

บทที่ 2

ทฤษฎีและรายงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การทำวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยสนใจศึกษากำหนดทดสอบของสถิติทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของประชากรหลายกลุ่ม โดยทำการศึกษาสถิติทดสอบ 6 ตัว คือ สถิติทดสอบบาร์ตเลตต์ สถิติทดสอบเลห์แมน สถิติทดสอบเลวิน สถิติทดสอบบราวน์-ฟอร์สตี สถิติทดสอบโอปรีน และสถิติทดสอบจี สำหรับบทนี้จะกล่าวถึงรายละเอียดของสถิติทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของประชากรหลายกลุ่ม ตัวอย่างการคำนวณค่าสถิติทดสอบ การแจกแจงต่าง ๆ ที่ใช้ในงานวิจัย การกำหนดระดับความแตกต่างของความแปรปรวนของประชากร เกณฑ์การเปรียบเทียบประสิทธิภาพการทดสอบ และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ดังต่อไปนี้

2.1 สถิติทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของประชากรหลายกลุ่ม

สมมติฐานในการทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของประชากร k กลุ่ม คือ

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \dots = \sigma_k^2$$

$$H_1 : \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2 \text{ อย่างน้อย 1 คู่ ; } i, j = 1, 2, 3, \dots, k \text{ โดยที่ } i \neq j$$

ในการทำวิจัยครั้งนี้กำหนดจำนวนประชากรเท่ากับ 3, 4 และ 5 กลุ่ม สถิติทดสอบที่ใช้ในการทดสอบมีรายละเอียดดังนี้

2.1.1 สถิติทดสอบบาร์ตเลตต์ (Bartlett's Test) (Snedecor, G. W. and Cochran, W. G., 1989) ใช้สำหรับทดสอบความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่างหลายกลุ่ม เหมาะสำหรับกลุ่มตัวอย่างที่มีขนาดใหญ่ และจะมีการแจกแจงคล้ายการแจกแจงของไคกำลังสอง

สมมติฐานที่ใช้ทดสอบคือ

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2$$

$$H_1 : \sigma_i^2 \neq \sigma_{i'}^2 \text{ อย่างน้อย 1 คู่ ; } i, i' = 1, 2, \dots, k \text{ โดยที่ } i \neq i'$$

สถิติทดสอบบาร์ตเลตต์คือ

$$B = \frac{(n - k) \ln S_p^2 - \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \ln S_i^2}{1 + \frac{1}{3(k-1)} \left[\sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{n_i - 1} \right) - \frac{1}{n - k} \right]}; \quad i = 1, 2, 3, \dots, k$$

เมื่อ S_p^2 คือ ความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่างรวม

S_i^2 คือ ความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่างที่ i

และ S_i^2 หาได้ดังนี้

$$S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{n_i - 1}; \quad i = 1, 2, 3, \dots, k, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n_i$$

X_{ij} คือ ข้อมูลลำดับที่ j ในกลุ่มตัวอย่างที่ i

$\bar{X}_i$ คือ ค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างที่ i

n คือ ขนาดตัวอย่างทั้งหมด

n_i คือ ขนาดตัวอย่างของกลุ่มที่ i
 k คือ จำนวนกลุ่มตัวอย่าง ในที่นี้ $k = 3, 4, 5$
 และ S_p^2 หาได้ดังนี้

$$S_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (n_i - 1) S_i^2}{n - k} ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, k$$

เกณฑ์การตัดสินใจคือจะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $B > \chi_{\alpha; k-1}^2$ โดย α คือระดับนัยสำคัญ

2.1.2 สถิติทดสอบเลห์แมน (Lehman's test)

Lehman, E. L. (1959) ได้เสนอสถิติทดสอบนี้และ Ghosh, A. (1972) ได้พัฒนาโดยเพิ่มในส่วน $(n-k)/(n-2k)$ ซึ่งจะเข้าใกล้การแจกแจงไคกำลังสอง

สมมติฐานที่ใช้ทดสอบคือ

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2$$

$$H_1 : \sigma_i^2 \neq \sigma_{i'}^2 \text{ อย่างน้อย 1 คู่ ; } i, i' = 1, 2, \dots, k \text{ โดยที่ } i \neq i'$$

สถิติทดสอบเลห์แมนคือ

$$\text{Leh} = \frac{(n-k)T}{2n-4k}$$

เมื่อ $T = \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \left[P_i - \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^k (n_i - 1) P_i \right]^2 ;$

$$i = 1, 2, 3, \dots, k$$

ซึ่ง $P_i = \ln S_i^2$

n คือ ขนาดตัวอย่างทั้งหมด

n_i คือ ขนาดตัวอย่างของกลุ่มที่ i

k คือ จำนวนกลุ่มตัวอย่าง ในที่นี้ $k = 3, 4, 5$

เกณฑ์การตัดสินใจคือจะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $\text{Leh} > \chi_{\alpha; k-1}^2$ โดย α คือระดับนัยสำคัญ

2.1.3 สถิติทดสอบเลวิน (Levene's Test) (Levene, H. : 1960)

สถิติทดสอบเลวินเสนอโดยเลวิน ในปี ค.ศ. 1960 ใช้สำหรับทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวน k กลุ่ม โดยไม่กำหนดลักษณะการแจกแจงของตัวแปร

สมมติฐานที่ใช้ทดสอบคือ

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2$$

$$H_1 : \sigma_i^2 \neq \sigma_{i'}^2 \text{ อย่างน้อย 1 คู่ ; } i, i' = 1, 2, \dots, k \text{ โดยที่ } i \neq i'$$

สถิติทดสอบเลวินคือ

$$\text{Lev} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (\bar{Z}_i - \bar{Z})^2 / (k-1)}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{Z}_{ij} - \bar{Z})^2 / \sum_{i=1}^k (n_i - 1)} ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, k, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n_i$$

เมื่อ	$\bar{Z}_i$	คือ	ค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างที่ i
	$\bar{Z}$	คือ	ค่าเฉลี่ยของตัวแปรใหม่ที่เกิดจากการแปลง
	n_i	คือ	ขนาดตัวอย่างของกลุ่มที่ i
	k	คือ	จำนวนกลุ่มตัวอย่าง ในที่นี้ k = 3, 4, 5
	Z_{ij}	คือ	ค่าของตัวแปรใหม่ที่เกิดจากการแปลง
โดยที่	Z_{ij}	=	$ X_{ij} - \bar{X}_i $
ซึ่ง	X_{ij}	คือ	ข้อมูลลำดับที่ j ในกลุ่มตัวอย่างที่ i
	$\bar{X}_i$	คือ	ค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างที่ i

เกณฑ์การตัดสินใจคือจะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $Lev > F_{\alpha; k-1, n-k}$ โดยที่ α คือระดับนัยสำคัญ

2.1.4 สถิติทดสอบบราวน์-ฟอร์ลิตี (Brown-Forsythe' test)

Brown, M. B. และ Forsythe, A. B. (1974) ได้เสนอตัวสถิติทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวน ซึ่งเป็นสถิติทดสอบที่พัฒนาจากสถิติทดสอบเลวินโดยใช้ค่ามัธยฐานของกลุ่มตัวอย่างแทนค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง เนื่องจากว่าถ้าประชากรมีการแจกแจงแบบสมมาตร การใช้ค่าเฉลี่ยเป็นตัวแทนของกลุ่มตัวอย่างนั้นๆ จะถือว่าเป็นตัวแทนที่เหมาะสม แต่ถ้าประชากรมีการแจกแจงแบบเบ้ ค่าที่เหมาะสมมากกว่าค่าเฉลี่ยก็คือค่ามัธยฐาน ซึ่งสถิติทดสอบบราวน์-ฟอร์ลิตีนี้เป็นตัวทดสอบที่มีความแข็งแกร่งต่อการฝ่าฝืนข้อสมมติเกี่ยวกับลักษณะการแจกแจงของประชากรที่ไม่เป็นปกติ

สมมติฐานที่ใช้ทดสอบคือ

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2$$

$$H_1 : \sigma_i^2 \neq \sigma_{i'}^2, \text{ อย่างน้อย 1 คู่ ; } i, i' = 1, 2, \dots, k \text{ โดยที่ } i \neq i'$$

สถิติทดสอบบราวน์-ฟอร์ลิตีคือ

$$BF = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (\bar{Z}_i - \bar{Z})^2 / (k-1)}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (Z_{ij} - \bar{Z}_i)^2 / \sum_{i=1}^k (n_i - 1)} ; \quad i = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, \dots, n_i$$

เมื่อ	$\bar{Z}_i$	คือ	ค่าเฉลี่ยที่แปลงมาของกลุ่มตัวอย่างที่ i
	$\bar{Z}$	คือ	ค่าเฉลี่ยของตัวแปรใหม่ที่เกิดจากการแปลง
	n_i	คือ	ขนาดตัวอย่างของกลุ่มที่ i
	k	คือ	จำนวนกลุ่มตัวอย่าง ในที่นี้ k = 3, 4, 5
	Z_{ij}	คือ	ค่าของตัวแปรใหม่ที่เกิดจากการแปลง
โดยที่	Z_{ij}	=	$ X_{ij} - \tilde{X}_i $
ซึ่ง	X_{ij}	คือ	ข้อมูลลำดับที่ j ของกลุ่มตัวอย่างที่ i
	$\tilde{X}_i$	คือ	ค่ามัธยฐานกลุ่มตัวอย่างที่ i

เกณฑ์ในการตัดสินใจคือจะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $BF > F_{\alpha; k-1, n-k}$ โดย α คือระดับนัยสำคัญ

2.1.5 สถิติทดสอบโอ'Brien (O'Brien test)

O'Brien, R. G. (1978; 1981) ศึกษาการเปรียบเทียบนี้ O'Brien, R. G. (1978) กล่าวว่าสถิติทดสอบของเขาเป็นวิธีที่ใช้ได้ทั่วไปซึ่งใช้ได้ดีในข้อมูลทางวิทยาศาสตร์ O'Brien, R. G. (1981) กล่าวอีกว่าสถิติทดสอบมีความแข็งแกร่งกับข้อมูลที่ไม่ได้มีการแจกแจงปกติ มีความง่ายกับโปรแกรมทางสถิติ เช่น SPSS สามารถใช้ได้ง่ายกับการวางแผน ANOVA ที่แตกต่างกันด้วยขนาดตัวอย่างที่เท่ากันหรือไม่เท่ากันก็ได้ O'Brien (1981) กล่าวว่าไม่ได้มีงานวิจัยในทางสถิติมากนัก

การคำนวณสำหรับสถิติทดสอบนี้ตรงไปตรงมา คำนวณดิเบทุกค่า X_{ij} ในการศึกษา คือการแปลง โดยใช้สูตรดังนี้

$$V_{ij} = \frac{(n_i - 1.5)n_i(X_{ij} - \bar{X}_i)^2 - 0.5S_i^2(n_i - 1)}{(n_i - 1)(n_i - 2)}$$

เมื่อ $\bar{X}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}}{n_i}$ คือ ค่าเฉลี่ยสำหรับแต่ละกลุ่มย่อยที่ i

และ $S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{n_i - 1}$ คือ ความแปรปรวนกลุ่มย่อยที่ไม่เอนเอียง

ค่าเฉลี่ยของค่า V ต่อกลุ่มย่อยจะเท่ากับค่าความแปรปรวนที่คำนวณสำหรับแต่ละกลุ่มย่อย เช่น

$$\bar{V}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} V_{ij}}{n_i} = S_i^2$$

2.1.6 สถิติทดสอบจี (G test) Nguyen, D. T. and et al., 2014)

สถิติทดสอบจีเป็นอัตราส่วนของผลคูณของความแปรปรวนที่มากที่สุดและจำนวนองศาความเป็นอิสระกับผลบวกของผลคูณของความแปรปรวนแต่ละตัวและจำนวนองศาความเป็นอิสระ

$$G = \frac{v_j S_j^2}{\sum_{i=1}^k v_i S_i^2}$$

เกณฑ์ในการตัดสินใจคือจะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $G > \frac{1}{1 + \frac{F_{\frac{\alpha}{k}; v_j, v_{pool} - v_j}}{(v_{pool}/v_j) - 1}}$ โดย α คือระดับ

นัยสำคัญ

เมื่อ $v_i = n_i - 1$
 n_i คือ ขนาดตัวอย่างของกลุ่มที่ i
 S_j^2 คือ ความแปรปรวนที่มากที่สุด
 v_{pool} คือ จำนวนองศาความเป็นอิสระที่นำมารวมกัน
 v_j คือ จำนวนองศาความเป็นอิสระที่สอดคล้องกับความแปรปรวนที่มากที่สุด
 k คือ จำนวนกลุ่ม

2.2 ตัวอย่างในการคำนวณค่าสถิติทดสอบ

สมมติให้ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.05 และข้อมูลที่สุ่มได้เป็นดังนี้

ตัวอย่างจากประชากรกลุ่มที่ 1	12,9,8,11,14
ตัวอย่างจากประชากรกลุ่มที่ 2	7,10,8,14,13
ตัวอย่างจากประชากรกลุ่มที่ 3	11,15,7,13,9

2.2.1 ตัวอย่างในการคำนวณสถิติทดสอบบาร์ตเลตต์

	X_{1i}	X_{2i}	X_{3i}	รวม
	12	7	11	
	9	10	15	
	8	8	7	
	11	14	13	
	14	13	9	
$(n_i - 1)$	4	4	4	$\sum_{i=1}^k (n_i - 1) = 12$
s_i^2	5.7000	9.2999	10.0000	
$(n_i - 1)s_i^2$	22.80000	37.1996	40.0000	$\sum_{i=1}^k (n_i - 1)s_i^2 = 99.9996$
$\ln s_i^2$	1.7405	2.2300	2.3026	
$(n_i - 1)\ln s_i^2$	6.9620	8.9201	9.2104	$\sum_{i=1}^k (n_i - 1)\ln s_i^2 = 25.0925$
$\frac{1}{(n_i - 1)}$	0.2500	0.2500	0.2500	$\sum_{i=1}^k \frac{1}{(n_i - 1)} = 0.7500$

$$\begin{aligned}
 s_p^2 &= \frac{\sum_{i=1}^k (n_i - 1)s_i^2}{\sum_{i=1}^k (n_i - 1)} \\
 &= \frac{99.9996}{12} = 8.3333
 \end{aligned}$$

สถิติทดสอบคือ

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{(n - k)\ln(S_p^2) - \sum_{i=1}^k (n_i - 1)\ln(S_i^2)}{1 + \frac{1}{3(k-1)}\left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{(n_i - 1)} - \frac{1}{n - k}\right)} \\
 &= \frac{(15 - 3)\ln(8.3333) - 25.0925}{1 + \frac{1}{3(3-1)}\left(0.7500 - \frac{1}{12}\right)} \\
 &= 0.3156
 \end{aligned}$$

การตัดสินใจ ค่าวิกฤตจากตารางไคกำลังสอง (χ^2) ที่องศาความเป็นอิสระเท่ากับ 2 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 จะได้ $\chi^2_{0.05,2} = 5.9915$ พบว่าค่าสถิติที่ได้จากการคำนวณน้อยกว่าค่าที่ได้จากตาราง กล่าวคือ $B = 0.3156 < 5.9915$ จึงไม่มีเหตุผลเพียงพอที่จะปฏิเสธ H_0 ดังนั้นที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ข้อมูลในแต่ละกลุ่มที่นำมาทดสอบมีความแปรปรวนเท่ากัน

2.2.2 ตัวอย่างในการคำนวณสถิติทดสอบเลห์แมน

	X_{1j}	X_{2j}	X_{3j}	รวม
	12	7	11	
	9	10	15	
	8	8	7	
	11	14	13	
	14	13	9	
$n_i - 1$	4	4	4	12
s_i^2	5.7000	9.2999	10.0000	
$P_i = \ln s_i^2$	1.7405	2.2300	2.3026	
$(n_i - 1) P_i$	6.9620	8.9201	9.2104	$\sum_{i=1}^k (n_i - 1) P_i = 25.0925 = a$
$P_i - \frac{1}{n-k}(a)$	-0.3505	0.1390	0.2116	
$\left[P_i - \frac{1}{n-k}(a) \right]^2$	0.1229	0.0193	0.0448	
$(n_i - 1) \left[P_i - \frac{1}{n-k}(a) \right]^2$	5.3855	8.8409	9.4257	$T = 0.7480$

$$\begin{aligned}
 \text{เมื่อ} \quad T &= \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \left[P_i - \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^k (n_i - 1) P_i \right]^2 \\
 \text{สถิติทดสอบคือ} \\
 \text{Leh} &= \frac{(N - k) T}{(2N - 4k)} = \frac{(15 - 3)(0.7480)}{(2)(15) - (4)(3)} \\
 &= 0.4987
 \end{aligned}$$

การตัดสินใจ ค่าวิกฤตจากตารางไคกำลังสอง (χ^2) ที่องศาความเป็นอิสระเท่ากับ 2 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 จะได้ $\chi^2_{0.05,2} = 5.9915$ พบว่าค่าสถิติที่ได้จากการคำนวณน้อยกว่าค่าที่ได้จากตารางกล่าวคือ $Leh = 0.4987 < 5.9915$ จึงไม่มีเหตุผลเพียงพอที่จะปฏิเสธ H_0 ดังนั้นที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ข้อมูลในแต่ละกลุ่มที่นำมาทดสอบมีความแปรปรวนเท่ากัน

2.2.3 ตัวอย่างในการคำนวณสถิติทดสอบเลวิน

	X_{1i}	X_{2i}	X_{3i}
	12	7	11
	9	10	15
	8	8	7
	11	14	13
	14	13	9
$\bar{X}_i$	10.8	10.4	11

$z_{ij} = |x_{ij} - \bar{x}_i|$ แสดงค่าของตัวแปรใหม่ที่เกิดจากการแปลงโดยวิธีของโอบริน สำหรับตัวอย่างเพื่อการคำนวณค่าสถิติโอบริน (OB) (O'Brien, R.G. 1979)

$$\text{ซึ่งสถิติโอบรินมีสูตรในการคำนวณดังนี้ } OB = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (\bar{z}_i - \bar{z})^2 / (k-1)}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (z_{ij} - \bar{z}_i)^2 / \sum_{i=1}^k (n_i - 1)}$$

$$\text{โดยที่ } z_{ij} = \frac{[(0.5 + n_i - 2)n_i(x_{ij} - \bar{x})^2 - 0.5s_i^2(n_i - 1)]}{(n_i - 1)(n_i - 2)}$$

	z_{1j}	z_{2j}	z_{3j}	รวม
	1.2	3.4	0	
	1.8	0.4	4	
	2.8	2.4	4	
	0.2	3.6	2	
	3.2	2.6	2	
$\bar{z}_i$	1.84	2.48	2.4	
$\bar{z}$	$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} z_{ij}}{n} = \frac{33.6}{15} = 2.240$			
$n_i (\bar{z}_i - \bar{z})^2$	0.800	0.288	0.128	$\sum_{i=1}^k n_i (\bar{z}_i - \bar{z})^2 = 1.216$

	$(z_{1j} - \bar{z}_i)^2$	$(z_{2j} - \bar{z}_i)^2$	$(z_{3j} - \bar{z}_i)^2$	รวม
	0.4096	0.8464	5.7600	
	0.0016	4.3264	2.5600	
	0.9216	0.0064	2.5600	
	2.6896	1.2544	0.1600	
	1.8496	0.0144	0.1600	
$\sum_{j=1}^{n_i} (z_{ij} - \bar{z}_i)^2$	5.8720	6.4480	11.2	$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (z_{ij} - \bar{z}_i)^2 = 23.52$
$(n_i - 1)$	4	4	4	$\sum_{i=1}^k (n_i - 1) = 12$

$$\frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (z_{ij} - \bar{z}_i)^2}{\sum_{i=1}^k (n_i - 1)} = \frac{23.5200}{12} = 1.9600$$

$$\frac{\sum_{i=1}^k n_i (\bar{z}_i - \bar{z})^2}{k-1} = \frac{1.2160}{2} = 0.6080$$

สถิติทดสอบคือ

$$\begin{aligned} \text{Lev} &= \frac{\sum_{i=1}^k n_i (\bar{z}_i - \bar{z})^2 / (k-1)}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (z_{ij} - \bar{z}_i)^2 / \sum_{i=1}^k (n_i - 1)} \\ &= \frac{0.6080}{1.9600} = 0.3102 \end{aligned}$$

การตัดสินใจ ค่าวิกฤตจากตารางเอฟ (F) ที่องศาความเป็นอิสระเท่ากับ 2 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 จะได้ $F_{0.05;2,12} = 3.8853$ พบว่าค่าสถิติที่ได้จากการคำนวณน้อยกว่าค่าที่ได้จากตาราง กล่าวคือ $\text{Lev} = 0.3102 < 3.8853$ จึงไม่มีเหตุผลเพียงพอที่จะปฏิเสธ H_0 ดังนั้นที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ข้อมูลในแต่ละกลุ่มที่นำมาทดสอบมีความแปรปรวนเท่ากัน

2.2.4 ตัวอย่างในการคำนวณสถิติทดสอบบราวน์-ฟอร์ลิตี

	X_{1i}	X_{2i}	X_{3i}
	12	7	11
	9	10	15
	8	8	7
	11	14	13
	14	13	9
$\tilde{x}_i$	11	10	11

$z_{ij} = |x_{ij} - \tilde{x}_i|$ แสดงค่าของตัวแปรใหม่ที่เกิดจากการแปลงโดยวิธีของโอปรีนสำหรับตัวอย่างเพื่อการคำนวณค่าสถิติโอปรีน (OB)

	Z_{1j}	Z_{2j}	Z_{3j}	รวม
	1	3	0	
	2	0	4	
	3	2	4	
	0	4	2	
	3	3	2	
$\bar{z}_i$	1.8	2.4	2.4	
$\bar{z}$	$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} z_{ij}}{n} = \frac{33}{15} = 2.2$			
$n_i (\bar{z}_i - \bar{z})^2$	0.8	0.2	0.2	$\sum_{i=1}^k n_i (\bar{z}_i - \bar{z})^2 = 1.2$

	$(z_{1j} - \bar{z}_i)^2$	$(z_{2j} - \bar{z}_i)^2$	$(z_{3j} - \bar{z}_i)^2$	รวม
	0.64	0.36	5.76	
	0.04	5.76	2.56	
	1.44	0.16	2.56	
	3.24	2.56	0.16	
	1.44	0.36	0.16	
$\sum_{j=1}^{n_i} (z_{ij} - \bar{z}_i)^2$	6.8	9.2	11.2	$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (z_{ij} - \bar{z}_i)^2 = 27.2$
$(n_i - 1)$	4	4	4	$\sum_{i=1}^k (n_i - 1) = 12$

$$\frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (z_{ij} - \bar{z}_i)^2}{\sum_{i=1}^k (n_i - 1)} = \frac{27.2}{12} = 2.2667$$

$$\frac{\sum_{i=1}^k n(\bar{z}_i - \bar{z})^2}{k - 1} = \frac{1.2}{2} = 0.6$$

สถิติทดสอบคือ

$$\begin{aligned}
 BF &= \frac{\sum_{i=1}^k n(\bar{z}_i - \bar{z})^2 / (k - 1)}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (z_{ij} - \bar{z}_i)^2 / \sum_{i=1}^k (n_i - 1)} \\
 &= \frac{0.6}{2.2667} = 0.2647
 \end{aligned}$$

การตัดสินใจ ค่าวิกฤตจากตารางเอฟ (F) ที่องศาความเป็นอิสระเท่ากับ 2 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 จะได้ $F_{0.05; 2, 12} = 3.8853$ พบว่าค่าสถิติที่ได้จากการคำนวณน้อยกว่าค่าที่ได้จากตาราง กล่าวคือ $BF = 0.2647 < 3.8853$ จึงไม่มีเหตุผลเพียงพอที่จะปฏิเสธ H_0 ดังนั้นที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ข้อมูลในแต่ละกลุ่มที่นำมาทดสอบมีความแปรปรวนเท่ากัน

2.2.5 ตัวอย่างในการคำนวณสถิติทดสอบของจี

	X_{1i}	X_{2i}	X_{3i}	รวม
	12	7	11	
	9	10	15	
	8	8	7	
	11	14	13	
	14	13	9	
$(n_i - 1) = v_i$	4	4	4	$\sum v_i = 12$
s_i^2	5.7000	9.2999	10.0000	

คำนวณค่าสถิติทดสอบ

$$G = \frac{(4)(10)}{(4)(5.7000) + (4)(9.2999) + (4)(10)}$$

$$= 0.2927$$

คำนวณค่าวิกฤต

$$\frac{1}{1 + \frac{(v_{\text{pool}}/v_j) - 1}{F_{\frac{\alpha}{k}; v_j, v_{\text{pool}} - v_j}}} = \frac{1}{1 + \frac{(12/4) - 1}{F_{\frac{0.05}{4}; 4, 12 - 4}}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{F_{0.0125; 4, 8}}}$$

$$\approx \frac{1}{1 + \frac{2}{7.006}} \approx 0.7779$$

การตัดสินใจ ค่าวิกฤตที่คำนวณได้จากสูตรจะได้ 0.7779 พบว่าค่าสถิติที่ได้จากการคำนวณน้อยกว่าค่าที่ได้จากตาราง กล่าวคือ $G = 0.2927 < 0.7779$ จึงไม่มีเหตุผลเพียงพอที่จะปฏิเสธ H_0 ดังนั้นที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ข้อมูลในแต่ละกลุ่มที่นำมาทดสอบมีความแปรปรวนเท่ากัน

2.2.6 ตัวอย่างในการคำนวณสถิติทดสอบของโอปรีน

	X_{1i}	X_{2i}	X_{3i}	รวม
	12	7	11	
	9	10	15	
	8	8	7	
	11	14	13	
	14	13	9	
$(n_i - 1)$	4	4	4	$\sum v_i = 12$
$(n_i - 2)$	3	3	3	$\sum v_j = 9$
$\bar{X}_i$	10.8	10.4	11	
s_i^2	5.7000	9.2999	10.0000	

โดยที่ $z_{ij} = \frac{[(0.5+n_i-2)n_i(x_{ij}-\bar{x})^2 - 0.5s_i^2(n_i-1)]}{(n_i-1)(n_i-2)}$

	Z_{1j}	Z_{2j}	Z_{3j}	รวม
	1.1500	15.3084	-1.6667	
	3.7750	-1.3167	21.6667	
	10.4833	6.8500	21.6667	
	-0.8917	17.3500	4.1667	
	13.9833	8.3084	4.1667	
$\bar{Z}_i$	5.7000	9.3000	10.0000	
$\bar{Z}$	$\bar{Z} = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} z_{ij}}{N} = \frac{25}{3} = 8.3333$			
$n_i (\bar{z}_i - \bar{z})^2$	34.6713	4.6725	13.8895	$\sum_{i=1}^k n_i (\bar{z}_i - \bar{z})^2 = 53.2333$

	$(z_{1j} - \bar{z}_i)^2$	$(z_{2j} - \bar{z}_i)^2$	$(z_{3j} - \bar{z}_i)^2$	รวม
	20.7025	36.1009	136.1119	
	3.7056	112.7143	136.1119	
	22.8800	6.0025	136.1119	
	43.4505	64.8025	34.0274	
	68.6131	0.9833	34.0274	
$\sum_{j=1}^{n_i} (z_{ij} - \bar{z}_i)^2$	159.3517	220.6035	476.3905	$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (z_{ij} - \bar{z}_i)^2 = 856.3457$
$(n_i - 1)$	4	4	4	$\sum_{i=1}^k (n_i - 1) = 12$

$$\frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (z_{ij} - \bar{z}_i)^2}{\sum_{i=1}^k (n_i - 1)} = \frac{856.3457}{12} = 71.3621$$

$$\frac{\sum_{i=1}^k n_i (\bar{z}_i - \bar{z})^2}{k-1} = \frac{53.2333}{2} = 26.6167$$

$$\begin{aligned} \text{OB} &= \frac{\sum_{i=1}^k n_i (\bar{z}_i - \bar{z})^2 / (k-1)}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (z_{ij} - \bar{z}_i)^2 / \sum_{i=1}^k (n_i - 1)} \\ &= \frac{26.6167}{71.3621} = 0.3730 \end{aligned}$$

การตัดสินใจ ค่าวิกฤตจากตารางเอฟ (F) ที่องศาความเป็นอิสระเท่ากับ 2 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 จะได้ $F_{0.05;2,12} = 3.8853$ พบว่าค่าสถิติที่ได้จากการคำนวณน้อยกว่าค่าที่ได้จากตาราง กล่าวคือ $\text{OB} = 0.3730 < 3.8853$ จึงไม่มีเหตุผลเพียงพอที่จะปฏิเสธ H_0 ดังนั้นที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ข้อมูลในแต่ละกลุ่มที่นำมาทดสอบมีความแปรปรวนเท่ากัน

2.3 การแจกแจงต่าง ๆ ที่ใช้ในงานวิจัย

การแจกแจงของประชากร หมายถึงการแจกแจงของค่าที่สนใจศึกษาจากข้อมูลทุกหน่วยของประชากร การอนุมานเชิงสถิติซึ่งประกอบด้วยการประมาณค่าพารามิเตอร์และการทดสอบสมมติฐานทางสถิติ มักจะมีข้อกำหนดเบื้องต้นว่ากลุ่มตัวอย่างจากประชากรที่สุ่มได้นั้นต้องมาจากประชากรที่ทราบล่วงหน้าว่ามีลักษณะการแจกแจงแบบใดแบบหนึ่ง เช่น การแจกแจงปกติ การแจกแจงแกมมา การแจกแจงทวินาม การแจกแจงเลขชี้กำลัง การแจกแจงไคกำลังสองและการแจกแจงปัวซอง เป็นต้น

เนื่องจากในความเป็นจริงข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์อาจไม่ได้มีการแจกแจงปกติเพียงอย่างเดียว ในการทำวิจัยครั้งนี้จึงเสนอการแจกแจงของประชากร 2 แบบคือ ในกรณีที่ลักษณะข้อมูลเป็นแบบสมมาตรจะใช้การแจกแจงปกติ และกรณีที่ลักษณะข้อมูลนั้นไม่สมมาตรจะใช้การแจกแจงแกมมา ซึ่งแต่ละการแจกแจงมีรายละเอียด ดังนี้

2.3.1 การแจกแจงปกติ (Normal Distribution)

เป็นการแจกแจงความหนาแน่นน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่สำคัญที่สุด เนื่องจากค่าที่ได้จากการวัดส่วนใหญ่จะมีการแจกแจงแบบนี้ เมื่อ ค.ศ.1733 เดอร์มัวร์ (De Moivre) เป็นผู้ที่ยืนยันการของเส้นโค้งของการแจกแจงปกติได้ และต่อมาเกาส์ (Gauss) ก็ได้สมการนี้จากการศึกษาค่าคลาดเคลื่อนในการวัดปริมาณเดียวกันหลายๆ ครั้ง การแจกแจงนี้จึงมีชื่อเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า การแจกแจงแบบเกาส์เซียน (Gaussian distribution)

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่ม X จะมีการแจกแจงปกติที่มีพารามิเตอร์ μ และ σ^2 เขียนแทนด้วย $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ถ้า X มีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นดังนี้ (จิรัชย์, 2548)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}; -\infty < x < \infty; -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$$

โดยที่ σ คือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร

σ^2 คือ ความแปรปรวนของประชากร

μ คือ ค่าเฉลี่ยของประชากร

x คือ ค่าของข้อมูลจากกลุ่มตัวอย่าง

$\pi = 3.14159$

$e = 2.7183$

คุณสมบัติของการแจกแจงปกติ (สายชล, 2546)

1. เป็นการแจกแจงที่มีจุดยอดเพียงจุดเดียว (unimodal)
2. เส้นโค้งปกติสมมาตรรอบจุดค่าเฉลี่ย μ โดยมีค่าเฉลี่ย μ เป็นจุดกึ่งกลาง ซึ่งแบ่งพื้นที่ออกเป็นสองส่วนเท่าๆ กัน โดยที่ครึ่งหนึ่ง (50%) ของพื้นที่ใต้โค้งปกติอยู่ทางด้านขวาของจุดกึ่งกลาง และอีกครึ่งหนึ่ง (50%) ของพื้นที่ใต้โค้งปกติจะอยู่ทางด้านซ้ายของจุดกึ่งกลาง
3. ค่าเฉลี่ย มัชยฐาน และฐานนิยม จะเท่ากันและอยู่ที่จุดกึ่งกลาง
4. พื้นที่ใต้โค้งปกติทั้งหมดเท่ากับ 1

ลักษณะของการแจกแจงปกติเป็นรูประฆังคว่ำ (bell shape) โดยขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ 2 ตัว คือ μ และ σ^2 โดยกราฟจะโด่งหรือแบนราบขึ้นอยู่กับความแปรปรวน σ^2 ถ้าความแปรปรวนมีค่าน้อยกราฟจะโด่ง แต่ถ้าความแปรปรวนมีค่ามากกราฟจะแบนราบ และกราฟมีสมมาตรรอบแกน $X = \mu$

$$\begin{aligned}\text{ค่าเฉลี่ย} \quad E(X) &= \mu \\ \text{ความแปรปรวน} \quad V(X) &= \sigma^2\end{aligned}$$

2.3.2 การแจกแจงแกมมา (Gamma Distribution) (วนิช, 2554)

การแจกแจงแกมมานั้นเป็นการแจกแจงที่เป็นรูปทั่วไปของการแจกแจงเลขชี้กำลัง ที่มีค่าเฉลี่ยเป็น β หรือก็คือ $\frac{1}{\lambda}, \lambda > 0$ เป็นตัวแปรสุ่มแบบเลขชี้กำลังหนึ่งที่มีค่าเฉลี่ยเป็น $\frac{1}{\lambda}$ จะหมายถึงระยะเวลาที่ใช้ในการรอคอยจนกระทั่งเหตุการณ์ที่สนใจเหตุการณ์แรกเกิดขึ้นเมื่อเหตุการณ์ที่สนใจนั้นถูกกำหนดจากการทดลองแบบปัวซอง ที่มีค่าเฉลี่ย λ ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแกมมา หมายถึงระยะเวลาที่ใช้ในการรอคอยจนกระทั่งเหตุการณ์ที่ α^{th} ได้เกิดขึ้น การแจกแจงแกมมาเป็น การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่องที่สำคัญอีกการแจกแจงหนึ่ง เพราะว่ามี การแจกแจงหลายแบบเป็นส่วนหนึ่งของการแจกแจงแกมมาและมีการแจกแจงอีกหลายแบบได้มาจากการแปลงตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแกมมา

ในการหาฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแกมมา จะต้องอาศัยฟังก์ชันแกมมา (Gamma function) ฟังก์ชันแกมมาของ α เขียนแทนด้วย $\Gamma(\alpha)$ ซึ่ง

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha) &= \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad \text{สำหรับทุกค่าของ } \alpha > 0 \\ &= (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)\end{aligned}$$

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแกมมา ที่มีพารามิเตอร์ α และ β มีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} \quad ; x > 0 ; \alpha > 0, \beta > 0$$

กราฟของฟังก์ชันจะขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ 2 ตัว คือ α และ β ซึ่ง α คือพารามิเตอร์ที่แสดงถึงรูปร่าง (Shape parameter) ส่วน β คือพารามิเตอร์ที่แสดงถึงสเกล (Scale parameter)

$$\begin{aligned}\text{ค่าเฉลี่ย} \quad E(X) &= \alpha\beta \\ \text{ความแปรปรวน} \quad V(X) &= \alpha\beta^2\end{aligned}$$

2.4 การกำหนดระดับความแตกต่างของความแปรปรวนของประชากร

กำหนดความแตกต่างของความแปรปรวนโดยใช้ค่าพารามิเตอร์ไม่ศูนย์กลาง (Noncentrality Parameter : ϕ) เป็นเกณฑ์วัดความแตกต่างของความแปรปรวนของประชากร (Game, P. A, Winkler, H. B. and Probert, D. A., 1972)

$$\text{โดยที่} \quad \phi = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (\sigma_i^2 - \bar{\sigma}^2)^2 / k}{\sigma_1^2}}$$

เมื่อ σ_1^2	คือ	ค่าความแปรปรวนของประชากรที่มีค่าต่ำที่สุด
σ_i^2	คือ	ค่าความแปรปรวนของประชากรกลุ่มที่ i โดยที่ $i = 1, 2, \dots, k$
$\bar{\sigma}^2$	คือ	ค่าเฉลี่ยความแปรปรวนของประชากรทั้ง k กลุ่ม
k	คือ	จำนวนกลุ่มประชากร ในที่นี้ $k = 3, 4, 5$

เกณฑ์ที่ใช้ในการวัดความแตกต่างของความแปรปรวนของประชากรคือ

ถ้าค่า ϕ อยู่ในช่วง $0 < \phi < 1.5$ แสดงว่าความแปรปรวนของประชากรมีความแตกต่างกันน้อย

ถ้าค่า ϕ อยู่ในช่วง $1.5 < \phi < 3$ แสดงว่าความแปรปรวนของประชากรมีความแตกต่างกันปานกลาง

ถ้าค่า ϕ อยู่ในช่วง $\phi \geq 3$ แสดงว่าความแปรปรวนของประชากรมีความแตกต่างกันมาก

ตัวอย่างการคำนวณค่า ϕ ที่อยู่ในช่วง $0 < \phi < 1.5$ โดยสมมติให้ความแปรปรวนที่กำหนดมีค่าเป็น 16 : 18 : 20 (จากหน้าที่ 5) ได้ค่าดังนี้

$$\begin{aligned} \text{จากสูตร} \quad \phi &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (\sigma_i^2 - \bar{\sigma}^2)^2 / k}{\sigma_1^2}} \\ \text{หาค่า } \bar{\sigma}^2 \text{ จะได้ } \bar{\sigma}^2 &= \frac{16+18+20}{3} = \frac{54}{3} = 18 \\ \sum_{i=1}^3 (\sigma_i^2 - \bar{\sigma}^2)^2 &= (16-18)^2 + (18-18)^2 + (20-18)^2 \\ &= 8 \\ \text{แทนค่า} \quad \phi &= \sqrt{\frac{8/3}{16}} = 0.4082 \end{aligned}$$

2.5 เกณฑ์การเปรียบเทียบประสิทธิภาพการทดสอบ

ประสิทธิภาพการทดสอบ (ปิยวรรณ, 2552) หมายถึงเกณฑ์ในการตัดสินใจว่าวิธีการทดสอบใดดีที่สุดที่สุดในบรรดาวิธีทดสอบที่สนใจศึกษา โดยวัดประสิทธิภาพจากความสามารถในการควบคุมความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ และมีกำลังการทดสอบสูงที่สุด

ความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 (Probability of type I error) หมายถึงความน่าจะเป็นที่ตัดสินใจปฏิเสธสมมติฐานหลักเมื่อสมมติฐานหลักเป็นจริง แทนด้วย α

กำลังการทดสอบ (Power of a test) หมายถึง ความน่าจะเป็นที่ตัดสินใจปฏิเสธสมมติฐานหลัก เมื่อสมมติฐานหลักเป็นเท็จ แทนด้วย $1-\beta$ ดังแสดงในตาราง

ตารางความสัมพันธ์ระหว่างสมมติฐานหลักและการสรุปผล

สมมติฐานหลัก (H_0)	การสรุปผล	
	ยอมรับ H_0	ปฏิเสธ H_0
จริง	ความน่าจะเป็น = $1-\alpha$	ความผิดพลาดแบบที่หนึ่ง ความน่าจะเป็น = α
เท็จ	ความผิดพลาดแบบที่สอง ความน่าจะเป็น = β	กำลังการทดสอบ ความน่าจะเป็น = $1-\beta$

เกณฑ์การพิจารณาความสามารถในการควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1

เกณฑ์ของ Bradley, J. V. (1978) กำหนดให้ค่าความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบที่ 1 ที่เกิดจากการทดลอง เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ “ τ ” ซึ่งถ้าค่าของ τ ตกอยู่ในช่วง $[0.5\alpha, 1.5\alpha]$ ที่ระดับนัยสำคัญ α จะถือว่าสถิติทดสอบนั้นสามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ แต่ถ้าค่า τ ตกอยู่นอกช่วงที่กำหนด จะถือว่าไม่สามารถควบคุมความผิดพลาดแบบที่ 1 ได้ หรือเขียนช่วงที่กำหนดแต่ละระดับนัยสำคัญได้ดังนี้

ระดับนัยสำคัญ	ช่วงที่กำหนด
0.25	[0.125 , 0.375]
0.20	[0.100 , 0.300]
0.15	[0.075 , 0.225]
0.10	[0.050 , 0.150]
0.05	[0.025 , 0.075]
0.01	[0.005 , 0.015]

2.6 รายงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ดวงพร พัทธะวณิช (2557) ศึกษาเปรียบเทียบความน่าจะเป็นของการเกิดความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 และอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบ Levene, Modified-Levene, Bartlett, Box-Andersen, Jackknife, Z-variance, O'Brien และ Overall-Woodward Modified Z-variance ซึ่งใช้ทดสอบความเป็นเอกพันธ์ของความแปรปรวน ในการศึกษาได้กำหนดรูปแบบการแจกแจงของประชากรและขนาดตัวอย่างในระดับต่างๆ โดยกำหนดให้มีอัตราส่วนของความแปรปรวนเท่ากับ 1:2:3:4 และ 1:2:3:4:5 จากการศึกษาโดยใช้วิธีมอนติคาร์โล พบว่า Levene ไม่ใช้สถิติทดสอบที่ดีที่สุด แต่ยังมีสถิติทดสอบอื่นที่ให้ผลที่ดีกว่า ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับ การแจกแจงของข้อมูล ในกรณีที่ประชากรมีการแจกแจงปกติ Bartlett, Box-Andersen และ Z-variance เป็นสถิติทดสอบที่ดีเพราะไม่ว่าจะใช้ขนาดตัวอย่างน้อยหรือมากก็ให้อำนาจทดสอบมาก ในกรณีที่ประชากรมีการแจกแจงยูนิฟอร์ม ไคสแควร์ และการแจกแจงที่มีความเบ้ต่ำ พบว่า Levene, O'Brien และ Bartlett ให้อำนาจการทดสอบมากที่สุด ตามลำดับ

อาณัติ แสงสว่าง (2556) ศึกษาเปรียบเทียบประสิทธิภาพของสถิติทดสอบสำหรับทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของประชากร 3, 4 และ 5 กลุ่ม โดยแบ่งเป็นสถิติทดสอบแบบใช้พารามิเตอร์ คือ สถิติทดสอบ บราวน์-ฟอร์สตี (BF) และสถิติทดสอบแบบไม่ใช้พารามิเตอร์ คือ สถิติทดสอบ ANOMV (AV) สถิติทดสอบ ANOMVTR (AVT) และสถิติทดสอบจีเนีย (GT) โดยพิจารณาประสิทธิภาพของสถิติทดสอบทั้ง 4 วิธี จากความสามารถในการควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 และเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบที่สามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ เมื่อกำหนดการแจกแจงของประชากรเป็น 3 แบบ คือ การแจกแจงแบบปกติ การแจกแจงแบบโลจิสติก และการแจกแจงแบบไวบูลล์ ขนาดตัวอย่างเล็ก ($n \leq 15$) กลาง ($15 \leq n \leq 120$) และใหญ่ ($n > 120$) ยกเว้นสถิติทดสอบ ANOMV ที่จะทำการศึกษาเฉพาะขนาดตัวอย่างปานกลาง โดยกำหนดให้สำหรับแต่ละกลุ่มประชากรที่เปรียบเทียบมีขนาดตัวอย่างเท่ากันและไม่เท่ากัน เมื่อกำหนดระดับความแตกต่างของความแปรปรวน (ϕ) 3 ระดับ คือ น้อย ($0 < \phi < 1.5$) ปานกลาง ($1.5 < \phi < 3.0$) และมาก ($\phi \geq 3.0$) ที่ระดับนัยสำคัญ (α) 0.01 และ 0.05 จำลองข้อมูลด้วยเทคนิคมอนติคาร์โล ทำซ้ำ 1,000 ครั้ง ในแต่ละสถานการณ์ ผลการศึกษาพบว่าเมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบปกติและการแจกแจงแบบไวบูลล์ สถิติทดสอบไม่ใช้พารามิเตอร์คือ สถิติทดสอบจีเนียมีประสิทธิภาพใกล้เคียงกับสถิติทดสอบแบบใช้พารามิเตอร์คือ สถิติทดสอบบราวน์-ฟอร์สตี เนื่องจากสถิติทดสอบจีเนียและสถิติทดสอบบราวน์-ฟอร์สตี สามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ดีทั้ง 2 วิธี และให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงใกล้เคียงกัน เมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบโลจิสติก สถิติทดสอบแบบใช้พารามิเตอร์คือ สถิติทดสอบบราวน์-ฟอร์สตี มีประสิทธิภาพมากกว่าสถิติทดสอบแบบไม่ใช้พารามิเตอร์คือ สถิติทดสอบจีเนียและสถิติทดสอบ ANOMV เนื่องจากสถิติทดสอบบราวน์-ฟอร์สตีสามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ดีกว่าสถิติทดสอบจีเนีย และสถิติทดสอบ ANOMV และสถิติทดสอบบราวน์-ฟอร์สตีให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงเมื่อขนาดตัวอย่างปานกลางและใหญ่ นอกจากนั้นยังพบว่าเมื่อค่าระดับนัยสำคัญ จำนวนกลุ่มประชากร และขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น สถิติทดสอบ บราวน์-ฟอร์สตี

ดี สถิติทดสอบ ANOMV และสถิติทดสอบจีนี้มีแนวโน้มให้ค่าอำนาจการทดสอบเพิ่มขึ้น และเมื่อระดับความแตกต่างของความแปรปรวนเพิ่มขึ้น กรณีขนาดตัวอย่างปานกลางและใหญ่ สถิติทดสอบทั้ง 3 วิธี มีแนวโน้มให้ค่าอำนาจทดสอบเพิ่มขึ้นด้วยเช่นกัน

ศรวิภา ศรีสมบูรณ์ (2553) ศึกษาเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบสำหรับทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของประชากร 4 วิธี ได้แก่ สถิติทดสอบบาร์ตเลต สถิติทดสอบ T_3 สถิติทดสอบโอเบิร์น และสถิติทดสอบบราวน์-ฟอร์สตี ตัวอย่างมีขนาดเท่ากันและไม่เท่ากัน เมื่อกำหนดประชากรจำนวน 3, 4 และ 5 กลุ่ม โดยให้ข้อมูลมีการแจกแจงแบบปกติแบบที่ แบบล็อกนอร์มอลและแบบโคสแควร์ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.01 และ 0.05 พิจารณาสถิติทดสอบที่มีความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ตามเกณฑ์ของ Cochran เมื่อกำหนดอัตราส่วนความแปรปรวนแตกต่างกัน จำลองข้อมูลด้วยเทคนิคมอนติคาร์โล จำนวนซ้ำ 1,000 รอบ ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป SAS ผลการศึกษาพบว่า เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงแบบปกติ สถิติทดสอบบาร์ตเลต มีความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ดีที่สุด และมีอำนาจทดสอบสูงสุด ทั้งในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเท่ากันและไม่เท่ากัน เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงแบบที่ แบบล็อกนอร์มอล และแบบโคสแควร์ สถิติทดสอบ บราวน์-ฟอร์สตีมีความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ดีที่สุด และมีอำนาจการทดสอบสูงสุด ทั้งในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเท่ากันและไม่เท่ากัน และพบว่าอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบขึ้นอยู่กับขนาดตัวอย่างและอัตราส่วนความแปรปรวน

สมประสงค์ ลิทธิสมบัติ (2553) ศึกษาสถิติทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนโดยใช้สถิติทดสอบ บาร์ตเลต สถิติทดสอบเชฟเฟ สถิติทดสอบเลเวเน สถิติทดสอบบราวน์-ฟอร์สตี สถิติทดสอบโอเบิร์นและสถิติทดสอบเลห์แมน โดยศึกษาอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบทั้ง 6 ตัว เมื่อประชากรมีการแจกแจงเป็นแบบเดียวกัน ทุกกลุ่ม ซึ่งได้แก่ การแจกแจงแบบปกติและแบบแกมมา ณ ระดับนัยสำคัญ 0.05 ข้อมูลที่ใช้ในการวิจัยได้จากการจำลองข้อมูลด้วยเทคนิคมอนติคาร์โล กระทำซ้ำ 2,000 ครั้ง ในแต่ละกรณี ผลการศึกษาพบว่าเมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบปกติ สถิติทดสอบเลห์แมนจะมีอำนาจการทดสอบมากที่สุด รองลงมาคือสถิติทดสอบเชฟเฟ โดยสถิติทดสอบบราวน์-ฟอร์สตีมีอำนาจการทดสอบน้อยที่สุดที่อัตราส่วนของความแปรปรวนแตกต่างกัน น้อย เมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบแกมมา สถิติทดสอบบราวน์-ฟอร์สตี จะมีอำนาจการทดสอบมากที่สุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ เชฟเฟและสถิติทดสอบโอเบิร์น ตามลำดับ

ปิยวรรณ ถือแก้ว (2552) ได้ศึกษาเปรียบเทียบวิธีทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนเมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดเท่ากันและไม่เท่ากันโดยพิจารณาเมื่อประชากรมีจำนวน 4 และ 5 กลุ่ม ภายใต้การแจกแจงปกติ การแจกแจงดับเบิลเอ็กซ์โปเนนเชียล การแจกแจง (ปกติ)² และการแจกแจง (ดับเบิลเอ็กซ์โปเนนเชียล)² ซึ่งวิธีที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ วิธีทดสอบ T_3 วิธีทดสอบเนย์แมน-เพียร์สัน วิธีทดสอบเลয়ারต์โคสแควร์ วิธีทดสอบเลวีน และวิธีทดสอบโอเบิร์น โดยจะพิจารณาว่าวิธีทดสอบใดมีประสิทธิภาพมากที่สุดจากความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ตามเกณฑ์ของ Cochran และอำนาจการทดสอบ ซึ่งกำหนดให้อัตราส่วนความแปรปรวนมีค่าแตกต่างกัน ภายใต้ระดับนัยสำคัญ 0.01 และ 0.05 ดำเนินการทดลองโดยการจำลองข้อมูลด้วยเทคนิคมอนติคาร์โล จำนวน 252 กรณี ซึ่งแต่ละกรณีทำซ้ำๆ กัน 1,000 ครั้ง จากการศึกษา

พบว่าเมื่อลักษณะของประชากรมีการ แจกแจงปกติ วิธีทดสอบ T_3 เป็นวิธีทดสอบที่สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ และมีอำนาจการทดสอบสูงสุด เมื่อประชากรมีการแจกแจงดับเบิลเอ็กซ์โปเนนเชียล สำหรับกลุ่มตัวอย่างที่มีขนาดเท่ากัน วิธีทดสอบ เลย์รด์ไคสควอร์ เป็นวิธีทดสอบที่สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ และมีอำนาจการทดสอบสูงสุด แต่ถ้ากลุ่มตัวอย่างมีขนาดไม่เท่ากัน วิธีทดสอบโอברินเป็นวิธีทดสอบที่สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ และมีอำนาจการทดสอบสูงสุด และเมื่อประชากรมีการแจกแจง (ปกติ)² และการแจกแจง (ดับเบิลเอ็กซ์โปเนนเชียล)² ซึ่งเป็นการแจกแจงที่ไม่สมมาตร วิธีทดสอบโอברินเป็นวิธีทดสอบที่สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ และมีอำนาจการทดสอบสูงสุด

ธีรศักดิ์ จันทร์กระจ่าง (2551) ศึกษาเปรียบเทียบความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ของสถิติทดสอบในการทดสอบความเท่ากันของค่าเฉลี่ยประชากร 5 ชุด โดยใช้สถิติทดสอบเวลช์ บราวน์-ฟอร์สตี และมาราสควิลโล กรณีที่ประชากรมีการแจกแจงแบบปกติแบบเอกซ์โปเนนเชียลและแบบที โดยกำหนดอัตราส่วนความแปรปรวนของประชากรที่แตกต่างกัน คือ 1:1:1:1:1, 1:1:1:2:2 และ 2:2:1:1:1 ขนาดตัวอย่างสุ่มจากประชากรแต่ละชุดสองลักษณะคือ ขนาดเท่ากันเป็น (10,10,10,10,10), (20,20,20,20,20) และ (30,30,30,30,30) และ ขนาดตัวอย่างไม่เท่ากันเป็น (5,10,15,20,25), (5,5,10,10,15), (15,15,20,25,25), (30,30,35,35,40) และ (30,35,40,45,50) จากปัจจัยเหล่านี้ทำให้กรณีศึกษาจำนวน 72 กรณี ข้อมูลที่ใช้ในการวิจัยนี้เป็นข้อมูลที่จำลองขึ้นด้วยเทคนิคมอนติคาร์โล จำนวน 1,000 รอบ ในแต่ละกรณี เกณฑ์การเปรียบเทียบความสามารถในการควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ที่นำมาใช้ในงานวิจัยนี้คือ เกณฑ์ Cochran เมื่อกำหนดระดับนัยสำคัญ 0.05 ผลการวิจัยสรุปได้ดังนี้คือความสามารถในการควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 พบว่าเมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบปกติ สถิติทดสอบเวลช์สามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ทุกกรณี ส่วนสถิติทดสอบมาราสควิลโลสามารถควบคุมได้บางกรณี และสถิติทดสอบ บราวน์-ฟอร์สตีไม่สามารถควบคุมได้เลย เมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบที พบว่าสถิติทดสอบเวลช์และสถิติทดสอบ มาราสควิลโลสามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ ในทุกกรณี ส่วนสถิติทดสอบ บราวน์-ฟอร์สตีไม่สามารถควบคุมได้ และเมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียลพบว่าเฉพาะสถิติทดสอบ บราวน์-ฟอร์สตีสามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากัน และขนาดตัวอย่างไม่เท่ากันที่มีขนาดใหญ่ ส่วนค่าอำนาจการทดสอบพบว่าเมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบปกติ สถิติทดสอบมาราสควิลโลมีอำนาจการทดสอบสูงสุดในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเท่ากันที่มีขนาดใหญ่ ส่วนกรณีที่ขนาดตัวอย่างไม่เท่ากันและอัตราส่วนความแปรปรวนเพิ่มมากขึ้น สถิติทดสอบมาราสควิลโลจะมีอำนาจทดสอบที่ลดลง เมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบทีพบว่า สถิติทดสอบมาราสควิลโลมีอำนาจทดสอบเพิ่มมากขึ้นเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้น และค่าอำนาจทดสอบนี้จะลดลงเมื่ออัตราส่วนความแปรปรวนมากขึ้น และเมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียลพบว่าสถิติทดสอบบราวน์-ฟอร์สตีให้อำนาจทดสอบสูงสุดในทุกกรณี

พรพรรณ จันท์ดี (2549) ศึกษาสถิติทดสอบที่มีความแข็งแกร่งสำหรับการทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของประชากร 5 ประชากร โดยใช้สถิติทดสอบบาร์ตเลต สถิติ

ทดสอบเลয়ারด์โคสแควร์ สถิติทดสอบ บ็อกซ์และสถิติทดสอบแจ๊คไนฟ์ โดยพิจารณาจากความสามารถในการควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ตามเกณฑ์ Cochran เมื่อการแจกแจงของประชากรเป็นแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ 10 แบบที่ท้องศาอิสระเท่ากับ 4 แบบโคสแควร์ที่ท้องศาอิสระเท่ากับ 4 และแบบไวบูลล์ที่แอลฟาเท่ากับ 2 กำหนดให้กลุ่มตัวอย่างมีขนาดเท่ากันคือ (8,8,8,8), (10,10,10,10,10), (15,15,15,15,15) และ (25,25,25,25,25) ทำการทดสอบที่ระดับนัยสำคัญ 0.01 และ 0.05 นอกจากนี้ยังได้ศึกษาถึงอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบทั้ง 4 จากการกำหนดอัตราส่วนที่ไม่เท่ากันของความแปรปรวนของประชากร ในการศึกษาค้างนี้ได้จำลองข้อมูลที่น่ามาวิเคราะห์และประมวลผลในแต่ละกรณี จำนวน 3,000 รอบ โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB สรุปผลการศึกษาดังนี้ เมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบปกติและการแจกแจงแบบที่ สถิติทดสอบบาร์ตเลตเป็นสถิติที่มีความแกร่งและมีอำนาจทดสอบสูงสุด เมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบโคสแควร์และการแจกแจงแบบไวบูลล์ซึ่งเป็นลักษณะการแจกแจงแบบเบ้ขวา สถิติทดสอบเลয়ারด์โคสแควร์เป็นสถิติทดสอบที่มีความแกร่งและมีอำนาจทดสอบสูงสุด

วรารุทธิ์ พานิชกิจโกศลกุล (2548) ได้ศึกษาเปรียบเทียบประสิทธิภาพของสถิติทดสอบสำหรับทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของประชากร 3 ประชากร โดยใช้สถิติทดสอบของเลวินแบบผลต่างสัมบูรณ์ แบบผลต่างกำลังสองและแบบถ่วงน้ำหนัก โดยพิจารณาจากความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 และอำนาจการทดสอบ เมื่อลักษณะการแจกแจงของประชากรเป็นแบบปกติ แบบเลขชี้กำลัง แบบโคกำลังสองและแบบไวบูลล์ โดยศึกษาทั้งกรณีขนาดของกลุ่มตัวอย่างเท่ากันและไม่เท่ากันและอัตราส่วนของความแปรปรวนแตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ 0.01 และ 0.05 การศึกษาค้างนี้ดำเนินการโดยการจำลองการทดลองด้วยเทคนิคมอนติคาร์โล ซึ่งกระทำซ้ำ 1,000 ครั้ง ในแต่ละลักษณะ จากการศึกษาพบว่าเมื่อลักษณะการแจกแจงของประชากรเป็นแบบปกติ สถิติทดสอบโดยใช้สถิติทดสอบของเลวินแบบผลต่างสัมบูรณ์และแบบผลต่างกำลังสองสามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้เกือบทุกกรณีที่ศึกษา ส่วนสถิติทดสอบแบบถ่วงน้ำหนักสามารถควบคุมได้ บางขนาดของกลุ่มตัวอย่างและสถิติทดสอบของเลวินแบบผลต่างสัมบูรณ์มีอำนาจการทดสอบสูงที่สุดเกือบทุกกรณีที่ศึกษา เมื่อลักษณะการแจกแจงของประชากรเป็นแบบเลขชี้กำลังและโคกำลังสอง สถิติทดสอบของเลวินแบบผลต่างกำลังสองเท่านั้นสามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในบางกรณี เมื่อลักษณะการแจกแจงของประชากรเป็นแบบไวบูลล์ สถิติทดสอบของเลวินแบบผลต่างกำลังสองสามารถควบคุมความน่าจะเป็นของ ความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้และ มีอำนาจการทดสอบสูงที่สุดเกือบทุกกรณีที่ศึกษา อำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบขึ้นอยู่กับอัตราส่วนของความแปรปรวน ลักษณะการแจกแจงของประชากร ขนาดของกลุ่มตัวอย่างและระดับนัยสำคัญที่ใช้ในการทดสอบ

ธนัท พรสวัสดิ์ (2546) ได้ศึกษาเปรียบเทียบประสิทธิภาพสถิติทดสอบสำหรับทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของประชากร 3 กลุ่ม และ 4 กลุ่ม โดยใช้สถิติทดสอบ ANOMVR (Analysis of means variability using ranks) สถิติทดสอบเลวินแบบถ่วงน้ำหนัก (Levene's Weighted Least Squares Test) สถิติทดสอบจินี (Gini's Test) ซึ่งในที่นี้ศึกษาถึงความสามารถในการควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 และเปรียบเทียบ

อำนาจการทดสอบของสถิติทั้ง 3 วิธี เมื่อกำหนดการแจกแจงของประชากรเป็นแบบปกติ แบบแกมมา แบบโลจิสติก และแบบไวบูลล์ โดยขนาดตัวอย่างที่พิจารณาในการวิจัยครั้งนี้พิจารณากรณีที่ขนาดตัวอย่างเท่ากันและไม่เท่ากัน สำหรับตัวอย่างขนาดเล็ก ตัวอย่างขนาดกลาง และตัวอย่างขนาดใหญ่ ระดับนัยสำคัญที่ใช้ในการทดสอบเท่ากับ 0.05 และ 0.1 ข้อมูลที่นำมาศึกษาในแต่ละสถานการณ์ จำลองโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปมินิแทป (MINITAB) จำนวน 100 ชุด จากการศึกษพบว่า การศึกษาความสามารถในการควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 พบว่าเมื่อการแจกแจงของประชากรเป็นแบบปกติ และแบบโลจิสติก สถิติทดสอบทั้ง 3 วิธี สามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ทุกกรณี เมื่อการแจกแจงของประชากรเป็นแบบแกมมาและไวบูลล์ สถิติทดสอบจึงสามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ทุกกรณี สถิติทดสอบ ANOMVR และสถิติทดสอบเลวินแบบถ่วงน้ำหนักสามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้เพียงบางกรณี การเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบทั้ง 3 วิธี โดยพิจารณาเฉพาะสถิติทดสอบที่สามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็ก สถิติทดสอบ ANOMVR มีอำนาจการทดสอบสูงกว่าสถิติทดสอบอื่น ๆ ทั้งกรณีการแจกแจงของประชากรเป็นแบบปกติ แบบแกมมา แบบโลจิสติก และแบบไวบูลล์ เมื่อกลุ่มตัวอย่างขนาดกลาง สถิติทดสอบเลวินแบบถ่วงน้ำหนักและสถิติทดสอบจินีมีอำนาจการทดสอบใกล้เคียงกันที่การแจกแจงของประชากรเป็นแบบปกติ และแบบโลจิสติก สำหรับการแจกแจงแบบแกมมาและไวบูลล์ สถิติทดสอบจินีมีอำนาจการทดสอบสูงสุด เมื่อกลุ่มตัวอย่างขนาดใหญ่ สถิติทดสอบทั้ง 3 วิธี มีอำนาจการทดสอบสูงใกล้เคียงกัน นอกจากนี้ยังพบว่าเมื่อความแตกต่างของประชากรแตกต่างกันมากและตัวอย่างขนาดใหญ่ อำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบทั้ง 3 วิธี มีค่าเข้าใกล้ 1 แสดงว่าสถิติทดสอบทั้ง 3 วิธี มีอำนาจการทดสอบสูง

เยาวภา ไชยศรี (2542) งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวทดสอบสถิติสำหรับทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของประชากร 3, 4 และ 5 ประชากร โดยใช้ตัวทดสอบสถิติบาร์ตเลต เลวิน และบราวน์-ฟอร์สตี โดยพิจารณาจากความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 และอำนาจการทดสอบ เมื่อลักษณะการแจกแจงของประชากรเป็นแบบปกติ แบบเอกซ์โปเนนเชียล และแบบไวบูลล์ โดยพิจารณาทั้งกรณีขนาดของกลุ่มตัวอย่างเท่ากันและไม่เท่ากัน และเมื่ออัตราส่วนของความแปรปรวนแตกต่างกัน ที่ระดับนัยสำคัญ 0.01 และ 0.05 งานวิจัยนี้ดำเนินการโดยการจำลองการทดลองด้วยเทคนิคมอนติคาร์โล ซึ่งกระทำซ้ำ 1,000 ครั้ง ใน แต่ละลักษณะ ผลการวิจัยสรุปได้ดังนี้ เมื่อลักษณะการแจกแจงของประชากรเป็นแบบปกติและแบบไวบูลล์ ตัวทดสอบสถิติบาร์ตเลตสามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ดีกว่าตัวทดสอบสถิติ ตัวอื่น และให้อำนาจการทดสอบสูงกว่าตัวทดสอบสถิติตัวอื่นๆ ด้วย และเมื่อลักษณะการแจกแจงของประชากรเป็นแบบเอกซ์โปเนนเชียลและกลุ่มตัวอย่างมีขนาดเท่ากัน ตัวทดสอบสถิติบราวน์-ฟอร์สตีเท่านั้นที่สามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ อำนาจการทดสอบขึ้นอยู่กับอัตราส่วนความแปรปรวน ลักษณะการแจกแจงของประชากร ขนาดของกลุ่มตัวอย่าง และระดับนัยสำคัญที่ใช้ในการทดสอบ

Nguyen, D. T. et. al. (2014) ได้ทำวิจัยเรื่องการวิเคราะห์ความแปรปรวน-ความเท่ากันของความแปรปรวน : SAS มาโครสำหรับการทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนในตัว

แบบการวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบปัจจัยเดียว โดยการศึกษาการจำลองเพื่อตรวจสอบความถูกต้องและความแม่นยำของวิธีทดสอบข้อตกลงเบื้องต้นความเท่ากันของความแปรปรวนในตัวแบบการวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบทางเดียว 14 วิธี ปัจจัยในการวางแผน มี 6 ปัจจัย ประกอบด้วยจำนวนกลุ่ม จำนวนค่าสังเกตเฉลี่ยต่อกลุ่ม ขนาดตัวอย่าง ความแปรปรวน อัตราส่วนความแปรปรวนสูงสุด และการแจกแจงของประชากร ($\gamma_1 = 0.00$ และ $\gamma_2 = 0.00$, $\gamma_1 = 1.00$ และ $\gamma_2 = 3.00$, $\gamma_1 = 1.50$ และ $\gamma_2 = 5.00$, $\gamma_1 = 2.00$ และ $\gamma_2 = 6.00$, $\gamma_1 = 0.00$ และ $\gamma_2 = 25.00$, $\gamma_1 = 0.00$ และ $\gamma_2 = -1.00$ โดยที่ γ_1 และ γ_2 คือความเบ้และความโด่งตามลำดับ) ประสิทธิภาพของการทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวน 14 วิธี ที่ระดับนัยสำคัญ 0.01, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20 และ 0.25 สำหรับแต่ละเงื่อนไข ทำซ้ำ 5,000 รอบ เปรียบเทียบโดยใช้ความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 และอำนาจการทดสอบ เกณฑ์ของ Bradley (1978) สำหรับความแกร่งกำหนดไว้ที่ $\pm 0.5\alpha$ และขนาดอิทธิพล η^2 เพื่อตรวจสอบผลกระทบของปัจจัยในการวางแผนวิจัยเกี่ยวกับความแปรผันในค่าประมาณความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ผลการศึกษาพบว่าสถิติทดสอบเลวิน ที่มีเศษตกค้างกำลังสอง, Brown-Forsythe, O'Brien, Ramsey's conditional procedure และ Bootstrap Brown-Forsythe สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ สถิติทดสอบทั้ง 5 วิธีเหล่านี้มีสัดส่วนของ Bradley มากที่สุด คือ 0.77, 0.72, 0.58, 0.58 และ 0.52 ตามลำดับ สถิติทดสอบ O'Brien มีอำนาจการทดสอบน้อยกว่าวิธีอื่นเล็กน้อย ส่วนสถิติทดสอบ Bootstrap Brown-Forsythe มีอำนาจการทดสอบมากกว่าวิธีอื่นเล็กน้อย ขนาดตัวอย่างและรูปร่างของประชากรมีอิทธิพลต่อความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 มากที่สุด สัดส่วนของ Bradley เพิ่มขึ้น สำหรับสถิติทดสอบทั้ง 5 วิธี มีการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้เมื่อตัวอย่างมีขนาดเพิ่มขึ้น สำหรับตัวอย่างขนาดเล็ก เช่น $n = 5$ สถิติทดสอบ O'Brien เป็นการทดสอบเดียวที่มีสัดส่วนของ Bradley มากกว่า 0.60 เมื่อ $n = 10$ สถิติทดสอบ Ramsey มีสัดส่วนของ Bradley มากกว่า 0.80 เมื่อ $n = 20$ สัดส่วนของ Bradley มากกว่า 0.80 สำหรับสถิติทดสอบทั้ง 5 วิธี ด้วยการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ สถิติทดสอบ Ramsey มีสัดส่วนของ Bradley สูงขึ้นเล็กน้อย นอกจากนี้สถิติทดสอบ O'Brien และ Ramsey สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 เมื่อประชากรมีรูปร่างต่าง ๆ สัดส่วนของ Bradley จะลดลงสำหรับสถิติทดสอบ Brown-Forsythe, Bootstrap Brown-Forsythe, เลวินที่มีเศษตกค้างกำลังสอง และ modified Z-variance ขึ้นอยู่กับองศาของความไม่เป็นแบบปกติ สถิติทดสอบ Brown-Forsythe และ Bootstrap Brown-Forsythe เป็นสถิติทดสอบที่ conservative เมื่อการแจกแจงโด่งมาก (เช่น $\gamma_1 = 0.00$ และ $\gamma_2 = 25.00$; ความเบ้และความโด่งตามลำดับ) สถิติทดสอบเลวินที่มีเศษตกค้างกำลังสองและ modified Z-variance เป็นสถิติทดสอบที่ใช้ได้กว้างขวางเมื่อประชากรมีความเบ้และความโด่งเพิ่มขึ้น สถิติทดสอบ 12 ใน 14 วิธีมีสัดส่วนของ Bradley มากกว่า 0.50 เมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบปกติ ในบรรดาสถิติทดสอบเหล่านี้ Bartlett, Cochran ที่มีค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก และ Z-variance มีสัดส่วนของ Bradley อย่างสมบูรณ์คือ 1.0 สำหรับสถิติทดสอบ F-max และ Cochran C ที่มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต สัดส่วนของ Bradley จะต่ำ โดยไม่คำนึงถึงรูปร่างการแจกแจง โดยสรุปสถิติทดสอบ O'Brien และ Ramsey มีความแกร่งมากที่สุด ในขณะที่สถิติทดสอบ O'Brien เป็นวิธีที่มีประโยชน์ใน Base SAS ส่วนสถิติทดสอบ Ramsey ไม่มีประโยชน์

Allingham, D. and Rayner, J. (2011) ได้ทำวิจัยเรื่องการทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวน 2 กลุ่ม ในการทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนเมื่อกำหนดตัวอย่างที่เป็นอิสระกัน 2 กลุ่ม มาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติ วิธีที่นิยมใช้คือการทดสอบแบบเอฟ และการทดสอบเลวิน วิธีที่ใช้พารามิเตอร์คือการทดสอบอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็น (Likelihood ratio test) และการทดสอบวัลด์ (Wald test) ส่วนวิธีที่ไม่ใช้พารามิเตอร์คือการทดสอบอาร์ (R test) ผลการศึกษาพบว่าสำหรับตัวอย่างขนาดปานกลาง เมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบปกติ การทดสอบอาร์มีกำลังการทดสอบใกล้เคียงกับการทดสอบแบบเอฟและความแกร่งใกล้เคียงกับการทดสอบเลวิน นอกจากนี้การทดสอบอาร์ยังเหมาะสมสำหรับการทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนโดยไม่คำนึงถึงข้อตกลงเบื้องต้นที่ว่าประชากรมีการแจกแจงแบบปกติอีกด้วย

Lee, H. B. et. al. (2010) ได้ทำวิจัยเรื่องการศึกษาโมลติคาร์โลของสถิติทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวน 7 วิธี โดยในโปรแกรม SPSS ใช้สถิติทดสอบเลวินเพื่อทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวน ผู้ศึกษาทำการเปรียบเทียบกับสถิติทดสอบอื่น ๆ อีก 6 วิธี รวมเป็นสถิติทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวน 7 วิธี ในการวิเคราะห์ความแปรปรวนเพื่อเปรียบเทียบความแกร่งและอำนาจการทดสอบโดยใช้เทคนิคมอนติคาร์โล (Monte Carlo) สถิติทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนที่ใช้คือ เลวิน (Levene), เลวินปรับปรุง (modified Levene), Z-variance, Overall-Woodward Modified Z-variance, โอบริน (O'Brein), Samiuddin Cube Root และ F-Max วิธีการคือในแต่ละสถิติทดสอบใช้การวิเคราะห์มอนติคาร์โลโดยใช้การแจกแจงที่มีรูปร่างต่าง ๆ กัน คือ ปกติ การแจกแจงโด่งน้อย (platykurtic) การแจกแจงโด่งมาก (leptokurtic) การแจกแจงเบ้ปานกลาง (moderate skewed) และการแจกแจงเบ้มาก (highly skewed) สถิติทดสอบเลวินเป็นหนึ่งในโปรแกรมสำเร็จรูป SPSS ล่าสุด ผลจากการศึกษาพบว่าสถิติทดสอบเลวินดีที่สุดหรือไม่ก็แย่ที่สุดในการทดสอบความแกร่งและอำนาจการทดสอบ อย่างไรก็ตาม สถิติทดสอบเลวินปรับปรุงมีความแกร่งอย่างมากเมื่อเปรียบเทียบกับสถิติทดสอบอื่น ๆ แต่มีอำนาจการทดสอบต่ำกว่าสถิติทดสอบอื่น ๆ สถิติทดสอบ Samiuddin ดีที่สุดในในการทดสอบความแกร่งและอำนาจการทดสอบเมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบปกติ ผลของการศึกษานี้ยังพบข้อดีและข้อเสียของสถิติทดสอบทั้ง 7 วิธี ข้อแนะนำคือ ไม่มีสถิติทดสอบใดสถิติทดสอบหนึ่งที่ดีกว่าสถิติทดสอบอื่น ๆ ในการทดสอบความแกร่งและอำนาจการทดสอบ ผู้ศึกษาแนะนำว่าความเบ้และความโด่งที่มีในโปรแกรมสำเร็จรูป เช่น SPSS จะช่วยให้ผู้วิเคราะห์ข้อมูลเลือกสถิติทดสอบที่มีความแกร่งและอำนาจการทดสอบสูงสุดได้

Gastwirth, J. L., Gel, Y. R. and Miao, W. (2009) ได้ทำวิจัยเรื่องผลกระทบของสถิติทดสอบเลวินเกี่ยวกับความเท่ากันของความแปรปรวนในทฤษฎีเชิงสถิติและในทางปฏิบัติ โดยในการประยุกต์ใช้หลายอย่าง คำถามทางวิทยาศาสตร์ขั้นพื้นฐานที่ว่าความแปรปรวนของตัวอย่าง k กลุ่ม เท่ากันหรือไม่ มีสถิติทดสอบหลายวิธีสำหรับปัญหานี้ สถิติทดสอบจำนวนมากขึ้นอยู่กับข้อตกลงเบื้องต้นว่าประชากรมีการแจกแจงแบบปกติและไม่มี ความแกร่งกับการละเมิดข้อตกลงเบื้องต้น ในปี ค.ศ. 1960 ศาสตราจารย์ Howard Levene ได้เสนอวิธีใหม่เพื่อแก้ไขปัญหานี้โดยใช้การทดสอบเอฟกับส่วนเบี่ยงเบนสัมบูรณ์ของค่าสังเกตจากค่าเฉลี่ยของกลุ่มเหล่านั้น สถิติทดสอบเลวินมีอำนาจการทดสอบสูงและความแกร่งกับประชากรที่ไม่ได้มีการแจกแจงแบบปกติ และเป็นวิธีที่นิยมใช้อย่างมากสำหรับตรวจสอบความเท่ากันของความแปรปรวน ในงานวิจัยนี้ได้

ทบทวนวิธีดั้งเดิมที่เสนอโดยเลวินและต่อมาได้ปรับปรุงให้มีความแกร่ง เรียกว่า สถิติทดสอบเลวินปรับปรุง (modified Levene test) เพื่อช่วยเพิ่มอำนาจการทดสอบในการตรวจจับความแปรปรวนที่มีแนวโน้มเพิ่มขึ้น วิธีนี้มีประโยชน์ในกรณีที่ความแปรผันเพิ่มขึ้นหรือลดลง ตัวอย่างเช่น การเพิ่มการ ขึ้น ๆ ลง ๆ ของราคาหุ้น หรือการเปิดหรือปิดเครื่องเล่นแผ่นเสียงในการวิเคราะห์เศษตกค้างในการถดถอย สิ่งสำคัญของงานวิจัยนี้คือการอธิบายปัญหาทางวิทยาศาสตร์ต่าง ๆ เมื่อใช้สถิติทดสอบเลวิน ตัวอย่างเช่น ในทางมนุษยวิทยา เศรษฐกิจ ความถูกต้องของการวัดทางการแพทย์ การขึ้น ๆ ลง ๆ ของราคาน้ำมัน การศึกษาความแน่นอนของคำตัดสินของคณะลูกขุนในทางกฎหมาย และอิทธิพลของอายุเฮริเคนที่มีต่อระบบนิเวศน์

Argac, D. (2004) ได้ศึกษาเรื่องการทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนในการจัดจำแนกทางเดียวโดยทั่วไปภายใต้อิทธิพลของ : การจำลองอำนาจการทดสอบและการศึกษาเชิงเปรียบเทียบ โดยในการวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบทางเดียวที่ไม่สมดุล อิทธิพลของ และ ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่เท่ากัน การทดสอบจำนวนมากมีประโยชน์สำหรับการทดสอบสมมติฐานความเท่ากันของค่าเฉลี่ยหลายกลุ่ม ในการศึกษาประสิทธิภาพของการทดสอบเหล่านี้ ภายใต้สมมติฐานหลักโดยใช้การจำลอง มีความยุ่งยากในการประเมินอำนาจการทดสอบภายใต้สมมติฐานรองเนื่องจากมีทางเลือกสมมติฐานรองที่เฉพาะหนึ่งจำนวนมาก โดยเฉพาะอย่างยิ่งด้วยจำนวนกลุ่มที่เพิ่มขึ้น วิธีการอีกวิธีหนึ่งคือการใช้การจำลองอำนาจการทดสอบสำหรับการทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวน

Thavatchai, V., Sineenart, T. and Chukiat, V. (2004) ได้ทำวิจัยเรื่องการเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 และอำนาจการทดสอบของสถิติ Bartlett's Test, Levene's Test และ Cochran's Test ภายใต้การละเมิดข้อตกลงเบื้องต้น โดยการวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 และเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบความแปรปรวนของสถิติ 3 วิธีคือ Bartlett's Test, Levene's Test และ Cochran's Test ภายใต้ผลกระทบของการแจกแจงตัวอย่าง ผลกระทบของความแปรปรวน และผลกระทบจากขนาดตัวอย่าง โดยใช้วิธี Monte Carlo จำลองข้อมูลจากขนาดตัวอย่างและการแจกแจงตัวอย่างที่แตกต่างกัน ซึ่งกระทำ 1000 ครั้ง ขนาดตัวอย่างมีแบบเท่ากันและไม่เท่ากันคือ 15, 30 และ 45 สำหรับข้อมูลมีการแจกแจง 3 แบบ ได้แก่ การแจกแจงแบบปกติ การแจกแจงแบบแกมมา และการแจกแจงแบบไคกำลังสอง ผลการศึกษาพบว่าสถิติที่มีความเหมาะสมกับการแจกแจงแบบปกติ ได้แก่ Bartlett's Test, Cochran's Test และ Levene's Test ตามลำดับ เมื่อข้อมูลไม่ได้มีการแจกแจงแบบปกติพบว่า Cochran's Test และ Levene's Test มีความเหมาะสม โดย Levene's Test ค่อนข้างได้เปรียบเมื่อจำนวนตัวอย่างมีขนาดเล็ก ในด้านอำนาจการทดสอบพบว่า Bartlett's Test ยังคงให้อำนาจการทดสอบสูงเกือบทุกกรณี และเมื่อความแปรปรวนหนึ่งค่ามีขนาดใหญ่กว่าค่าอื่น พบว่า Cochran's Test ให้อำนาจการทดสอบสูงที่สุด ข้อเสนอแนะสำหรับการใช้สถิติทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวน ได้แก่ Bartlett's Test ยังคงเป็นวิธีที่ดีเมื่อข้อมูลมีการแจกแจงแบบปกติ เนื่องจากไม่มีผลกระทบกับขนาดตัวอย่าง และเมื่อข้อมูลไม่ได้มีการแจกแจงแบบปกติ Levene's Test สามารถนำไปใช้กับข้อมูลที่มีขนาดเล็กและจำนวนตัวอย่างเท่ากัน ส่วน Cochran's Test ใช้เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่และจำนวนตัวอย่างไม่เท่ากันและความแปรปรวนที่ใหญ่กว่าค่าอื่นหนึ่งค่า

Legendre, P. and Borcard, D. (2000) ทำวิจัยเรื่องการเปรียบเทียบเชิงสถิติของการทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวน โดยในการวิจัยทำการเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 และอำนาจการทดสอบเพื่อประเมินความเท่ากันของความแปรปรวนภายในกลุ่มก่อนที่จะวิเคราะห์ความแปรปรวน การทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนที่ทำการเปรียบเทียบในการศึกษานี้คือการทดสอบ Bartlett การทดสอบ Scheffe-Box log-anova การทดสอบ Cochran's C และการทดสอบ Box's M ในรูปพารามิเตอร์และการจัดลำดับ (permutation) คำถามที่สำคัญคือ (1) ภายใต้เงื่อนไขความไม่เท่ากันของความแปรปรวน (heterogeneity of variance) เป็นปัญหาในการวิเคราะห์ความแปรปรวนอย่างไร (2) ภายใต้เงื่อนไขเหล่านี้ การทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนมีประโยชน์สำหรับตรวจจับความไม่เท่ากันของความแปรปรวนอย่างไร การศึกษาการจำลองเบื้องต้นยืนยันว่าการวิเคราะห์ความแปรปรวนมีความไวต่อความไม่เท่ากันของความแปรปรวนเมื่อข้อมูลมีการแจกแจงแบบปกติ ผลของความไม่เท่ากันของความแปรปรวนจะส่งผลต่อความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ผลเสียเกิดขึ้นเมื่อความแปรปรวนหนึ่ง มีค่ามากกว่าความแปรปรวนอื่น ๆ การศึกษาที่ 2 เพื่อหาว่าการทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนวิธีไหนที่ควรจะใช้ภายใต้เงื่อนไขตัวอย่างมีขนาดขนาดเล็กและการแจกแจงไม่ได้เป็นแบบปกติ วิธีโดยรวมที่ดีที่สุดคือการทดสอบ Bartlett หรือการทดสอบ Box เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงแบบปกติ วิธีหนึ่งที่ต้องหลีกเลี่ยงคือการทดสอบ Cochran ซึ่งมีความไวต่อความแปรปรวนสูงเพียงค่าเดียวเหมือนกับการทดสอบ log-anova เนื่องจากมีอำนาจการทดสอบต่ำเมื่อตัวอย่างมีขนาดเล็กจนถึงปานกลาง ถ้าข้อมูลไม่ได้มีการแจกแจงแบบปกติ การทดสอบ Bartlett และการทดสอบ Box สามารถใช้ได้เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ ในกรณีที่ข้อมูลมีจำนวนมากควรจะใช้การแปลงโดยใช้ log และใช้การทดสอบ Bartlett หรือการทดสอบ Box ที่ใช้พารามิเตอร์หรือการจัดลำดับ ส่วนการทดสอบด้วยการปรับของ Welch มีประโยชน์เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงแบบปกติ ตัวอย่างมีขนาดเล็ก และความแปรปรวนไม่เท่ากัน นอกจากนี้ การใช้การทดสอบแบบที่ที่ใช้พารามิเตอร์สำหรับข้อมูลที่มีการแจกแจงแบบปกติ หรือการทดสอบแบบที่จัดลำดับสำหรับข้อมูลที่มีความแปรปรวนไม่เท่ากันซึ่งไม่สามารถทำให้เป็นแบบปกติควรจะใช้การทดสอบที่ไม่ใช้พารามิเตอร์

Keyes, T. K. and Levy, M. S. (1997) ได้นำสถิติทดสอบ 3 ตัว สำหรับทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของประชากร ได้แก่ สถิติทดสอบเลวิน สถิติทดสอบเลวินปรับปรุง และสถิติทดสอบโอเบิร์นปรับปรุง มาเปรียบเทียบประสิทธิภาพการทดสอบในกรณีกลุ่มตัวอย่างมีขนาดเท่ากันและไม่เท่ากันภายใต้การแจกแจงของประชากรเป็นแบบปกติ ผลการวิจัยสรุปว่าขนาดของกลุ่มตัวอย่างที่ไม่เท่ากันมีผลต่ออำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบ เลวิน Keyes และ Levy แนะนำว่าควรเลือกใช้สถิติทดสอบเลวินปรับปรุงสำหรับกรณีที่กลุ่มตัวอย่างมีขนาดไม่เท่ากัน