

บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย

ในขณะที่ ยานพาหนะเคลื่อนที่บนโครงสร้างพื้นฐาน ก่อให้เกิดการสั่นสะเทือน เนื่องจาก คุณสมบัติ ความขรุขระของพื้นผิว คุณสมบัติของยานพาหนะ และ คุณสมบัติของโครงสร้างพื้นฐาน โดยทำการสร้างแบบจำลอง และ กำหนดคุณสมบัติให้ใกล้เคียงกับคุณสมบัติยานพาหนะ และ โครงสร้างพื้นฐานระบบราง จากนั้นปรับค่าตัวแปรให้อยู่ในรูปแบบตัวแปรไร้หน่วย และ ทำการสร้างสมการการเคลื่อนที่ (Equation of motion) เพื่อคำนวณผลตอบสนองต่อยานพาหนะ และ โครงสร้างพื้นฐาน รวมทั้งคำนวณค่าความแปรปรวนที่จะเกิดขึ้น เพื่อหาค่าเฉลี่ยรากที่สอง (Root Mean Square, RMS) จักรากที่สองของผลรวมค่าคาดหวังยกกำลังสองกับค่าความแปรปรวน ในการคำนวณการเคลื่อนที่ของยานพาหนะบนโครงสร้างพื้นฐานนั้น เกี่ยวเนื่องกับ ตัวแปรจำนวนมาก ที่สำคัญได้แก่ ตัวแปรความยาวคาบ ตัวแปรความเว็วยานพาหนะ ตัวแปรความขรุขระของพื้นผิว ตัวแปรความเค้นของขบวนการไวท์นอยซ์ ตัวแปรระบบกันสะเทือน ตัวแปรระบบโช้คอัพ และ ตัวแปรระบบยึดหยุ่น จากตัวแปรดังกล่าวทำการสร้างความสัมพันธ์ทางสถิติของพารามิเตอร์เกี่ยวข้องด้วยวิธีการพื้นผิวตอบสนอง (Response Surface Methodology) จากนั้นทำการสร้างสมการถดถอยพหุคูณ ของพารามิเตอร์ของระบบพื้นผิว พารามิเตอร์ระบบโครงสร้างพื้นฐาน พารามิเตอร์ระบบยานพาหนะ และ พารามิเตอร์ระบบการเคลื่อนที่ของยานพาหนะบนโครงสร้างพื้นฐาน โดยแสดงรายละเอียดการศึกษาการเคลื่อนที่ของยานพาหนะบนโครงสร้างพื้นฐานด้วยวิธีการพื้นผิวตอบสนอง เรียงตามลำดับ ดังนี้

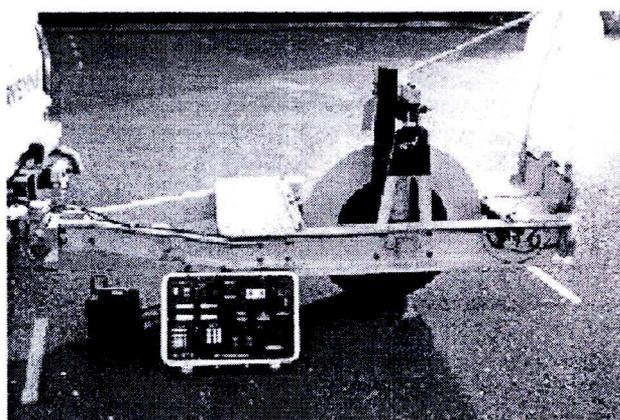
การวิเคราะห์พื้นผิวแบบสุ่ม (Random surface analysis)

ถนนเป็นเส้นทางคมนาคมหลักในการเดินทางไปยังจุดหมายปลายทาง เมื่อเวลาผ่านไปถนนที่มีคุณภาพดีจะเริ่มชำรุดโดยเฉพาะที่พื้นผิวทาง เนื่องจากคุณสมบัติของถนนที่ใช้ในการออกแบบการรับแรงกระทำซ้ำจากน้ำหนักบรรทุกของยานพาหนะ ปริมาณจราจร และ สภาพแวดล้อมบริเวณดังกล่าว ดังนั้นจำเป็นต้องเก็บรวบรวมข้อมูลความเสียหายของพื้นผิวทาง เพื่อใช้ในการประเมินผล และ จัดลำดับความสำคัญในการบำรุงรักษาทางต่อไป (กรมทางหลวง,2545)

ในอดีตการเก็บรวบรวมข้อมูลค่าความขรุขระของพื้นผิวภาคสนาม ใช้แรงงานคน และ เวลา ค่อนข้างมาก ต่อมา ธนาคารโลก (World Bank) ได้คิดค้นเครื่องมือที่ใช้ในการสำรวจ ค่าความขรุขระของพื้นผิวทาง (Road Roughness) โดยแบ่งตามประเภทของเครื่องมือวัด ได้เป็น 2 ประเภท ดังนี้

1. เครื่องมือวัดระดับ (Profilometer) คือ เครื่องมือวัดระดับ (Profile) หรือ ความลาดเอียง(Slope) ของถนนตามแนวยาว และสามารถนำมาคำนวณค่าทางสถิติ โดยเครื่องมือวัดที่สำคัญ ได้แก่ เครื่องมือ Dipstick คือ เครื่องมือวัดค่าระดับจากความแตกต่างของ ขาทั้งสอง (ห่างกัน 30 ซม.) โดยใช้เครื่องมือวัดระดับอัตโนมัติ (Inclinometer) และ แสดงค่าระดับ ในรูปแบบจอภาพ LCD เครื่องมือ Dipstick เป็นเครื่องมือกึ่งอัตโนมัติ ลักษณะการใช้งานค่อนข้าง ยุ่งยาก ทำให้มีการพัฒนาเครื่องมือในรูปแบบ เทคโนโลยีแสงเลเซอร์ ยกตัวอย่าง เครื่องมือ Swedish laser-RST เป็นเครื่องมือวัดค่าระดับ และ เชื่อมโยงต่อเข้าเครื่องคอมพิวเตอร์ เพื่อประมวลผล และ แสดงกราฟของบริเวณที่ศึกษาได้

2. เครื่องมือวัดค่าความขรุขระ (Road meter) คือ เครื่องมือที่อาศัยหลักการเคลื่อนที่ขึ้น และ เคลื่อนที่ลงสะสม ของเพลาลัง โดยเครื่องมือวัดที่ได้รับความนิยม ได้แก่ บัม อินทิเกรเตอร์ (Bump Integrator, BI) เป็นเครื่องมือที่ออกแบบมาเพื่อการสำรวจ ความขรุขระของพื้นผิวทาง (Roughness surveys) ดังภาพ 14



ภาพ 14 แสดงเครื่องมือวัดค่าความขรุขระของพื้นผิวทาง บัม อินทิเกรเตอร์ (Bump Integrator, BI)

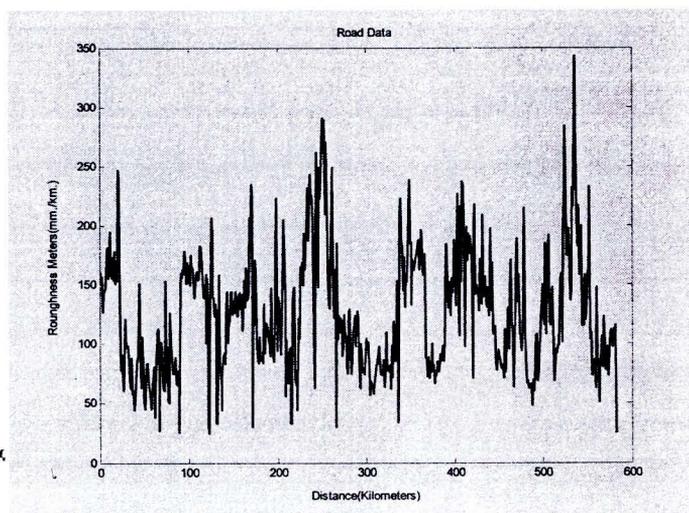
ลักษณะการทำงานของ BI อาศัยกลไกการเคลื่อนที่ที่ยืดหยุ่นสัมพันธ์กับการเคลื่อนที่ของระบบกันสะเทือนของรถยนต์ และ สำหรับวิธีการทดสอบ BI เริ่มจากการติดตั้งเครื่องมือยึดแน่นกับตัวถังรถยนต์ตรงกับตำแหน่งเพลาลัง และมีสายลวดสลิงพันรอกร้อยต่อผ่านรู หรือ ช่องที่ทำการเจาะพื้นรถยนต์ลงมายึดกับตัวเพลาลังของรถยนต์ที่ทำการทดสอบ ลูกรอกนี้จะตั้งอยู่ตลอดเวลา โดยมีขดลวดสปริงแบบนาฬิกาเหนียวไว้ ภายในลูกรอกจะหมุนไป-กลับ ได้ตามการเคลื่อนที่ขึ้น และ เคลื่อนที่ลงสะสม ของเพลาลัง ในขณะที่รถยนต์เคลื่อนที่ไปตามทางที่ถูกทดสอบ โดยเครื่องมือ BI นี้จะมีเครื่องส่งสัญญาณตามสายนำสัญญาณไปยังห้องควบคุมที่อยู่ภายในห้องคนขับ และ จะทำการบันทึกค่าการเคลื่อนที่ขึ้น และ เคลื่อนที่ลงสะสม ของเพลาลัง เมื่อรถยนต์เคลื่อนที่ไปตามทางด้วยความเร็ว 35 กม./ชม. (ในย่านชุมชน) และ ความเร็ว 60 กม./ชม. (นอกเมือง) ค่าที่บันทึกเป็นค่าความขรุขระที่ยังไม่ได้ปรับเทียบ ในรูปแบบของสมการ

$$BI = \text{Count (cm.)} \times 10 / \text{Distance (km.)} \quad \text{หน่วย (mm./km)} \quad (6)$$

โดยกำหนดให้

Count (cm.) คือ ค่าการเคลื่อนที่ขึ้น และ เคลื่อนที่ลงสะสม ของเพลาลัง และ Distance (km.) คือ ระยะทางของช่วงที่ทดสอบ

ในการทดสอบ BI นั้น ดำเนินการทดสอบต่อเนื่องในแต่ละตอน โดยรถทดสอบวิ่งด้วยความเร็วคงที่ ในขณะที่เครื่องคอมพิวเตอร์จะทำการอ่านข้อมูลเมื่อถึงจุดสุดท้าย หรือครบตอน และ ใช้โปรแกรม ROMDAS ในการประมวลผลข้อมูล ดังภาพ 15 ข้อมูลมีความสม่ำเสมอ คล้าย สเตชันนารี เกาส์เซียน แรนดอม โพรเซส (Homogenous random process)



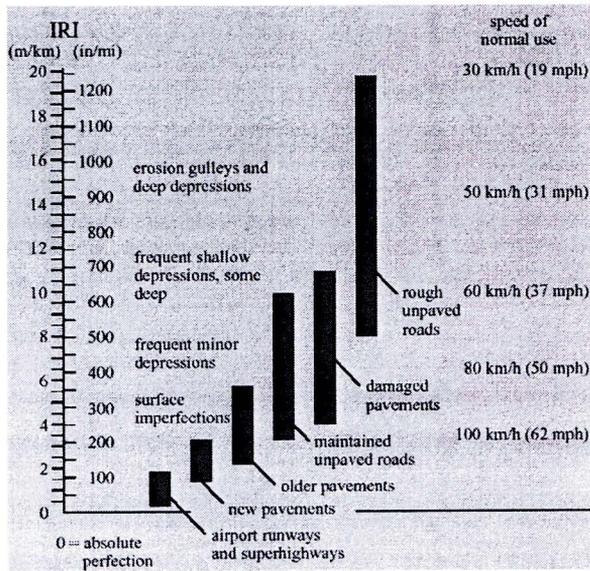
ภาพ 15 แสดงตัวอย่างโปรไฟล์ของพื้นผิวถนนสายหนึ่งในประเทศไทย

จากผลการทดสอบภาคสนามทำการปรับค่า BI เป็นค่า IRI ดังสมการ

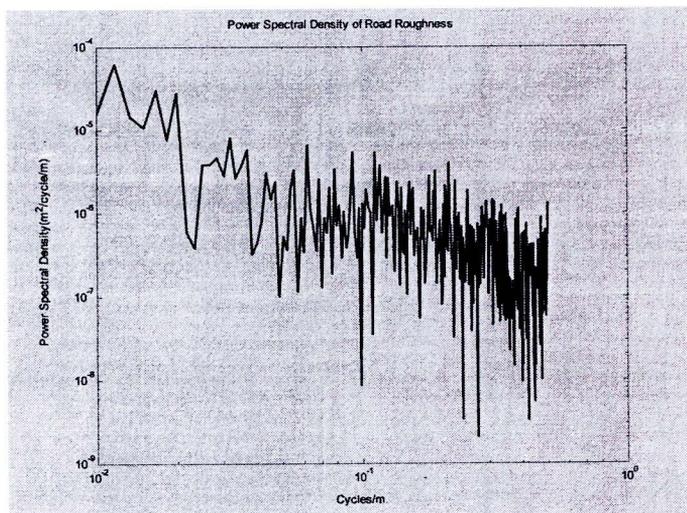
$$IRI = 0.0032BI^{0.89} \quad (7)$$

ค่า IRI คือ ดัชนีชี้วัดความขรุขระของผิวทาง (International Roughness Index) ที่มีความสำคัญในการประเมิน พื้นผิวทาง และ ต้นทุนการใช้น้ำมันพาหนะ ค่าความรู้สึกสะดวกสบายของผู้ใช้ยานพาหนะ แรงกระทำที่เพลลาของรถบรรทุก การหยุดรถเฉียบพลัน และ ความปลอดภัยต่อผู้ใช้น้ำมันพาหนะ โดยมีหน่วยวัด (m./km. และ in./mi)

ผลการทดสอบค่า IRI นั้น ใช้มาตรฐานของเอ็นซีไอเอสอาร์พี (The National Cooperative Highway Research Program, NCHRP) ลำดับที่ 228 ดังภาพ 16



ภาพ 16 แสดงระดับค่าดัชนีชี้วัดความขรุขระผิวทาง ตามประเภทของถนน



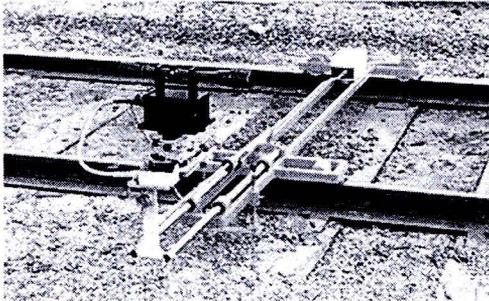
ภาพ 17 แสดงค่าความหนาแน่นกำลังสเปกตรัล ของผิวถนนสายหนึ่งในประเทศไทย

และ จากภาพ 15 แสดงโปรไฟล์ของผิวดนสายหนึ่งในประเทศไทย ค่าที่ได้มีหลายรูปแบบของคลื่น นำมาจัดเรียงในรูปแบบความยาวคลื่นสเปกตรัลด้วยวิธีการฟังก์ชันความหนาแน่นกำลังสเปกตรัล (Power Spectral Density, PSD) ดังภาพ 17 แกน y แสดงค่ากำลังของโพรเซส ส่วนแกน x แสดงค่า จำนวนคลื่น (wave number, r) ในความเป็นจริง PSD จะมีทั้งสองด้าน คือ มีลักษณะสมมาตรทั้งทางด้านบวก และ ด้านลบ (ในภาพ 16 แสดงด้านบวกเท่านั้น) โดยจะแสดงค่ากำลังของโพรเซสที่ จำนวนคลื่น (ความถี่) ต่าง ๆ จาก $-\infty$ ถึง ∞ และ ค่า PSD มีกำลังสูง ที่จำนวนคลื่นต่ำ ๆ (low wave number) และ ค่า PSD มีกำลังต่ำลง ที่จำนวนคลื่นสูงขึ้น (high wave number)

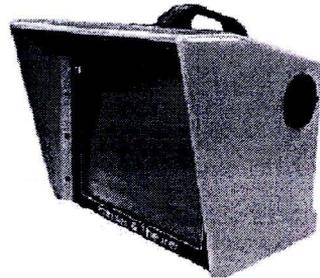
ในการคำนวณค่าจำนวนคลื่นนั้น มีค่าเท่ากับ ส่วนกลับของค่าความยาวคลื่น ($r = 1/\lambda$) ดังนั้น ถ้าค่า $r = 0$ จะได้ว่า $\lambda \rightarrow \infty$ ซึ่งสามารถสังเกตได้ว่า เป็นค่าออฟเซตจากศูนย์ (offset) และเป็นจุดที่มีค่าแอมพลิจูดสูงสุด ของโพรเซส ค่าความขรุขระ PSD ของข้อมูลนี้ สามารถนำไปสร้างเป็นแบบจำลองเป้าหมาย เพื่อใช้เป็นข้อมูลนำเข้าในระบบยานพาหนะบนโครงสร้างพื้นฐาน ต่อไป

ในหัวข้อที่กล่าวมา บรรยายถึงการวัดค่าความขรุขระของพื้นผิวทาง ที่เป็นพื้นผิวดน และ สำหรับพื้นผิวระบราบ คุณสมบัติเครื่องมือวัดค่าความขรุขระ มีลักษณะเช่นเดียวกับเครื่องมือวัดพื้นผิวทาง เพียงแต่เพิ่มเติมอุปกรณ์สำหรับการเคลื่อนที่บนพื้นผิวระบราบ ยกตัวอย่าง เครื่องมือวัด Noptel's PSM-220 เป็นเครื่องมือวัดโดยใช้เทคโนโลยีแสงเลเซอร์ ที่มีอุปกรณ์ส่งสัญญาณ และ อุปกรณ์รับสัญญาณ ที่ติดตั้งด้านท้ายของขบวนรถไฟทดสอบดังภาพ 18

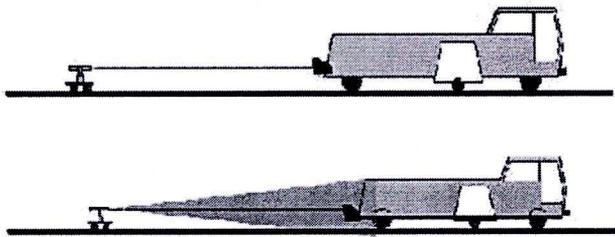
หลักการทำงาน เมื่อรถไฟเคลื่อนที่ผ่านโครงสร้างพื้นฐาน อุปกรณ์ส่งสัญญาณจะส่งสัญญาณแสงเลเซอร์ แบบระบุตำแหน่งสัญญาณ ที่มีระบบสัญญาณ 2 แบบ คือ แบบที่ 1 ระบบสัญญาณแบบกำหนดแน่นอน (Fixed laser) คือ ระบบสัญญาณที่สามารถระบุตำแหน่ง และ ระดับในแนวเส้นตรงได้พร้อมกัน และ แบบที่ 2 ระบบสัญญาณแบบกวาด (Sweeping laser) คือ ระบบสัญญาณที่ครอบคลุมพื้นที่กว้าง แต่แสดงเพียงพิกัดเดียวต่อครั้ง ในการรับ-ส่งสัญญาณของทั้งสองระบบนั้น มีระยะห่างไม่เกิน 350 เมตร และ สามารถบันทึกข้อมูล 500 ครั้งต่อวินาที ข้อมูลที่ได้จะแสดงในรูปแบบกราฟ ดังภาพ 19



อุปกรณ์ส่งสัญญาณ

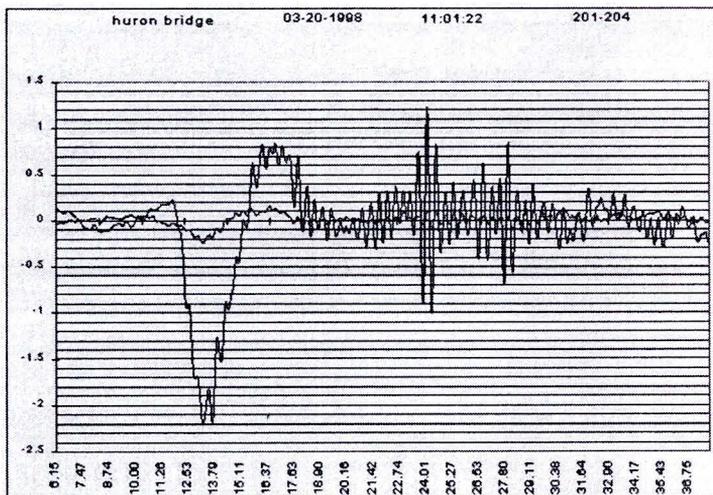


อุปกรณ์ป้รับสัญญาณ



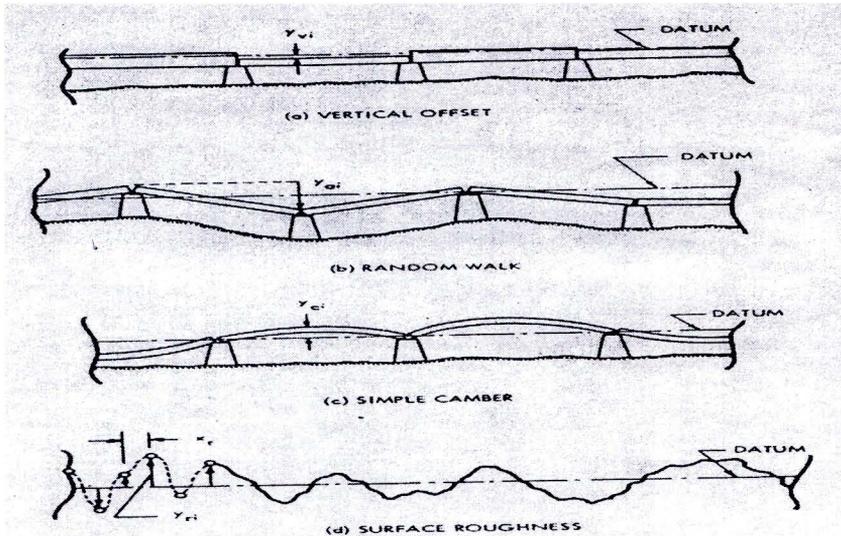
รูปแบบสัญญาณเลเซอร์

ภาพ 18 แสดงเครื่องมือวัดความขรุขระของพื้นผิวระบราง ของ Noptel's PSM-220



ภาพ 19 แสดงค่าความขรุขระพื้นผิว และ ผลตอบสนองจากการเคลื่อนที่ของยานพาหนะ

เมื่อพิจารณาการเก็บข้อมูลความไม่สม่ำเสมอของพื้นผิวภาคสนาม จากการเคลื่อนแนวตั้ง การสุ่มเดิน และ จากค่าระยะโก่ง ดังภาพ 20 แสดงว่า เป็นการยุ่งยากที่จะเก็บรวบรวมข้อมูล ในภาคสนามที่แปรเปลี่ยนไปตามเวลา ดังนั้นกระบวนการสุ่ม คือ วิธีการสุ่มข้อมูลความขรุขระ ของพื้นผิวเป็นทางเลือกที่เหมาะสมในการวิเคราะห์ความไม่สม่ำเสมอของพื้นผิว



ภาพ 20 แสดงความไม่สม่ำเสมอของแนวทาง

ค่าความไม่สม่ำเสมอของพื้นผิวอาศัยหลักการตัวกรองไวทน์นอยซ์ ซึ่งสามารถแปลงรูป หรือจัดรูป ความขรุขระของพื้นผิวในรูปแบบสเปกตรัล ด้วยวิธีการเชิงตัวเลขของสมการอนุพันธ์โตแคสติก ลำดับชั้นหนึ่ง ดังสมการ

$$\frac{\dot{h}_d}{r_f} + h_d = W_d \quad (8)$$

โดยกำหนดให้

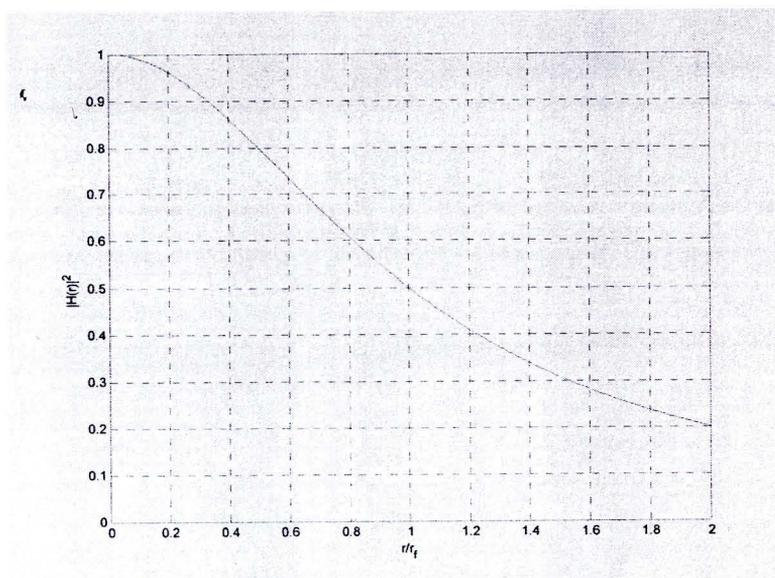
ค่า W_d คือ ตัวกรองไวทน์นอยซ์

ค่า h_d คือ ค่าความขรุขระของพื้นผิว

และ ค่า r_f คือ จำนวนคลื่นที่จุดสัมบูรณ์ยกกำลังสอง (Square of the absolute value) ส่วนกลับ ของความยาวคลื่น, λ

จากสมการ 8 ทำการจััดสมการฟังก์ชันแปลงรูป (Transfer function) ค่าสัมบูรณ์ยกกำลังสอง (Square of the absolute value) ระหว่างตัวแปร W_d และ ตัวแปร h_d ดังสมการ 9 และ ภาพ 21

$$|H(r)|^2 = \frac{1}{1+(r/r_f)^2} \quad (9)$$

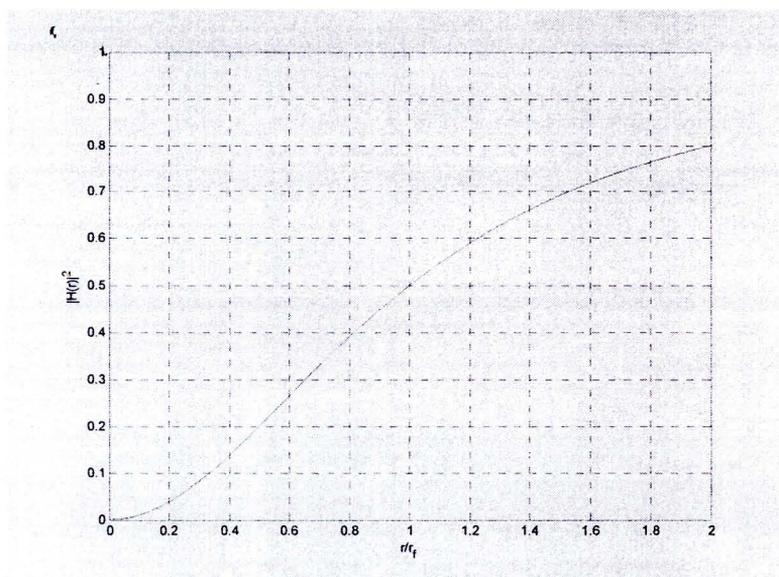


ภาพ 21 แสดงฟังก์ชันแปลงรูปค่าสัมบูรณ์ยกกำลังสองของ ตัวแปร W_d และ ตัวแปร h_d ของลำดับชั้นที่หนึ่ง

จากภาพ 21 แสดงว่า ตัวกรองไวท์นอยซ์ กรองจำนวนคลื่นสูงออก และ ค่าตัวแปร h_d ประกอบด้วย จำนวนคลื่นต่ำ

และ จากสมการ 8 ทำการจัดสมการฟังก์ชันแปลงรูป (Transfer function) ค่าสัมบูรณ์ยกกำลังสอง (Square of the absolute value) ระหว่างตัวแปร W_d และ ตัวแปร $\frac{\dot{h}_d}{r_f}$ ดังสมการ 10 และ ภาพ 22

$$|H(r)|^2 = \frac{(r/r_f)^2}{1+(r/r_f)^2} \quad (10)$$



ภาพ 22 แสดงฟังก์ชันแปลงรูปค่าสัมบูรณ์ยกกำลังสองของ ตัวแปร W_d

และ ตัวแปร $\frac{\dot{h}_d}{r_f}$ ของลำดับชั้นที่หนึ่ง

จากภาพ 22 แสดงว่า ตัวกรองไวท์นอยซ์ กรองจำนวนคลื่นต่ำออก และ ค่าตัวแปร $\frac{\dot{h}_d}{r_f}$

ประกอบด้วย จำนวนคลื่นสูง

และ เมื่อพิจารณาตัวกรองลำดับชั้นที่สอง ดังสมการ

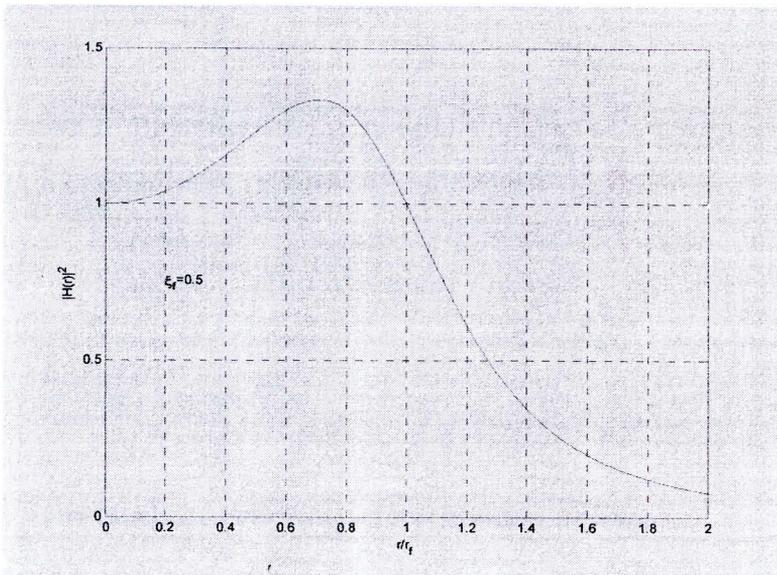
$$\frac{\ddot{h}_d}{r_f^2} + \frac{2\xi_f}{r_f} \dot{h}_d + h_d = W_d \quad (11)$$

โดยกำหนดให้

ค่า ξ_f คือ ค่าความหน่วงของที่จุดสัมบูรณ์ยกกำลังสอง

จากสมการ 11 ทำการจัดรูปสมการฟังก์ชันแปลงรูป (Transfer function) ค่าสัมบูรณ์ยกกำลังสอง (Square of the absolute value) ระหว่างตัวแปร W_d และ ตัวแปร h_d ดังสมการ 12 และ ภาพ 23

$$|H(r)|^2 = \frac{1}{\left(1 - (r/r_f)^2\right)^2 + (2\xi_f r/r_f)^2} \quad (12)$$



ภาพ 23 แสดงฟังก์ชันแปลงรูปค่าสัมบูรณ์ยกกำลังสองของ ตัวแปร W_d และ ตัวแปร h_d ของลำดับชั้นที่สอง

จากภาพ 23 แสดงว่า ตัวกรองไวท์นอยซ์ กรองจำนวนคลื่นสูงออก และ ค่าตัวแปร h_d ประกอบด้วยจำนวนคลื่นต่ำ และ จะได้ค่า $|H(r)|^2$ สูงสุด เมื่อค่า r/r_f อยู่ในวง จำนวนคลื่นต่ำกว่า 1

เมื่อพิจารณาตัวกรองไวท์นอยซ์ W_d เพื่อให้ได้ค่าสัญญาณที่เหมาะสม และ ได้ค่าความขรุขระพื้นผิว $h(x)$ โดยทำการแปลงรูปจาก สัญญาณโดเมนของเวลา เป็น สัญญาณโดเมนของความถี่ ด้วยฟังก์ชันแปลงรูปฟูเรียร์ เพื่อใช้ในการคำนวณ ค่าความหนาแน่นกำลังสเปกตรัล (Power Spectral Density, PSD) ของ h_d ดังสมการ

$$S_{h_d h_d}(r) = |H(r)|^2 S_0 \quad (13)$$

โดยกำหนดให้

ค่า $S_{h_d h_d}(r)$ คือ ค่าความหนาแน่นกำลังสเปกตรัล

และ S_0 คือ ความเข้มของขบวนการไวท์นอยซ์ หน่วย $(length)^3$

จากสมการ (13) ทำการอินทิเกรต ค่า PSD จะได้ค่าความแปรปรวนของ ค่าความขรุขระพื้นผิว $\sigma_{h_d h_d}^2$ ดังสมการ

$$\sigma_{h_d h_d}^2(r) = \int_{-\infty}^{\infty} |H(r)|^2 S_0 dr \quad (14)$$

ค่าความแปรปรวนมีความสำคัญในการนำไปใช้คำนวณ ค่าเฉลี่ยรากที่สอง (Root Mean Square, RMS) รายละเอียดการคำนวณ จากสมการ 4

และ จากสมการ 8 ที่แสดงสมการการเคลื่อนที่ในรูปของตัวกรองไวท์นอยซ์

ทำการจัดรูปสมการใหม่ เป็นสมการอนุพันธ์ลำดับชั้นที่หนึ่ง ในโดเมนสเปซ (Real spatial domain) ดังสมการ 15

$$\Delta_c \frac{dh_d(x_d)}{dx_d} + h_d(x_d) = W_d(x_d) \quad (15)$$

โดยกำหนดให้

ค่า $W_d(x_d)$ คือ ขบวนการวีโร มีน เกาส์เซียน ไวท์นอยซ์ (Zero mean Gaussian white noise) หน่วย $(length)^1$

ค่า $\Delta_c = 1/r_f$ คือ ระยะสหสัมพันธ์ (Correlation distance) หน่วย $(length)^1$

และ ค่า $h_d(x_d)$ คือ ค่าเฉพาะของขบวนการ ค่าความขรุขระพื้นผิวเฉลี่ย หน่วย $(length)^1$

จากสมการ 13 คำนวณค่าความแปรปรวนร่วม (Autocovariance) โดยทำการแปลงรูปฟูรีเย่ของ $S_{h_d h_d}(2\pi r)$ ดังสมการ

$$COV[h_d(x_d)h_d(x_d + \Delta)] = R_{h_d h_d}(\Delta) = \frac{q_0}{2\Delta_c} \exp\left[-\frac{|\Delta|}{\Delta_c}\right] \quad (16)$$

โดยกำหนดให้

ค่า Δ คือ สเปเชียลเรด (Spatial lag)

และ ค่า q_0 คือ ค่าความเค้นของขบวนการไวท์นอยซ์



จากนั้นทำการ จัดรูปความสัมพันธ์กับค่าความเข้มของขบวนการไวท์นอยซ์ ดังสมการ

$$q_0 = 2\pi S_0 \quad (17)$$

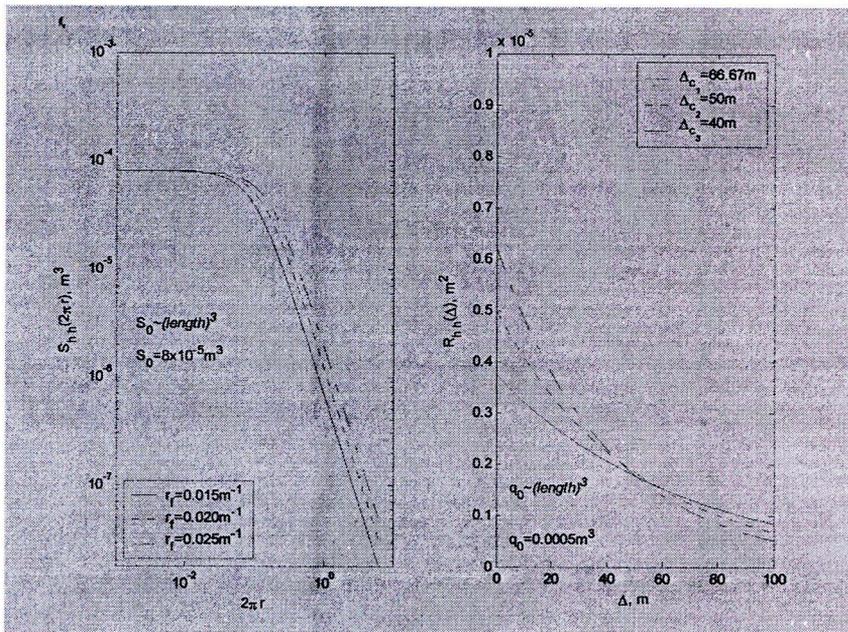
และ สามารถคำนวณค่าความแปรปรวน (Variance) ของ $h_d(x_d)$ ดังสมการ

$$VAR[h_d(x_d)] = R_{h_d h_d}(0) = \frac{q_0}{2\Delta_c} \quad (18)$$

และ จักรูปสมการฟังก์ชันสหสัมพันธ์ (Autocorrelation function) ของ $h_d(x_d)$ ดังสมการ

$$\rho_{h_d h_d}(\Delta) = \frac{COV[h_d(x_d)h_d(x_d + \Delta)]}{VAR[h_d(x_d)]} = \exp\left[-\frac{|\Delta|}{\Delta_c}\right] \quad (19)$$

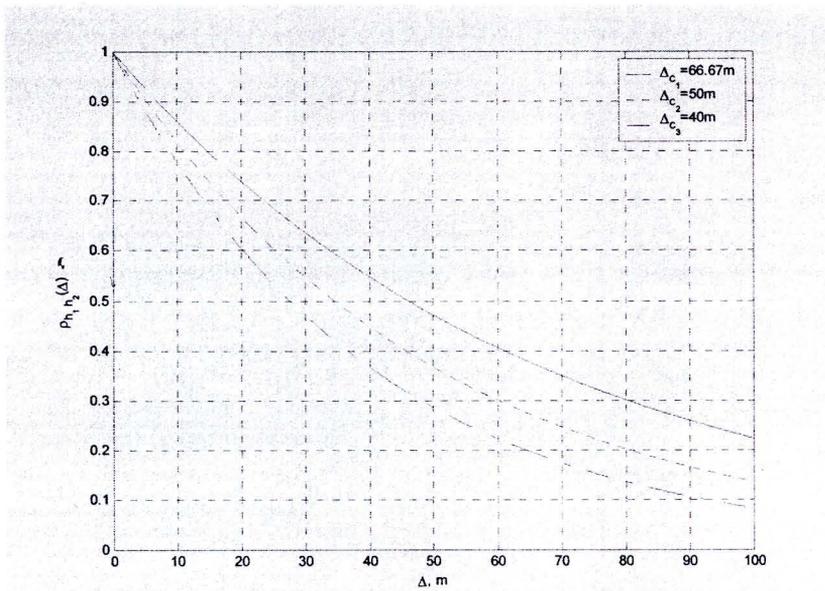
จากสมการ 13, 17 และ 19 กำหนดค่า $S_0 = 8 \times 10^{-5} m^3$ และ $r_f = 0.015, 0.020$ และ $0.025 m^{-1}$ ดังภาพ 24



ภาพ 24 แสดงค่า PSD และ ค่าความแปรปรวนร่วมของ $h_d(x_d)$

จากภาพ 24 แสดงว่า ถ้าค่าจำนวนคลื่น r_f เพิ่มขึ้น หรือพื้นผิวที่มีค่าความขรุขระสูงขึ้น จะส่งผลทำให้ค่า PSD เพิ่มขึ้น และ ถ้าพื้นผิวที่มีค่าความขรุขระสูง และ ค่า Δ เท่ากับ 0 จะทำให้ได้ค่าความแปรปรวนสูงสุด และ ถ้าค่า Δ เพิ่มขึ้น พื้นผิวที่มีค่าความขรุขระสูง ค่าความแปรปรวนจะลดลงอย่างรวดเร็ว เมื่อทำการเปรียบเทียบกับพื้นผิวที่มีค่าความขรุขระต่ำกว่า จนกระทั่งถึง ค่า Δ ค่าหนึ่ง ที่ทำให้ พื้นผิวที่มีค่าความขรุขระต่ำ ค่าความแปรปรวนจะลดลงอย่างรวดเร็ว เมื่อทำการเปรียบเทียบกับพื้นผิวที่มีค่าความขรุขระสูงกว่า

และ จากภาพ 25 แสดงว่า พื้นผิวที่มีค่าความขรุขระสูง จะส่งผลทำให้ ค่าสหสัมพันธ์ลดลงอย่างรวดเร็ว เมื่อทำการเปรียบเทียบกับพื้นผิวที่มีค่าความขรุขระต่ำกว่า เนื่องจากผลของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล (Exponential function) ของ $|\Delta|/\Delta_c$



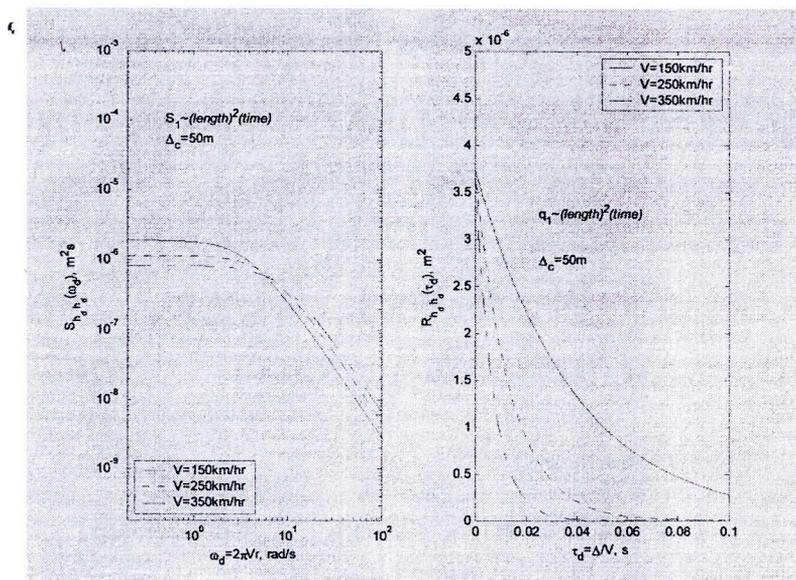
ภาพ 25 แสดงค่าฟังก์ชันสหสัมพันธ์ (Autocorrelation function) ของ $h_d(x_d)$

จากสมการ 15 สมการอนุพันธ์ลำดับชั้นที่หนึ่ง ในโดเมนสเปซเรียล (Real spatial domain) ทำการจัดรูปสมการให้อยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์ลำดับชั้นที่หนึ่ง ในโดเมนเวลา (Time domain) ดังสมการ 20 โดยกำหนดให้อยู่ในรูปตัวแปร V คือ ค่าความเร็วคงที่ จะได้ค่า $x_d = Vt_d$ และ $dx_d = Vdt_d$ ดังสมการ

$$\frac{\Delta_c}{V} \dot{h}_d(t_d) + h_d(t_d) = W_d(t_d) \quad (20)$$

$$COV[h_d(t_d)h_d(t_d + \tau_d)] = \frac{q_1}{2(\Delta_c/V)} \exp\left[-\frac{|\tau_d|}{(\Delta_c/V)}\right] \quad (21)$$

สำหรับค่าความเข้ม และ ความเค้นของไวท์นอยซ์ กำหนดให้ $S_1 = S_0/V$ และ $q_1 = q_0/V$ หน่วย $(length)^2 (time)^1$ เพื่อหาค่า PSD และ ค่าความแปรปรวนร่วมของ $h_d(t_d)$ ดังสมการ 21 และ ภาพ 26



ภาพ 26 แสดงค่า PSD และ ค่าความแปรปรวนร่วมของ $h_d(t_d)$

จากภาพ 26 แสดงว่า ในขณะที่ยานพาหนะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูงขึ้น ค่า PSD จะสูงขึ้น ในช่วงค่าความถี่สูง และ ค่า PSD จะต่ำลง ในช่วงค่าความถี่ต่ำ และ สำหรับ ค่าความแปรปรวนร่วมจะลดลงอย่างรวดเร็ว ในขณะที่ยานพาหนะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูงขึ้น

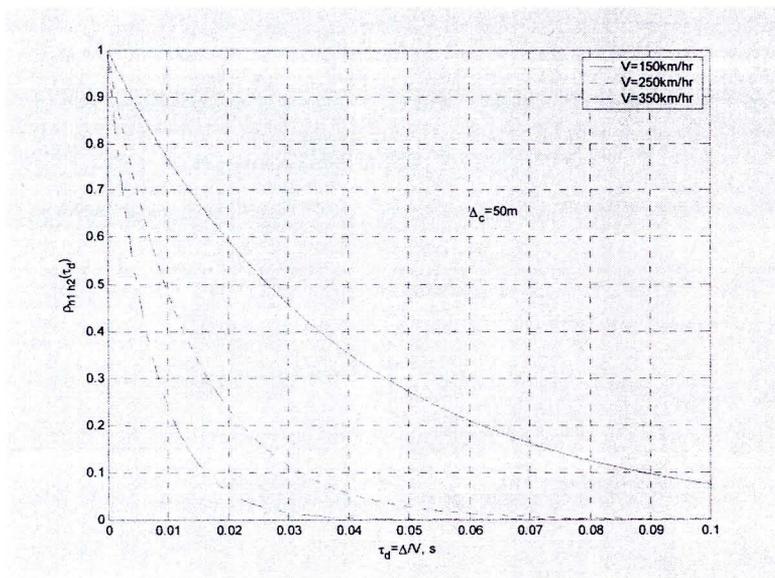
และ ทำการจัดรูปสมการฟังก์ชันสหสัมพันธ์ (Autocorrelation function) ของ $h_d(t_d)$ ดังสมการ 22 และ ภาพ 27

$$\rho_{h_d h_d}(\tau_d) = \exp\left[-\frac{|\tau_d|}{\Delta_c/V}\right] \quad (22)$$

โดยกำหนดให้

ค่า τ_d คือ ช่วงของเวลา (Time lag)

$$\text{และ ค่า } \tau_{d_c} = \frac{\Delta_c}{V}$$



ภาพ 27 แสดงค่าฟังก์ชันสหสัมพันธ์ (Autocorrelation function) ของ $h_d(t_d)$

จากภาพ 27 แสดงว่า ในขณะที่ยานพาหนะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูงขึ้น ส่งผลทำให้ค่าสหสัมพันธ์ลดลงอย่างรวดเร็ว

จากการแปลงค่า โดเมนสเปซ (Real spatial domain) ให้อยู่ในรูปของ โดเมนเวลา พบว่า ค่าตัวแปรยังคงอยู่ในรูปของ ตัวแปรที่มีหน่วย ดังนั้นจึงทำการปรับค่าตัวแปรให้อยู่ในรูปตัวแปรไร้หน่วย ดังสมการ

$$\frac{\Delta_c}{V} \dot{h}(t_d) + h(t_d) = W(t_d) \quad (23)$$

โดยกำหนดให้

$$\text{ค่า } h(t_d) = h_d(t_d)/L$$

$$\text{ค่า } W(t_d) = W_d(t_d)/L$$

และ ค่า L คือ ค่าความยาวช่วงคาน เท่ากับ 30 เมตร

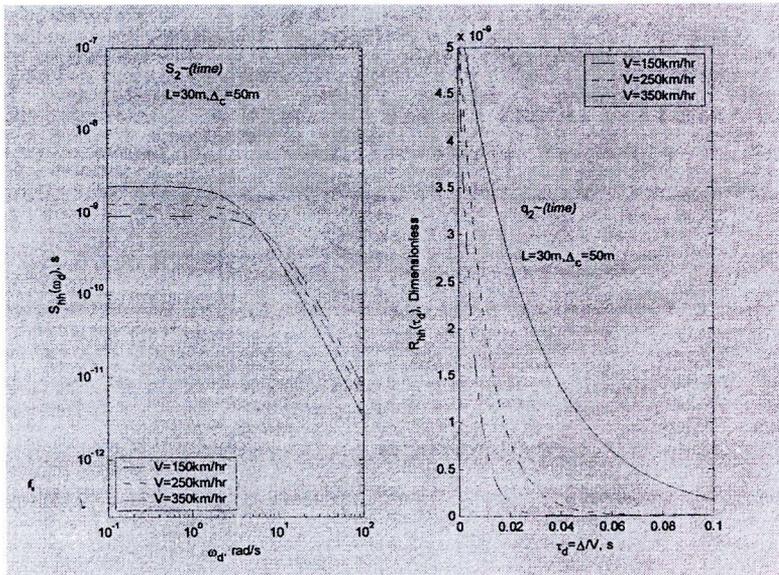
จากนั้นทำการแปลง ค่า ความเค้นของไวทน์อยซ์ ให้อยู่ในรูปของตัวแปรไร้หน่วย $q_2 = q_0/(VL^2)$ จะได้ ค่าความแปรปรวนร่วม ค่าความแปรปรวน และ ฟังก์ชันสหสัมพันธ์

ดังสมการ 24, 25 และ 26 ตามลำดับ และ ภาพ 28

$$COV[h(t_d)h(t_d + \Delta_d)] = \frac{q_2}{2(\Delta_c/V)} \exp\left[-\frac{|\tau_d|}{(\Delta_c/V)}\right] \quad (24)$$

$$VAR[h(t_d)] = \frac{q_2}{2(\Delta_c/V)} = \frac{q_0}{2VL^2} \frac{V}{\Delta_c} = \frac{q_0}{2\Delta_c L^2} \quad (25)$$

$$\rho_{hh}(\tau_d) = \exp\left[-\frac{|\tau_d|}{\Delta_c/V}\right] \quad (26)$$



ภาพ 28 แสดงค่า PSD และ ค่าความแปรปรวนร่วมของตัวแปรไร้หน่วย $h(t_d)$

จากการปรับเปลี่ยนเป็น ตัวแปรไร้หน่วย พบว่า ค่าตัวแปรยังคงติดอยู่ในรูปของ t_d ดังนั้นทำการจัดรูปตัวแปรไร้หน่วยเวลา ให้อยู่ในรูปของตัวแปร t ดังสมการตัวกรองไวท์นอยซ์

$$\frac{\Delta_c}{L} \dot{h}(t) + h(t) = W(t) \quad (27)$$

โดยกำหนดให้

$$\text{ค่า } t = \frac{t_d}{L/V} = \frac{V}{L} t_d$$

$$\text{และ ค่า } \tau = \frac{V}{L} \tau_d$$

ทำการกำหนดค่าความเข้ม และ ความเค้นของไวท์นอยซ์ ให้อยู่ในรูปของตัวแปรไร้หน่วยเวลา

ค่า $S_3 = S_0/L^3$ และ $q_3 = q_0/L^3$ จะได้ ค่าความแปรปรวนร่วม ค่าความแปรปรวน และ

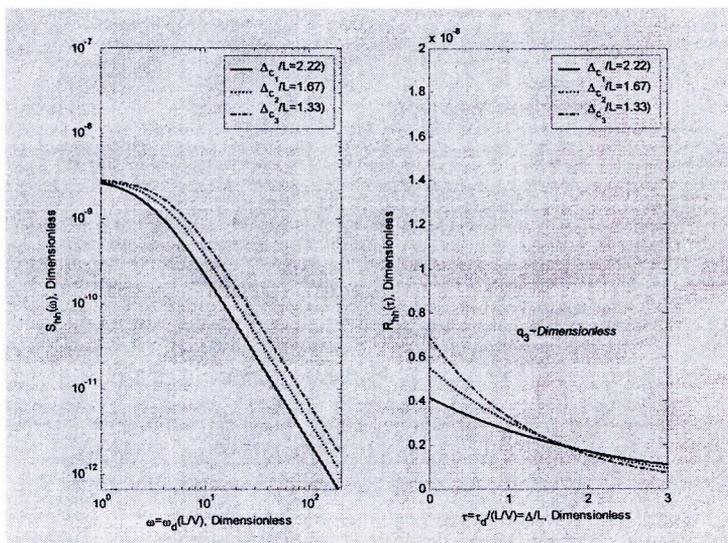
ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ ดังสมการ 28, 29 และ 30 ตามลำดับ

$$COV[h(t)h(t+\tau)] = \frac{q_3}{2(\Delta_c/L)} \exp\left[-\frac{|\tau|}{(\Delta_c/L)}\right] \quad (28)$$

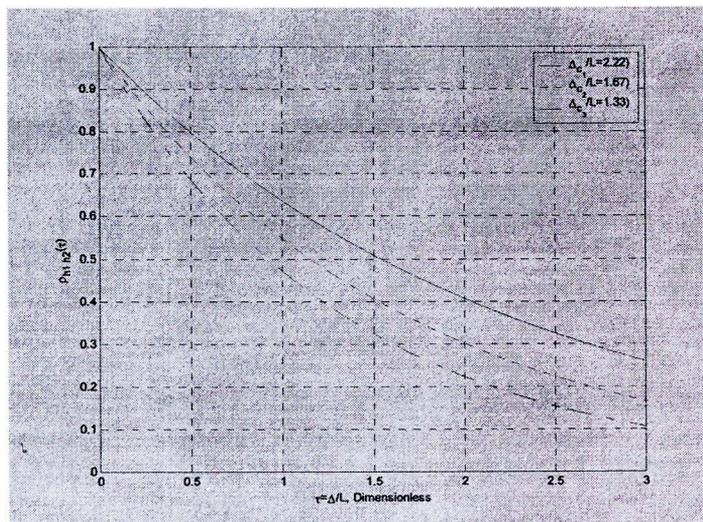
$$VAR[h(t)] = \frac{q_3}{2(\Delta_c/L)} = \frac{q_0}{2\Delta_c L^2} = \frac{(q_0/L^3)}{2(\Delta_c/L)} \quad (29)$$

$$\rho_{hh}(\tau) = \exp\left[-\frac{|\tau|}{\Delta_c/L}\right] \quad (30)$$

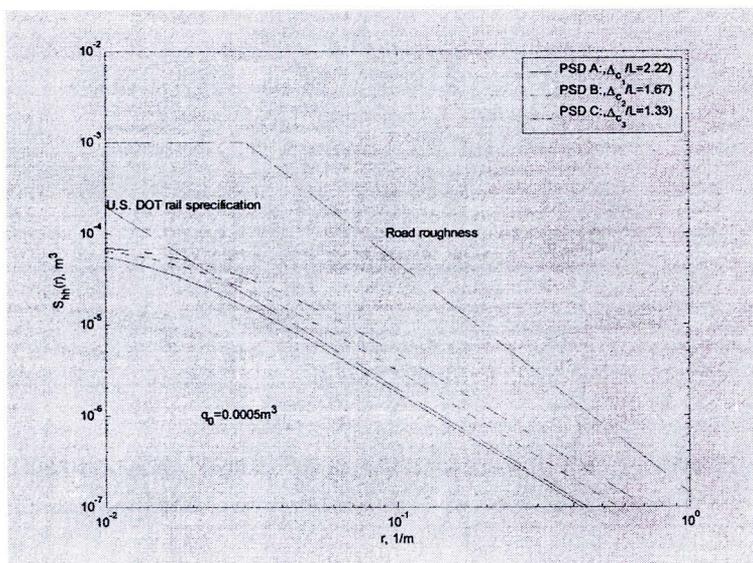
จากภาพ 29 และ 30 แสดงว่า ค่า q_0/L^3 และ $\frac{\Delta_c}{L}$ สามารถนำไปใช้ในการปรับค่าแบบจำลองความขรุขระของพื้นผิวเพื่อใช้เป็นข้อมูลในการวิเคราะห์ค่าความขรุขระที่เกิดขึ้นได้ ดังนั้นทำการกำหนดค่า $q_0 = 0.0005m^3$ และ $\frac{\Delta_c}{L} = 2.22, 1.67$ และ 1.33 ที่ความยาวคลื่น $30 m$ และ ทำการคำนวณค่า PSD เปรียบเทียบกับเกณฑ์มาตรฐานระบบรางของสหรัฐอเมริกา (U.S. DOT rail specification) ดังภาพ 31



ภาพ 29 แสดงค่า PSD และ ค่าความแปรปรวนร่วมของตัวแปรไร้หน่วยเวลา $h(t)$



ภาพ 30 แสดงค่าฟังก์ชันสหสัมพันธ์ (Autocorrelation function) ของตัวแปรไร้หน่วยเวลา $h(t)$

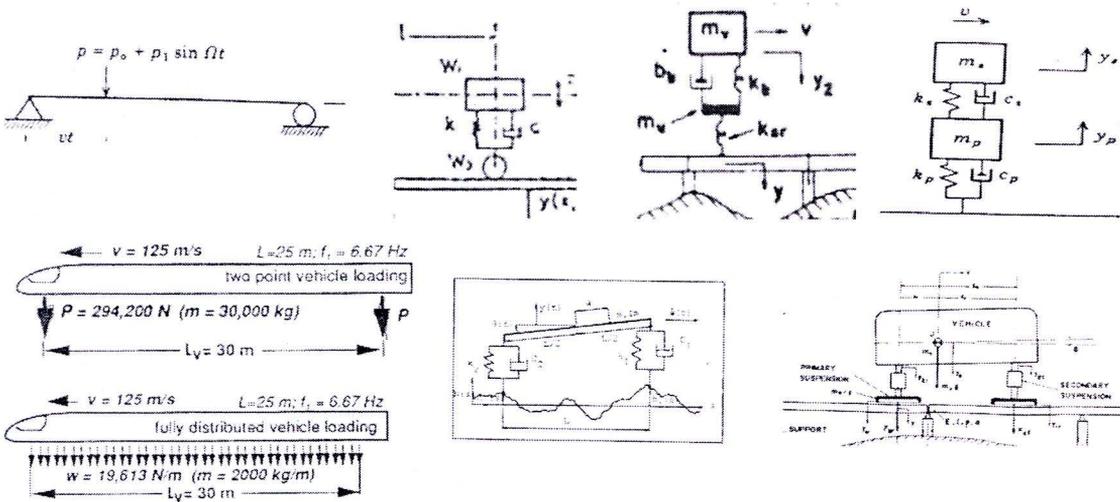


ภาพ 31 แสดงค่าความหนาแน่นกำลังสเปคตรัล ของพื้นผิวระบบรางที่ระดับความขรุขระต่างๆ
เปรียบเทียบกับเกณฑ์มาตรฐานระบบรางของสหรัฐอเมริกา

จากภาพ 31 แสดงว่า ค่า PSD A, B และ C อยู่ในช่วงของเกณฑ์มาตรฐานระบบรางของสหรัฐอเมริกา ดังนั้นสามารถกำหนดค่า $q_0 = 0.0005m^3$ และ $\frac{\Delta_c}{L} = 2.22, 1.67$ และ 1.33 เป็นค่าตัวแปรไร้หน่วยระยะทางสหสัมพันธ์ (Δ_c / L) และ ตัวแปรไร้หน่วยความเข้มของไวท์นอยซ์ (q_0 / L^3) เพื่อใช้ในการคำนวณการเคลื่อนที่ของยานพาหนะบนพื้นผิว ระบบรางความเร็วสูงต่อไป

แบบจำลองยานพาหนะ (Vehicle Model)

ยานพาหนะทางบกมีความสำคัญต่อการขนส่งผู้โดยสาร และ สินค้าไปยังจุดหมายปลายทาง โดยยานพาหนะแต่ละรูปแบบ ขนาด และ น้ำหนัก ถูกออกแบบให้เหมาะสมกับการใช้งานเฉพาะด้าน และ ก่อให้เกิดประโยชน์สูงสุด สำหรับการจำแนกประเภทยานพาหนะนั้น แบ่งตามจำนวนเพลลาของยานพาหนะดังภาพ 32 ตั้งแต่ประเภทเพลลาเดียว จนถึง ประเภทหลายเพลลาเคลื่อนที่บนพื้นผิวระบบราง หรือพื้นผิวถนน



ภาพ 32 แสดงยานพาหนะประเภทต่างๆ

ประวัติการศึกษายานพาหนะ เริ่มจากการออกแบบยานพาหนะประเภทเพลลาเดียว เพื่อใช้ในการเดินทางเท่านั้น ไม่เหมาะสมที่จะนำมาใช้ในการขนส่งผู้โดยสาร และ สินค้า ปัจจุบันยานพาหนะประเภทเพลลาเดียว นิยมใช้ในการแสดงตลก ละครสัตว์ และ ความเพลิดเพลินต่างๆ

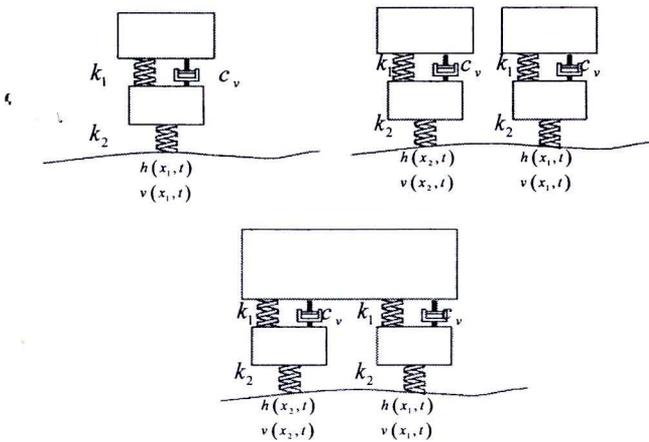
ต่อมาได้มีการพัฒนายานพาหนะประเภทสองเพลลา เป็นที่นิยมใช้กันอย่างกว้างขวางทั่วโลก ยกตัวอย่าง รถจักรยาน และ รถจักรยานยนต์ แต่ยานพาหนะประเภทสองเพลลาใช้งานค่อนข้างยาก เพราะจำเป็นต้องมีทักษะในการทรงตัวอยู่บนเพลลาเพียงสองเพลลา ทำให้เกิดอุบัติเหตุจากการใช้ยานพาหนะ ทำให้มีการพัฒนายานพาหนะประเภทสามเพลลาในเวลาต่อมา เพื่อลดข้อจำกัดด้านการทรงตัว และ ช่วยเพิ่มปริมาณในการขนส่งสินค้า ยานพาหนะประเภทสามเพลลา ยกตัวอย่าง รถตุ๊กตุ๊ก และ รถสามล้อเครื่อง โดยถูกออกแบบมาเพื่อนำไปใช้ในการขนถ่ายสินค้า ระยะสั้น ทำให้ไม่เป็นที่นิยมสำหรับบุคคลทั่วไป ที่ต้องการยานพาหนะประเภทสี่เพลลา ยกตัวอย่าง รถยนต์นั่งส่วนบุคคล เพราะ ให้ความสะดวกสบาย สบายงาม และ ปลอดภัยในการเดินทาง สำหรับด้านพาณิชย์ และ อุตสาหกรรม บริษัทรถยนต์ได้ออกแบบรถยนต์ที่มีคุณสมบัติเฉพาะเพื่อการขนส่งสินค้า

แต่เนื่องด้วยความต้องการสินค้าเป็นจำนวนมาก ยานพาหนะประเภทสี่เพลลา มีข้อจำกัดทางด้านขนาด และ ปริมาณการขนส่ง ทำให้มีการออกแบบยานพาหนะประเภทหลายเพลลา ยกตัวอย่าง รถบรรทุก 6 ล้อ และ รถบรรทุก 10 ล้อ ซึ่งเป็นที่นิยมในการขนส่งสินค้า และการโดยสารไปยังจุดหมายปลายทางได้อย่างสะดวกรวดเร็ว

จากความต้องการยานพาหนะประเภทต่างๆ เพื่ออำนวยความสะดวกในแต่ละด้าน ส่งผลกระทบต่อปริมาณการจราจรที่หนาแน่น และ ติดขัดเป็นจำนวนมาก ยานพาหนะหลายเพลลาเคลื่อนที่บนพื้นผิวระบบราง เป็นทางเลือกที่เหมาะสมในการเดินทาง และ ขนส่งสินค้าเป็นจำนวนมาก ยกตัวอย่าง รถไฟ สำหรับในประเทศไทย การขนส่งทางรถไฟไม่ค่อยเป็นที่นิยม เนื่องจากข้อจำกัดของระบบรางเดี่ยว ที่ออกแบบสำหรับรถไฟเคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูงสุด 90 กม./ชม. ส่งผลทำให้ค่าความเร็วเฉลี่ย 50-60 กม./ชม. (ต่อเที่ยว) และ สถานีรถไฟไม่ครอบคลุมทุกจังหวัด

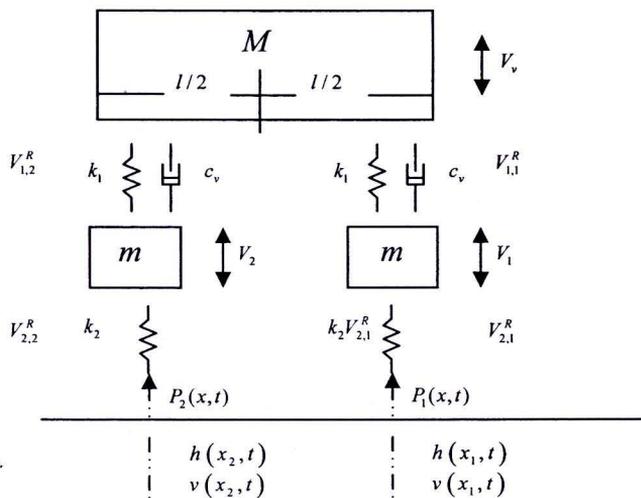
จากปัญหาระบบขนส่งดังกล่าว คณะรัฐมนตรีมีมติให้กำหนดแผนแม่บทรถไฟความเร็วสูงในประเทศไทย (ระหว่างปี 2535 - 2537) โดยก่อสร้างรถไฟความเร็วสูง สายชายฝั่งทะเลตะวันออก (กรุงเทพฯ - สนามบินหนองงูเห่า - ระยอง) เป็นสายแรก ช่วยพัฒนาเศรษฐกิจ สังคม และ สภาพแวดล้อมพื้นที่ชายฝั่งทะเลตะวันออกให้เจริญก้าวหน้าเพื่อการเดินทางไปทำงาน และ พักอาศัย โดยไม่ต้องเผชิญกับสภาพความแออัดในกรุงเทพมหานคร

เพื่อให้สอดคล้องกับนโยบายของรัฐบาล ทำการศึกษาแบบจำลองยานพาหนะ ซึ่งโดยทั่วไปสามารถออกแบบยานพาหนะ มีทั้งแบบยึดแน่น (Rigid) หรือแบบยืดหยุ่น (Flexible) โดยมีวัสดุเชื่อมต่อ มีทั้งแบบสปริง (Springs) ตัวหน่วง (Dampers) ลิงค์ (Links) จั๊อยซ์ (Joints) และจุดสัมผัสระหว่างเพลลา และ พื้นผิวระบราง (Wheel-rail contact) ดังภาพ 33 แสดงแบบจำลองยานพาหนะเพลลาเดี่ยว สองเพลลาหนึ่งคัน และ สองเพลลาสองคัน



ภาพ 33 แสดงแบบจำลองยานพาหนะแบบต่าง ๆ

และ สำหรับการสร้างแบบจำลองยานพาหนะนั้นั้น ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ แทนการสร้างแบบจำลองจริงภาคสนาม เนื่องจากการสร้างแบบจำลองโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ มีต้นทุนในการทดสอบต่ำกว่าแบบจำลองจริงภาคสนามมาก และ การสร้างแบบจำลองยานพาหนะ ทำให้ประหยัดค่าทดสอบภาคสนาม ค่าต้นแบบแบบจำลองจริง ค่าเสียเวลา ค่าแรงงาน และ เมื่อต้องการแปรเปลี่ยนรูปแบบจำลองสามารถทำได้อย่างรวดเร็ว และ ถูกต้องแม่นยำ โดยทำการกำหนดคุณสมบัติแบบจำลองที่สอดคล้องกับรูปแบบยานพาหนะที่ใช้ งานจริง ดังภาพ 34



ภาพ 34 แสดงแบบจำลองยานพาหนะสองเพลานึ่งคัน ลำดับชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ 4

จากภาพ 34 รูปแบบจำลองยานพาหนะประกอบด้วย ยานพาหนะหนึ่งคัน สองเพลาลำดับชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ 4 (4 Degree Of Freedom, 4DOF)

โดยกำหนดให้

ค่า M คือ มวลตู้รถไฟ

ค่า k_1 คือ ระบบกันสะเทือนตู้รถไฟ

ค่า c_1 คือ ระบบใช้ค้อพรตไฟ

ค่า m คือ มวลระบบเพลานึ่งเพล

และ ค่า k_2 คือ ระบบยึดหนุ่นของเพล

สำหรับวิธีการสร้างแบบจำลองการเคลื่อนที่ของยานพาหนะนั้น ใช้หลักการทางคณิตศาสตร์สมการการเคลื่อนที่ (Equations of motion) และ กำหนดพารามิเตอร์เกี่ยวเนื่อง ด้วยโปรแกรม MATLAB (Matrix Laboratory) เพราะ เป็นโปรแกรมที่มีความสามารถในการคำนวณทางคณิตศาสตร์ขั้นสูง มีความสะดวกในการทำงาน มีความเที่ยงตรง มีเสถียรภาพสูง และ

มีฟังก์ชันภายใน (Built-in) เพื่อแก้ปัญหาเชิงวิทยาศาสตร์ และ วิศวกรรม ยกตัวอย่าง สมการอนุพันธ์ (Partial differential equation) ขบวนการสัญญาณรบกวน (Signal processing) และ ระบบควบคุม (Control system) รวมทั้งโปรแกรม MATLAB มีประสิทธิภาพสูงในการนำเสนอ การประมวลผลเชิงรูปภาพ ทั้งในลักษณะ 2 มิติ และ 3 มิติ

จากการศึกษาการสั่นสะเทือนของพื้นผิว แสดงว่า โดยทั่วไปการสั่นสะเทือนเกิดขึ้นตลอดเวลา เพียงแต่ การสั่นสะเทือนนั้นมนุษย์รู้สึกยอมรับได้ แต่สำหรับการเคลื่อนที่ของยานพาหนะบน โครงสร้างพื้นฐานนั้น บางกรณี ก่อให้เกิดการสั่นสะเทือนที่มากเกินไปกว่าผู้ใช้งานพาหนะ จะยอมรับได้ สังเกตได้จากการที่มี ผู้ใช้งานพาหนะบางคนเกิดอาการอ่อนเพลีย วิงเวียนศีรษะ และ เจ็บป่วยร่างกายขณะใช้ยานพาหนะ ด้วยเหตุนี้ องค์การกำหนดมาตรฐานระหว่างประเทศ (International Organization for Standardization, ISO) ได้กำหนดมาตรฐาน ISO 2631 มาใช้ในการวัดค่าการสั่นสะเทือนต่อผู้ใช้งานพาหนะ (Whole Body Vibration, WBV) ในรูปแบบค่าเฉลี่ยรากที่สอง (Root Mean Square, RMS) ของค่าความเร่งห้องผู้โดยสารสะสม ในช่วงความถี่ 0.5 ถึง 80 Hz. ดังตาราง 2

ตาราง 2 แสดงค่าอัตราเร่งสูงสุดที่มีผลต่อความรู้สึกของผู้ใช้งานพาหนะ ตามมาตรฐาน ISO 2631

อัตราเร่งสูงสุด	ความรู้สึกของผู้ใช้งานพาหนะ
< 0.032 g	สะดวกสบาย
0.032 g to 0.064 g	สะดวกสบายบ้าง เล็กน้อย
0.051 g to 0.102 g	เกือบจะไม่สะดวกสบาย
0.082 g to 0.160 g	ไม่สะดวกสบาย
0.127 g to 0.255 g	ไม่สะดวกสบาย มาก
> 0.200 g	ไม่สะดวกสบาย มากที่สุด

จากตาราง 2 ยกตัวอย่าง ค่าความเร่งของรถยนต์ทั่วไป 0.075 g แสดงว่า ความรู้สึกของผู้ใช้ยานพาหนะเกือบจะไม่สะดวกสบาย และ ค่าความเร่งของรถแท็กซี่ 0.039 g แสดงว่า ความรู้สึกของผู้ใช้ยานพาหนะสะดวกสบายบ้าง เล็กน้อย และ ค่าความเร่งของรถไถนา 0.172 g แสดงว่า ความรู้สึกของผู้ใช้ยานพาหนะไม่สะดวกสบายมาก จากนั้นทำการเปรียบเทียบยานพาหนะทั้ง 3 ประเภท แสดงว่า ค่าความเร่งของรถไถนา สูงสุด และ ส่งผลกระทบต่อความรู้สึกไม่สะดวกสบายต่อผู้ใช้ยานพาหนะมากที่สุด ในขณะที่รถยนต์ทั่วไป และ รถแท็กซี่ มีค่าความเร่งห้องโดยสารอยู่ในเกณฑ์ที่ผู้ใช้ยานพาหนะยอมรับได้

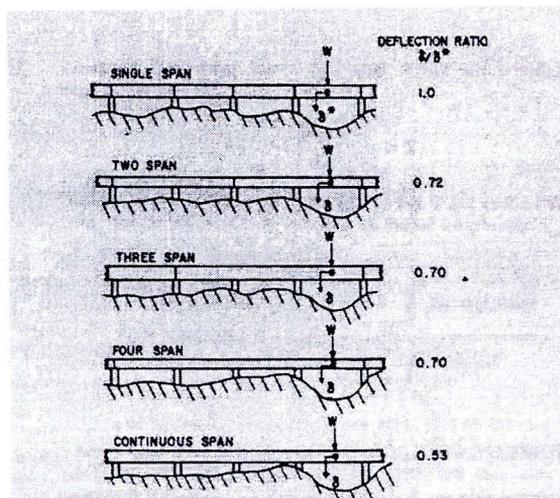
จากการศึกษาแบบจำลองยานพาหนะ นำไปใช้ในการคำนวณค่าผลตอบสนองต่อยานพาหนะ และ ต่อโครงสร้างพื้นฐาน ที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของยานพาหนะรถไฟความเร็ว บนโครงสร้างพื้นฐานสะพานช่วงเดียว ที่มีพื้นผิวระบราบไม่สม่ำเสมอ สำหรับผลตอบสนองต่อยานพาหนะนั้น พิจารณาในรูปของ ค่าความเร่งที่เกิดขึ้นในห้องผู้โดยสาร และ ใช้มาตรฐานค่า ISO 2631 ในการวัดค่าความรู้สึกของผู้ใช้ยานพาหนะ

แบบจำลองโครงสร้างพื้นฐาน (Structure system)

ประเภทของโครงสร้างพื้นฐานระบราบ แบ่งออกเป็นสองประเภท คือ โครงสร้างพื้นฐานระบราบที่วางบนพื้นดิน โดยในขณะที่ยานพาหนะเคลื่อนที่ จะก่อให้เกิดแรงกระทำซ้ำบนโครงสร้างระบราบ และ แรงกระทำจะกระจายลงสู่พื้นดินอย่างรวดเร็ว ตามระยะทางด้านข้างที่เพิ่มขึ้น โครงสร้างพื้นฐานระบราบที่วางบนพื้นดินทำให้เกิดความเสียหายจากการเสียรูปของโครงสร้างน้อยมาก เมื่อเปรียบเทียบกับประเภทโครงสร้างพื้นฐานที่อยู่เหนือพื้นดินแบบยกระดับ ในรูปแบบของสะพาน ที่มีทั้งแบบคานช่วงเดียว คานสองช่วง คานสามช่วง และ คานต่อเนื่อง

ดั่งภาพ 35

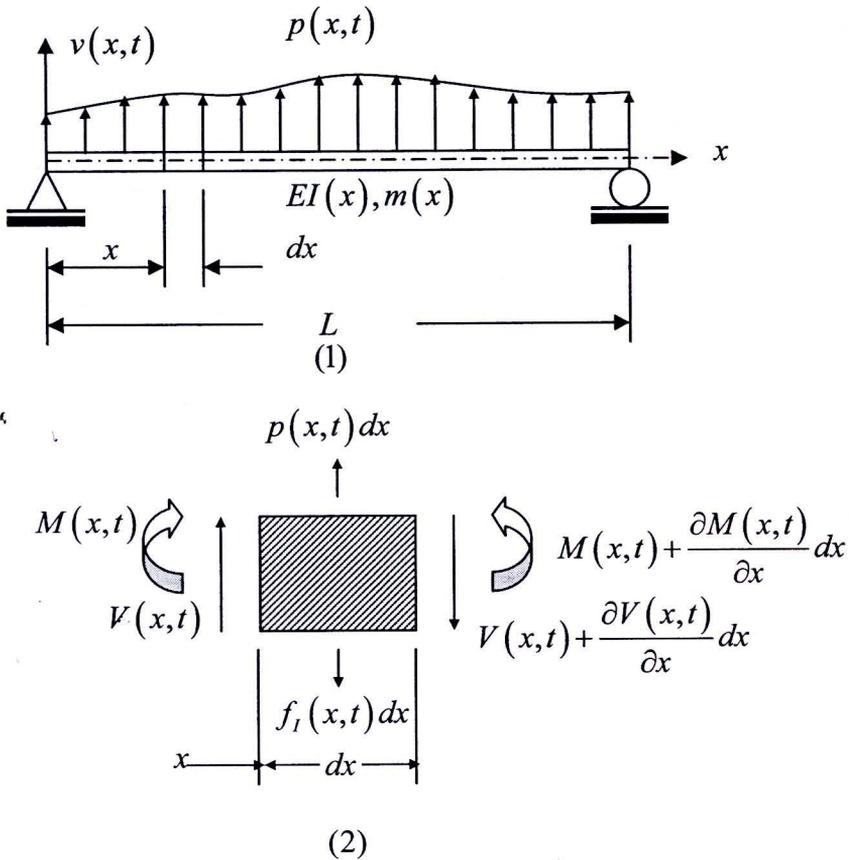




ภาพ 35 แสดงค่าระยะโก่งตัวของโครงสร้างพื้นฐานยกกระดืบแบ่งตามช่วงความยาวคาน

การพิจารณาเลือกช่วงของคานนั้น ขึ้นอยู่กับสภาพแวดล้อมบริเวณที่ทำการก่อสร้าง และ คุณประโยชน์ในการใช้รูปแบบโครงสร้างพื้นฐาน แต่เมื่อวิเคราะห์ถึง ค่าระยะโก่งตัวของ โครงสร้างพื้นฐาน แสดงว่า ค่าระยะโก่งตัวของโครงสร้างพื้นฐาน ประเภทคานช่วงเดียว มีค่าสูงสุด เมื่อเปรียบเทียบกับ ค่าระยะโก่งตัวของโครงสร้างพื้นฐานคานสองช่วง สามช่วง และ คานแบบต่อเนื่อง ซึ่งส่งผลทำให้ค่าความเร่งของโครงสร้างพื้นฐาน และ ค่าความเร่งของ ยานพาหนะสูง ทำให้ผู้ใช้ยานพาหนะอาจจะรู้สึกไม่สะดวกสบายจากการใช้ยานพาหนะ ในบริเวณดังกล่าว

ดังนั้นทำการคำนวณรูปแบบการสั่นสะเทือนของคาน แบบช่วงเดียว ดังภาพ 36 แสดงรูปแบบของ คานช่วงเดียว ที่รับแรงกระทำแนวตั้งจาก $p(x,t)$ ในแต่ละตำแหน่ง และ ช่วงเวลา



ภาพ 36 แสดงผลของแรงกระทำเคลื่อนที่ต่อคาน รูป (1) แสดงส่วนประกอบ และตำแหน่งของคาน รูป (2) แสดงแรงกระทำต่อชิ้นส่วนคาน

จากภาพ 36 กำหนดคุณสมบัติของคาน ดังนี้

ค่า EI คือ สติฟเนสยืดหยุ่น

ค่า $m(x)$ คือ มวลต่อความยาว ของตำแหน่งที่ x ตลอดช่วงความยาว L

และ ค่า $v(x,t)$ คือ ค่าการเคลื่อนที่แนวตั้ง

จากนั้นทำการสร้างสมการการเคลื่อนที่ โดยอาศัยหลักการสมดุลภาพของแรง ที่แบ่งคานออกเป็น ส่วนย่อย เพื่อใช้ในการพิจารณา และ สร้างสมการ ระบบ Discrete-parameter system ของการเคลื่อนที่แนวตั้ง ดังสมการ

$$v(x,t) + p(x,t)dx - \left[V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx \right] - f_I(x,t)dx = 0 \quad (31)$$

โดยกำหนดให้

ค่า $V(x,t)$ คือ แรงกระทำในแนวดิ่งของขนาดรูปตัด

และ ค่า $f_I(x,t)dx$ คือ แรงกระทำภายใน มีค่าเท่ากับ มวลคูณความเร่ง ดังสมการ

$$f_I(x,t)dx = m(x)dx \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \quad (32)$$

แทนค่าสมการ 32 ด้วยสมการ 31 และ หาร dx ตลอดแนว

จะได้สมการค่าความสัมพันธ์ระหว่างแรงเฉือน และ แรงกระทำแนวดิ่ง

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = p(x,t) - m(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \quad (33)$$

และ เมื่อพิจารณา โมเมนต์ที่จุด A ดังสมการ 34

$$M(x,t) + V(x,t)dx - \left[M(x,t) + \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} dx \right] = 0 \quad (34)$$

โดยกำหนดให้

ค่า $\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} = V(x,t)$ ทำการสร้างสมการอนุพันธ์

$$\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x} + m(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = p(x,t) \quad (35)$$

แทนค่า หลักการของโมเมนต์ $M = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ ดังสมการ

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right] + m(x) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = p(x,t) \quad (36)$$

และ ทำการแก้ปัญหามสมการการเคลื่อนที่ (Partial Differential Equation) ของคานแบบยึดหย่อน

$$EI \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + \bar{m} \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (37)$$

จัดรูปสมการ 37 ดังสมการ

$$v^{iv}(x,t) + \frac{\bar{m}}{EI} \ddot{v}(x,t) = 0 \quad (38)$$

และ จัดรูปสมการ 38 ดังสมการ

$$\phi^{iv}(x) Y(t) + \frac{\bar{m}}{EI} \phi(x) \ddot{Y}(t) = 0 \quad (39)$$

โดยกำหนดให้

ค่า $\frac{\bar{m}}{EI}$ คือ ค่าคงที่

ค่า $v(x,t) = \phi(x) Y(t)$ คือ ค่าการเคลื่อนที่ในแนวตั้ง

และ ค่า $\phi(x)$ คือ โหมดการสั่นสะเทือนอิสระภายใต้ช่วงเวลา $Y(t)$

จากนั้นทำการคูณ $\frac{1}{\phi(x) Y(t)}$ ตลอดสมการ 39 ดังสมการ

$$\frac{\phi^{iv}(x)}{\phi(x)} + \frac{\bar{m}}{EI} \frac{\ddot{Y}(t)}{Y(t)} = 0 \quad (40)$$

จัดรูปแบบสมการสัมพันธ์กับฟังก์ชัน x, t ดังสมการ

$$\frac{\phi^{iv}(x)}{\phi(x)} = -\frac{\bar{m}}{EI} \frac{\ddot{Y}(t)}{Y(t)} = a^4 \quad (41)$$

โดยกำหนดให้

ค่า a^4 คือ ค่าคงที่ทางคณิตศาสตร์ ใช้ในการออกแบบสมการอนุพันธ์ลำดับที่ 2 ดังสมการ

$$\ddot{Y}(t) + \omega^2 Y(t) = 0 \quad (42)$$

โดยกำหนดให้

ค่าการเคลื่อนที่ $Y(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$

และ ทำการสร้างสมการแปลงรูปออยเลอร์ของระบบตัวแปรอิสระตัวแปรเดียว

โดยไม่คิดค่าความหน่วง ดังสมการ

$$\phi^{iv}(x) - a^4 \phi(x) = 0 \quad (43)$$

โดยกำหนดให้

$$\omega^2 = \frac{a^4 EI}{\bar{m}}$$

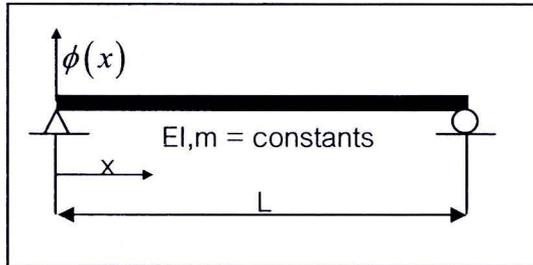
และ จัดรูปค่า $\phi(x)$ ดังสมการ

$$\phi(x) = A_1 \cos ax + A_2 \sin ax + A_3 \cosh ax + A_4 \sinh ax \quad (44)$$

โดยกำหนดให้

ค่า A_1, A_2, A_3, A_4 คือ ค่าคงที่ที่แท้จริง

จากนั้นทำการคำนวณค่าการสั่นสะเทือน พิจารณาที่จุดรองรับที่ขอบคานทั้งสองด้าน ดังภาพ 37 แสดงองค์ประกอบของคานช่วงเดียว



ภาพ 37 แสดงองค์ประกอบของคานช่วงเดียว

ที่ ระยะขอบ $x = 0$

$$\text{ค่า } \phi(0) = 0$$

$$\text{ค่า } M(0) = EI\phi''(0) = 0$$

แทนค่าในสมการ 44 และ คำนวณสมการอนุพันธ์ลำดับที่ 2

$$\phi(0) = A_1 \cos 0 + A_2 \sin 0 + A_3 \cosh 0 + A_4 \sinh 0 = 0$$

$$\phi''(0) = a^2 (-A_1 \cos 0 - A_2 \sin 0 + A_3 \cosh 0 + A_4 \sinh 0) = 0 \quad (45)$$

ที่ระยะขอบ $x = L$ จัดรูปสมการ

$$\phi(L) = A_2 \sin aL + A_4 \sinh aL = 0$$

$$\phi''(L) = a^2 (-A_2 \sin aL + A_4 \sinh aL) = 0 \quad (46)$$

รวมสมการ 45 และ 46 ของระยะขอบ $x = 0$ และ $x = L$ ดังสมการ

$$\phi(x) = A_2 \sin ax \quad (47)$$

โดยกำหนดให้

ค่า $a = \frac{n\pi}{L}$ คือ ความถี่ของระบบ ; $n = 0, 1, 2, \dots$

แทนค่าในสมการ $\omega^2 = \frac{a^4 EI}{\bar{m}}$ และ คูณรากที่สองทั้งสองข้างของสมการ

เพื่อคำนวณค่าความถี่ธรรมชาติ ดังสมการ

$$\omega_n = n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad (48)$$

แทนค่ารูปแบบการสั่นสะเทือนแต่ละโหมดด้วยสมการค่าความถี่ของระบบ และ

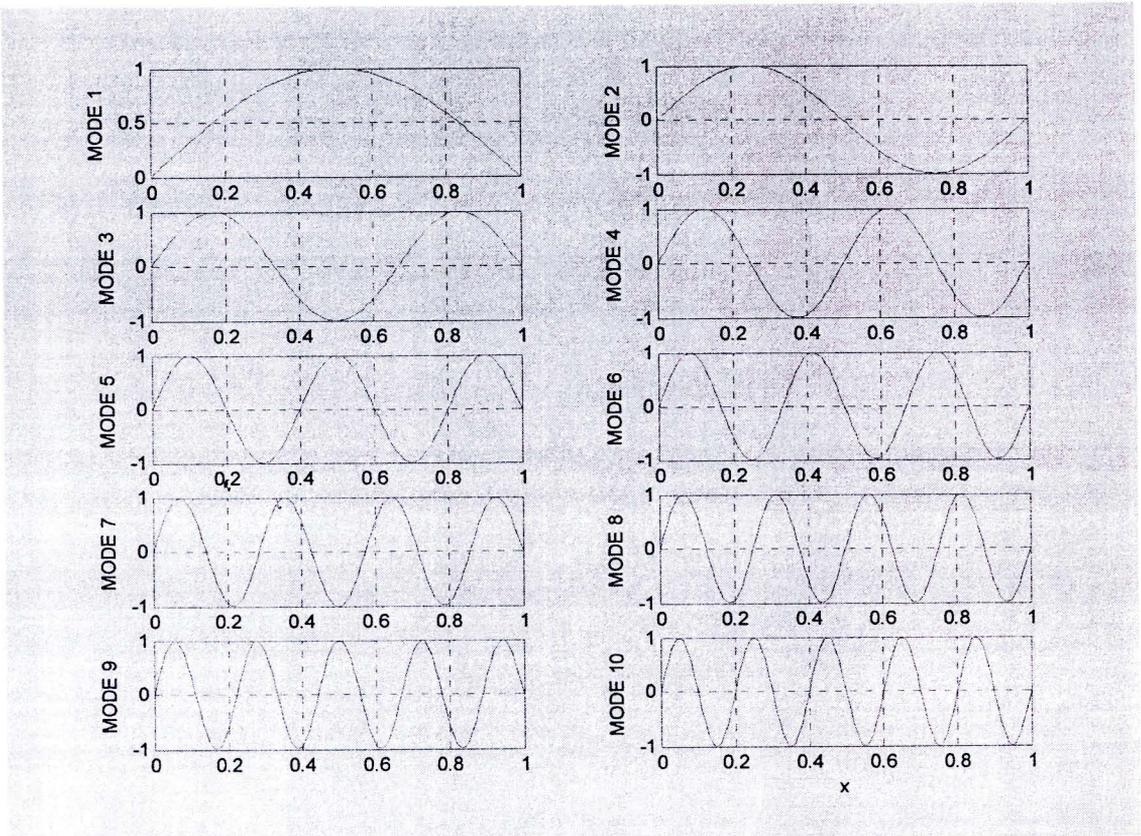
ทำการจัดรูปสมการคลื่นสัญญาณไซน์ (sine) จะได้รูปแบบการสั่นสะเทือนของคานช่วงเดียว

ดังสมการ

$$\phi_n(x) = A_2 \sin \frac{n\pi}{L} x \quad n = 1, 2, \dots \quad (49)$$

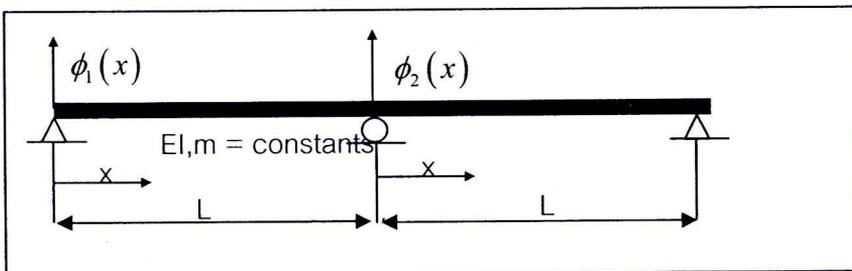
จากสมการ 48 และ 49 ค่า ω_n คือ ค่าความถี่ธรรมชาติ

และ ค่า $\phi_n(x)$ คือ รูปแบบการสั่นสะเทือนของคานช่วงเดียว ดังภาพ 38



ภาพ 38 แสดงรูปแบบการสั่นสะเทือนจำนวน 10 โหมดของคานช่วงเดียว

และ ทำการวิเคราะห์รูปแบบการสั่นสะเทือนของคานสองช่วง ดังภาพ 39 แสดงองค์ประกอบของคานสองช่วง



ภาพ 39 แสดงองค์ประกอบของคานสองช่วง

จากสมการ 43 แทนค่าใน สมการเอกซ์โพเนนเชียล ในเทอมของตรีโกณมิติ (Trigonometric) และ ไฮเพอร์บอริก (hyperbolic) ดังสมการ

$$\begin{aligned}\phi(x) &= A_1 \sin ax + A_2 \cos ax + A_3 \sinh ax + A_4 \cosh ax \\ \phi_1(x) &= A_1 \sin ax + A_2 \cos ax + A_3 \sinh ax + A_4 \cosh ax \\ \phi_2(x) &= A'_1 \sin ax + A'_2 \cos ax + A'_3 \sinh ax + A'_4 \cosh ax\end{aligned}\quad (50)$$

จัดรูปสมการ เพื่อหาค่า A_1, A_2, A_3, A_4 และ A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 ดังสมการ

$$\begin{bmatrix} \sin aL & 0 & -1 \\ 0 & \sin aL & \cos aL \\ \cos aL - \sin aL \coth aL & -1 & -\coth aL \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A'_1 \\ A'_2 \end{Bmatrix} = 0\quad (51)$$

และ

$$\sin aL (\cos aL - \sin aL \coth aL) = 0\quad (52)$$

ค่ากำลังสองของ (aL) พิจารณาได้ 2 โหมด ดังนี้

กรณีโหมดสมมาตร $aL = n\pi$

และ กรณีโหมดไม่สมมาตร $aL = \left(n + \frac{1}{4}\right)\pi$

ดังนั้นค่าความถี่ธรรมชาติของคานสองช่วง ดังสมการ

$$\omega_n = (aL_n)^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}\quad (53)$$

และ รูปแบบการสั่นสะเทือนของคานสองช่วง ดังสมการ

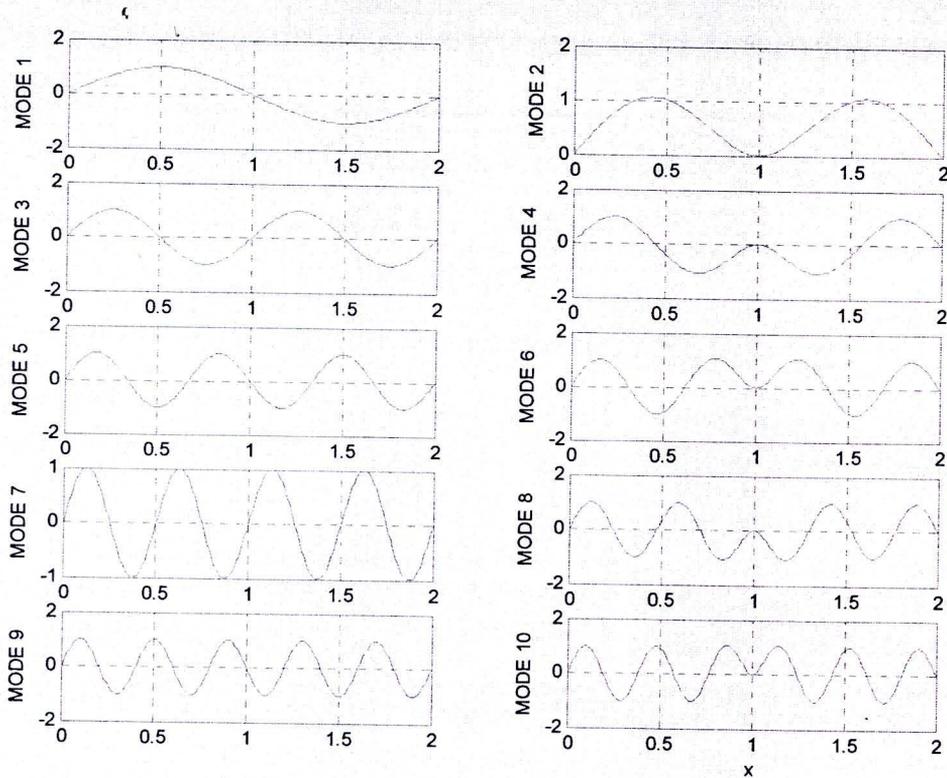
$$\phi_1(x) = A_1 \sin ax + A_3 \sinh ax$$

$$\phi_1(x) = A_1 \left(\sin ax - \frac{\sin aL}{\sinh aL} \sinh ax \right)$$

(54)

$$\phi_2(x) = A'_1 \sin ax + A'_2 \cos ax + A'_3 \sinh ax + A'_4 \cosh ax$$

จากสมการ 53 และ 54 ค่า ω_n คือ ค่าความถี่ธรรมชาติ และ ค่า $\phi_n(x)$ คือ รูปแบบการสั่นสะท้อนของคานสองช่วง ดังภาพ 40



ภาพ 40 แสดงรูปแบบการสั่นสะท้อนจำนวน 10 โหมดของคานสองช่วง

รูปแบบการสั่นสะเทือนของคานช่วงเดียว คานสอง คานสามช่วง และ คานต่อเนื่อง สามารถนำไปใช้ในการคำนวณ ค่าทางสถิต และ ค่าทางพลวัต ของยานพาหนะบน โครงสร้างพื้นฐาน จากการศึกษาเกี่ยวกับค่าความขรุขระของพื้นผิว แบบจำลองยานพาหนะ และ โครงสร้างพื้นฐาน ทำการสร้างความสัมพันธ์ในรูปแบบ สมการการเคลื่อนที่ ที่จะอธิบาย ในหัวข้อถัดไป

ความสัมพันธ์พื้นผิวทาง ยานพาหนะ และ โครงสร้างพื้นฐาน (Interface Models)

แบบจำลองความสัมพันธ์ยานพาหนะบนโครงสร้างพื้นฐาน หรือเรียกว่า แบบจำลองสัมพันธ์ (Interface Models) สามารถพิจารณาได้ทั้งแบบเชิงเส้น (Linear) และ แบบไม่เชิงเส้น (Non-linear) โดยทั่วไปแบบจำลองไม่เชิงเส้น ใช้วิธีการวิเคราะห์ แบบไร้จุดสัมผัส หรือ แบบสปริง ยืดหยุ่น การศึกษาแบบจำลองความสัมพันธ์ยานพาหนะบนโครงสร้างพื้นฐาน เน้นการสร้าง แบบจำลองสัมพันธ์เชิงเส้น โดยมีองค์ประกอบของจุดสัมผัส แบบสปริง แบบสปริงต่อเนื่อง แบบระบบกันสะเทือน และ แบบมวลแข็งแก็ง เชื่อมต่อกับสปริง หรือ ระบบกันสะเทือน และ อาศัยหลักการคู่ควบกับแบบจำลองความขรุขระของพื้นผิว ในรูปแบบสมการการเคลื่อนที่ ดังสมการ

$$v'_d(x_d, t_d) = v_d(x_d, t_d) + h_d(x_d) \quad (55)$$

โดยกำหนดให้

ค่า $v'_d(x_d, t_d)$ คือ ค่าการเคลื่อนที่ที่จุดสัมผัส x_d โดยทั้งนี้ขึ้นอยู่กับผลรวมของค่าการเคลื่อนที่ แนวตั้งของคาน $v_d(x_d, t_d)$ และ ค่าความไม่สม่ำเสมอของแนวทาง $h_d(x_d)$

เมื่อพิจารณาค่าการเคลื่อนที่แนวตั้งในเทอมของพิกัดโมดอล (Modal coordinates) และ รูปร่างโหมดการสั่นสะเทือน ดังสมการ

$$v_d(x_d, t_d) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x_d) y_i(t_d) \quad (56)$$

จากสมการ 55 จัดรูปสมการอนุพันธ์ลำดับที่ 1 และ 2 ของการเคลื่อนที่ของจุดสัมผัส ดังสมการ

$$\dot{v}_d'(x_d, t_d) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x_d) \dot{y}_i(t_d) + \dot{x}_d \sum_{i=1}^n \phi_i'(x_d) y_i(t_d) + \dot{x}_d h_d'(x_d) \quad (57)$$

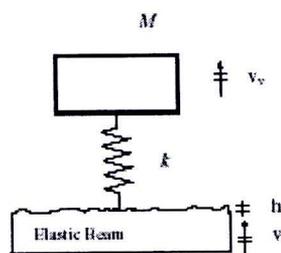
$$\begin{aligned} \ddot{v}_d'(x_d, t_d) = & \sum_{i=1}^n \phi_i(x_d) \ddot{y}_i(t_d) + 2\dot{x}_d \sum_{i=1}^n \phi_i'(x_d) \dot{y}_i(t_d) + \dot{x}_d^2 \sum_{i=1}^n \phi_i''(x_d) y_i(t_d) \\ & + \ddot{x}_d \sum_{i=1}^n \phi_i'(x_d) y_i(t_d) + \dot{x}_d^2 h_d''(x_d) + \ddot{x}_d h_d'(x_d) \end{aligned} \quad (58)$$

โดยกำหนดให้ ยานพาหนะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่

ดังนั้น ค่า $\dot{x}_d = V$ และ $\ddot{x}_d = 0$

เมื่อได้รูปแบบของสมการการเคลื่อนที่ สามารถวิเคราะห์จุดสัมผัสของยานพาหนะบนโครงสร้างพื้นฐาน ดังนี้

วิเคราะห์จุดสัมผัสยานพาหนะ ระบบลำดับชั้นความเป็นอิสระหนึ่ง (Single Degree Of Freedom, SDOF) แบบสปริงเชิงเส้นบนพื้นผิวคานแบบยืดหยุ่น ดังภาพ 41



ภาพ 41 แสดงยานพาหนะ ระบบลำดับชั้นความเป็นอิสระหนึ่ง (Single Degree Of Freedom, SDOF) แบบสปริงเชิงเส้นบนพื้นผิวคานแบบยืดหยุ่น

โดยกำหนดให้

ค่า v_d คือ ค่าการเคลื่อนที่แนวตั้งของยานพาหนะ

ทำการจัดรูปแบบสมการสมดุลของยานพาหนะ และ สมการโมดอลของคน ดังสมการ

$$M\ddot{v}_{d_v}(t_d) + k(v_{d_v}(t_d) - v'_{d_v}(x_d, t_d)) = 0 \quad (59)$$

$$\ddot{y}_i(t_d) + 2\xi\omega_i\dot{y}_i(t_d) + \omega_i^2 y_i(t_d) = P_1(x_d, t_d)\phi(Vt_d) \quad (60)$$

โดยกำหนดให้

$$\text{ค่า } P_1(x_d, t_d) = k(v_{d_v}(t_d) - v'_{d_v}(x_d, t_d)) - Mg$$

จากสมการการเคลื่อนที่ที่สามารถเขียนในรูปแบบเมตริกซ์ (Matrix) ได้ ดังสมการ

$$M\ddot{x}(t_d) + C\dot{x}(t_d) + K(t_d)x(t_d) = F(t_d) \quad (61)$$

โดยกำหนดให้

$$\text{ค่า } x(t_d) = [v_{d_v} \quad y_1 \quad \dots \quad y_n]^T$$

$$\text{ค่า } M = \begin{bmatrix} M & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ค่า } C = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 2\xi\omega_1 & & & \\ & & 2\xi\omega_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2\xi\omega_n \end{bmatrix}$$

$$\text{ค่า } K(t_d) = \begin{bmatrix} k & -k\phi_1(Vt_d) & -k\phi_2(Vt_d) & \dots & -k\phi_n(Vt_d) \\ -k\phi_1(Vt_d) & \omega_1^2 + k\phi_1^2(Vt_d) & k\phi_2(Vt_d)\phi_1(Vt_d) & \dots & k\phi_n(Vt_d)\phi_1(Vt_d) \\ -k\phi_2(Vt_d) & k\phi_1(Vt_d)\phi_2(Vt_d) & \omega_2^2 + k\phi_2^2(Vt_d) & \dots & k\phi_n(Vt_d)\phi_2(Vt_d) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k\phi_n(Vt_d) & k\phi_1(Vt_d)\phi_n(Vt_d) & k\phi_2(Vt_d)\phi_n(Vt_d) & \dots & \omega_n^2 + k\phi_n^2(Vt_d) \end{bmatrix}$$

$$\text{ค่า } F(t_d) = [F_1^1 \quad F_1 \quad F_2 \quad \dots \quad F_n]^T$$

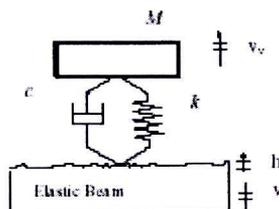
$$\text{และ ค่า } F_i = [-kh_d(Vt_d) - Mg] \phi_i(Vt_d)$$

จากองค์ประกอบของจุดสัมผัสยืดหยุ่นเชิงเส้น $K(t_d)$ ในรูปของฟังก์ชันเวลา

ผลของแรงกระทำอยู่ในรูปของฟังก์ชัน $h_d(t_d)$

ดังนั้น ถ้าค่าพารามิเตอร์ k เปลี่ยนแปลงไป จะส่งผลต่อ ค่าผลตอบสนองของยานพาหนะ และ ค่าผลตอบสนองของโครงสร้างพื้นฐาน

สำหรับกรณีวิเคราะห์จุดสัมผัสยานพาหนะ ระบบลำดับชั้นความเป็นอิสระหนึ่ง (Single Degree Of Freedom, SDOF) ที่มีทั้งระบบกันสะเทือน และ สปริงแบบต่อขนานบนพื้นผิวคานแบบยืดหยุ่น ดังภาพ 42



ภาพ 42 แสดงยานพาหนะ ระบบลำดับชั้นความเป็นอิสระหนึ่ง (Single Degree Of Freedom, SDOF) ที่มีทั้งระบบกันสะเทือน และ สปริงแบบต่อขนานบนพื้นผิวคานแบบยืดหยุ่น

จัดรูปแบบสมการสมดุลของยานพาหนะ และ สมการโมดอลของคาน ดังสมการ

$$M\ddot{v}_d(t_d) + c(\dot{v}_d(t_d) - \dot{v}'_d(x_d, t_d)) + k(v_d(t_d) - v'_d(x_d, t_d)) = 0 \quad (62)$$

$$\ddot{y}_i(t_d) + 2\xi\omega_i\dot{y}_i(t_d) + \omega_i^2 y_i(t_d) = P_2(x_d, t_d)\phi(Vt_d) \quad (63)$$

โดยกำหนดให้

$$\text{ค่า } P_2(x_d, t_d) = c(\dot{v}_d(t_d) - \dot{v}'_d(x_d, t_d)) + k(v_d(t_d) - v'_d(x_d, t_d)) - Mg$$

จากสมการการเคลื่อนที่ที่สามารถเขียนในรูปแบบเมตริกซ์ (Matrix) ได้ ดังสมการ

$$M\ddot{x}(t_d) + C(t_d)\dot{x}(t_d) + K(t_d)x(t_d) = F(t_d) \quad (64)$$

โดยกำหนดให้

$$\text{ค่า } M = \begin{bmatrix} M & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ค่า } C(t_d) = \begin{bmatrix} c & -c\phi_1(Vt_d) & -c\phi_2(Vt_d) & \dots & -c\phi_n(Vt_d) \\ -c\phi_1(Vt_d) & 2\xi\omega_1 + c\phi_1^2(Vt_d) & c\phi_2(Vt_d)\phi_1(Vt_d) & \dots & c\phi_n(Vt_d)\phi_1(Vt_d) \\ -c\phi_2(Vt_d) & c\phi_1(Vt_d)\phi_2(Vt_d) & 2\xi\omega_2 + c\phi_2^2(Vt_d) & \dots & c\phi_n(Vt_d)\phi_2(Vt_d) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -c\phi_n(Vt_d) & c\phi_1(Vt_d)\phi_n(Vt_d) & c\phi_2(Vt_d)\phi_n(Vt_d) & \dots & 2\xi\omega_n + c\phi_n^2(Vt_d) \end{bmatrix}$$

$$\text{ค่า } K(t_d) = \begin{bmatrix} k & -cV\phi'_1 - k\phi_1 & -cV\phi'_2 - k\phi_2 & \dots & -cV\phi'_n - k\phi_n \\ -k\phi_1 & \omega_1^2 + cV\phi'_1\phi_1 + k\phi_1^2 & cV\phi'_2\phi_1 + k\phi_2\phi_1 & \dots & cV\phi'_n\phi_1 + k\phi_n\phi_1 \\ -k\phi_2 & cV\phi'_1\phi_2 + k\phi_1\phi_2 & \omega_2^2 + cV\phi'_2\phi_2 + k\phi_2^2 & \dots & cV\phi'_n\phi_2 + k\phi_n\phi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k\phi_n & cV\phi'_1\phi_n + k\phi_1\phi_n & cV\phi'_2\phi_n + k\phi_2\phi_n & \dots & \omega_n^2 + cV\phi'_n\phi_n + k\phi_n^2 \end{bmatrix}$$

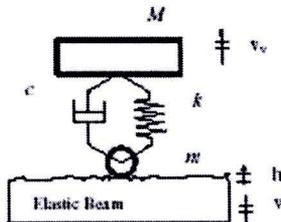
$$F(t_d) = [F_1^1 \quad F_1 \quad F_2 \quad \dots \quad F_n]^T$$

$$\text{และ ค่า } F_i = [-cVh'_d(Vt_d) - kh_d(Vt_d) - Mg] \phi_i(Vt_d)$$

จากการเพิ่มองค์ประกอบของจุดสัมผัสแบบยืดหยุ่น $K(t_d)$ และ แบบกันสะเทือน $C(t_d)$ ในรูปของฟังก์ชันเวลา

ดังนั้น ผลของแรงกระทำจะอยู่ในรูปของฟังก์ชัน $h_d(t_d)$ และ $h'_d(t_d)$ ของแบบจำลอง ความขรุขระพื้นผิว และ ค่าความแปรปรวนที่เกิดขึ้น จากการใช้สมการตัวกรองไวทน์อยซ์ ในรูปของอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่ง

สำหรับกรณีวิเคราะห์จุดสัมผัสยานพาหนะ ระบบลำดับชั้นความเป็นอิสระหนึ่ง (Single Degree Of Freedom, SDOF) แบบสปริงเชิงเส้นบนพื้นผิวดานแบบยืดหยุ่น และ แบบที่มีทั้งระบบกันสะเทือน และ สปริงแบบต่อขนานบนพื้นผิวดานแบบยืดหยุ่น นั้น ถ้าทำการเพิ่มจุดสัมผัสแบบมวลเชิงเกร็ง และ ยังคงประกอบด้วยระบบกันสะเทือน และ สปริงแบบต่อขนานเชื่อมระหว่างมวลเชิงเกร็ง m และ มวล M ดังภาพ 43



ภาพ 43 แสดงยานพาหนะ ระบบลำดับชั้นความเป็นอิสระหนึ่ง (Single Degree Of Freedom, SDOF) ที่มีจุดสัมผัสเป็นมวลเชิงเกร็ง และ มีระบบกันสะเทือน และ สปริงต่อเชื่อมแบบขนานบนพื้นผิวดานแบบยืดหยุ่น

จัดรูปแบบสมการสมดุลของยานพาหนะ และ สมการโมดอลของคาน ดังสมการ

$$M\ddot{v}_d(t_d) + c(\dot{v}_d(t_d) - \dot{v}'_d(x_d, t_d)) + k(v_d(t_d) - v'_d(x_d, t_d)) = 0 \quad (65)$$

$$\ddot{y}_i(t_d) + 2\xi\omega_i\dot{y}_i(t_d) + \omega_i^2 y_i(t_d) = P_3(x_d, t_d)\phi(Vt_d) \quad (66)$$

โดยกำหนดให้

$$\begin{aligned} \text{ค่า } P_3(x_d, t_d) = & -m\ddot{v}'_d(x_d, t_d) + c(\dot{v}_{d_v}(t_d) - \dot{v}'_d(x_d, t_d)) \\ & + k(v_{d_v}(t_d) - v'_{d_v}(x_d, t_d)) - (M + m)g \end{aligned}$$

จากสมการการเคลื่อนที่ที่สามารถเขียนในรูปแบบเมตริกซ์ (Matrix) ได้ ดังสมการ

$$M\ddot{x}(t_d) + C(t_d)\dot{x}(t_d) + K(t_d)x(t_d) = F(t_d) \quad (67)$$

โดยกำหนดให้

$$\text{ค่า } M(t_d) = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m\phi_1^2(Vt_d) & m\phi_2(Vt_d)\phi_1(Vt_d) & \dots & m\phi_n(Vt_d)\phi_1(Vt_d) \\ 0 & m\phi_1(Vt_d)\phi_2(Vt_d) & m\phi_2^2(Vt_d) & \dots & m\phi_n(Vt_d)\phi_2(Vt_d) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & m\phi_1(Vt_d)\phi_n(Vt_d) & m\phi_2(Vt_d)\phi_n(Vt_d) & \dots & m\phi_n^2(Vt_d) \end{bmatrix}$$

$$\text{ค่า } C(t_d) = \begin{bmatrix} c & -c\phi_1 & -c\phi_2 & \dots & -c\phi_n \\ -c\phi_1 & 2\xi\omega_1 + 2mV\phi_1'\phi_1 + c\phi_1^2 & 2mV\phi_2'\phi_1 + c\phi_2\phi_1 & \dots & 2mV\phi_n'\phi_1 + c\phi_n\phi_1 \\ -c\phi_2 & 2mV\phi_1'\phi_2 + c\phi_1\phi_2 & 2\xi\omega_2 + 2mV\phi_2'\phi_2 + c\phi_2^2 & \dots & 2mV\phi_n'\phi_2 + c\phi_n\phi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -c\phi_n & 2mV\phi_1'\phi_n + c\phi_1\phi_n & 2mV\phi_2'\phi_n + c\phi_2\phi_n & \dots & 2\xi\omega_n + 2mV\phi_n'\phi_n + c\phi_n^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{ค่า } K(t_d) = \begin{bmatrix} k & -cV\phi_1' - k\phi_1 & -cV\phi_2' - k\phi_2 & \dots & -cV\phi_n' - k\phi_n \\ -k\phi_1 & \omega_1^2 + mV^2\phi_1'' + cV\phi_1'\phi_1 + k\phi_1^2 & mV^2\phi_2'\phi_1 + cV\phi_2'\phi_1 + k\phi_2\phi_1 & \dots & mV^2\phi_n'\phi_1 + cV\phi_n'\phi_1 + k\phi_n\phi_1 \\ -k\phi_2 & mV^2\phi_1'\phi_2 + cV\phi_1'\phi_2 + k\phi_1\phi_2 & \omega_2^2 + mV^2\phi_2'' + cV\phi_2'\phi_2 + k\phi_2^2 & \dots & mV^2\phi_n'\phi_2 + cV\phi_n'\phi_2 + k\phi_n\phi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k\phi_n & mV^2\phi_1'\phi_n + cV\phi_1'\phi_n + k\phi_1\phi_n & mV^2\phi_2'\phi_n + cV\phi_2'\phi_n + k\phi_2\phi_n & \dots & \omega_n^2 + mV^2\phi_n'' + cV\phi_n'\phi_n + k\phi_n^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{ค่า } F(t_d) = [F_1^1 \quad F_1 \quad F_2 \quad \dots \quad F_n]^T$$

$$\text{และ ค่า } F_i = [-mV^2 h_d''(Vt_d) - cVh_d'(Vt_d) - kh_d(Vt_d) - (M+m)g] \phi_n(Vt_d)$$

จากการเพิ่มองค์ประกอบของจุดสัมผัสแบบยืดหยุ่น $K(t_d)$ แบบกันสะเทือน $C(t_d)$ และแบบมวลแข็งแก็ง ในรูปของฟังก์ชันเวลา

ดังนั้น ผลของแรงกระทำอยู่ในรูปของฟังก์ชัน $h_d(t_d)$ $h_d'(Vt_d)$ และ $h_d''(Vt_d)$ ของแบบจำลองความขรุขระพื้นผิว และ ค่าความแปรปรวนที่เกิดขึ้น จากการใช้สมการตัวกรองไวท์นอยซ์ ในรูปของสมการอนุพันธ์ลำดับที่ 2

จากการวิเคราะห์แบบจำลองยานพาหนะที่มีจุดสัมผัสเดียว อาจจะไม่เพียงพอเนื่องจากยานพาหนะที่ใช้ในปัจจุบันเป็นแบบจุดสัมผัสมากกว่าหนึ่งเพลลา ดังนั้นทำการศึกษาผลของระบบยานพาหนะหลายเพลลา ในรูปแบบของแบบจำลองช่วงห่าง (Modeling Lags)

ทำการพิจารณา ตัวแปรสุ่มสองตัวแปรของค่าความขรุขระพื้นผิว ดังนี้

ตัวแปรที่หนึ่ง คือ $h_{d_1}(Vt_d)$

และ ตัวแปรที่สอง คือ $h_{d_1}(Vt_d - l)$ หรือ $h_{d_2}(Vt_d)$

โดยตัวแปรทั้งสองมีความสัมพันธ์กันในรูปแบบพารามิเตอร์ Δ_c และ ช่วงห่างของล้อ l

ทำการสร้างสมการอนุพันธ์ลำดับขั้นที่หนึ่ง ระหว่างค่าสัมพัทธ์ร่วมของช่วงห่างสองตัวแปร ในรูปแบบของตัวกรองไวท์นอยซ์ ดังสมการ

$$\frac{\Delta_c}{V} \dot{h}_{d_1}(t_d) + h_{d_1}(t_d) = W_{d_1}(t_d) \quad (68)$$

$$\frac{\Delta_c}{V} \dot{h}_{d_2}(t_d) + h_{d_2}(t_d) = W_{d_2}(t_d) \quad (69)$$

และ ทำการจัดรูปสมการความแปรปรวนร่วมของตัวกรองไวท์นอยซ์ $W_{d_1}(t_d)$ และ $W_{d_2}(t_d)$ ดังสมการ

$$\sum_{w_{d_1} w_{d_2}} = Q \delta(\tau) \quad (70)$$

โดยกำหนดให้

$$\text{ค่า } Q = q_0 \begin{bmatrix} 1 & \rho_{w_{d_1} w_{d_2}} \\ \rho_{w_{d_1} w_{d_2}} & 1 \end{bmatrix}$$

ค่า q_0 คือ ค่าความเค้นของตัวกรองไวท์นอยซ์ $W_{d_1}(t_d)$ และ $W_{d_2}(t_d)$

และ ค่า $\rho_{w_{d_1} w_{d_2}}$ คือ ค่าสหสัมพันธ์ร่วมของช่วงห่างของตัวกรองไวท์นอยซ์

ทำการเขียนสมการแบบเมตริกซ์

$$\dot{h}_d(t_d) = A h_d(t_d) + B W_d(t_d) \quad (71)$$

โดยกำหนดให้

$$\text{ค่า } W_d(t_d) = [W_{d_1} \quad W_{d_2}]^T$$

$$\text{ค่า } A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\Delta_c/V} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\Delta_c/V} \end{bmatrix}$$

$$\text{และ ค่า } B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\Delta_c/V} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\Delta_c/V} \end{bmatrix}$$

ทำการแก้ปัญหาสสมการเพื่อหาค่าคาดหวังของ $h_d(t_d)$ ดังสมการ

$$E[h_d(t_d)] = \exp[At_d] E[h_d(0)] = \Phi(t_d) E[h_d(0)] \quad (72)$$

โดยกำหนดให้

ค่า $\Phi(t_d)$ คือ ค่าเมตริกซ์ทรานซิชัน (Transition matrix)

$$\Phi(t_d) = \begin{bmatrix} \exp\left[-\frac{1}{\Delta_c/V}\right] & 0 \\ 0 & \exp\left[-\frac{1}{\Delta_c/V}\right] \end{bmatrix} \quad (73)$$

ทำการคำนวณค่าความแปรปรวนร่วมของช่วงห่าง h_d ดังสมการ

$$\sum_{h_d(t_d)h_d(t_d)} = \Phi(t_d) \sum_{h_d(0)h_d(0)} \Phi^T(t_d) + \int_0^t \Phi(t_d-u) B \left(\int_0^t Q \delta(u-v) B^T \Phi^T(t_d-v) dv \right) du \quad (74)$$

โดยกำหนดให้

ค่า u และ v คือ ค่าของช่วงเวลา 0 ถึง t ใดๆ

และ ค่า $\tau_d = u - v$

จากสมการ 73 ทำการอินทิเกรตคอนโวลูชัน (Double convolution integral) ดังสมการ

$$\sum_{h_d(t_d)h_d(t_d)} = \Phi(t_d) \sum_{h_d(0)h_d(0)} \Phi^T(t_d) + \int_0^t \Phi(t_d-u) B Q B^T \Phi^T(t_d-u) du \quad (75)$$

เมื่อผลตอบสนองเข้าสู่สแตชันนารี

ค่า $\Phi(t_d) \sum_{h_d(0)h_d(0)} \Phi^T(t_d)$ เท่ากับ 0 ดังนั้น

$$\sum_{h_d(t_d)h_d(t_d)} = \int_0^t \Phi(t_d-\tau_d) B Q B^T \Phi^T(t_d-\tau_d) d\tau_d \quad (76)$$

ทำการจัดสมการในรูปเมตริกซ์

$$\sum_{h_d(t_d)h_d(t_d)} = \frac{1}{4} \frac{\Delta_c}{V} q_0 \begin{bmatrix} 1 & \rho_{W_{d_1}W_{d_2}} \\ \rho_{W_{d_1}W_{d_2}} & 1 \end{bmatrix} \quad (77)$$

โดยกำหนดให้

$$\text{ค่า } \rho_{h_{d_1}h_{d_2}}(0) = \rho_{W_{d_1}W_{d_2}}$$

อธิบายได้ว่า ค่าสหสัมพันธ์ระหว่าง $h_{d_1}(t_d)$ กับ $h_{d_2}(t_d)$ เท่ากับ ค่าสหสัมพันธ์ระหว่าง $W_{d_1}(t_d)$ กับ $W_{d_2}(t_d)$

จากการศึกษาแบบจำลองช่วงห่าง ในรูปแบบสมการตัวกรองไวทน์นอยซ์ อนุพันธ์ลำดับชั้นที่หนึ่ง แสดงว่า ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ $\rho_{h_{d_1}(V_{t_d})h_{d_2}(V_{t_d-l})}$ ที่ช่วงห่างระยะ l ใดๆ จะเท่ากับ ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ $\rho_{W_{d_1}W_{d_2}}$

ดังนั้น ค่าความสัมพันธ์ของตัวกรองไวทน์นอยซ์ สามารถนำไปวิเคราะห์จุดสัมผัสตั้งแต่สองจุดขึ้นไป และ ค่า $\rho_{h_{d_1}(V_{t_d})h_{d_2}(V_{t_d})} = \rho_{h_{d_1}(V_{t_d})h_{d_2}(V_{t_d-l})}$ จะทำให้ค่า $\rho_{W_{d_1}W_{d_2}} = \rho_{h_{d_1}(V_{t_d})h_{d_2}(V_{t_d-l})}$

เมื่อพิจารณายานพาหนะสองเพลลา ที่มีแบบจำลองดังภาพ 34 แสดงแบบจำลองยานพาหนะสองเพลลาหนึ่งคัน ลำดับชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ 4

จัดรูปแบบสมการสมดุลของยานพาหนะ และ สมการโมดอลของคาน ดังสมการ

$$M\ddot{v}_{d_v}(t_d) + c(\dot{v}_{d_v}(t_d) - \dot{v}'_{d_v}(x_d, t_d)) + k(v_{d_v}(t_d) - v'_{d_v}(x_d, t_d)) = 0 \quad (78)$$

$$\ddot{y}_i(t_d) + 2\xi\omega_i\dot{y}_i(t_d) + \omega_i^2 y_i(t_d) = P_3(x_d, t_d)\phi(Vt_d) \quad (79)$$

โดยกำหนดให้

$$\text{ค่า } P_1(x_d, t_d) = k_2(v_{1d_v}(t_d) - v'_{d_v}(x_d, t_d)) - \left(\frac{M}{2} + m\right)g$$

$$\text{และ ค่า } P_2(x_d, t_d) = k_2(v_{2d_v}(t_d) - v'_{d_v}(x_d, t_d)) - \left(\frac{M}{2} + m\right)g$$

จากสมการการเคลื่อนที่ที่สามารถเขียนในรูปแบบเมตริกซ์ (Matrix) ได้ ดังสมการ

$$M\ddot{x}(t_d) + C(t_d)\dot{x}(t_d) + K(t_d)x(t_d) = F(t_d) \quad (80)$$

โดยกำหนดให้

$$\text{ค่า } M(t_d) = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_m & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$



$$\text{ค่า } C(t_d) = \begin{bmatrix} 2c_v & 0 & -c_v & -c_v & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_v \frac{l^2}{2} & -c_v \frac{l}{2} & c_v \frac{l}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -c_v & -c_v \frac{l}{2} & c_v & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -c_v & c_v \frac{l}{2} & 0 & c_v & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\xi\omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\xi\omega_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2\xi\omega_n \end{bmatrix}$$

$$K(t_d) = \begin{bmatrix} 2k_1 & 0 & -k_1 & -k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_1 \frac{l^2}{2} & -k_1 \frac{l}{2} & k_1 \frac{l}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -k_1 & -k_1 \frac{l}{2} & k_1 + k_2 & 0 & -k_2 \phi(x_1)(V_d) & -k_2 \phi_2(x_1)(V_d) & \dots & -k_2 \phi_n(x_1)(V_d) \\ -k_1 & k_1 \frac{l}{2} & 0 & k_1 + k_2 & -k_2 \phi(x_2)(V_d) & -k_2 \phi_2(x_2)(V_d) & \dots & -k_2 \phi_n(x_2)(V_d) \\ 0 & 0 & -k_2 \phi(x_1)(V_d) & -k_2 \phi(x_2)(V_d) & \omega^2 + k_2 \phi^2(V_d) & k_2 \phi_2(V_d) \phi(V_d) & \dots & k_2 \phi_n(V_d) \phi(V_d) \\ 0 & 0 & -k_2 \phi_2(x_1)(V_d) & -k_2 \phi_2(x_2)(V_d) & k_2 \phi(V_d) \phi_2(V_d) & \omega^2 + k_2 \phi_2^2(V_d) & \dots & k_2 \phi_n(V_d) \phi_2(V_d) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -k_2 \phi_n(x_1)(V_d) & -k_2 \phi_n(x_2)(V_d) & k_2 \phi(V_d) \phi_n(V_d) & k_2 \phi_2(V_d) \phi_n(V_d) & \dots & \omega_n^2 + k_2 \phi_n^2(V_d) \end{bmatrix}$$

ค่าแรงกระทำ $F(t_d)$ ดังสมการ

$$F(t_d) = [0 \quad 0 \quad k_2 h_{d_1}(t_d) \quad k_2 h_{d_2}(t_d) \quad F_1 \quad \dots \quad F_n]^T \quad (81)$$

$$F_i = -k_2 [h_{d_1}(t_d) \phi_i(V t_d) + h_{d_2}(t_d) \phi_i(V t_d - l)]$$

และ ค่า

$$+ [\phi_i(V t_d) + \phi_i(V t_d - l)] \left(\frac{M}{2} + m \right) g$$

จากนั้นทำการจัดรูปสมการการเคลื่อนที่ ของมวลตู้รถไฟ มุมองศาเอียง เพลานหน้า เพลานหลัง โครงสร้างคานช่วงเดียว ตามลำดับดังนี้

สมการการเคลื่อนที่ของมวลตู้รถไฟ M ดังสมการ

$$M \ddot{v}_v + 2c_v \dot{v}_v - c_v \dot{v}_1 - c_v \dot{v}_2 + 2k_1 v_v - k_1 v_1 - k_1 v_2 = 0 \quad (82)$$

สมการการเคลื่อนที่ของมุมองศาเอียง θ ดังสมการ

$$I_m \ddot{\theta} + c_v \frac{l^2}{2} \dot{\theta} - c_v \frac{l}{2} \dot{v}_1 + c_v \frac{l}{2} \dot{v}_2 + k_1 \frac{l^2}{2} \theta - k_1 \frac{l}{2} v_1 + k_1 \frac{l}{2} v_2 = 0 \quad (83)$$

สมการการเคลื่อนที่ของเพลาน้ำ m ดังสมการ

$$\begin{aligned}
 m\ddot{v}_1 - c_v\dot{v}_v + c_v\dot{v}_1 - c_v\dot{\theta}\frac{l}{2} - k_1v_v + k_1v_1 - k_1\theta\frac{l}{2} + k_2v_1 \\
 - k_2h(x_1, t) - \sum_i^n k_2y_i(t)\phi_1(x_1) = 0
 \end{aligned}
 \tag{84}$$

สมการการเคลื่อนที่ของเพลาลัง m ดังสมการ

$$\begin{aligned}
 m\ddot{v}_2 - c_v\dot{v}_v + c_v\dot{v}_2 - c_v\dot{\theta}\frac{l}{2} - k_1v_v + k_1v_2 - k_1\theta\frac{l}{2} + k_2v_2 \\
 - k_2h(x_2, t) - \sum_i^n k_2y_i(t)\phi_1(x_2) = 0
 \end{aligned}
 \tag{85}$$

และ จากสมการการเคลื่อนที่ของคาน ดังสมการ

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \bar{m} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = P_1(x, t) \delta(x - x_1) + P_2(x, t) \delta(x - x_2)
 \tag{86}$$

โดยกำหนดให้

$$\text{ค่า } P_1(x, t) = k_2(v_1 - h(x, t) - v(x, t)) - \left(\frac{M}{2} + m\right)g$$

$$\text{ค่า } P_2(x, t) = k_2(v_2 - h(x, t) - v(x, t)) - \left(\frac{M}{2} + m\right)g$$

$$\text{และ ค่า } v(x, t) = \sum Y_n(t)\phi_n(x)$$

ทำการจัดรูปสมการการเคลื่อนที่ของคานช่วงเดียว ดังสมการ

$$\begin{aligned} \ddot{Y}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{Y}_n + \omega_n^2 Y_n &= \frac{k_2 v_1 \phi_n(x_1)}{\bar{m} \int_D \phi_n^2(x) dx} - \frac{k_2 h(x,t) \phi_n(x_1)}{\bar{m} \int_D \phi_n^2(x) dx} - \sum_i \frac{k_2 \phi_i(x_1) \phi_n(x_1) Y_i(t)}{\bar{m} \int_D \phi_n^2(x) dx} \\ &- \frac{\left(\frac{M}{2} + m\right) g \phi_n(x_1)}{\bar{m} \int_D \phi_n^2(x) dx} + \frac{k_2 v_2 \phi_n(x_2)}{\bar{m} \int_D \phi_n^2(x) dx} - \frac{k_2 h(x,t) \phi_n(x_2)}{\bar{m} \int_D \phi_n^2(x) dx} - \sum_i \frac{k_2 \phi_i(x_2) \phi_n(x_2) Y_i(t)}{\bar{m} \int_D \phi_n^2(x) dx} \\ &- \frac{\left(\frac{M}{2} + m\right) g \phi_n(x_2)}{\bar{m} \int_D \phi_n^2(x) dx} \end{aligned} \quad (87)$$

และจากนั้นทำการแปลงรูปตัวแปร ให้อยู่ในรูปตัวแปรไร้หน่วย

โดยกำหนดให้

ค่า x/L คือ ตัวแปรไร้หน่วยตำแหน่งของช่วงคานที่ศึกษา

ค่า Vt/L คือ ตัวแปรไร้หน่วยช่วงของเวลา

ค่า W/L , h/L คือ ตัวแปรไร้หน่วยความขรุขระของพื้นผิว

ค่า q_0/L^3 คือ ตัวแปรไร้หน่วยความเข้มของไวท์นอยซ์

ค่า Δ_c/L คือ ตัวแปรไร้หน่วยระยะทางสหสัมพันธ์

ค่า ℓ/L คือ ตัวแปรไร้หน่วยระยะห่างระหว่างเพลลา

ค่า $\mu = M/\bar{m}L$ คือ ตัวแปรไร้หน่วยมวลตู้รถไฟ

ค่า $\eta = m/\bar{m}L$ คือ ตัวแปรไร้หน่วยมวลเพลลา

ค่า $f_{k_1} = \sqrt{\frac{k_1/\bar{m}L}{\omega_1^2}}$ คือ ตัวแปรไร้หน่วยระบบกันสะเทือนตู้รถไฟ

ค่า $f_{k_2} = \sqrt{\frac{k_2/\bar{m}L}{\omega_1^2}}$ คือ ตัวแปรไร้หน่วยระบบยึดหยุ่นของเพลลา

ค่า $f_c = \frac{c/\bar{m}L}{\omega_1}$ คือ ตัวแปรไร้หน่วยระบบโช้คอัพรถไฟ

ค่า $f_g = \sqrt{\frac{g/L}{\omega_1^2}}$ คือ ตัวแปรไร้หน่วยแรงโน้มถ่วงโลก

ค่า $f_v = \frac{V/L}{\omega_1}$ คือ ตัวแปรไร้หน่วยของความเร็วยานพาหนะ

และ ค่า $f_i = \omega_i / \omega_1$ คือ ตัวแปรไร้หน่วยความถี่พื้นฐานของคานช่วงเดียว

โดยแบ่งออกเป็น 10 โหมด ดังตาราง 3

ตาราง 3 แสดงค่าตัวแปรไร้หน่วยความถี่พื้นฐานของคานช่วงเดียว จำนวน 10 โหมด

โหมดที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

และ จากสมการ 27 และ 79 – 85 จัดรูปสมการการเคลื่อนที่แบบตัวแปรไร้หน่วย

ดังสมการ 88 - 93

สมการแสดงสเตทฟอร์ม ของตัวกรองไวทช์นอยซ์

$$\begin{aligned} \frac{h_1'(t')}{L} &= -\left(\frac{L}{\Delta_c}\right) \frac{h_1(t')}{L} (hs) + \left(\frac{L}{\Delta_c}\right) W_1(t')(hs) \\ \frac{h_2'(t')}{L} &= -\left(\frac{L}{\Delta_c}\right) \frac{h_2(t')}{L} (hs) + \left(\frac{L}{\Delta_c}\right) W_2(t')(hs) \end{aligned} \quad (88)$$

สมการแสดงสเตทฟอร์ม ของตัวรถไฟ

$$\left(\frac{V_v''}{L}\right) = \frac{1}{\mu_1 f_v^2} \left[\begin{aligned} &-2f_{k_1}^2 \left(\frac{V_v}{L}\right) - 2f_c f_v \left(\frac{V_v'}{L}\right) + f_{k_1}^2 \left(\frac{V_1}{L}\right) + f_c f_v \left(\frac{V_1'}{L}\right) \\ &+ f_{k_2}^2 \left(\frac{V_2}{L}\right) + f_c f_v \left(\frac{V_2'}{L}\right) \end{aligned} \right] \quad (89)$$

สมการแสดงสเตทฟอร์้ม ของมุมมองเสาเยื้อง

$$\theta'' = \frac{12}{\mu_1} \left(\frac{1}{l/L} \right) \left(\frac{1}{f_v^2} \right) \begin{bmatrix} -\frac{f_{k_1}^2}{2} \left(\frac{l}{L} \right) \theta - \frac{f_c}{2} f_v \left(\frac{l}{L} \right) \theta' + \frac{f_{k_1}^2}{2} \left(\frac{V_1}{L} \right) + \frac{f_c}{2} f_v \left(\frac{V_1'}{L} \right) \\ -\frac{f_{k_1}^2}{2} \left(\frac{V_2}{L} \right) - \frac{f_c}{2} f_v \left(\frac{V_2'}{L} \right) \end{bmatrix} \quad (90)$$

สมการแสดงสเตทฟอร์้ม ของระบบเพลาน้ำ

$$\left(\frac{V_1''}{L} \right) = \frac{1}{\mu_2 f_v^2} \begin{bmatrix} f_{k_1}^2 \left(\frac{V_v}{L} \right) + f_c f_v \left(\frac{V_v'}{L} \right) + \frac{f_{k_1}^2}{2} (l/L) \theta + \frac{f_c}{2} f_v (l/L) \theta' \\ -(f_{k_1}^2 + f_{k_2}^2) \left(\frac{V_1}{L} \right) - f_c f_v \left(\frac{V_1'}{L} \right) + f_{k_2}^2 \left(\frac{h_1}{L} \right) \\ + f_{k_2}^2 \sum_i \tilde{\phi}_i(x_1')(d_i(t)) \end{bmatrix} \quad (91)$$

สมการแสดงสเตทฟอร์้ม ของระบบเพลาน้ำ

$$\left(\frac{V_2''}{L} \right) = \frac{1}{\mu_2 f_v^2} \begin{bmatrix} f_{k_1}^2 \left(\frac{V_v}{L} \right) + f_c f_v \left(\frac{V_v'}{L} \right) - \frac{f_{k_1}^2}{2} (l/L) \theta - \frac{f_c}{2} f_v (l/L) \theta' \\ -(f_{k_1}^2 + f_{k_2}^2) \left(\frac{V_2}{L} \right) - f_c f_v \left(\frac{V_2'}{L} \right) + f_{k_2}^2 \left(\frac{h_2}{L} \right) \\ + f_{k_2}^2 \sum_i \tilde{\phi}_i(x_2')(d_i(t)) \end{bmatrix} \quad (92)$$

สมการแสดงสเตทฟอร์ม ของโครงสร้างพื้นฐาน

$$d_n'' = \frac{1}{c_n f_v^2} \left[\begin{array}{l} f_{k_2}^2 \tilde{\phi}_n(x'_1) \frac{V_1}{L} + f_{k_2}^2 \tilde{\phi}_n(x'_2) \frac{V_2}{L} - f_{k_2}^2 \tilde{\phi}_n(x'_1) \frac{h_1}{L} - f_{k_2}^2 \tilde{\phi}_n(x'_2) \frac{h_2}{L} \\ - \sum_{i=1}^N f_{k_2}^2 \tilde{\phi}_n(x'_i) \tilde{\phi}_i(x'_i) d_i - \sum_{i=1}^N f_{k_2}^2 \tilde{\phi}_n(x'_i) \tilde{\phi}_i(x'_i) d_i \\ - \left(\frac{\mu_1}{2} + \mu_2 \right) f_g^2 \tilde{\phi}_n(x'_1) - \left(\frac{\mu_1}{2} + \mu_2 \right) f_g^2 \tilde{\phi}_n(x'_2) \\ - f_n^2 c_n d_n - 2\xi_n f_v f_n c_n d_n' \end{array} \right] \quad (93)$$

เนื่องจากการแก้ปัญหสมการการเคลื่อนที่ อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equation) คือ สมการประกอบไปด้วยอนุพันธ์ของตัวแปรตามเทียบกับตัวแปรอิสระ เพียงหนึ่งตัวแปร หรือ มากกว่าหนึ่งตัวแปร

สำหรับวิธีการหาคำตอบเชิงอนุพันธ์นั้น มีหลายวิธี ได้แก่ วิธีออยเลอร์ (Euler method) วิธีการแปลงลาปลาซ (Laplace transform method) และ วิธีการรุงเงคุดตา (Runge-Kutta method) เป็นต้น งานวิจัยศึกษาวิธีการรุงเงคุดตา เนื่องจากให้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูง

ในกรณีที่ต้องการหาค่า $y(c)$

โดยกำหนดให้ $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ และ $n = \frac{(c - x_0)}{h}$ จัดรูปสมการ

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h \quad (94)$$

โดยกำหนดให้

ค่า $\phi(x_i, y_i, h) = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

$$\text{ค่า } k_3 = f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h)$$

⋮

$$k_n = f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + \dots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h)$$

และ คำนวณค่า p และ q โดยใช้วิธีการกระจายสูตร y_{i+1} ในพจน์ของอนุกรมเทเลอร์ แล้วทำการเปรียบเทียบหาค่า p และ q ที่ต้องการ

การพิจารณาค่า k_n คำนึงถึงอันดับของวิธีการรุงเงคุตตา ยกตัวอย่าง ถ้าใช้ค่า $n=1$ จะเรียกว่า วิธีการรุงเงคุตตา อันดับที่ 1 สำหรับการศึกษาค่าเคลื่อนที่ของยานพาหนะบนโครงสร้างพื้นฐาน ใช้ค่า $n=4,5$ คือ วิธีการรุงเงคุตตา อันดับที่ 4 และ 5

โดยใช้ฟังก์ชัน *ODE45* ในโปรแกรม MATLAB

จากการแก้สมการการเคลื่อนที่ ด้วยโปรแกรม MATLAB สามารถคำนวณค่าระยะโก่งในแนวดิ่งของคาน ดังสมการ

$$V(x,t) = \sum_{i=1}^n Y_i(t) \phi_i(x) \quad (95)$$

โดยกำหนดให้

ค่า $\phi_i(x)$ คือ โหมดการสั่นสะเทือนอิสระภายใต้ช่วงเวลาพิกัดโมดอล $Y_i(t)$

จากสมการ 95 คำนวณค่าความเร่งของคาน โดยการคำนวณค่าอนุพันธ์อันดับสองของช่วงเวลา พิกัดโมดอล $Y_i(t)$ ดังสมการ

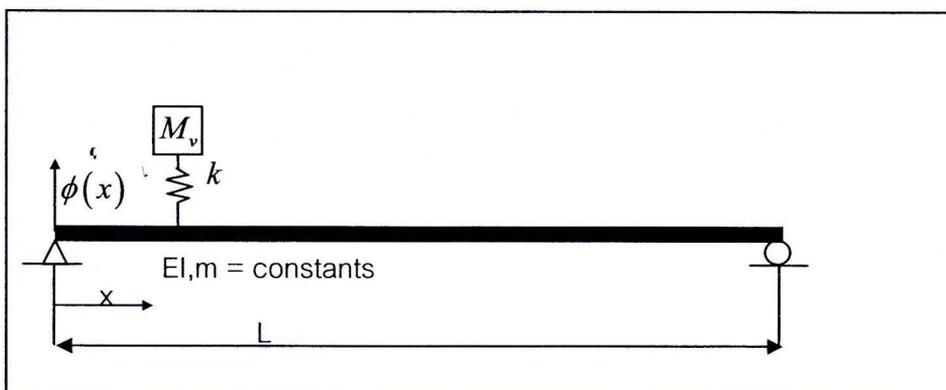
$$\ddot{V}(x,t) = \sum_{i=1}^n \ddot{Y}_i(t) \phi_i(x) \quad (96)$$

คำนวณค่าโมเมนต์ $M(x,t)$ และ ค่าแรงเฉือน $S(x,t)$ ของคาน ดังสมการ

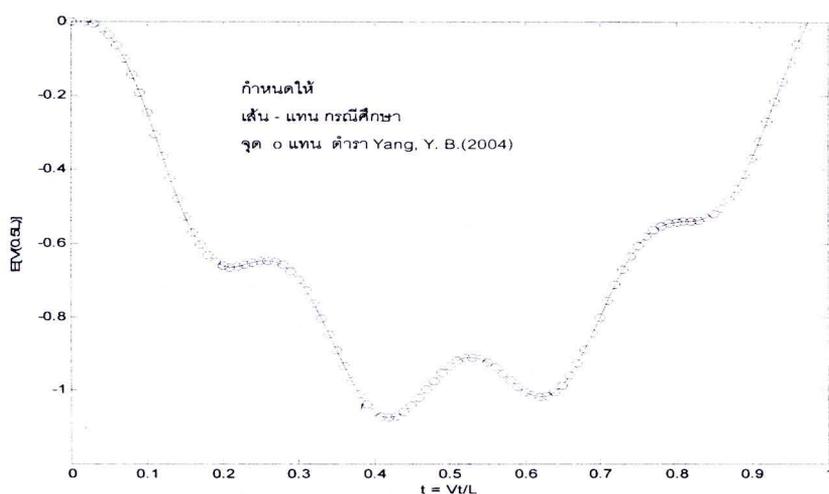
$$M(x,t) = EI \sum_{i=1}^n Y_i(t) \phi_i''(x) \quad (97)$$

$$S(x,t) = EI \sum_{i=1}^n Y_i(t) \phi_i'''(x) \quad (98)$$

ผลตอบสนองที่ได้จากการแก้ปัญหасมการการเคลื่อนที่ด้วยโปรแกรม MATLAB ทำการเปรียบเทียบกับตำราวิชาการเรื่อง Introduction to Structural Dynamic (Biggs, J. M., 1964) และ ตำราวิชาการเรื่อง Vehicle-Bridge Interaction Dynamics (Yang, Y. B., Yau, J. D., & Wu, Y. S., 2004) ในรูปแบบสมการการเคลื่อนที่ของยานพาหนะ ลำดับชั้นความเป็นอิสระหนึ่งแบบสปริงเชิงเส้นบนพื้นผิวคานช่วงเดียว ดังภาพ 44



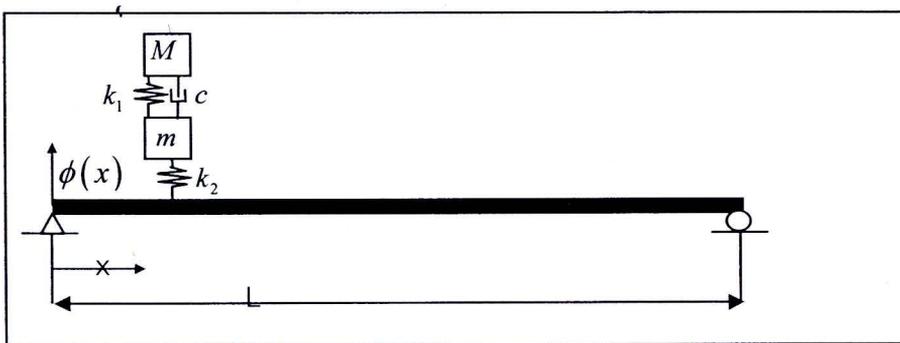
ภาพ 44 แสดงยานพาหนะ ระบบลำดับชั้นความเป็นอิสระหนึ่ง แบบสปริงเชิงเส้นบนพื้นผิวคานช่วงเดียว



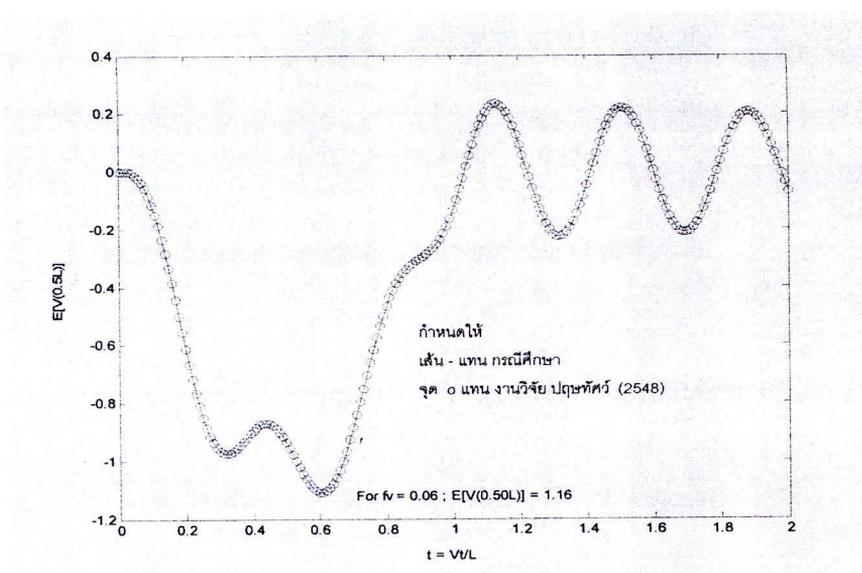
ภาพ 45 แสดงค่าเฉลี่ยของระยะโค้งกึ่งกลางคาน

ผลการคำนวณ ดังภาพ 45 แสดงว่า ค่าระยะโก่งกึ่งกลางคานใกล้เคียงกับตำราของ Biggs, J. M. และ Yang, Y. B., Yau, J. D., & Wu, Y. S. เพียงแต่มีความแตกต่างตรงที่รูปแบบของงานวิจัย จัดลำดับตัวแปรเป็นแบบไร้หน่วย

ดังนั้นทำการเปรียบเทียบกับงานวิจัยของ ปฤษทัตว์ คีตะบันย์ เอกสิทธิ์ ไม้วัฒนา และ สมชาย ชูชีพสกุล เรื่อง ความสำคัญของความขรุขระพื้นผิวต่อยานพาหนะ และ โครงสร้างพื้นฐาน (พ.ศ. 2548) ในรูปแบบตัวแปรไร้หน่วย ของสมการการเคลื่อนที่ของยานพาหนะ ลำดับชั้น ความเป็นอิสระสอง ดังภาพ 46



ภาพ 46 แสดงยานพาหนะ ระบบลำดับชั้นความเป็นอิสระสอง



ภาพ 47 แสดงค่าเฉลี่ยของระยะโก่งกึ่งกลางคาน เมื่อ $f_v = 0.06$

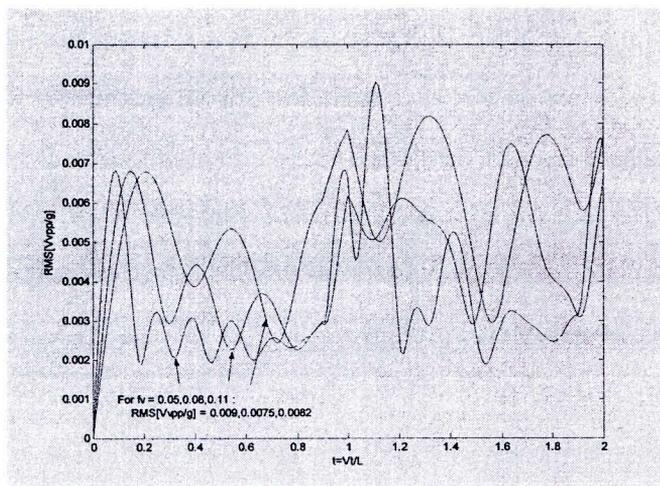
ผลการคำนวณ ดังภาพ 47 แสดงว่า ค่าระยะโก่งกึ่งกลางคานในรูปแบบตัวแปรไร้หน่วยตรงกับงานวิจัยของ ปฤษทัศว์ และ คณะ (2548) ดังนั้น วิธีการหาสมการการเคลื่อนที่ของยานพาหนะบนโครงสร้างพื้นฐาน ด้วยโปรแกรม MATLAB ในรูปแบบตัวแปรไร้หน่วย สามารถนำมาใช้ในการศึกษา เพื่อหาความสัมพันธ์เกี่ยวเนื่องของตัวแปร ด้วยวิธีการพื้นผิวตอบสนองที่จะอธิบายในหัวข้อถัดไป

วิธีการพื้นผิวตอบสนอง (Response Surface Methodology)

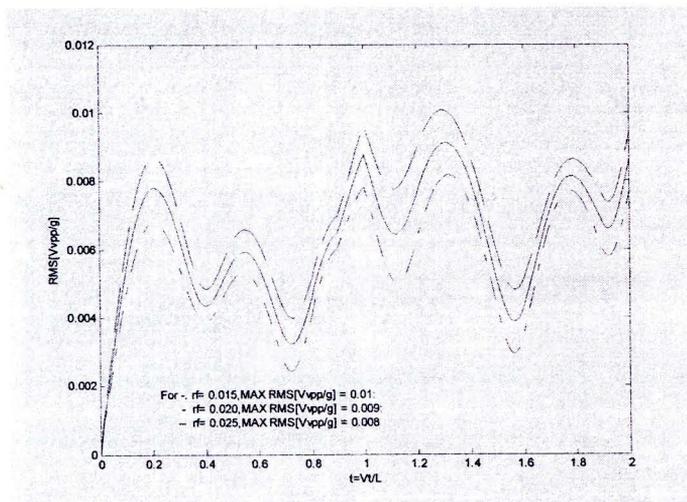
จากการศึกษาการเคลื่อนที่ของยานพาหนะบนโครงสร้างพื้นฐาน แสดงว่า ค่าผลตอบสนองอยู่ในรูปของตัวแปรอิสระ (Independent variable) ที่มีความสัมพันธ์กัน ได้แก่ ตัวแปรความยาวคาน ความเร็วยานพาหนะ ความขรุขระของพื้นผิว ความเค้นของขบวนการไวก์นอยซ์ ระบบกันสะเทือนระบบใช้คอปป์ และ ระบบยืดหยุ่น เป็นต้น และ ส่งผลต่อตัวแปรตาม (Dependent variable) ได้แก่ ผลตอบสนองต่อค่าระยะโก่งของโครงสร้างพื้นฐาน ผลตอบสนองต่อค่าความเร่งของยานพาหนะ เป็นต้น ยกตัวอย่าง กรณีที่ค่าความขรุขระของพื้นผิว คงที่ และ ค่าความเร็วของยานพาหนะเพิ่มขึ้น ส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงค่า RMS ระยะโก่งกึ่งกลางคาน ดังภาพ 48(1) และ ถ้ากรณีค่าความเร็วของยานพาหนะคงที่ และ ค่าความขรุขระของพื้นผิวเพิ่มขึ้น ส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงค่า RMS ระยะโก่งกึ่งกลางคาน ดังภาพ 48(2)

จากการศึกษาผลตอบสนองต่อระยะโก่งกึ่งกลางของโครงสร้างพื้นฐาน กรณีค่าความขรุขระพื้นผิว และ ค่าความเร็วเปลี่ยนแปลง แสดงให้เห็นว่า ค่าตัวแปรอิสระแต่ละตัวแปร มีความสัมพันธ์ต่อการเปลี่ยนแปลงค่าตัวแปรตาม

ดังนั้น การศึกษาความสัมพันธ์กันโดยเก็บรวบรวมข้อมูลทางสถิติ เหมาะสมที่จะนำมาใช้ในการวิเคราะห์พารามิเตอร์เกี่ยวเนื่องด้วยวิธีการพื้นผิวตอบสนอง (Response Surface Methodology)



(1)



(2)

ภาพ 48 แสดงผลตอบสนองต่อค่าระยะโก่งกึ่งกลางของโครงสร้างพื้นฐาน (1) กรณีค่าความ
 ขรุขระพื้นผิวคงที่ และ ความเร็วเปลี่ยนแปลง (2) กรณีค่าความเร็วคงที่
 และ ค่าความขรุขระพื้นผิวเปลี่ยนแปลง

การวิเคราะห์การถดถอย (Regression Analysis) หรือ วิธีการพื้นผิวตอบสนอง (Response Surface Methodology) คือ การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตัวหนึ่ง เรียกว่า ตัวแปรตาม หรือตัวแปรตอบสนอง (Dependent variable or response variable) เขียนแทนด้วย Y และตัวแปรอื่นหนึ่งตัวแปร หรือมากกว่าหนึ่งตัวแปร (Independent variable or predictor variable) เรียกว่า ตัวแปรอิสระ หรือ ตัวแปรต้น เพื่อที่จะพยากรณ์ค่าตัวแปรตาม ที่เป็นค่าตัวแปรสุ่มจากการเปลี่ยนแปลงของค่าตัวแปรอิสระ ที่เป็นค่าคงที่ที่กำหนด (Known or fixed values) โดยในกรณีที่ตัวแปรอิสระหนึ่งตัวแปร มีความสัมพันธ์กับค่าตัวแปรตามหนึ่งตัวแปร แบบเชิงเส้น เรียกว่า การวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย (Simple Linear Regression Models) ดังสมการ

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (99)$$

โดยกำหนดให้

ค่า Y_i คือ ตัวแปรตาม

ค่า X_i คือ ตัวแปรอิสระ

ค่า β_0, β_1 คือ พารามิเตอร์ของตัวแบบ

และ ค่า ε_i คือ ความคลาดเคลื่อน (Error term) ของค่าสังเกตที่ i ซึ่งเป็น ค่าความแตกต่างระหว่างค่าจริงที่ Y และ ค่า Y บนเส้นถดถอย

เมื่อพิจารณาค่า β_1 เป็นค่าความชันของเส้นถดถอย ซึ่งแสดงถึงการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรตาม Y เมื่อตัวแปรอิสระ X เปลี่ยนไป 1 หน่วย และ ค่า β_0 คือ ค่าที่แสดงระยะตัดแกน Y (Y -intercept) เมื่อ $X = 0$ โดยเก็บรวบรวมค่าจากการสังเกต หรือทดลอง ซึ่งการเก็บรวบรวมจะเก็บแบบตัวแปรคู่ (Bivariate) แล้วทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ โดยกำหนดให้ b_0 และ b_1 คือ ตัวประมาณของ β_0 และ β_1 ตามลำดับ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least Square method) และ ทฤษฎีของเกาส์-มาร์คอฟ (Gauss-Markov theorem) กล่าวคือ ตัวประมาณ b_0 และ b_1 ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง และ มีความแปรปรวนต่ำที่สุด และเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของค่าสังเกต Y_i ทำให้ตัวประมาณมีคุณสมบัติเป็น BLUE (Best Linear Unbiased Estimators) จากนั้นทำการสร้างช่วงความเชื่อมั่นที่ 95 % และ ทดสอบสมมติฐานเพื่อทดสอบว่าตัวแปรอิสระ X มีความสัมพันธ์กับตัวแปรตาม Y หรือไม่

ทดสอบสมมติฐาน

$$H_0 : \beta_1 = 0$$

$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$

โดยใช้สถิติทดสอบ $t = \frac{b_1 - \beta_1}{\left(\frac{MSE}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \right)}$

และ ค่า MSE คือ ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสอง

จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $t > t_{1-\frac{\alpha}{2}(n-2)}$ หรือ $t < t_{\frac{\alpha}{2}(n-2)}$

และ ยอมรับ H_0 เมื่อตัวแปรอิสระ X ไม่มีความสัมพันธ์ต่อกันกับตัวแปรตาม Y ในลักษณะเชิงเส้น สำหรับการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับ β_1 นั้นจะใช้ วิธีการสร้างตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวน (Analysis of Variance, ANOVA) ดังตาราง 4

ตาราง 4 ตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวน (Analysis of Variance, ANOVA)

Source Of Variation (S.O.V.)	df	SS	MS	F-ratio
Regression	1	SSR	MSR=SSR/1	$\frac{MSR}{MSE}$
Error	n-2	SSE	MSE=SSE/n-2	
Total	n-1	SST		

โดยกำหนดให้

ค่า df คือ ลำดับชั้นความเป็นอิสระ (Degree of freedom)

ค่า SSR คือ ค่าความผันแปรในตัวแปร Y อันเนื่องมาจากเส้นถดถอย (Sum of squares for regression)

ค่า SSE คือ ค่าความผันแปรที่ไม่สามารถอธิบายได้ด้วยตัวแปรอิสระ X (Sum of squares for error)

ค่า SST คือ ผลรวมของความผันแปรทั้งหมด (Total sum of squares)

ค่า MSR คือ ค่าเฉลี่ยกำลังสองของ SSR หารด้วยลำดับชั้นความเป็นอิสระหนึ่ง

ค่า MSE คือ ค่าเฉลี่ยกำลังสองของ SSE หารด้วยลำดับชั้นความเป็นอิสระ $n-1$

และ ค่า F-ratio คือ สถิติทดสอบเอฟ เป็นอัตราส่วนของค่า MSR ต่อค่า MSE โดยมีค่าเข้าสู่การแจกแจงเอฟ (F-distribution) เมื่อ $\beta_1 = 0$ และ จะเข้าสู่การแจกแจงเอฟไร้ศูนย์กลาง (Non-central F distribution) เมื่อ $F > F_{\alpha, (1, n-2)}$ แสดงว่า $\beta_1 \neq 0$ หรือ อาจกล่าวได้ว่า X กับ Y มีความสัมพันธ์กันในรูปแบบเชิงเส้น

จากการวิเคราะห์การถดถอยที่ได้กล่าวมาแล้วนั้น การจะตัดสินใจว่า สมการถดถอยที่ได้ นั้นเหมาะสม หรือไม่ ค่าการทดสอบสมมติฐานเพียงค่าเดียว อาจจะไม่เพียงพอ ดังนั้น ทำการศึกษาความสัมพันธ์การตัดสินใจ (Coefficient of determination) r^2 ดังสมการ

$$r^2 = \frac{SSR}{SST} \quad (100)$$

โดยกำหนดให้

ค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ (Coefficient of determination) r^2 คือ ระดับความสามารถของตัวแปรอิสระ X ที่ใช้อธิบายความผันแปรที่เกิดขึ้นในตัวแปรตาม Y

โดยค่า r^2 อยู่ในรูปของเปอร์เซ็นต์ และ เมื่อทำการถอดรากที่สองของ ค่า r^2 จะได้ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (Coefficient of correlation) r ดังสมการ

$$r = \pm\sqrt{r^2} \quad (101)$$

โดยกำหนดให้

ค่า r อยู่ระหว่าง $-1 \leq r \leq 1$ แสดงว่า ถ้าค่า r เป็นลบ ตัวแปรอิสระ X และ ตัวแปรตาม Y มีความสัมพันธ์กันในทิศทางตรงข้าม หรือมีความสัมพันธ์กันในเชิงลบ และ ถ้าค่า r เป็นบวก แสดงว่า ตัวแปรอิสระ X และ ตัวแปรตาม Y มีความสัมพันธ์กันในทิศทางเดียวกัน หรือมีความสัมพันธ์กันในเชิงบวก

แม้ว่าค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ r จะให้ค่าความสัมพันธ์กันสูง ทั้งทางบวก และ ทางลบ ซึ่งอาจจะเกิดจากกลุ่มของประชากรเพียงบางกลุ่ม ดังนั้น เมื่อทำการพิจารณาตัวแปรทั้งระบบ จะทำให้ค่าตัวแปรทั้งสองไม่มีความสัมพันธ์กันเลยก็เป็นได้ ด้วยเหตุนี้ ทำการศึกษา ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ซ้ำอีกครั้ง โดยอาศัยแนวคิดเกี่ยวกับการอนุมานเชิงสถิติ คือ การสร้างความเชื่อมั่น และ ทดสอบสมมติฐานในรูปของค่า ρ ดังนี้

ทดสอบสมมติฐาน

$$H_0 : \rho = 0$$

$$H_1 : \rho \neq 0$$

โดยใช้สถิติทดสอบ $t = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}}$

จะยอมรับ ρ แสดงว่า กลุ่มตัวอย่างมีความสัมพันธ์กันสูงเพียงบางกลุ่มเท่านั้น

และ ปฏิเสธ ρ เมื่อ $t > t_{1-\frac{\alpha}{2}(n-2)}$ หรือ $t < t_{\frac{\alpha}{2}(n-2)}$

ลักษณะความสัมพันธ์กันทางสถิติ ถ้าค่า $\rho > 0$ แสดงว่า โค้งการแจกแจงมีลักษณะเบ้ซ้าย

และ ถ้า $\rho < 0$ แสดงว่า โค้งการแจกแจงมีลักษณะเบ้ขวา

- ยกตัวอย่างการวิเคราะห์สมการถดถอยอย่างง่าย จากตัวแปรอิสระ คือ ตัวแปรไร้หน่วยระยะทาง สหสัมพันธ์ $\frac{\Delta_c}{L}$ และ ตัวแปรตาม คือ ค่า RMS ระยะโค้งกึ่งกลางสะพาน $RMS[V(0.50L)]$ ดังตาราง 5

ตาราง 5 ความสัมพันธ์ของค่า RMS ระยะโค้งกึ่งกลางสะพาน และ ตัวแปรไร้หน่วย

ระยะทางสหสัมพันธ์ $\frac{\Delta_c}{L}$ จำนวนตัวอย่างทดสอบ 10 ครั้ง

$RMS[V(0.50L)]$	$\frac{\Delta_c}{L}$
1.5934	5.00
1.5937	4.17
1.5940	3.57
1.5944	3.13
1.5947	2.78
1.5951	2.50
1.5955	2.27
1.5958	2.08
1.5962	1.92
1.5966	1.79

โดยกำหนดให้

ค่า $q_0/L^3 = 5.63 \times 10^{-8}$, $\ell/L = 0.90$, $\mu = 0.083$, $\eta = 0.014$,

$f_{k_1} = 0.03$, $f_{k_2} = 0.11$, $f_c = 0.003$, $f_g = 0.016$ และ $f_v = 0.05$

และ ทำการสร้างสมการถดถอย โดยใช้โปรแกรม MATLAB ดังสมการ

$$RMS[V(0.50L)] = 1.5981 - 0.0010612 \left(\frac{\Delta_c}{L} \right) \quad (102)$$

และ ทดสอบสมมติฐาน โดยใช้ตารางวิเคราะห์ความแปรปรวน ดังตาราง 6

ตาราง 6 ตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวน (Analysis of Variance, ANOVA)

Source of variation (S.O.V.)	df	SS	MS	F-ratio
Regression	1	1.2816e-005	1.2816e-005	71.82
Error	8	1.4275e-006	1.7844e-007	
Total	9	1.4244e-005		

ทดสอบสมมติฐาน

$$H_0 : \beta_1 = 0$$

$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$

เนื่องจาก $F\text{-ratio} > F_{0.05(1,8)}$ ดังนั้น ปฏิเสธ H_0 นั่นคือที่ระดับนัยสำคัญ 5% กล่าวได้ว่า $\beta_1 \neq 0$ หรือ ตัวแปรไร้หน่วยระยะทางสหสัมพันธ์ $\frac{\Delta_c}{L}$ มีความสัมพันธ์ในรูปแบบเชิงเส้นกับ ผลตอบสนองต่อค่า RMS ระยะโก่งกึ่งกลางสะพาน

ค่า $r^2 \approx 0.88864$ อธิบายได้ว่า ตัวแปรไร้หน่วยระยะทางสหสัมพันธ์ $\frac{\Delta_c}{L}$ มีความผันแปรที่เกิดขึ้นกับตัวแปรตาม $RMS[V(0.50L)]$ เท่ากับ 88.864 % และ เนื่องจากค่าความชันของสมการถดถอยเป็นลบ ดังนั้น $r \approx -0.94267$ อธิบายได้ว่า ระดับความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระ $\frac{\Delta_c}{L}$ และ ตัวแปรตาม $RMS[V(0.50L)]$ มีค่าสูง และ ตัวแปรทั้งสองมีความสัมพันธ์เชิงลบ

ทดสอบสมมติฐานความสัมพันธ์ในรูปของ ρ

$$H_0 : \rho = 0$$

$$H_1 : \rho \neq 0$$

ที่เขตวิกฤต คือ $t_{0.975(8)} = 2.306$ หรือ $t_{0.025(8)} = -2.306$

ค่า $t = -7.989$ อธิบายได้ว่า เนื่องจากค่า t ที่คำนวณได้อยู่ในอาณาเขตวิกฤต ดังนั้น
ปฏิเสธ H_0 นั่นคือ ตัวแปรไร้หน่วยระยะทางสหสัมพันธ์ $\frac{\Delta_c}{L}$ มีความสัมพันธ์กับผลตอบสนองต่อ
ค่า RMS ระยะโค้งกึ่งกลางสะพาน

สรุปได้ว่า ถ้าค่าความขรุขระเพิ่มขึ้น r_f ส่งผลทำให้ค่า $RMS[V(0.50L)]$ เพิ่มขึ้นเช่นเดียวกัน
ในรูปแบบของสมการถดถอย

จากการศึกษาการเคลื่อนที่ของยานพาหนะบนโครงสร้างพื้นฐาน แสดงว่า มีตัวแปรอิสระ
มากกว่า 1 ตัวแปร ได้แก่ ตัวแปรความยาวคาน ตัวแปรความเร็วยานพาหนะ ตัวแปรความเค้น
ของขบวนการไวก์นอยซ์ ตัวแปรระบบกันสะเทือน ตัวแปรระบบโช้คอัพ และ ตัวแปรระบบยึดหยุ่น
เป็นต้น ซึ่งตัวแปรดังกล่าวอาจมีความสำคัญต่อค่าตัวแปรตาม คือ ค่าผลตอบสนองต่อระยะโค้ง
กึ่งกลางของโครงสร้างพื้นฐาน ดังนั้นวิธีการวิเคราะห์สมการถดถอยอย่างง่าย ไม่เพียงพอ
ในการแก้ปัญหาดังกล่าว และ วิธีการถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ (Multiple linear regression model)
เป็นวิธีการที่เหมาะสมในการแก้ปัญหาในกรณีที่มี ตัวแปรอิสระมากกว่า 1 ตัวแปร ดังสมการ

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i \quad (103)$$

โดยกำหนดให้

ค่า $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ คือ พารามิเตอร์ของตัวแบบที่ทำการศึกษา

และ ค่า $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ik}$ คือ ค่าสังเกตของตัวแปรอิสระ โดยที่ $i = 1, 2, \dots, n$

ยกตัวอย่าง การวิเคราะห์สมการถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ จากตัวแปรอิสระ 3 ตัวแปร คือ ตัวแปรไร้หน่วยระยะห่างระหว่างเพลลา (ℓ/L) ตัวแปรไร้หน่วยระยะทางสหสัมพันธ์ (Δ_c/L) และ ตัวแปรไร้หน่วยความเข้มของไวท์นอยซ์ (q_0/L^3) ที่ส่งผลต่อตัวแปรตาม ค่า RMS ระยะโค้งกึ่งกลางสะพาน $RMS[V(0.50L)]$ ดังตาราง 7

ตาราง 7 ความสัมพันธ์ของค่า RMS ระยะโค้งกึ่งกลางสะพาน ตัวแปรไร้หน่วยระยะห่างระหว่างเพลลา (ℓ/L) ตัวแปรไร้หน่วยระยะทางสหสัมพันธ์ (Δ_c/L) และ ตัวแปรไร้หน่วยความเข้มของไวท์นอยซ์ (q_0/L^3) จำนวนตัวอย่างทดสอบ 27 ครั้ง

$RMS[V(0.50L)]$	ℓ/L	Δ_c/L	q_0/L^3
1.16230	0.90	3.33335	5.63E-08
1.16300	0.90	3.33335	6.25E-08
1.16370	0.90	3.33335	6.88E-08
1.16430	0.90	2.50000	5.63E-08
1.16520	0.90	2.50000	6.25E-08
1.16610	0.90	2.50000	6.88E-08
1.16630	0.90	2.00000	5.63E-08
1.16750	0.90	2.00000	6.25E-08
1.16860	0.90	2.00000	6.88E-08
1.20340	0.72	2.66668	2.88E-08
1.20400	0.72	2.66668	3.20E-08
1.20460	0.72	2.66668	3.52E-08
1.20540	0.72	2.00000	2.88E-08
1.20620	0.72	2.00000	3.20E-08
1.20700	0.72	2.00000	3.52E-08
1.20740	0.72	1.60000	2.88E-08
1.20850	0.72	1.60000	3.20E-08

$RMS[V(0.50L)]$	ℓ/L	Δ_c/L	q_0/L^3
1.20950	0.72	1.60000	3.52E-08
1.12840	0.60	2.22223	1.67E-08
1.12870	0.60	2.22223	1.85E-08
1.12900	0.60	2.22223	2.04E-08
1.12980	0.60	1.66667	1.67E-08
1.13020	0.60	1.66667	1.85E-08
1.13070	0.60	1.66667	2.04E-08
1.13130	0.60	1.33333	1.67E-08
1.13200	0.60	1.33333	1.85E-08
1.13270	0.60	1.33333	2.04E-08

โดยกำหนดให้

ค่า $\mu = 0.056 - 0.083$, $\eta = 0.009 - 0.014$, $f_{k_1} = 0.03 - 0.08$,

$f_{k_2} = 0.09 - 0.24$, $f_c = 0.002 - 0.032$, $f_g = 0.013 - 0.016$ และ $f_v = 0.03 - 0.11$

และ ทำการสร้างสมการถดถอย โดยใช้โปรแกรม MATLAB ดังสมการ

$$RMS[V(0.50L)] = 0.84871 + 0.61909(\ell/L) - 0.0036011(\Delta_c/L) \dots \quad (104)$$

$$- 3.4984e+006(q_0/L^3)$$

และ ทดสอบสมมติฐาน โดยใช้ตารางวิเคราะห์ความแปรปรวน ดังตาราง 8

ตาราง 8 ตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวน (Analysis of Variance, ANOVA)

Source Of Variation (S.O.V.)	df	SS	MS	F-ratio
Regression	3	0.0084489	0.0028163	3.6752
Error	23	0.01762513	0.00076631	
Total	26	0.02607403		

ทดสอบสมมติฐาน

$$H_0 : \beta_k = 0$$

$$H_1 : \beta_k \neq 0$$

เนื่องจาก $F\text{-ratio} \geq 2.99 (F_{0.05,(3,25)})$ ดังนั้น ปฏิเสธ H_0 นั่นคือที่ระดับนัยสำคัญ 5%

กล่าวได้ว่า $\beta_k \neq 0$ หรือ ตัวแปรไร้หน่วยระยะห่างระหว่างเพลลา (ℓ/L) ตัวแปรไร้หน่วยระยะทาง
สหสัมพันธ์ (Δ_c/L) และ ตัวแปรไร้หน่วยความเข้มของไวท์นอยซ์ (q_0/L^3)

มีความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงกับค่าผลตอบสนองต่อค่าระยะโก่งกึ่งกลางสะพาน $RMS[V(0.50L)]$

และ เนื่องจากค่า $r^2 = 0.324$ แสดงว่า ตัวแปรอิสระ สามารถอธิบายความผันแปรที่เกิดขึ้นกับ
ตัวแปรตาม เท่ากับ 32.4 % ดังนั้นการวิเคราะห์สมการถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ อาจจะไม่เพียงพอ

ในการพยากรณ์ตัวแปรตามได้ หรือสมการถดถอยอยู่ในรูปไม่เป็นเชิงเส้น และ วิธีการที่เหมาะสม

ในการแปลงฟังก์ชันที่ไม่เป็นเชิงเส้นให้มีลักษณะเชิงเส้น (Intrinsically or transformably linear)

ได้แก่ ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล (Exponential function) ฟังก์ชันกำลัง (Power function) และ

ฟังก์ชันโพลิโนเมียล (Polynomial function) โดยขึ้นอยู่กับตัวแปรอิสระที่ศึกษา สำหรับตัวแปรอิสระ

ที่มีความสัมพันธ์กับตัวแปรตามในรูปแบบเส้นโค้งนั้น ฟังก์ชันโพลิโนเมียล มีความเหมาะสม

ในการใช้เป็นตัวแบบในการวิเคราะห์การถดถอย ดังสมการ

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 \dots + \beta_k X^k + \varepsilon \quad (105)$$

โดยกำหนดให้

ค่า $k = 1$ แทนค่า ความสัมพันธ์เชิงเส้นตรง

ค่า $k = 2$ แทนค่า ความสัมพันธ์เชิงเส้นโค้งหนึ่งจุดกลับ หรือ เรียกว่า กำลังสอง (Quadratic)

และ ค่า $k = 3$ แทนค่า ความสัมพันธ์เชิงเส้นโค้งสองจุดกลับ หรือ เรียกว่า กำลังสาม (Cubic)

การศึกษารูปแบบฟังก์ชันโพลีโนเมียลนั้น พิจารณาถึงความเหมาะสมของลักษณะความสัมพันธ์ของตัวแปรอิสระ และ ตัวแปรตาม ในแผนภาพการกระจาย โดยลำดับที่เหมาะสมที่สุด ต้องเป็นลำดับที่ต่ำสุด ที่สามารถอธิบายลักษณะความสัมพันธ์ของตัวแปรอิสระ และ ตัวแปรตาม ได้ดีที่สุดใน การเลือกลำดับที่เหมาะสมจะพิจารณาจากค่า R^2 และการทดสอบสมมติฐาน ดังตาราง 9

ตาราง 9 แสดงสมมติฐาน ตัวทดสอบสถิติ ช่วงวิกฤต และ สมประสิทธิ์การตัดสินใจ สำหรับรูปแบบฟังก์ชันโพลีโนเมียลลำดับที่ 1 ถึง 3

ลำดับที่	สมมติฐาน	F-ratio	ช่วงวิกฤต	r^2
1	$H_0 : \beta_k = 0$ $H_1 : \beta_k \neq 0$	$\frac{MSR(x_i)}{MSE(x_i)}$	$F \geq F_{\alpha, (i, n-2)}$	$\frac{SSR(x_i)}{SST}$
2	$H_0 : \beta_k = 0$ $H_1 : \beta_k \neq 0$	$\frac{MSR(x_i, x_i^2)}{MSE(x_i, x_i^2)}$	$F \geq F_{\alpha, (i, n-3)}$	$\frac{SSR(x_i, x_i^2)}{SST}$
3	$H_0 : \beta_k = 0$ $H_1 : \beta_k \neq 0$	$\frac{MSR(x_i, x_i^2, x_i^3)}{MSE(x_i, x_i^2, x_i^3)}$	$F \geq F_{\alpha, (i, n-4)}$	$\frac{SSR(x_i, x_i^2, x_i^3)}{SST}$

จากตัวอย่าง การวิเคราะห์สมการถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ ของตัวแปรอิสระ 3 ตัวแปร คือ ตัวแปรไร้หน่วยระยะห่างระหว่างเพลลา (ℓ/L) ตัวแปรไร้หน่วยระยะทางสหสัมพันธ์ (Δ_c/L) และ ตัวแปรไร้หน่วยความเข้มของไวท์นอยส์ (q_0/L^3) ที่ส่งผลต่อตัวแปรตาม ค่าผลตอบสนองต่อค่าระยะโก่งกึ่งกลางสะพาน $RMS[V(0.50L)]$ นั้น แสดงผลดังตาราง 10

ตาราง 10 แสดงสมมติฐาน ตัวทดสอบสถิติ ช่วงวิกฤต สัมประสิทธิ์การตัดสินใจ และ p-value สำหรับรูปแบบฟังก์ชันโพลีโนเมียลลำดับที่ 1 ถึง 3 ของตัวแปรอิสระ (ℓ/L) (Δ_c/L) และ (q_0/L^3) ที่ส่งผลต่อตัวแปรตาม $RMS[V(0.50L)]$ จำนวนตัวอย่างทดสอบ 27 ครั้ง

ลำดับที่	สมมติฐาน	F-ratio	ช่วงวิกฤต	r^2	p-value
1	$H_0 : \beta_k = 0$ $H_1 : \beta_k \neq 0$	3.6752	$F_{0.05,(3,25)} = 2.99$	0.32404	0.02683
2	$H_0 : \beta_k = 0$ $H_1 : \beta_k \neq 0$	4.6578e+004	$F_{0.05,(3,24)} = 3.01$	0.99996	0
3	$H_0 : \beta_k = 0$ $H_1 : \beta_k \neq 0$	11,635	$F_{0.05,(3,23)} = 3.03$	1.0	0.026075

ทดสอบสมมติฐาน

$$H_0 : \beta_k = 0$$

$$H_1 : \beta_k \neq 0$$



รูปแบบฟังก์ชันโพลีโนเมียล ลำดับที่ 1 ทดสอบ $H_0 : \beta_k = 0, H_1 : \beta_k \neq 0$ ค่า $F \geq 2.99$ และ ค่า p-value=0.026 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 จะปฏิเสธ H_0 แสดงว่า รูปแบบฟังก์ชันโพลีโนเมียล ลำดับที่ 1 มีความเหมาะสม และ รูปแบบฟังก์ชันโพลีโนเมียลลำดับที่ 2 ทดสอบ $H_0 : \beta_k = 0, H_1 : \beta_k \neq 0$ ค่า $F \geq 3.01$ และ ค่า p-value=0.00 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 จะปฏิเสธ H_0 แสดงว่า รูปแบบฟังก์ชันโพลีโนเมียลลำดับที่ 2 มีความเหมาะสม

และ เมื่อทำการเปรียบเทียบค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ r^2 รูปแบบโพลีโนเมียลลำดับที่ 1 ต่ำกว่า
ค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ r^2 รูปแบบโพลีโนเมียลลำดับที่ 2 มาก แต่ค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ
ระหว่างรูปแบบโพลีโนเมียลลำดับที่ 2 และ รูปแบบโพลีโนเมียลลำดับที่ 3 มีค่าใกล้เคียงกัน
ดังนั้น การวิเคราะห์รูปแบบโพลีโนเมียลลำดับที่ 2 เหมาะสม สำหรับความสัมพันธ์ของ
ตัวแปรอิสระ 3 ตัวแปร คือ ตัวแปรไร้หน่วยระยะห่างระหว่างเพลลา (l/L)

ตัวแปรไร้หน่วยระยะทางสหสัมพันธ์ (Δ_c/L) และ ตัวแปรไร้หน่วยความเข้มของไวท์นอยซ์
(q_0/L^3) ที่ส่งผลต่อตัวแปรตาม ค่าผลตอบสนองต่อค่าระยะโก่งกึ่งกลางสะพาน

$$RMS[V(0.50L)]$$

และ ทำการจัดรูปสมการถดถอยโพลีโนเมียลลำดับที่ 2 ดังสมการ

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_1^2 + \beta_5 X_1 X_2 + \beta_6 X_1 X_3 + \beta_7 X_2^2 \dots \quad (106)$$

$$+ \beta_8 X_2 X_3 + \beta_9 X_3^2$$

กำหนดให้

ค่า X_1 แทนค่า ตัวแปรไร้หน่วยระยะห่างระหว่างเพลลา (l/L)

ค่า X_2 แทนค่า ตัวแปรไร้หน่วยระยะทางสหสัมพันธ์ (Δ_c/L)

ค่า X_3 แทนค่า ตัวแปรไร้หน่วยความเข้มของไวท์นอยซ์ (q_0/L^3)

และ ค่า $\beta_0 - \beta_9$ แทนค่า พารามิเตอร์ของตัวแบบ ดังตาราง 11

ตาราง 11 แสดงพารามิเตอร์ของตัวแบบ สมการถดถอยโพลีโนเมียลลำดับที่ 2 ของความสัมพันธ์ของตัวแปรอิสระ 3 ตัวแปร (ℓ/L) (Δ_c/L) และ (q_0/L^3) ที่ส่งผลต่อ $RMS[V(0.50L)]$

พารามิเตอร์ของตัวแบบ	$RMS[V(0.50L)]$
β_0	-0.48545
β_1	4.442
β_2	-0.0073417
β_3	2.3303e+005
β_4	-2.8995
β_5	-0.0042851
β_6	3.0255e+005
β_7	0.0018003
β_8	-30218
β_9	-2.2277e+012

สรุปว่า ตัวแปรไร้หน่วยระยะห่างระหว่างเพลลา (ℓ/L) ตัวแปรไร้หน่วยระยะทางสหสัมพันธ์ (Δ_c/L) และ ตัวแปรไร้หน่วยความเข้มของไวท์นอยซ์ (q_0/L^3) มีความสัมพันธ์ต่อตัวแปรตามค่าผลตอบสนอง RMS ค่าระยะโก่งกึ่งกลางสะพาน $RMS[V(0.50L)]$ ในรูปแบบสมการถดถอยโพลีโนเมียลลำดับที่ 2

ดังนั้น สมการถดถอยเป็นวิธีการทางสถิติที่เหมาะสมในการวิเคราะห์ ความสัมพันธ์ของตัวแปรเกี่ยวเนื่อง ในระบบการเคลื่อนที่ของยานพาหนะบนโครงสร้างพื้นฐานได้