูปแบบดังนี้

1. ε_i มีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และค่าความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 ซึ่งหมายความว่า $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$
2. ε_i และ ε_j สำหรับ $i \neq j$ มีการแจกแจงที่เป็นอิสระกัน จะทำให้ $COV(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ สำหรับ $i \neq j$

จากข้อสมมติของ ε_i สรุปได้ว่าลักษณะการแจกแจงของ Y_i เมื่อ $X_1 = X_{1i}$ $X_2 = X_{2i}$ และ $X_3 = X_{3i}$ เป็นแบบปกติที่เป็นอิสระกัน มีค่าเฉลี่ย $\beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i}$ และมีค่าความแปรปรวน σ^2 นั่นหมายถึง $Y_i \sim Nid(\beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i}, \sigma^2)$ ข้อสมมติอื่นที่นอกเหนือจากข้อสมมติเกี่ยวกับความคลาดเคลื่อน ε_I ได้แก่ รูปแบบเป็นแบบเชิงเส้นตรงของพารามิเตอร์(β_i) และตัวแปรอิสระแต่ละตัวแปรไม่มีความเกี่ยวข้องกัน กรณีที่มีตัวแปรอิสระ k ตัวแปร รูปแบบการถดถอยเชิงเส้นตรงและ

ข้อสมมติของรูปแบบ จะเป็นไปในทำนองเดียวกันกับกรณีตัวแปรอิสระ3ตัวแปรดังกล่าวข้างต้น ในการวิเคราะห์การถดถอยกรณีที่มีตัวแปรอิสระมากกว่าหนึ่งตัวแปร จึงมักจะเขียนรูปแบบการถดถอยให้อยู่ในแบบเมตริกซ์ (matrix form) ซึ่งสามารถเขียนรูปแบบการถดถอยเชิงเส้นตรงแบบเมตริกซ์กรณีมี k ตัวแปรอิสระได้ดังนี้

$$\underline{Y} \quad = \quad X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$$

เมื่อ $\underline{Y}$ เป็นเวคเตอร์แถวตั้งขนาด n ที่มีสมาชิกที่ i เป็น Y_i

$\underline{\beta}$ เป็นเวคเตอร์แถวตั้งขนาด (k+1) ที่มีสมาชิกที่ i เป็น β_i

$\underline{\varepsilon}$ เป็นเวคเตอร์แถวตั้งขนาด n ที่มีสมาชิกที่ i เป็น ε_i

และ X เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times (k+1)$ โดย

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & \cdots & X_{k1} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ 1 & X_{1n} & \cdots & X_{kn} \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

2.1.2 สมการถดถอย

การสร้างสมการถดถอยจะเริ่มจากการหาค่าประมาณ b_i ของพารามิเตอร์ β_i ซึ่งเมื่อเขียนตัวประมาณ b_i ของพารามิเตอร์ β_i ในรูปเวคเตอร์เป็น $\underline{b}$ จะหาเวคเตอร์ $\underline{b}$ ได้ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด นั่นคือ หา $\underline{b}$ ที่ทำให้ SSE มีค่าน้อยที่สุด ซึ่ง

$$\begin{aligned} SSE &= \underline{e}'\underline{e} \\ &= \left(\underline{Y} - X\underline{b}\right)'\left(\underline{Y} - X\underline{b}\right) \\ &= \left(\underline{Y}' - \underline{b}'X'\right)\left(\underline{Y} - X\underline{b}\right) \\ &= \underline{Y}'\underline{Y} - 2\underline{b}'X'\underline{Y} + b'X'X\underline{b} \end{aligned}$$

โดยเวคเตอร์ $\underline{e}$ เป็นเวคเตอร์ของความคลาดเคลื่อน ซึ่ง $\underline{e} = \left(\underline{Y} - \underline{\hat{Y}}\right) = \left(\underline{Y} - X\underline{b}\right)$ เวคเตอร์ $\underline{b}$ ที่มีคุณสมบัติดังกล่าวจะหาได้โดยการหาอนุพันธ์ย่อยของ SSE เทียบกับ $\underline{b}$ และกำหนดให้เท่ากับเวคเตอร์ $\underline{0}$ จากสมการดังกล่าวจะเขียนได้เป็นสมการใหม่

$$X'X\underline{b} \quad = \quad X'\underline{Y}$$

เรียกสมการนี้ว่า สมการปกติ เมื่อนำเอาเมตริกซ์ $(X'X)^{-1}$ คูณทั้งด้านซ้ายและด้านขวาของสมการปกติ จะได้ $\underline{b} = (X'X)^{-1} X'\underline{Y}$ ซึ่ง $(X'X)$ เป็นเมตริกซ์สมมาตรขนาด (k+1)× (k+1) เมื่อ $(X'X)^{-1}$เป็นเมตริกซ์ผกผันของ$(X'X)$ และ $(X'\underline{Y})$เป็นเวคเตอร์แถวตั้งขนาด (k+1) โดย

$$X'X = \begin{bmatrix} n & \sum X_1 & \cdots & \sum X_k \\ \sum X_1 & \sum X_1^2 & \cdots & \sum X_1 X_k \\ \vdots & & & \\ \sum X_k & \sum X_1 X_k & \cdots & \sum X_k^2 \end{bmatrix} \quad , \quad X'\underline{Y} = \begin{bmatrix} \sum Y \\ \sum X_1 Y \\ \vdots \\ \sum X_k Y \end{bmatrix}$$

ตัวประมาณ b_i ที่ได้จากวิธีกำลังสองน้อยที่สุดจะเป็นตัวประมาณที่ดี นั่นคือเป็น BLUE (best linear unbiased estimator) ของ β_i กล่าวคือ เป็นตัวประมาณที่เขียนได้ในรูปเชิงเส้นของเวคเตอร์ $\underline{Y}$ ไม่อคติ และมีค่าความแปรปรวนต่ำกว่าค่าความแปรปรวนของตัวประมาณอื่น ที่สามารถเขียนได้ในรูปเชิงเส้นของเวคเตอร์ $\underline{Y}$ และไม่อคติเหมือนกัน จากค่า b_i ที่คำนวณได้จะนำค่า b_i ไปใช้ประโยชน์ในการประมาณค่าของตัวแปรตาม Y ได้ดังนี้

$$\hat{Y}_0 \quad = \quad b_0 + b_1 X_{10} + b_2 X_{20} + \ldots + b_k X_{k0}$$

ซึ่ง $X_{10}, X_{20}, \ldots, X_{k0}$ เป็นค่าคงที่ และสามารถเขียน $\hat{Y}_0$ ในรูปเมตริกซ์ได้เป็น

$$\hat{Y}_0 \quad = \quad \underline{X}'_0 \underline{b}$$

เมื่อ $\underline{X}_0$ เป็นเวคเตอร์แถวตั้งขนาด (k+1) โดย $\underline{X}'_0 = (\,1 \;\; X_{10} \;\; X_{20} \;\; \ldots \;\; X_{k0}\,)$ จะประมาณ σ^2 โดย S^2 ซึ่ง

$$S^2 \quad = \quad \frac{SSE}{n-k-1}$$

2.1.3 การแบ่งส่วนของ SST

การศึกษาความเหมาะสมของรูปแบบการถดถอยนั้น จะพิจารณาค่าสถิติวัดความเหมาะสมบางค่าและการทดสอบสมมติฐาน ค่าสถิติวัดความเหมาะสมของรูปแบบและตัวทดสอบสถิติ F ที่ใช้ในการทดสอบสมมติฐาน จะเขียนได้อยู่ในรูปของผลรวมกำลังสอง(SS) ที่ได้จากการแบ่งส่วนของผลรวมกำลังสองรวม(SST)

จากสมการถดถอยเชิงเส้นตรงแบบพหุ $\hat{Y} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \ldots + b_k X_k$ จะหาค่าประมาณของ Y ที่แต่ละชุดของ X_i ที่กำหนดให้เป็น $\hat{Y}$ จะเขียนผลต่างของค่าจริงที่ i (Y_i) จากค่าเฉลี่ย $\bar{Y}$ ในเทอมของค่าประมาณที่ i$(\hat{Y}_i)$ ได้ดังนี้

$$Y_i - \bar{Y} = \left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right) + \left(Y_i - \hat{Y}_i\right)$$

เมื่อหาผลรวมกำลังสองทั้งสองข้างจะได้

$$\sum\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2 = \sum\left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2 + \sum\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2$$

หรือ $\quad SST = SSR(X_1\,X_2\,\ldots\,X_k) + SSE(X_1\,X_2\,\ldots\,X_k)$

เมื่อ $SSR(X_1\,X_2\,\ldots\,X_k)$ เป็นผลรวมกำลังสองเนื่องจากการถดถอยกรณีใช้ตัวแปรอิสระ k ตัวแปร ได้แก่ $X_1\,X_2\,\ldots\,X_k$ หรือส่วนของ SST ที่อธิบายได้ด้วยตัวแปรอิสระ $X_1\,X_2\,\ldots\,X_k$ ตัวอย่างการแบ่งส่วนของ SST เมื่อจำนวนตัวแปรอิสระต่างกัน

เมื่อ $k = 1 \quad SST = SSR(X_1) + SSE(X_1)$

เมื่อ $k = 2 \quad SST = SSR(X_1\,X_2) + SSE(X_1\,X_2)$

เมื่อ $k = 3 \quad SST = SSR(X_1\,X_2\,X_3) + SSE(X_1\,X_2\,X_3)$

จะเห็นได้ว่า ผลรวมกำลังสองไม่ว่าจะมีตัวแปรอิสระกี่ตัวแปรก็สามารถคำนวณในเทอมเมตริกซ์ได้จาก

$$SST = \underline{Y}'\underline{Y} - n\bar{Y}^2$$

$$SSR\left(X_1X_2\ldots X_k\right) = \underline{b}'X'\underline{Y} - n\bar{Y}^2$$

$$SSE\left(X_1X_2\ldots X_k\right) = \underline{Y}'\underline{Y} - \underline{b}'X'\underline{Y}$$

เช่น กรณีเมื่อ $k = 2$

$$\underline{Y}'\underline{Y} = \sum Y_i^2 \quad , \quad \underline{b}'X'\underline{Y} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_{1i}Y_i \\ \sum X_{2i}Y_i \end{bmatrix} = b_0\sum Y_i + b_1\sum X_{1i}Y_i + b_2\sum X_{2i}Y_i$$

ซึ่งหา $\underline{b}$ ได้จาก $\underline{b} = \left(X'X\right)^{-1}X'\underline{Y}$ เป็นต้น

ในกรณีที่สนใจว่า เมื่อกำหนดตัวแปรอิสระ X_1 ในรูปแบบแล้ว การเพิ่มตัวแปรอิสระอีกหนึ่งตัวแปรได้แก่ X_2 เข้าในรูปแบบ จะมีส่วนใน SST เพิ่มมากขึ้นเท่าใด จะวัดจาก $SSR(X_2/X_1)$ ซึ่งเป็นส่วนของ $SSR(X_1\,X_2)$ ที่เนื่องจากการเพิ่มตัวแปรอิสระ X_2 เมื่อมีตัวแปรอิสระ X_1 ในรูปแบบแล้ว นั่นคือ

$$SSR(X_2/X_1) = SSR(X_1\,X_2) - SSR(X_1)$$

หลักในการหา SSR ที่เพิ่มขึ้น จากการเพิ่มตัวแปรอิสระตัวหนึ่งหรือหลายตัวเมื่อมีตัวแปรอิสระอื่นอยู่ในรูปแบบแล้วนี้ จะใช้ได้กับรูปแบบการถดถอยที่มีจำนวนตัวแปรอิสระเท่าใดก็ได้ เช่น เมื่อมีตัวแปรอิสระ 4 ตัวแปร X_1 X_2 X_3 X_4 จะหาส่วนของ SST ที่เนื่องจาก X_2 และ X_4 เมื่อมีตัวแปร X_1 และ X_3 อยู่ในรูปแบบแล้วโดย

$$SSR(X_2\ X_4\ /X_1\ X_3) = SSR(X_1\ X_2\ X_3\ X_4) - SSR(X_1\ X_3)$$

การแบ่งส่วนของ SSR มี 2 แบบคือ การแบ่งส่วนของ SSR แบบต่อเนื่องและการแบ่งส่วนของ SSR แบบบางส่วน กรณีตัวแปรอิสระ 3 ตัวแปรได้แก่ X_1 X_2 และ X_3 การแบ่งส่วนของ SSR(X_1 X_2 X_3) มีรายละเอียดดังนี้

1. ในการแบ่งส่วนของ SSR แบบต่อเนื่อง แต่ละส่วนที่แบ่งได้นั้นจะต้องนำมารวมกันเท่ากับ SSR(X_1 X_2 X_3) เช่น

$$SSR(X_1\ X_2\ X_3) = SSR(X_1) + SSR(X_2\ /\ X_1) + SSR(X_3\ /\ X_1\ X_2)$$

2. ในการแบ่งส่วนของ SSR แบบบางส่วน แต่ละส่วนที่แบ่งได้นั้นจะนำมารวมกันไม่เท่ากับ SSR(X_1 X_2 X_3) เช่น

$$SSR(X_1\ X_2\ X_3) \neq SSR(X_1\ /\ X_2\ X_3) + SSR(X_2\ /\ X_1\ X_3) + SSR(X_3\ /\ X_1\ X_2)$$

2.1.4 ค่าวัดประสิทธิภาพของรูปแบบ

เมื่อกำหนดรูปแบบการถดถอยให้กับข้อมูลตัวอย่างแล้ว จะทำการสร้างสมการถดถอยตามรูปแบบการถดถอยนั้น อย่างไรก็ตามรูปแบบการถดถอยที่กำหนดไว้ อาจจะเหมาะสมกับข้อมูลตัวอย่างหรือไม่ก็ได้ ดังนั้น ในการพิจารณาความเหมาะสมของรูปแบบการถดถอย จะได้จากค่าสถิติที่ใช้วัดประสิทธิภาพของรูปแบบและจากการทดสอบสมมติฐาน ค่าวัดประสิทธิภาพของรูปแบบมีอยู่หลายค่า เช่น ผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อน(SSE) ค่าเฉลี่ยกำลังสองของความคลาดเคลื่อน(MSE) ค่าสัมประสิทธิ์ตัวกำหนด(R^2) และค่าสัมประสิทธิ์ตัวกำหนดปรับแล้ว (R_a^2) เป็นต้น ค่าสถิติเหล่านี้จะใช้วัดประสิทธิภาพของรูปแบบมีรายละเอียดดังนี้

1. ค่าผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อน(Sum Square Error : SSE) เป็นค่าวัดที่ยังไม่มีเกณฑ์แน่นอนว่า รูปแบบที่เหมาะสมจะต้องมีค่า SSE เป็นเท่าใด แต่รูปแบบการถดถอยที่เหมาะสมควรจะเป็นรูปแบบที่มีค่า SSE น้อยที่สุด

2. ค่าเฉลี่ยกำลังสองของความคลาดเคลื่อน(Mean Square Error : MSE) เป็นค่าวัดที่เป็นฟังก์ชันของ SSE นั่นคือ เป็นค่า SSE ที่ปรับด้วยชั้นแห่งความเป็นอิสระ ซึ่ง $MSE = \frac{SSE}{n-k-1}$ สำหรับรูปแบบการถดถอยที่มีจำนวนตัวแปรอิสระต่างกัน แต่มี SSE เท่ากัน รูปแบบที่มีจำนวนตัวแปรอิสระน้อยกว่าจะให้ค่า MSE ที่ต่ำกว่า ค่า MSE จากรูปแบบที่มีจำนวนตัวแปรอิสระมากกว่า นอกจากการใช้ค่า SSE และ MSE เพื่อวัดประสิทธิภาพของรูปแบบแล้ว ยังมีผู้ใช้ค่ารากที่สองของ MSE หรือ RMSE ซึ่ง RMSE = $\sqrt{MSE}$ ในการพิจารณาความเหมาะสมของรูปแบบ กรณีที่ใช้ค่าMSE หรือRMSE ในการพิจารณารูปแบบที่เหมาะสม รูปแบบที่ให้ค่า MSE หรือ RMSE ต่ำที่สุดจะเป็นรูปแบบที่เหมาะสมที่สุด ซึ่งเป็นทำนองเดียวกับการใช้ค่า SSE

3. ค่าสัมประสิทธิ์ตัวกำหนด(Coefficient of determination : R^2) เป็นค่าสถิติที่ใช้ในการวัดค่าว่า ตัวแปรอิสระที่อยู่ในรูปแบบการถดถอยมีส่วนในการอธิบายความผันแปรรวม $\sum\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2$ มากน้อยเท่าใด รูปแบบที่เหมาะสมที่สุดจะเป็นรูปแบบที่ให้ค่า R^2 สูงสุด ค่า R^2 จะเป็นสัดส่วนของ SSR กับ SST เนื่องจาก SST = SSR + SSE ทำให้ค่า R^2 จึงมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1-\frac{SSE}{SST}$$

โดยทั่วไปจะอธิบายค่าของ R^2 เป็นเปอร์เซนต์แทนการอธิบายด้วยสัดส่วน เช่น สำหรับรูปแบบการถดถอยที่มีตัวแปรอิสระ X_1 และ X_2 ที่มี $R^2 = 0.8921$ จะอธิบายได้ว่าตัวแปรอิสระ X_1 และ X_2 มีส่วนในการอธิบายความผันแปรรวม $\sum\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2$ ได้ดี 89.21 เปอร์เซนต์ เป็นต้น เนื่องจาก R^2 แปรผันกับ SSE ดังนั้นเมื่อ SSE มีค่าน้อย R^2 จะมีค่ามากหรือเข้าใกล้ 1 และเมื่อ SSE มีค่ามาก R^2 จะมีค่าน้อยหรือเข้าใกล้ 0

4. ค่าสัมประสิทธิ์ตัวกำหนดที่ปรับแล้ว (Adjusted coefficient of determination : R_a^2) เป็นค่าสถิติที่นำมาใช้วัดว่าตัวแปรอิสระที่อยู่ในรูปแบบการถดถอย มีส่วนในการอธิบายความแปรปรวน (S_y^2) มากน้อยเพียงใด รูปแบบที่เหมาะสมที่สุดจะเป็นรูปแบบที่ให้ค่า R_a^2 สูงสุด ค่า R_a^2 จะแตกต่างจากค่า R^2 ที่ค่า R_a^2 คำนึงถึงชั้นแห่งความเป็นอิสระของ SSE และ SST นั่นคือ จะพิจารณา MSE แทน SSE และ S_y^2 แทน SST

$$R_a^2 = 1-\frac{SSE/(n-k-1)}{SST/(n-1)}$$
$$= 1-\frac{MSE}{S_y^2}$$

เมื่อ n มีขนาดใหญ่ ค่า R_a^2 จะใกล้เคียงกับค่า R^2 ในการเปรียบเทียบรูปแบบการถดถอยสองรูปแบบที่มีจำนวนตัวแปรอิสระต่างกันแต่มีค่า SSE เท่ากัน รูปแบบที่มีจำนวนตัวแปรอิสระมากจะมีค่า R_a^2 น้อยกว่าค่า R_a^2 ของรูปแบบที่มีจำนวนตัวแปรอิสระน้อย เนื่องจาก R_a^2 แปรผกผันกับ MSE หรือ R_a^2 เป็นฟังก์ชันของ MSE

2.1.5 การทดสอบสมมติฐาน

ในการวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นตรงแบบพหุที่มีตัวแปรอิสระหลายตัวแปร สมมติฐานที่สนใจจะเกี่ยวข้องกับค่าของพารามิเตอร์ในรูปแบบ เช่น

β_i มีค่าเท่ากับค่าคงที่ค่าใดค่าหนึ่งที่กำหนดหรือไม่ จะเขียนได้เป็น $H_O : \beta_i = c$

$\underline{X}_0'\underline{\beta}$ มีค่าเท่ากับค่าคงที่ค่าใดค่าหนึ่งที่กำหนดหรือไม่ จะเขียนได้เป็น $H_O : \underline{X}_0'\underline{\beta} = c$

β_i สำหรับ i = 1 , 2 , … , m ($m \le k$) มีค่าเท่ากันหรือไม่ จะเขียนได้เป็น
H_O: $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_m = 0$

β_i สำหรับ i = 1 , 2 , … , k มีค่าเท่ากันหรือไม่ จะเขียนได้เป็น H_O: $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k = 0$

การทดสอบสมมติฐานดังกล่าวข้างต้น จะใช้การทดสอบแบบ t แบบ F และแบบ F บางส่วน ดังรายละเอียดของการทดสอบต่อไปนี้

1. การทดสอบแบบ t ใช้สำหรับการทดสอบที่สมมติฐานหลักเขียนได้เป็นหนึ่งสมการของพารามิเตอร์ เช่น กรณีตัวแปรอิสระ k ตัว จะทดสอบ H_O ต่างๆ ได้แก่ $\beta_i = 0$ สำหรับ i = 1 , 2 , … , k $\beta_1 = \beta_2$ หรือ $\beta_1 - \beta_2 = 0$ เป็นต้น และแสดงการทดสอบสมมติฐานแบบ t ในตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 แสดงสมมติฐาน ตัวทดสอบสถิติ และช่วงวิกฤติสำหรับการทดสอบแบบ t

H_O	H_1	ตัวทดสอบสถิติ	การแจกแจงของตัวทดสอบ	ช่วงวิกฤติ
1. $\beta_i = \beta_{i0}$	$\beta_i \neq \beta_{i0}$ $\beta_i > \beta_{i0}$ $\beta_i < \beta_{i0}$	$t = \frac{b_i - \beta_{i0}}{S_{b_i}}$ เมื่อ $S_{b_i}^2 = a_{ii}S^2$	t ที่ชั้นแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ n-k-1	$\lvert t \rvert \geq t_{\frac{\alpha}{2},(n-k-1)}$ $t \geq t_{\alpha,(n-k-1)}$ $t \leq -t_{\alpha,(n-k-1)}$
2. $\underline{X}_0'\underline{\beta} = c$	$\underline{X}_0'\underline{\beta} \neq c$ $\underline{X}_0'\underline{\beta} > c$ $\underline{X}_0'\underline{\beta} < c$	$t = \frac{\underline{X}_0'\underline{b} - c}{\sqrt{\underline{X}_0'(X'X)^{-1}\underline{X}_0 S^2}}$	t ที่ชั้นแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ n-k-1	$\lvert t \rvert \geq t_{\frac{\alpha}{2},(n-k-1)}$ $t \geq t_{\alpha,(n-k-1)}$ $t \leq -t_{\alpha,(n-k-1)}$

เมื่อค่า a_{ii} เป็นสมาชิกแนวกลางที่ i ของเมตริกซ์ผกผัน $(X'X)^{-1}$

2. การทดสอบแบบ F จะใช้สำหรับการทดสอบสมมติฐานลักษณะต่างๆ ดังนี้

ก. จากรูปแบบเต็ม $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k + \varepsilon$ ทดสอบ

H_O : $\beta_1 = \beta_2 = \ldots \beta_k = 0$

H_1 : β_i สำหรับ i = 1 , 2 , … , k อย่างน้อยหนึ่งค่าไม่เป็น 0

ข. จากรูปแบบเต็ม $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k + \varepsilon$ ทดสอบ

H_O : $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ เมื่อ $k > 3$

H_1 : β_1 , β_2 และ β_3 อย่างน้อยหนึ่งค่าไม่เป็น 0

ค. จากรูปแบบเต็ม $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k + \varepsilon$ ทดสอบ

H_O : $\beta_i = 0$

H_1 : $\beta_i \neq 0$ สำหรับ i = 1 , 2 , … , k

ตัวทดสอบสถิติ F ที่ใช้ในการทดสอบ จะเป็นผลจากการแบ่งส่วนของผลรวมกำลังสองรวม SST ออกเป็นส่วนๆ ซึ่งการแบ่งส่วนจะขึ้นอยู่กับสมมติฐานที่ต้องการทดสอบ ในที่นี้สมมติตัวแปรอิสระ 3 ตัวแปร สามารถทำการทดสอบสมมติฐานได้ดังนี้

1. จากรูปแบบเต็ม $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon$ ต้องการทดสอบ

$H_O : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$

$H_1 : \beta_1 , \beta_2$ และ β_3 อย่างน้อยหนึ่งค่าไม่เป็น 0

รูปแบบลดรูปตามสมมติฐานหลักเป็น $Y = \beta_0 + \varepsilon$ จะแบ่งส่วน SST ออกเป็น

$$SST = SSR(X_1 X_2 X_3) + SSE(X_1 X_2 X_3)$$

ตัวทดสอบสถิติ F สำหรับการทดสอบนี้ จะเป็นตัวทดสอบสถิติที่เปรียบเทียบ SSR $(X_1X_2X_3)$ และ SSE$(X_1X_2X_3)$ ที่ปรับด้วยชั้นแห่งความเป็นอิสระที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

$$F = \frac{SSR(X_1X_2X_3)/3}{SSE(X_1X_2X_3)/(n-4)}$$

$$= \frac{MSR(X_1X_2X_3)}{MSE(X_1X_2X_3)}$$

จะปฏิเสธ H_O ที่ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ $F \geq F_{\alpha,(3,n-4)}$

2. จากรูปแบบเต็ม $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon$ ต้องการทดสอบ

$H_O : \beta_3 = 0$

$H_1 : \beta_3 \neq 0$

รูปแบบลดรูปตามสมมติฐานหลักเป็น $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$ จะแบ่งส่วน SST ออกเป็น

$$SST = SSR(X_1 X_2 X_3) + SSE(X_1 X_2 X_3)$$

จากนั้นจะแบ่ง SSR $(X_1 X_2 X_3)$ ออกเป็น

$$SSR(X_1 X_2 X_3) = SSR(X_3 / X_1 X_2) + SSR(X_1 X_2)$$

ตัวทดสอบสถิติ F เป็นตัวทดสอบสถิติที่ใช้ในการเปรียบเทียบ SSR(X_3/X_1X_2) กับ SSE $(X_1 X_2 X_3)$ ที่ปรับด้วยชั้นแห่งความเป็นอิสระที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

$$F = \frac{SSR(X_3 / X_1X_2)}{SSE(X_1X_2X_3)/(n-4)}$$

$$= \frac{MSR(X_3 / X_1X_2)}{MSE(X_1X_2X_3)}$$

จะปฏิเสธ H_O ที่ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ $F \geq F_{\alpha, (1, n-4)}$

3. จากรูปแบบเต็ม $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon$ ต้องการทดสอบ

$H_O: \beta_2 = \beta_3 = 0$

$H_1: \beta_2$ และ β_3 อย่างน้อยหนึ่งค่าไม่เป็น 0

รูปแบบลดรูปตามสมมติฐานหลักเป็น $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \varepsilon$ จะแบ่งส่วน SST ออกเป็น

$$SST = SSR(X_1 X_2 X_3) + SSE(X_1 X_2 X_3)$$

และแบ่ง $SSR(X_1 X_2 X_3)$ ออกได้เป็น

$$SSR(X_1 X_2 X_3) = SSR(X_2 X_3 / X_1) + SSR(X_1)$$

ตัวทดสอบสถิติ F ในการทดสอบครั้งนี้ จะเป็นตัวทดสอบสถิติที่ใช้ในการเปรียบเทียบ $SSR(X_2 X_3 / X_1)$ กับ $SSE(X_1 X_2 X_3)$ ที่ปรับด้วยชั้นแห่งความเป็นอิสระที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

$$F = \frac{SSR(X_2X_3 / X_1)/2}{SSE(X_1X_2X_3)/(n-4)}$$

$$= \frac{MSR(X_2X_3 / X_1)}{MSE(X_1X_2X_3)}$$

จะปฏิเสธ H_O ที่ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ $F \geq F_{\alpha, (2, n-4)}$

ในรูปแบบการถดถอยจะเรียกการทดสอบแบบ F สำหรับการทดสอบทุกตัวแปรอิสระไม่มีส่วนในการอธิบายความผันแปรของ Y ว่า การทดสอบแบบ F รวม (overall F test) และเรียกการทดสอบแบบ F สำหรับการทดสอบตัวแปรอิสระบางตัวไม่มีส่วนในการอธิบายความผันแปรของ Y ว่าการทดสอบแบบ F บางส่วน (partial F test) และสามารถแสดงการทดสอบสมมติฐานแบบ F ในตารางที่ 2.2

ตารางที่ 2.2 แสดงสมมติฐาน ตัวทดสอบสถิติ และช่วงวิกฤติสำหรับการทดสอบแบบ F

H_O	H_1	ตัวทดสอบสถิติ	ช่วงวิกฤติ
$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$	β_i (i = 1 , 2 , 3) อย่างน้อยหนึ่งค่าไม่เป็น 0	$F = \dfrac{SSR(X_1X_2X_3)/3}{SSE(X_1X_2X_3)/(n-4)}$	$F \geq F_{\alpha,(3,n-4)}$
$\beta_3 = 0$	$\beta_3 \neq 0$	$F = \dfrac{SSR(X_3/X_1X_2)}{SSE(X_1X_2X_3)/(n-4)}$	$F \geq F_{\alpha,(1,n-4)}$
$\beta_2 = \beta_3 = 0$	β_2 และ β_3 อย่างน้อยหนึ่งค่าไม่เป็น 0	$F = \dfrac{SSR(X_2X_3/X_1)/2}{SSE(X_1X_2X_3)/(n-4)}$	$F \geq F_{\alpha,(2,n-4)}$

2.2 ตัวแปรดัมมี่กับการวิเคราะห์การถดถอยพหุ

ในการวิเคราะห์การถดถอยโดยทั่วไปจะเน้นศึกษาเฉพาะตัวแปรเชิงปริมาณ เพราะสามารถวัดค่าออก มาได้ ทำให้ง่ายต่อการนำไปวิเคราะห์ และมองข้ามตัวแปรเชิงคุณภาพซึ่งก็มีอิทธิพลต่อตัวแปรตามเช่นกัน ซึ่งตัวแปรเชิงคุณภาพจะถือเป็นตัวแปรจัดประเภท (Categorical variable) หรือตัวแปรดัมมี่ (Dummy variable) ดังนั้น ตัวแปรดัมมี่เป็นตัวแปรที่สร้างขึ้นเพื่อระบุกลุ่มหรือชุดที่ค่าสังเกตนั้นอยู่ จะกำหนดค่าของตัวแปรดัมมี่เป็น 1 หรือ 0 ซึ่งตัวแปรดัมมี่จะมีค่าเท่ากับ 1 เมื่อค่าสังเกตนั้นอยู่ในกลุ่มที่สนใจ และมีค่าเป็น 0 เมื่อค่าสังเกตนั้นไม่อยู่ในกลุ่มที่สนใจ กรณีที่แบ่งข้อมูลได้เป็น L กลุ่ม จะสร้างตัวแปรดัมมี่จำนวน L – 1 ตัวแปร จะเห็นว่า เมื่อข้อมูลที่รวบรวมมานั้นมีตัวแปรเชิงคุณภาพรวมอยู่ด้วย ก็สามารถนำเอาตัวแปรดัมมี่มาช่วยในการวิเคราะห์ได้ ในการวิเคราะห์การถดถอยเมื่อมีตัวแปรดัมมี่เป็นตัวแปรอิสระ เราสามารถวิเคราะห์การถดถอยโดยแยกเป็นกรณีต่างๆ ดังนี้

กรณีที่ 1 ตัวแปรดัมมี่สำหรับข้อมูลมีเพียงสองกลุ่ม

เมื่อข้อมูลแยกออกได้เป็นสองกลุ่ม โดยในแต่ละกลุ่ม ตัวแปรอิสระ X และตัวแปรตาม Y มีความสัมพันธ์แบบเส้นตรง จะกำหนดรูปแบบการถดถอยที่มีตัวแปรดัมมี่ D แทนกลุ่ม สิ่งที่สนใจจะพิจารณาจากรูปแบบการถดถอยดังกล่าว ได้แก่ สมการถดถอยเชิงเส้นตรงที่สร้างขึ้นจากข้อมูลสองกลุ่มมีความเหมือนหรือต่างกันอย่างไร ดังนี้

1. เส้นการถดถอยสองเส้นทับกันหรือไม่

2. เส้นการถดถอยสองเส้นขนานกันหรือไม่ กล่าวคือ มีจุดที่เส้นการถดถอยตัดแกน Y ต่างกัน แต่มีความลาดชันเดียวกันหรือไม่
3. เส้นการถดถอยสองเส้นมีจุดที่เส้นการถดถอยตัดแกน Y เดียวกัน แต่มีความลาดชันต่างกันหรือไม่
4. เส้นการถดถอยสองเส้นมีจุดที่เส้นการถดถอยตัดแกน Y ต่างกัน และมีค่าความลาดชันต่างกันหรือไม่

ลักษณะของเส้นการถดถอย 4 ลักษณะข้างต้น จะสร้างจากรูปแบบการถดถอย 4 รูปแบบ เมื่อกำหนดตัวแปรดัมมี่ D แทนกลุ่ม โดย

$$D = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อค่าสังเกตอยู่ในกลุ่มที่ 1} \\ 0 & \text{เมื่อค่าสังเกตอยู่ในกลุ่มที่ 2} \end{cases}$$

และกำหนดตัวแปร DX เป็นตัวแปรร่วมระหว่างตัวแปรดัมมี่ D และตัวแปรอิสระ X ดังตารางที่ 2.3

ตารางที่ 2.3 แสดงรูปแบบการถดถอยและสมการถดถอยสำหรับข้อมูลสองกลุ่ม

รูปแบบการถดถอย	**สมการถดถอย**
$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$	$\hat{Y} = b_0 + b_1 X$ สำหรับทั้งสองกลุ่ม
$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 D + \varepsilon$	$\hat{Y} = \begin{cases} (b_0 + b_2) + b_1 X & \text{สำหรับ } D = 1 \\ b_0 + b_1 X & \text{สำหรับ } D = 0 \end{cases}$
$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_3 DX + \varepsilon$	$\hat{Y} = \begin{cases} b_0 + (b_1 + b_3)X & \text{สำหรับ } D = 1 \\ b_0 + b_1 X & \text{สำหรับ } D = 0 \end{cases}$
$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 D + \beta_3 DX + \varepsilon$	$\hat{Y} = \begin{cases} (b_0 + b_2) + (b_1 + b_3)X & \text{สำหรับ } D = 1 \\ b_0 + b_1 X & \text{สำหรับ } D = 0 \end{cases}$

และสามารถเขียนรูปแบบการถดถอยได้ดังนี้

1. รูปแบบการถดถอยทั่วไป

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 D + \beta_3 DX + \varepsilon$$

จะแทนกรณีทั้ง 2 กลุ่ม มีเส้นการถดถอยที่ต่างกันทั้งจุดที่เส้นการถดถอยตัดแกน Y และค่าความลาดชัน สามารถทำการทดสอบสมมติฐานได้ดังนี้

$H_o : \beta_2 = \beta_3 = 0$

$H_1 : \beta_i$ อย่างน้อยหนึ่งค่าที่ไม่เป็น 0 ; $i = 2, 3$

ตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบคือ

$$F = \frac{SSR(D, DX / X)/2}{SSE(X, D, DX)/(n-4)}$$

และจะปฏิเสธ H_o เมื่อ $F \geq F_{\alpha,(2,n-4)}$

2. เมื่อ $\beta_2 = 0$ จะเขียนรูปแบบการถดถอยทั่วไปใหม่เป็น

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_3 DX + \varepsilon$$

รูปแบบใหม่จะแทนกรณีที่ทั้งสองกลุ่มมีเส้นการถดถอยซึ่งมีจุดที่เส้นการถดถอยตัดแกน Y เดียวกันแต่มีความลาดชันต่างกัน สามารถทำการทดสอบสมมติฐานได้ดังนี้

$H_o : \beta_2 = 0$

$H_1 : \beta_2 \neq 0$

ตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบคือ

$$F = \frac{SSR(D / X, DX)/1}{SSE(X, D, DX)/(n-4)}$$

และจะปฏิเสธ H_o เมื่อ $F \geq F_{\alpha,(1,n-4)}$

3. เมื่อ $\beta_3 = 0$ จะเขียนรูปแบบการถดถอยทั่วไปใหม่เป็น

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 D + \varepsilon$$

รูปแบบใหม่จะแทนกรณีทั้งสองกลุ่มมีเส้นถดถอยที่ขนานกัน นั่นคือ มีจุดที่เส้นการถดถอยตัดแกน Y ต่างกันแต่มีความลาดชันเท่ากัน สามารถทำการทดสอบสมมติฐานได้ดังนี้

$$H_o : \beta_3 = 0$$

$$H_1 : \beta_3 \neq 0$$

ตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบคือ

$$F = \frac{SSR\left(DX / X, D\right)/1}{SSE\left(X, D, DX\right)/\left(n-4\right)}$$

และจะปฏิเสธ H_o เมื่อ $F \geq F_{\alpha,(1,n\text{-}4)}$

เมื่อทดสอบสมมติฐานพบว่า ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระ X และตัวแปรตาม Y ของแต่ละกลุ่มเป็นอย่างใดแล้ว จะสร้างสมการถดถอยตามรูปแบบการถดถอยที่ทดสอบได้ และนำสมการถดถอยที่ได้ไปอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระ X และตัวแปรตาม Y สำหรับข้อมูลสองกลุ่ม

กรณีที่ 2 ตัวแปรดัมมี่สำหรับข้อมูลมีมากกว่าสองกลุ่ม

เมื่อข้อมูลแยกออกได้เป็นหลายกลุ่ม โดยในแต่ละกลุ่มตัวแปรอิสระX และตัวแปรตาม Y มีความสัมพันธ์กันแบบเส้นตรง การตรวจสอบว่าเส้นการถดถอยในแต่ละกลุ่มเป็นเส้นเดียวกัน เป็นเส้นขนานกันหรือมีจุดที่เส้นการถดถอยตัดแกน Y ต่างกันแต่มีความลาดชันเดียวกัน เป็นเส้นที่จุดที่เส้นการถดถอยตัดแกน Y เดียวกันแต่ความลาดชันต่างกัน หรือเป็นเส้นที่มีจุดที่เส้นการถดถอยตัดแกน Y ต่างกันและค่าความลาดชันต่างกันหรือไม่ จะทำได้โดยการกำหนดตัวแปรดัมมี่แทนกลุ่ม จำนวนตัวแปรดัมมี่จะเท่ากับจำนวนกลุ่มหักออกด้วย 1 เช่น กรณีแบ่งข้อมูลออกเป็น 3 กลุ่ม จะกำหนดตัวแปรดัมมี่สองตัวแปรได้แก่ D_1 และ D_2 เมื่อ

$$D_1 = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อค่าสังเกตอยู่ในกลุ่มที่ 1} \\ 0 & \text{เมื่อค่าสังเกตไม่อยู่ในกลุ่มที่ 1} \end{cases}$$

$$D_2 = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อค่าสังเกตอยู่ในกลุ่มที่ 2} \\ 0 & \text{เมื่อค่าสังเกตไม่อยู่ในกลุ่มที่ 2} \end{cases}$$

และกำหนดตัวแปร D_1X , D_2X เป็นตัวแปรร่วมระหว่างตัวแปรดัมมี่ D และตัวแปรอิสระ X ดังในตาราง ที่ 2.4

ตารางที่ 2.4 แสดงรูปแบบการถดถอยและสมการถดถอยสำหรับข้อมูลสามกลุ่ม

รูปแบบการถดถอย	**สมการถดถอย**
1. $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$	$\hat{Y} = b_0 + b_1 X$ สำหรับทั้งสามกลุ่ม
2. $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 D_1 + \beta_3 D_2 + \varepsilon$	$\hat{Y} = \begin{cases} (b_0 + b_2) + b_1 X & \text{สำหรับ } D_1 = 1, D_2 = 0 \\ (b_0 + b_3) + b_1 X & \text{สำหรับ } D_1 = 0, D_2 = 1 \\ b_0 + b_1 X & \text{สำหรับ } D_1 = 0, D_2 = 0 \end{cases}$
3. $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_4 D_1 X + \beta_5 D_2 X + \varepsilon$	$\hat{Y} = \begin{cases} b_0 + (b_1 + b_4)X & \text{สำหรับ } D_1 = 1, D_2 = 0 \\ b_0 + (b_1 + b_5)X & \text{สำหรับ } D_1 = 0, D_2 = 1 \\ b_0 + b_1 X & \text{สำหรับ } D_1 = 0, D_2 = 0 \end{cases}$
4. $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 D_1 + \beta_3 D_2 + \beta_4 D_1 X + \beta_5 D_2 X + \varepsilon$	$\hat{Y} = \begin{cases} (b_0 + b_2) + (b_1 + b_4)X & \text{สำหรับ } D_1 = 1, D_2 = 0 \\ (b_0 + b_3) + (b_1 + b_5)X & \text{สำหรับ } D_1 = 0, D_2 = 1 \\ b_0 + b_1 X & \text{สำหรับ } D_1 = 0, D_2 = 0 \end{cases}$

และสามารถเขียนรูปแบบการถดถอยได้ดังนี้

1. รูปแบบการถดถอยทั่วไป

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 D_1 + \beta_3 D_2 + \beta_4 D_1 X + \beta_5 D_2 X + \varepsilon$$

จะแทนกรณีทั้ง3กลุ่ม มีเส้นการถดถอยที่ต่างกันทั้งจุดที่เส้นการถดถอยตัดแกน Y และค่าความลาดชัน สามารถทำการทดสอบสมมติฐานได้ดังนี้

H_o : $\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$

H_1 : β_i อย่างน้อยหนึ่งค่าที่ไม่เป็น 0 ; $i = 2, 3, 4, 5$

ตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบคือ

$$F = \frac{SSR\left(D_1, D_2, D_1X, D_2X / X\right)/4}{SSE\left(X, D_1, D_2, D_1X, D_2X\right)/\left(n-6\right)}$$

และจะปฏิเสธ H_o เมื่อ $F \geq F_{\alpha,(4,n\text{-}6)}$

2. เมื่อ $\beta_4 = \beta_5 = 0$ จะเขียนรูปแบบการถดถอยทั่วไปใหม่เป็น

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 D_1 + \beta_3 D_2 + \varepsilon$$

รูปแบบใหม่จะแทนกรณีทั้งสามกลุ่มมีเส้นถดถอยที่ขนานกัน นั่นคือ มีจุดที่เส้นการถดถอยตัดแกน Y ต่างกันแต่มีความลาดชันเท่ากัน สามารถทำการทดสอบสมมติฐานได้ดังนี้

$H_o : \beta_4 = \beta_5 = 0$

$H_1 : \beta_i$ อย่างน้อยหนึ่งค่าที่ไม่เป็น 0 ; $i = 4, 5$

ตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบคือ

$$F = \frac{SSR\left(D_1X, D_2X / X, D_1, D_2\right)/2}{SSE\left(X, D_1, D_2, D_1X, D_2X\right)/\left(n-6\right)}$$

และจะปฏิเสธ H_o เมื่อ $F \geq F_{\alpha,(2,n\text{-}6)}$

3. เมื่อ $\beta_2 = \beta_3 = 0$ จะเขียนรูปแบบการถดถอยทั่วไปใหม่เป็น

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_4 D_1 X + \beta_5 D_2 X + \varepsilon$$

รูปแบบใหม่จะแทนกรณีที่ทั้งสามกลุ่มมีเส้นการถดถอยซึ่งมีจุดที่เส้นการถดถอยตัดแกน Y เดียวกันแต่มีความลาดชันต่างกัน สามารถทำการทดสอบสมมติฐานได้ดังนี้

$H_o : \beta_2 = \beta_3 = 0$

$H_1 : \beta_i$ อย่างน้อยหนึ่งค่าที่ไม่เป็น 0 ; $i = 2, 3$

ตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบคือ

$$F = \frac{SSR\left(D_1, D_2 / X, D_1X, D_2X\right)/2}{SSE\left(X, D_1, D_2, D_1X, D_2X\right)/\left(n-6\right)}$$

และจะปฏิเสธ H_o เมื่อ $F \geq F_{\alpha,(2,n\text{-}6)}$

2.3 การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของประชากร 2 กลุ่มที่ไม่เป็นอิสระกัน

เป็นการศึกษาถึงสองประชากรที่ไม่อิสระกัน ซึ่งกลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่ม จะมีลักษณะดังนี้คือ

1. มีกลุ่มตัวอย่างเดียว แต่เก็บข้อมูล 2 ครั้ง เช่น ผู้วิจัยต้องการทราบผลการอบรมพนักงานทำให้ปริมาณเพิ่มขึ้นหรือไม่ จึงสุ่มพนักงานมากลุ่มหนึ่ง บันทึกปริมาณงานแต่ละวันของพนักงานกลุ่มนี้ และหลังจากการอบรมแล้ว บันทึกปริมาณงานของพนักงานกลุ่มนี้อีกครั้ง ตัวเลขคู่ลำดับของพนักงานแต่ละคนที่บันทึกไว้ก่อนและหลังการอบรม จะเป็นค่าของข้อมูลจากกลุ่มตัวอย่างที่ไม่เป็นอิสระกัน หรือเป็นข้อมูลที่จับคู่กัน (Matched pair)

2. แบ่งกลุ่มตัวอย่างออกเป็นคู่ๆ และในแต่ละคู่จะแยกเป็น 2 กลุ่มย่อย โดยถือว่าข้อมูลทั้ง 2 กลุ่มมีลักษณะคล้ายกัน เช่น มีคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเท่ากันเป็นคู่ๆ กลุ่มตัวอย่างย่อย 2 กลุ่มนี้จึงมีความสัมพันธ์กันหรือไม่เป็นอิสระกัน คุณสมบัติหรือลักษณะที่ใช้เป็นหลักในการจับคู่นี้ นอกจากจะใช้คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน อาจเป็น อายุ น้ำหนัก หรือลักษณะอื่นใดก็ได้ที่เหมาะสมกับปัญหาที่สนใจในครั้งนี้

สมมติตัวอย่างขนาด n จะมีค่าสังเกตที่วัดได้เป็นคู่ลำดับ ดังนี้

$(X_{11}, X_{12}), (X_{21}, X_{22}), \ldots, (X_{n1}, X_{n2})$

ค่าความแตกต่างระหว่างแต่ละคู่จะเป็นดังนี้

$d_i = X_{i1} - X_{i2} \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, n$

ให้ : $\mu_d = \mu_1 - \mu_2$ เมื่อ μ_1, μ_2 คือค่าเฉลี่ยของประชากรแต่ละกลุ่มย่อย โดยมีขั้นตอนในการทดสอบดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 ตั้งสมมติฐานแบบใดแบบหนึ่งเกี่ยวกับผลต่างค่าเฉลี่ยของประชากรที่ไม่เป็นอิสระกัน

แบบ A $H_O : \mu_d = d_0 \quad ; \quad H_1 : \mu_d \neq d_0$

แบบ B $H_O : \mu_d = d_0 \quad ; \quad H_1 : \mu_d < d_0$

แบบ C $H_O : \mu_d = d_0 \quad ; \quad H_1 : \mu_d > d_0$

ขั้นที่ 2 คำนวณค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบสมมติฐานภายใต้ H_O ดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้าประชากรมีการแจกแจงแบบปกติ และทราบค่า σ_d^2

$$Z = \frac{\bar{d} - d_0}{\sigma_d / \sqrt{n}} \sim N(0\ ,\ 1)$$

กรณีที่ 2 ถ้าประชากรมีการแจกแจงแบบปกติ แต่ไม่ทราบค่า σ_d^2

$$t = \frac{\bar{d} - d_0}{S_d / \sqrt{n}} \sim t_{df = n-1}$$

กรณีที่ 3 ถ้าไม่ทราบการแจกแจงของประชากร แต่ขนาด n มีค่ามาก ($n \geq 30$)

$$Z = \frac{\bar{d} - d_0}{S_d / \sqrt{n}} \sim N(0\ ,\ 1)$$

เมื่อ $\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$; $S_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \bar{d}\right)^2}{n-1}$

ขั้นที่ 3 กำหนดระดับนัยสำคัญเท่ากับ α และกำหนดช่วงวิกฤตสำหรับการทดสอบสมมติฐานได้ดังตารางที่ 2.5

ตารางที่ 2.5 แสดงสมมติฐาน ตัวทดสอบสถิติ และช่วงวิกฤติสำหรับการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของประชากร 2 กลุ่มที่ไม่เป็นอิสระกัน

H_O	H_1	การแจกแจงของตัวทดสอบ	ช่วงวิกฤติ
$\mu_d = d_0$	$\mu_d \neq d_0$	$Z \sim N(0\ ,\ 1)$ $t \sim t_{df = n-1}$	$\lvert Z \rvert \geq Z_{\frac{\alpha}{2}}$ $\lvert t \rvert \geq t_{\frac{\alpha}{2},(n-1)}$
$\mu_d = d_0$	$\mu_d < d_0$	$Z \sim N(0\ ,\ 1)$ $t \sim t_{df = n-1}$	$Z \leq -Z_{\alpha}$ $t \leq -t_{\alpha\ ,\ (n-1)}$
$\mu_d = d_0$	$\mu_d > d_0$	$Z \sim N(0\ ,\ 1)$ $t \sim t_{df = n-1}$	$Z \geq Z_{\alpha}$ $t \geq t_{\alpha\ ,\ (n-1)}$

2.4 การหาคุณภาพแบบทดสอบ

คุณภาพของแบบทดสอบเกี่ยวข้องกับองค์ประกอบที่สำคัญ ดังนี้

1. ความเที่ยงตรง (Validity)

ความเที่ยงตรงถือเป็นคุณภาพของแบบทดสอบ หมายความว่า แบบทดสอบที่ผู้สอนได้สร้างไว้สามารถวัดได้ตรงตามวัตถุประสงค์ที่ต้องการจะวัด แบบทดสอบที่ดีจะต้องนำไปทดสอบเพื่อหาคุณภาพด้านความเที่ยงตรง จะถือได้ว่าเป็นแบบทดสอบที่มีคุณภาพตามวัตถุประสงค์ที่จะวัด และผลที่ได้จากการวัดจะถูกต้องตรงตามความต้องการ ความเที่ยงตรงของแบบทดสอบจำแนกเป็น 3 แบบ ดังนี้

1.1 ความเที่ยงตรงตามเนื้อหา

ความเที่ยงตรงตามเนื้อหา (content validity) หมายถึง การที่ผู้สอนออกแบบทดสอบได้ตรงตามเนื้อหาที่สอน ในการทดสอบความเที่ยงตรงตามเนื้อหาสามารถดำเนินการได้โดยใช้ผู้เชี่ยวชาญในด้านเนื้อหา พิจารณาถึงความสอดคล้องระหว่างวัตถุประสงค์กับแบบทดสอบ โดยพิจารณาเป็นรายข้อ วิธีการพิจารณาแบบนี้จะเรียกว่า การหาค่าสัมประสิทธิ์ความสอดคล้อง (Index of Item-Objective Congruence :IQC) โดยมีสูตรการคำนวณดังนี้

$$IQC = \frac{\sum R}{N}$$

เมื่อ IQC คือ ความสอดคล้องระหว่างวัตถุประสงค์กับแบบทดสอบ

$\sum R$ คือ ผลรวมของคะแนนจากผู้เชี่ยวชาญทั้งหมด

N คือ จำนวนผู้เชี่ยวชาญ

ในการตรวจสอบค่าความเที่ยงตรงด้านเนื้อหาสามารถทำได้ โดยนำแบบทดสอบให้ผู้เชี่ยวชาญพิจารณาว่า ข้อสอบแต่ละข้อมีความสอดคล้องกับวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมหรือไม่อย่างไร ถ้ามีความสอดคล้องกันผู้เชี่ยวชาญจะให้ค่าเป็น “+1” แต่ถ้าผู้เชี่ยวชาญเห็นว่าข้อสอบข้อนั้นไม่มีความสอดคล้องกับวัตถุประสงค์จะให้ค่าเป็น “-1” และในกรณีที่ผู้เชี่ยวชาญไม่แน่ใจว่าข้อสอบข้อนั้นมีความสอดคล้องกับวัตถุประสงค์หรือไม่ ก็จะให้ค่าเป็น “0”

1.2 ความเที่ยงตรงตามเกณฑ์สัมพันธ์

ความเที่ยงตรงตามเกณฑ์สัมพันธ์ (criterion related validity) หมายถึง การวัดคุณภาพของแบบทดสอบ โดยเอาผลการวัดของแบบทดสอบไปหาความสัมพันธ์กับเกณฑ์ที่กำหนด เช่น ระดับผลการ

เรียน เป็นต้น ถ้าผู้เรียนที่มีระดับผลการเรียนดี เมื่อทำข้อสอบชุดนั้นแล้วพบว่าได้คะแนนสูง แสดงว่า แบบทดสอบนั้นมีความเที่ยงตรงตามเกณฑ์สัมพันธ์ดี แต่ถ้ามีผลตรงกันข้าม แสดงว่า แบบทดสอบนั้นไม่มีความเที่ยงตรง การทดสอบความเที่ยงตรงตามเกณฑ์สัมพันธ์จัดแบ่งออกเป็น 2 ชนิด ดังนี้

(1) ความเที่ยงตรงเชิงสภาพ (concurrent validity) หมายถึง การนำเอาผลการวัดจากแบบทดสอบไปหาความสัมพันธ์กับผลการเรียนอื่นๆ ของผู้เรียนในปัจจุบัน เช่น การนำเอาผลการวัดจากแบบทดสอบเกี่ยวกับคอมพิวเตอร์เบื้องต้นที่สร้างขึ้น ไปหาความสัมพันธ์กับคะแนนการปฏิบัติการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ต่างๆ เป็นต้น ถ้าผลการหาความสัมพันธ์มีความสัมพันธ์กันสูง กล่าวคือ ผู้เรียนที่มีทักษะการปฏิบัติการงานด้านโปรแกรมคอมพิวเตอร์สูงจะทำแบบทดสอบนั้นได้ ทำนองเดียวกันคนที่ไม่มีทักษะการปฏิบัติการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ก็จะทำแบบทดสอบนั้นไม่ได้ ถ้าผลการหาความสัมพันธ์เป็นไปในทางเดียวกันคือ มีความสัมพันธ์กันสูง แสดงว่าแบบทดสอบนั้นมีความเที่ยงตรงเชิงสภาพสูง

การทดสอบความเที่ยงตรงเชิงสภาพ สามารถดำเนินการโดยการคำนวณหาค่าสัมประสิทธิสหสัมพันธ์ (correlation coefficient) ของเพียรสัน (Pearson) มีสูตรดังนี้

$$r_{XY} = \frac{N\sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{\left[N\sum X^2 - \left(\sum X\right)^2\right]\left[N\sum Y^2 - \left(\sum Y\right)^2\right]}}$$

เมื่อ r_{XY} = สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

N = จำนวนผู้เรียนที่ทำแบบทดสอบ

$\sum X$ = ผลรวมคะแนนแบบทดสอบที่หาความเที่ยงตรงเชิงสภาพ

$\sum Y$ = ผลรวมคะแนนความรู้ของผู้เรียนที่เป็นเกณฑ์ หรืออาจใช้เกรดเฉลี่ย

(2) ความเที่ยงตรงเชิงพยากรณ์(predictive validity) เป็นการทดสอบความเที่ยงตรงที่ใช้หลักการเดียวกับการทดสอบความเที่ยงตรงเชิงสภาพ เพียงแต่ถ้าเป็นแบบเชิงพยากรณ์จะใช้ข้อมูลที่เป็นเกณฑ์ในอนาคต ไปหาความสัมพันธ์กับคะแนนจากการทำแบบทดสอบที่สร้างขึ้น เช่น ใช้ข้อมูลที่เป็นเกรดเฉลี่ยของผู้เรียนที่สำเร็จการศึกษาแล้ว หรือใช้คะแนนในรายวิชาใดๆ ที่ได้สอบผ่านไปแล้วมาเป็นเกณฑ์ เป็นต้น

ในการดำเนินการนั้น จะต้องทำการทดสอบผู้เรียนด้วยแบบทดสอบที่ต้องการหาความเที่ยงตรงเชิงพยากรณ์ก่อน เมื่อทดสอบแล้วจะต้องรอให้ผู้เรียนกลุ่มนี้ได้คะแนนที่จะใช้เป็นเกณฑ์ในการ

หาความสัมพันธ์ จึงจะดำเนินการคำนวณหาความเที่ยงตรงเชิงพยากรณ์ได้ เช่น ถ้าต้องการทดสอบความเที่ยงตรงเชิงพยากรณ์ของแบบทดสอบวิชาคอมพิวเตอร์เบื้องต้น โดยใช้คะแนนจากผลการทดสอบวิชาคณิตศาสตร์เป็นเกณฑ์เทียบความสัมพันธ์ แต่เนื่องจากคะแนนจากผลการทดสอบวิชาคณิตศาสตร์ในขณะนั้นยังไม่มี เนื่องจากผู้เรียนกลุ่มที่จะใช้ทดลองนั้น ยังไม่ได้ผ่านการทดสอบวิชาคณิตศาสตร์ ดังนั้นจะต้องทดสอบผู้เรียนด้วยแบบทดสอบวิชาคอมพิวเตอร์เบื้องต้นก่อน จากนั้นให้รอจนกระทั่งผู้เรียนกลุ่มนี้ได้ผ่านการทดสอบวิชาคณิตศาสตร์ จึงสามารถนำคะแนนการทดสอบวิชาคณิตศาสตร์มาคำนวณร่วมกับคะแนนจากการทดสอบวิชาคอมพิวเตอร์เบื้องต้นที่ได้ทำการทดสอบก่อนหน้า เพื่อหาค่าความเที่ยงตรงเชิงพยากรณ์ ใช้สูตรเดียวกันกับการหาค่าความเที่ยงตรงเชิงสภาพ

1.3 ความเที่ยงตรงตามโครงสร้าง

ความเที่ยงตรงตามโครงสร้าง (construct validity) หมายถึง การวัดคุณภาพของแบบทดสอบว่าตรงตามลักษณะโครงสร้าง หรือวัดได้ครอบคลุมตามลักษณะโครงสร้างหรือไม่ โดยที่โครงสร้างหมายถึง โครงสร้างของแบบทดสอบมาตรฐาน โดยแบบทดสอบที่สร้างขึ้นจะมีมาตรฐานที่วัดลักษณะเดียวกันกับแบบทดสอบมาตรฐานหรือไม่ สามารถคำนวณหาความเที่ยงตรงตามโครงสร้างได้โดยใช้ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของเพียรสัน ซึ่งค่า X คือคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบที่สร้างขึ้น และค่า Y คือ ค่าคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบมาตรฐานที่วัดลักษณะเดียวกัน เมื่อคำนวณค่าได้แล้ว พบว่า ถ้าค่าที่คำนวณได้เข้าใกล้ 1 หมายถึง แบบทดสอบที่สร้างขึ้นนั้นมีความเที่ยงตรงเชิงโครงสร้างสูง ในทางกลับกัน ถ้าค่าที่คำนวณได้มีค่าเข้าใกล้ 0 แสดงว่า แบบทดสอบนั้นไม่มีความเที่ยงตรงเชิงโครงสร้าง

2. ความเชื่อมั่น (Reliability)

ความเชื่อมั่น หมายถึง ความคงเส้นคงวาของผลการวัดจากการที่นำแบบทดสอบชุดนั้นไปทดสอบกับผู้เรียนไม่ว่าจะทดสอบจำนวนกี่ครั้งคะแนนที่ได้จะไม่แตกต่างกัน ค่าความเชื่อมั่นนี้สามารถคำนวณเป็นตัวเลขได้หลายวิธี และแต่ละวิธีจะได้ค่าไม่เกิน 1 ถ้าค่าที่คำนวณได้มีค่าเข้าใกล้ 1 แสดงว่าแบบทดสอบนั้นมีค่าความเชื่อมั่นสูง วิธีการคำนวณหาค่าความเชื่อมั่นสามารถคำนวณหาค่าได้ หลายวิธี ดังนี้

2.1 วิธีการสอบซ้ำ

วิธีการสอบซ้ำ(test-retest) เป็นวิธีการหาค่าความเชื่อมั่นของแบบสอบถามในความหมายของคำว่า ความคงที่(stability) โดยคะแนนที่ได้จากการสอบ 2 ครั้งจะต้องไม่มีความแตกต่างกัน ในการ

วัดผลจะวัดในเวลาที่ต่างกัน แล้วนำคะแนนที่ได้ทั้ง 2 ครั้งมาคำนวณหาค่าสหสัมพันธ์โดยใช้สูตรของเพียร์สัน

2.2 วิธีการใช้แบบทดสอบคู่ขนาน

วิธีการใช้แบบทดสอบคู่ขนาน(parallel form) หมายถึง การทดสอบความเชื่อมั่นโดยใช้แบบทดสอบ 2 ชุดที่มีเนื้อหาเดียวกัน ความยากง่ายระดับเดียวกัน มีโครงสร้างเดียวกัน จำนวนข้อเท่ากัน ไปทดสอบกับกลุ่มผู้เรียนทั้ง 2 ฉบับ นำคะแนนที่ได้ไปคำนวณหาค่าสหสัมพันธ์ โดยใช้สูตรของเพียร์สันเหมือนกับวิธีการสอบซ้ำ

2.3 วิธีการแบ่งครึ่งแบบทดสอบ

วิธีการแบ่งครึ่งแบบทดสอบ (split-half) หมายถึง การนำเอาแบบทดสอบที่สร้างขึ้นโดยจัดแบ่งเป็น 2 ฉบับ จัดแบ่งตามข้อคู่และข้อคี่ ในการคำนวณหาค่าความเชื่อมั่นจะใช้หลักการเดียวกับวิธีการสอบคู่ขนาน แต่ค่าสหสัมพันธ์ที่คำนวณได้นี้จะเป็นค่าความเชื่อมั่นเพียงครึ่งฉบับเท่านั้น ดังนั้นจึงต้องนำค่าที่ได้ไปคำนวณหาความเชื่อมั่นทั้งฉบับ โดยอาศัยสูตรของสเพียร์แมน บราวน์(Spearman-Brown) ดังนี้

$$r_t = \frac{2r_{\frac{1}{2}}}{1+r_{\frac{1}{2}}}$$

เมื่อ r_t คือ สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นแบบทดสอบทั้งฉบับ

$r_{\frac{1}{2}}$ คือ สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบครึ่งฉบับ

2.4 วิธีแบบคูเดอร์-ริชาร์ดสัน

การหาความเชื่อมั่นโดยวิธีของคูเดอร์-ริชาร์ดสัน(Kuder-Richardson:KR) โดยวิธีการนี้จะแตกต่างจากวิธีการหาความเชื่อมั่นแบบต่างๆ ที่กล่าวมา จะไม่ได้ใช้การหาค่าสหสัมพันธ์เพื่อทดสอบความเชื่อมั่น แต่จะใช้วิธีหาความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบภายใน ได้แก่ ความสัมพันธ์ระหว่างข้อสอบในฉบับเดียวกัน และการคำนวณหาค่าความสัมพันธ์คะแนนของข้อสอบแต่ละข้อ จะต้องแปลงให้เป็นคะแนน 2 ค่าเท่านั้น ได้แก่ ถ้าตอบถูกจะได้ค่า 1 และถ้าตอบผิดจะได้ค่า 0 สูตรในการหาความเชื่อมั่นแบบคูเดอร์-ริชาร์ดสัน จะจำแนกเป็น 2 สูตร ดังรายละเอียดต่อไปนี้

(1) KR-20 เป็นสูตรการหาค่าความเชื่อมั่นที่เหมาะสมสำหรับแบบทดสอบที่มีค่าความยากง่ายในลักษณะกระจาย สูตรที่ใช้ในการหามีรูปแบบดังนี้

$$r_t = \frac{k}{k-1}\left[1-\frac{\sum pq}{S_t^2}\right]$$

เมื่อ r_t คือ สัมประสิทธิ์ของความเชื่อมั่นของแบบทดสอบทั้งฉบับ

k คือ จำนวนข้อของแบบทดสอบ

p คือ สัดส่วนของผู้เรียนที่ทำข้อสอบข้อนั้นถูกกับผู้เรียนทั้งหมด

q คือ สัดส่วนของผู้เรียนที่ทำข้อสอบข้อนั้นผิดกับผู้เรียนทั้งหมด

S_t^2 คือ ความแปรปรวนของคะแนนสอบทั้งฉบับ

(2) KR-21 เป็นสูตรในการหาค่าความเชื่อมั่นที่เหมาะสำหรับแบบทดสอบที่มีความยากง่ายของข้อสอบแต่ละข้อมีค่าใกล้เคียงกัน สูตรที่ใช้ในการคำนวณมีรูปแบบดังนี้

$$r_t = \frac{k}{k-1}\left[1-\frac{\bar{X}\left(n-\bar{X}\right)}{kS_t^2}\right]$$

เมื่อ r_t คือ สัมประสิทธิ์ของความเชื่อมั่นของแบบทดสอบทั้งฉบับ

k คือ จำนวนข้อของแบบทดสอบ

$\bar{X}$ คือ ค่าเฉลี่ยของคะแนน

S_t^2 คือ ความแปรปรวนของคะแนนสอบทั้งฉบับ

2.5 วิธีการหาสัมประสิทธิ์แอลฟา

สัมประสิทธิ์แอลฟา(α – Coefficient) ของแบบทดสอบ เป็นค่าความเชื่อมั่นที่คำนวณหาได้จากสูตรครอนบราช (Cronbach) การหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบนั้นจะหาค่าคะแนนที่ได้ของแบบทดสอบ อาจจะเป็นค่าอะไรก็ได้ที่มีค่ามากกว่า 1 สูตรที่ใช้ในการคำนวณมีดังนี้

$$r_t = \frac{k}{k-1}\left[1-\frac{\sum S_i^2}{S_t^2}\right]$$

เมื่อ α คือ ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

k คือ จำนวนข้อของแบบทดสอบ

S_i^2 คือ ความแปรปรวนของแบบทดสอบรายข้อ

S_t^2 คือ ความแปรปรวนของแบบทดสอบทั้งฉบับ

3. อำนาจจำแนก (Discrimination)

อำนาจจำแนก หมายถึง การที่ข้อคำถามสามารถจัดแบ่งผู้เรียนออกเป็น 2 กลุ่มได้ โดยกลุ่มผู้เรียน 2 กลุ่มในที่นี้คือ ผู้เรียนกลุ่มเก่งและผู้เรียนกลุ่มอ่อน หรือกลุ่มที่ชอบหรือกลุ่มที่ไม่ชอบ ค่าอำนาจจำแนกที่คำนวณได้จะมีค่าอยู่ระหว่าง -1 ถึง 1 สามารถแปลความหมายค่าอำนาจจำแนกของข้อสอบได้ดังนี้

ค่าอำนาจจำแนกของข้อสอบ (r)	ความหมาย
0.60 – 1.00	อำนาจจำแนกดีมาก
0.40 – 0.59	อำนาจจำแนกดี
0.20 – 0.39	อำนาจจำแนกพอใช้
0.10 – 0.19	อำนาจจำแนกต่ำ (ควรปรับปรุงหรือตัดทิ้ง)
-1.00 – 0.09	อำนาจจำแนกต่ำมาก (ควรปรับปรุงหรือตัดทิ้ง)

การคำนวณหาค่าอำนาจจำแนก สามารถทำได้หลายวิธี ดังนี้

3.1 วิธีการตรวจให้คะแนน

วิธีการตรวจให้คะแนน เป็นวิธีการที่นำแบบทดสอบไปทดสอบกับกลุ่มผู้เรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง เมื่อทดสอบแล้วให้เรียงคะแนนที่ได้จากน้อยไปหามากหรือจากมากไปหาน้อยก็ได้ ผู้เรียนที่ได้คะแนนสูงถือว่าเป็นกลุ่มเก่ง และผู้เรียนที่ได้คะแนนต่ำถือว่าเป็นกลุ่มอ่อน เมื่อจัดเรียงลำดับคะแนนรวมของผู้เรียนทั้งหมดแล้ว หลังจากนั้นทำการคัดเลือกผู้เรียนที่ได้คะแนนสูงจำนวน 1/3 ของผู้เรียนทั้งหมดและผู้เรียนที่ได้คะแนนต่ำจำนวน 1/3 ของผู้เรียนทั้งหมดมาแทนค่า ในสูตร ดังนี้

$$D = \frac{R_U - R_L}{\frac{N}{2}}$$

เมื่อ D คือ ค่าอำนาจจำแนก

R_U คือ จำนวนผู้เรียนที่ตอบถูกในกลุ่มเก่ง

R_L คือ จำนวนผู้เรียนที่ตอบถูกในกลุ่มอ่อน

N คือ จำนวนผู้เรียนทั้งหมด

3.2 วิธีการใช้สัดส่วน

เป็นวิธีการที่ใช้หลักการเหมือนกับวิธีตรวจให้คะแนน เมื่อทดสอบผู้เรียนและทำการตรวจให้คะแนนแล้ว นำคะแนนมาจัดเรียง และหลังจากนั้นทำการคัดเลือกผู้เรียนที่ได้คะแนนสูงจำนวน 1/3 ของผู้เรียนทั้งหมด และผู้เรียนที่ได้คะแนนต่ำจำนวน 1/3 ของผู้เรียนทั้งหมด และทำการหาสัดส่วนระหว่างผู้เรียนกลุ่มเก่งและกลุ่มอ่อน โดยใช้สูตรต่อไปนี้

$$D = P_H - P_L$$

เมื่อ P_H คือ สัดส่วนของคะแนนของผู้เรียนกลุ่มเก่ง

P_L คือ สัดส่วนของคะแนนของผู้เรียนกลุ่มอ่อน

3.3 วิธีการใช้ค่าสหสัมพันธ์แบบพอยน์-ไบซีเรียล

สหสัมพันธ์แบบพอยน์-ไบซีเรียล(point biserial correlation) เป็นวิธีการที่จะต้องแปลงคะแนนของข้อคำถามที่ผู้เรียนทำคะแนนได้เป็นค่า 0 และ1 โดยให้ผุ้เรียนทำถูกจะได้ 1 และถ้าทำผิดจะได้ 0 คะแนนที่ผู้เรียนทำได้จากข้อคำถาม ในการคำนวณหาค่าอำนาจจำแนกโดยวิธีนี้ จะต้องดำเนินการไปทีละข้อคำถาม โดยใช้สูตร ดังนี้

$$r_P = \frac{\bar{X}_p - \bar{X}_f}{S_t} \cdot \sqrt{pq}$$

เมื่อ r_P คือ ค่าอำนาจจำแนกแบบพอยน์-ไบซีเรียล

$\bar{X}_p$ คือ คะแนนเฉลี่ยของกลุ่มที่ทำข้อสอบข้อนั้นได้

$\bar{X}_f$ คือ คะแนนเฉลี่ยของกลุ่มที่ทำข้อสอบข้อนั้นไม่ได้

p คือ สัดส่วนผู้เรียนที่ทำข้อสอบข้อนั้นได้

q คือ สัดส่วนผู้เรียนที่ทำข้อสอบข้อนั้นไม่ได้

S_t คือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของแบบทดสอบทั้งฉบับ

4. ความยากง่าย (Difficulty)

ความยากง่าย หมายถึง ความยากหรือความง่ายของข้อสอบ โดยทั่วไปข้อสอบแต่ละข้อ ควรจะมีความยากหรือความง่ายพอเหมาะ คือมีสัดส่วนความยาก 50% และสัดส่วนความง่าย50% แต่การที่จะจัดทำข้อสอบให้มีความยากง่ายในอัตราส่วน 50/50 นั้นถือเป็นเรื่องที่ยาก เพราะข้อสอบนั้นต้องนำไปทดสอบหลายๆ ครั้ง และปรับปรุงจนได้ค่าความยากง่ายใกล้เคียงกับ 50%

โดยทั่วไปแบบทดสอบที่จะนำมาหาความยากง่ายนั้น จะเป็นแบบทดสอบที่ใช้วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหรือแบบทดสอบความถนัดที่มุ่งวัดสติปัญญาผู้เรียน ความยากง่ายของข้อสอบมีค่าไม่เกิน 1 แต่ค่าที่ยอมรับได้จะอยู่ระหว่าง 0.2 ถึง 0.8 ถ้าข้อสอบมีค่าเกิน 0.80 แสดงว่า ข้อสอบนั้นมีความง่ายมากเกินไปต้องตัดออกหรือปรับปรุงใหม่ แต่ถ้าข้อสอบมีค่าต่ำกว่า 0.20 ถือว่า ข้อสอบนั้นมีความยากเกินไปต้องตัดออกหรือปรับปรุงเช่นเดียวกัน ดังนั้น สามารถแปลความหมายค่าความยากง่ายของข้อสอบได้ดังนี้

ความยากง่ายของข้อสอบ (P)	**ความหมาย**
0.81 – 1.00	ง่ายมาก (ควรปรับปรุงหรือตัดทิ้ง)
0.60 – 0.80	ค่อนข้างง่าย (ดี)
0.40 – 0.59	ยากพอเหมาะ (ดีมาก)
0.20 – 0.39	ค่อนข้างยาก (ดี)
0.00 – 0.19	ยากมาก (ควรปรับปรุงหรือตัดทิ้ง)

สูตรในการคำนวณหาความยากง่ายมีดังนี้

$$P = \frac{R}{N}$$

เมื่อ P คือ ค่าความยากง่าย

R คือ จำนวนผู้เรียนที่ทำข้อสอบข้อนั้นถูก

N คือ จำนวนผู้เรียนทั้งหมด