

การตรวจเอกสาร

ฐานรากตื้น

คำจำกัดความ

ฐานรากตื้นเป็นฐานรากรูปแบบหนึ่งที่มีการนำไปใช้งานทางด้านวิศวกรรมปฐพี ฐานรากตื้นมีลักษณะเป็นฐานรากแผ่ (Spread Footing) ทำหน้าที่ถ่ายน้ำหนักของโครงสร้างลงสู่ชั้นดินได้โดยตรง โดยดินจะทำหน้าที่รับน้ำหนักที่ส่งถ่ายลงมาอีกทีหนึ่ง ฐานรากตื้นมีหลายประเภทตามลักษณะของโครงสร้างและการใช้งาน เช่น ฐานรากเดี่ยว ฐานรากยาวต่อเนื่อง ฐานรากแผ่ เป็นต้น โดยทั่วไปฐานรากตื้นมักจะสร้างบนชั้นดินที่มีความแข็งแรงสูงหรือมีกำลังรับแรงต้านทานของดิน ฐานรากสูง ชั๊ และ กาซุโต (2526) กล่าวว่า โดยปกติจะวางฐานรากตื้นบนชั้นดินดานหรือชั้นกรวด ถ้าวางอยู่บนชั้นดินปนทรายก็ควรมีค่า N มากกว่า 30 หรือถ้าเป็นดินเหนียวก็ควรมีค่า N มากกว่า 20

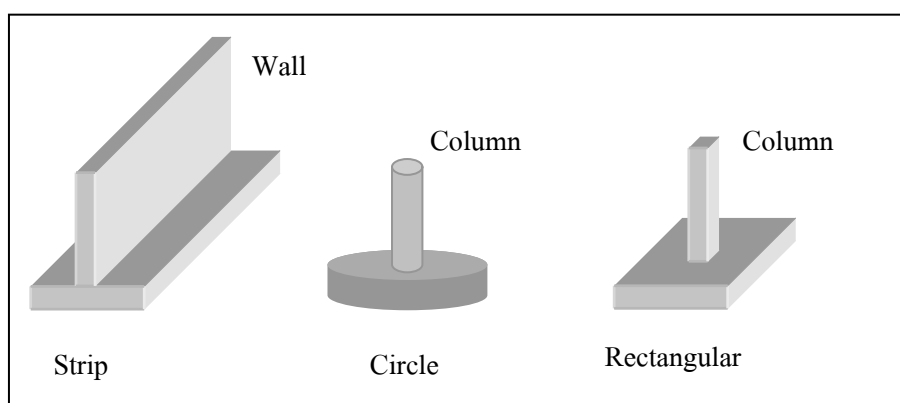
Das (1999) กล่าวถึงสิ่งสำคัญที่ต้องพิจารณาในการออกแบบฐานรากตื้น 2 ข้อ คือ ดินใต้ฐานรากต้องสามารถรับน้ำหนักของโครงสร้างได้อย่างปลอดภัยคือต้องไม่เกิดระนาบการวิบัติเนื่องจากแรงเฉือนขึ้น และการทรุดตัวของฐานรากจะต้องอยู่ในค่าที่ยอมรับได้ โดยการทรุดตัวที่เกิดขึ้นเนื่องจากหน่วยแรงที่ฐานรากกระจายลงสู่มวลดินจะต้องไม่มากจนก่อให้เกิดอันตรายต่อโครงสร้างด้านบน เนื่องจากโครงสร้างอาคารนั้นมีความยืดหยุ่นตัวน้อย การทรุดตัวที่มากหรือการทรุดตัวที่แตกต่างกันมากเกินไปของฐานรากอาจทำให้โครงสร้างอาคารวิบัติได้

ชนิดของฐานรากตื้น (Foundation Types)

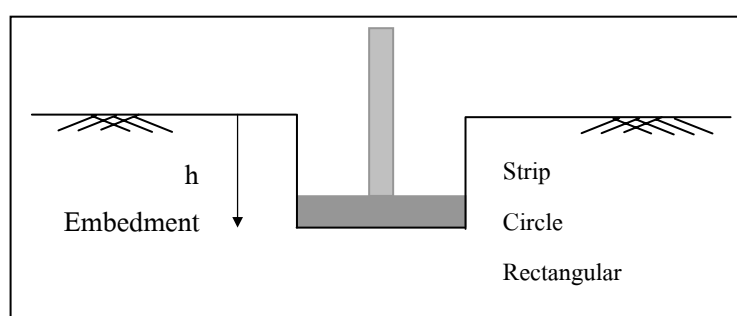
ฐานรากตื้นสามารถแบ่งเป็นกลุ่มย่อยได้ออกเป็น 2 กลุ่ม ดังนี้

ก. ฐานรากบนผิวดิน (Surface Foundations)

ฐานรากบนผิวดินเป็นฐานรากที่วางอยู่บนผิวดินโดยตรงดังแสดงในภาพที่ 1a โดยฐานรากกลุ่มนี้มีหลายรูปร่างและขนาดแตกต่างกันไปขึ้นอยู่กับวิธีการออกแบบ เช่น ฐานรากวงกลม ฐานรากสี่เหลี่ยม ฐานรากแบบ Strip เป็นต้น



(a) ฐานรากบนผิวดิน



(b) ฐานรากระดับดิน

ภาพที่ 1 ชนิดของฐานรากดิน

ที่มา: David and Lidiya (1999)

ข. ฐานรากระดับดิน (Shallow Foundations)

ฐานรากระดับดินเป็นฐานรากที่คล้ายกันกับฐานรากที่วางบนผิวดิน แตกต่างกันตรงที่ ฐานรากระดับดินจะวางอยู่ต่ำกว่าระดับผิวดินลงมา ดังภาพที่ 1b

Terzaghi (1967) กล่าวว่า ฐานรากดินคือฐานรากที่มีความกว้างของฐานราก (B) เท่ากับ หรือมากกว่าความลึก D_f ซึ่งเป็นค่าผลต่างระหว่างระยะจากผิวดินถึงระดับฐานของฐานราก โดยหาก ฐานรากดังกล่าวสอดคล้องกับคำจำกัดความข้างต้น จะไม่พิจารณาแรงต้านทานเนื่องจากแรงเสียดทานของ

ดินที่อยู่เหนือระดับฐานของฐานรากได้ หรือเราสามารถแทนดินที่อยู่เหนือระดับฐานของฐานรากด้วย น้ำหนัก $q = D_f \gamma$ ต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ โดยถือว่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นนั้นน้อยมากและให้ค่าอยู่ในด้านที่ปลอดภัย ในทางกลับกันหากค่า D_f มีค่ามากกว่าความกว้างของฐานราก จะถือว่าเป็นฐานรากระดับลึก (Deep Foundation) จึงมีความจำเป็นที่ต้องพิจารณาส่วนของหน่วยแรงเฉือนที่เกิดขึ้นในดินที่อยู่เหนือระดับฐานของฐานรากด้วย

ดังนั้น สามารถที่จะสรุปได้ว่า ฐานรากตื้นคือฐานรากที่วางอยู่บนผิวดินโดยตรงหรือวางต่ำจากระดับผิวดิน โดยความลึกของฐานราก D_f ควรที่จะมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับความกว้างของฐานราก สามารถเขียนเป็นสมการได้ว่า $D_f / B \leq 1$

ความเค้นสัมผัสระหว่างผิวดินกับฐานรากโครงสร้าง (Contact Stress between the Footing and the Soil)

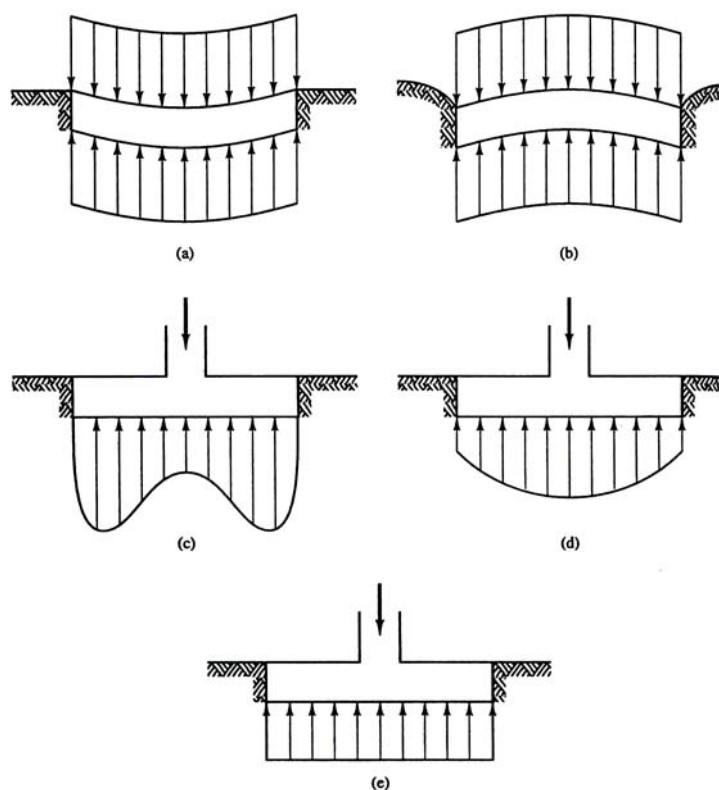
ความเค้นสัมผัส (Contact Stress) มีความหมายว่าเป็นแรงดันปฏิกิริยาจากดินที่กระทำต่อฐานราก ณ บริเวณผิวสัมผัสระหว่างฐานรากกับดินเพื่อต้านน้ำหนักที่ฐานรากถ่ายลงสู่ผิวดิน หรืออาจกล่าวได้ว่าเป็นหน่วยแรงที่เกิดขึ้นบริเวณผิวสัมผัสระหว่างฐานรากกับดิน ซึ่งอาจเรียกว่า Interface Stresses

(Schultze, 1961 ; Dempsey and Li, 1989) พบว่า หากทำการอินทิเกรตแรงดันดินที่กระทำต่อพื้นที่ใต้ฐานรากทั้งหมดจะมีค่าเท่ากับแรงที่ฐานรากกระทำต่อดินนั้น และเมื่อพิจารณาทางทฤษฎีและการตรวจวัดในห้องทดลองพบว่ารูปแบบของแรงดันดินนั้นขึ้นอยู่กับปัจจัยต่างๆดังต่อไปนี้

- ลักษณะแนวกระทำของน้ำหนัก เช่น น้ำหนักที่กระทำมีการเอียงศูนย์หรือไม่เอียงศูนย์
- โมเมนต์ที่กระทำต่อฐานราก
- ค่าความแข็งแกร่งของฐานราก (Structure Rigidity of the Footing)
- คุณสมบัติทางด้านวิศวกรรมของดินฐานราก
- ค่าความขรุขระระหว่างผิวสัมผัสระหว่างฐานรากและดินฐานราก(Roughness of the

Bottom of the Footing)

Coduto (2001) กล่าวว่าหากพิจารณาลักษณะการกระจายของแรงดันดินใต้ฐานราก ในฐานรากแบบ Perfectly Flexible จะมีการเอนตัวเมื่อมีการรับน้ำหนัก ความเค้นหรือแรงดันดินที่กระทำกับฐานรากจะมีลักษณะแผ่เท่ากันสม่ำเสมอตลอด ดังแสดงในภาพที่ 2a และ ภาพที่ 2b ส่วนฐานรากแบบ Perfectly Rigid จะไม่มีการเอนตัวเลยการทรุดตัวที่เกิดขึ้นจะเท่ากันตลอดฐานราก แรงดันดินที่กระทำต่อฐานรากก็จะไม่แผ่เท่ากันตลอดฐานราก โดยจะมีรูปร่างที่แตกต่างออกไป ในดินเหนียวค่าแรงดันดินที่ขอบของฐานรากจะมีค่าสูงที่สุดแล้วเริ่มลดลงจนน้อยที่สุดที่กึ่งกลางฐานราก ส่วนในดินทรายค่าแรงดันที่กึ่งกลางของฐานรากจะมีค่ามากที่สุดแล้วเริ่มลดลงเมื่อถึงขอบฐานรากดังภาพที่ 2c และ 2d สำหรับพฤติกรรมที่ใกล้เคียงกับสภาพจริงนั้นจะคล้ายคลึงกับฐานรากแบบ Perfectly Rigid มากกว่า ดังแสดงในภาพที่ 2e

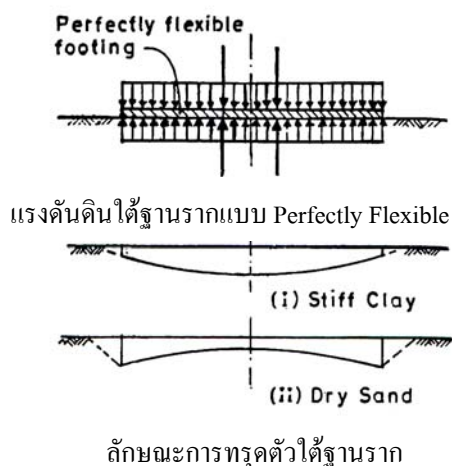


ภาพที่ 2 ลักษณะการกระจายตัวของแรงดันดินเนื่องจากการรับน้ำหนักแบบตรงศูนย์

- (a) ฐานรากแบบ Flexible บนดินเหนียว (b) ฐานรากแบบ Flexible บนดินทราย
(c) ฐานรากแบบ Rigid บนดินเหนียว (d) ฐานรากแบบ Rigid บนดินทราย
(e) แรงดันดินที่ใช้แทนในการวิเคราะห์

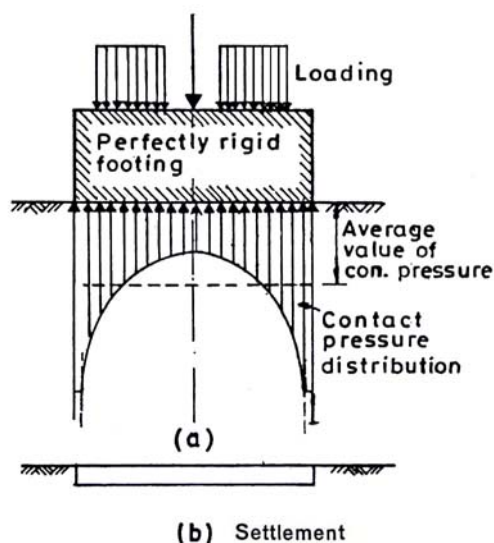
ที่มา: Coduto (2001)

Ninan (1982) ได้พิจารณาศึกษา Contact Pressure ตามทฤษฎี Elasticity โดยได้สรุปไว้ว่าในฐานรากแบบ Perfectly Flexible ในดินทั้งดินเหนียวและดินทรายไม่ว่าจะอยู่ในสภาวะช่วงอิลาสติกหรือช่วงพลาสติก เมื่อฐานรากรับน้ำหนักจะไม่สามารถต้านทานโมเมนต์หรือแรงเฉือนได้ น้ำหนักดังกล่าวจึงทำให้เกิดแรงปฏิกิริยาแผ่กระจายสม่ำเสมอโดยตลอดฐานรากตามรูปร่างของน้ำหนักที่กระทำดังภาพที่ 3a ลักษณะการทรุดตัวก็จะเป็นดังภาพที่ 3b ส่วนฐานรากแบบ Perfectly Rigid สามารถต้านทานแรงเฉือนและโมเมนต์ที่เกิดขึ้นได้ การกระจายของแรงดันใต้ฐานรากตามทฤษฎี Elasticity จะเป็นดังภาพที่ 4a โดยมีค่าน้อยที่สุดที่กึ่งกลางของฐานรากและมากที่สุดที่ขอบฐานราก ส่วนการทรุดตัวจะเกิดขึ้นเท่ากันตลอดฐานราก ดังในภาพที่ 4b สาเหตุที่แรงดันดินใต้ฐานรากแบบ Perfectly Rigid ในดินทรายมีค่าน้อยที่ขอบฐานรากและจะมากที่สุดที่กึ่งกลางฐานรากก็เนื่องจากดินทรายจะรับน้ำหนักด้วยการเกิด interlocking ระหว่างเม็ดดิน เมื่อดินรับน้ำหนักก็จะเกิดการบีบอัดแบบทันทีทันใดที่ขอบฐานราก เมื่อดินจะเคลื่อนตัวหนีออกไปทางด้านข้าง ทำให้แรงดันที่ขอบนั้นจะมีค่าน้อย ตามภาพที่ 5b ส่วนในดินเหนียวลักษณะความต่อเนื่องของมวลดินนั้นมีมากกว่าดินทราย ทำให้สามารถต้านทานได้ดีกว่าดินทราย แรงดันที่ฐานของฐานรากจึงมีค่าสูงตามทฤษฎีตามภาพที่ 5a

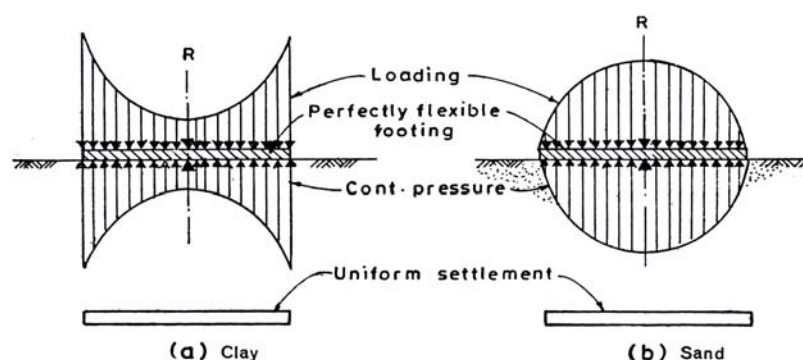


ภาพที่ 3 แรงดันดินและการทรุดตัวของฐานรากแบบ Perfectly Flexible

ที่มา: Nainan (1982)



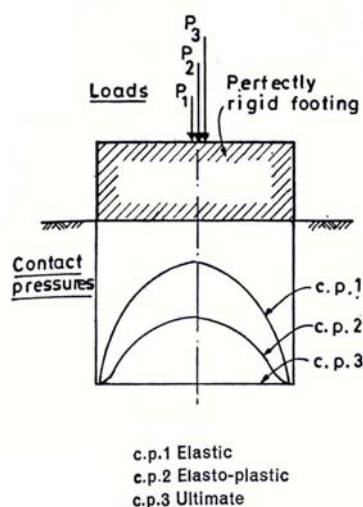
ภาพที่ 4 แรงดันดินและการทรุดตัวใต้ฐานรากแบบ Perfectly Rigid
ที่มา : Nainan (1982)



ภาพที่ 5 แรงดันดินใต้ฐานรากที่วางบนดินเหนียวและดินทราย
ที่มา : Nainan (1982)

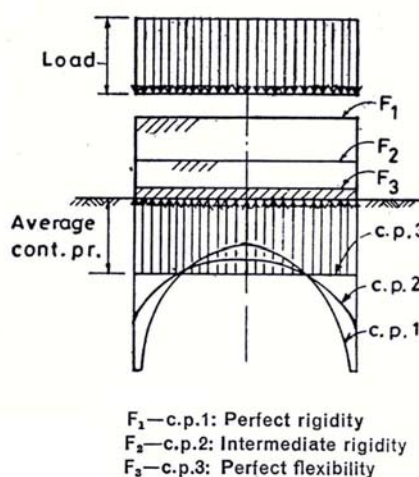
นอกจากนั้นการกระจายของ Contact Pressure จะเปลี่ยนแปลงตามขนาดของน้ำหนัก โดยจากที่ทราบว่าการตั้งเนื่องจากฐานรากแบบ Perfectly Rigid จะมากที่สุดที่ขอบฐานรากและน้อยที่สุดที่กึ่งกลาง แต่เมื่อน้ำหนักที่กระทำมากขึ้นจนถึงจุดวิกฤติ การกระจายของ Contact Pressure จะมีรูปร่างแผ่กระจายสม่ำเสมอเท่ากันตลอดฐานรากเหมือนกับที่เกิดขึ้นในฐานรากแบบ Perfectly Flexible ดังแสดงในภาพที่ 6

และการกระจายของ Contact Pressure ก็ยังแปรผันตามค่า Rigidity ของฐานรากด้วย โดยหากฐานรากแบบ Perfectly Rigid มีน้ำหนักค่าหนึ่งกระทำอยู่แล้วทำการเปลี่ยนแปลงค่า Rigidity ของฐานรากจาก Perfectly Rigid ให้เป็นแบบ Perfectly Flexible ก็จะทำให้การกระจายของ Contact Pressure เปลี่ยนแปลงไป ดังภาพที่ 6 ค่าแรงดันเริ่มจากจะมากที่สุดที่ขอบฐานรากและน้อยที่สุดที่กึ่งกลาง จากนั้นผลต่างระหว่างแรงดันมากที่สุดกับแรงดันที่น้อยสุดก็จะลดน้อยลงจนการกระจายของแรงดันเกือบจะเป็นแบบแผ่สม่ำเสมอ



ภาพที่ 6 แรงดันดินที่สภาวะการรับน้ำหนักขนาดต่างๆ

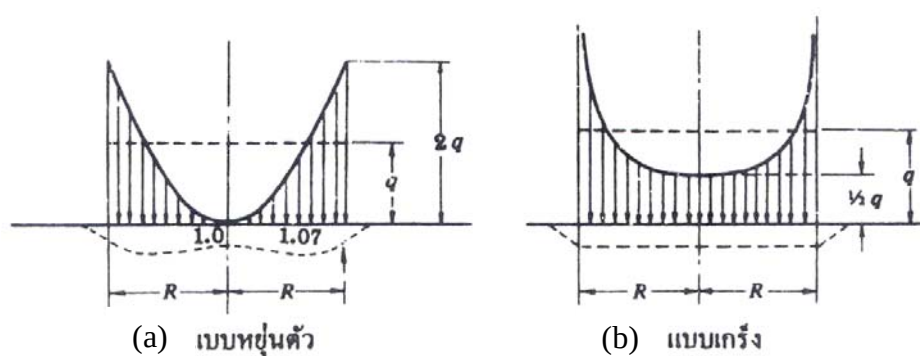
ที่มา: Nainan (1982)



ภาพที่ 7 แรงดันดินที่ค่า Rigidity ต่างกัน

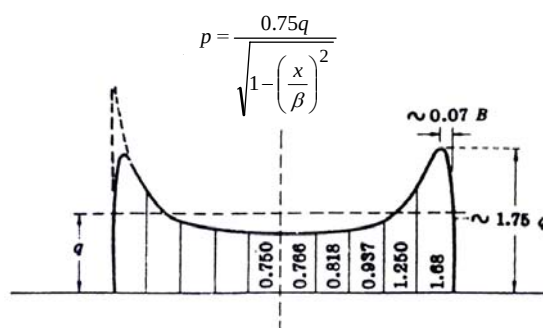
ที่มา: Nainan (1982)

ชัย (2526) กล่าวว่า การทรุดตัวได้ฐานรากแบบ Perfectly Flexible ที่ขอบของฐานรากจะมีค่ามากกว่าที่กึ่งกลางของฐานราก ส่วนฐานรากแบบ Perfectly Rigid จะมีการทรุดตัวของดินใต้ฐานรากเท่ากันทุกจุด ทำให้ความเค้นสัมผัสที่ผิวโดยรอบของพื้นที่ฐานรากจะมีค่าสูงกว่าที่ส่วนกลาง ดังที่เห็นในภาพที่ 8a เป็นลักษณะของความเค้นสัมผัสใต้ฐานรากแบบ Perfectly Flexible ของฐานรากวงกลมและภาพที่ 8b เป็นลักษณะของความเค้นสัมผัสใต้ฐานรากแบบ Perfectly Rigid ของฐานรากวงกลมที่เสนอโดย Ohde



ภาพที่ 8 ความเค้นสัมผัสใต้ฐานรากแบบ Perfectly Flexible และ Perfectly Rigid
ที่มา: ชัย (2526)

แต่หากพิจารณาตามทฤษฎีความยืดหยุ่น ความเค้นที่ขอบของฐานรากแบบ Perfectly Rigid จะมีค่าเป็นอนันต์ Ohde จึงเสนอรูปแบบความเค้นสัมผัสของฐานรากชนิดเกร็งดังแสดงในภาพที่ 9 และสมการที่ 1 โดยตำแหน่งความเค้นสัมผัสสูงสุดอยู่ที่ระยะ $0.07B$ จากขอบของฐานราก



ภาพที่ 9 การแผ่ความเค้นสัมผัสของฐานรากชนิดเกร็ง
ที่มา: ชัย (2526)

$$p = \frac{0.75q}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{B}\right)^2}} \quad (1)$$

โดย

p	=	ความเค้นสัมผัสใต้ฐานราก
q	=	น้ำหนักที่กระทำต่อฐานราก
x	=	ระยะจากจุดศูนย์กลางฐานราก
B	=	ความกว้างครึ่งหนึ่งของฐานราก

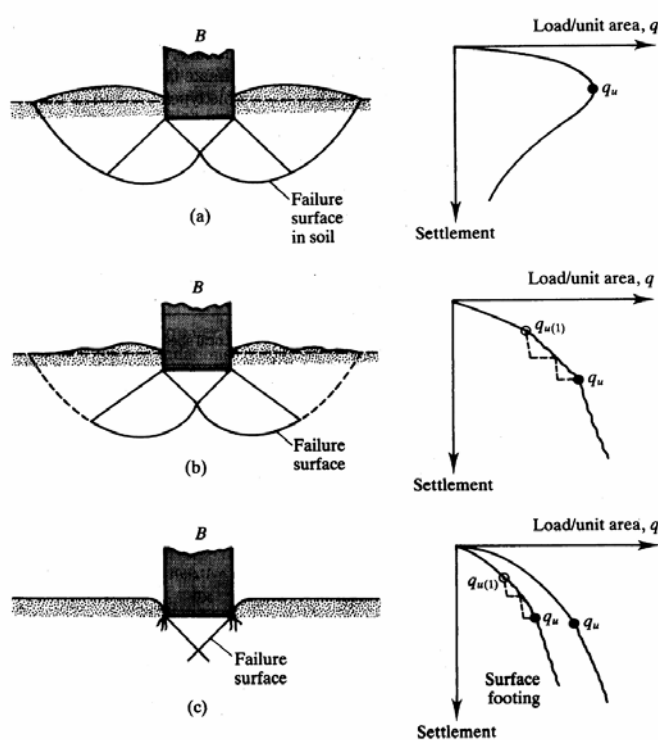
ลักษณะของการพิบัติ (Mode of Failure)

เมื่อฐานรากส่งถ่ายน้ำหนักลงสู่ดินก็จะก่อให้เกิดหน่วยแรงขึ้น โดยประกอบด้วยหน่วยแรงตั้งฉาก (Normal Stress) และหน่วยแรงเฉือน (Shear Stress) โดยหน่วยแรงที่ทำให้มวลดินเกิดการวิบัติก็คือหน่วยแรงเฉือน หากหน่วยแรงเฉือนที่เกิดขึ้นมีค่าสูงมากหรือขนาดของฐานรากมีขนาดเล็กมากจนเกินจนทำให้ค่าหน่วยแรงที่เกิดขึ้นดังกล่าวมีค่าเกินกำลังรับแรงเฉือนของดิน ผลที่ตามมา ก็คือจะเกิดการวิบัติของดินฐานรากขึ้น

Das (1999) ได้มีการจำแนกลักษณะการพิบัติของดินฐานรากโดยมีสมมติฐานว่าฐานรากดังกล่าวเป็นแบบ Strip ที่วางอยู่บน Homogeneous Soil เมื่อดินเริ่มรับน้ำหนักจะได้กราฟความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักและการทรุดตัวที่เกิดขึ้นดังแสดงในภาพที่ 10 ซึ่งแบ่งลักษณะของการทรุดตัวของดินใต้ฐานรากเมื่อเกิดการวิบัตินั้นออกเป็น 3 ลักษณะ คือ

ก. การพิบัติแบบทั่วไป (General Shear Failure) เป็นลักษณะการพิบัติของดินเมื่อฐานรากรับน้ำหนักบรรทุกถึงน้ำหนักประลัย (Ultimate Load) โดยไม่มีการเปลี่ยนแปลงทางปริมาตร และจะเกิดบริเวณของการพิบัติ (Failure Zone) เป็น 3 บริเวณด้วยกัน คือ Active Zone, Intermediate Zone และ Passive Zone เริ่มจากเกิดการเคลื่อนตัวของดิน Active Zone ในแนวดิ่งดันดินในส่วนของ Intermediate Zone ให้ไหลออกไปทางด้านข้างเกิดแรงกระทำต่อดิน Passive Zone ให้โก่งตัวขึ้น ดินที่เกิดการพิบัติในลักษณะนี้มักจะเป็นดินที่มีความแน่นมากและมีคุณสมบัติสม่ำเสมอ เช่น ทรายแน่น (Dense Sand) และดินเหนียว (Stiff Clay) ลักษณะของบริเวณของการพิบัติ การเคลื่อนตัวของดิน และความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกกับการทรุดตัว ดังแสดงในภาพที่ 10a

ข. การพิบัติแบบเฉาะแห่ง (Local Shear Failure) มีลักษณะคล้ายกับบางส่วนของ การวิบัติแบบทั่วไปกับการวิบัติแบบเฉือนทะลุ บริเวณของการวิบัติเกิดขึ้นใต้ฐานราก ระบายการวิบัติเกิดเพียงบริเวณใต้ขอบของฐานรากไม่ได้ขยายตัวจนถึงบริเวณผิวดิน และมีการบวมตัวของดินเล็กน้อยใกล้กับฐานรากและมีการทรุดตัวของฐานรากอย่างรวดเร็ว การวิบัติแบบเฉาะแห่งนี้เป็นพฤติกรรมเชื่อมระหว่างการวิบัติแบบทั่วไปกับการวิบัติแบบเฉือนทะลุ การพิบัติในลักษณะนี้มักเกิดในดินทรายหรือดินเหนียวที่มีความแน่นปานกลาง หรือดินที่มีสมบัติไม่สม่ำเสมอ กำลังรับน้ำหนักไม่เท่ากันตลอด ทำให้ดินส่วนที่อ่อนกว่าเกิดการพิบัติไปก่อนที่จะเกิดการพิบัติทั้งหมด ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกกับการทรุดตัว ดังแสดงในภาพที่ 10b



ภาพที่ 10 ลักษณะของการพิบัติแบบต่างๆ (a) การพิบัติแบบทั่วไป (b) การพิบัติแบบเฉาะแห่ง (c) การพิบัติแบบเฉือนทะลุ

ที่มา: Das (1999)

ค. การพิบัติแบบเฉือนทะลุ (Punching Shear Failure) เป็นลักษณะของการพิบัติที่เกิดขึ้นโดยมวลดินส่วนที่อยู่ใต้ฐานเคลื่อนที่ และมีการเปลี่ยนแปลงทางปริมาตร โดยเกิดแรงเฉือนในแนวตั้งที่บริเวณขอบของฐานราก ไม่มีการไหลและการโก่งตัวของมวลดินด้านข้าง ฐานรากจะจมลงใน

แนวคิ่ง การวิบัติแบบนี้แสดงระนาบการวิบัติแสดงไม่ชัดเจน มักเกิดขึ้นในดินทรายหลวม ลักษณะการเคลื่อนตัวและความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกกับการทรุดตัวดังแสดงในภาพที่ 10c

ปัจจัยที่มีผลต่อลักษณะการวิบัติ

ลักษณะของการพิบัติจะเป็นแบบใดขึ้นอยู่กับสมบัติของดินและส่วนประกอบอื่นๆ อีกหลายประการ ซึ่งพอสรุปได้ดังนี้

ก. ความสามารถอัดตัวได้หรืออัดตัวไม่ได้ของดิน (Compressible or In-Compressible Material) เมื่อเริ่มรับน้ำหนักบรรทุก ดินที่มีความสามารถอัดตัวได้มากเมื่อรับแรง เช่น ทรายหลวม (Loose Sand) ก็จะเกิดการพิบัติแบบเฉือนทะลุ ถ้าอัดตัวได้น้อย เช่น ดินทรายแน่น ดินเหนียวแข็ง ก็จะเกิดการพิบัติแบบทั่วไป สำหรับการพิบัติเฉพาะแห่งจะเกิดกับดินที่มีลักษณะกลางๆ คือ ไม่แน่นหรือหลวมมากเกินไปจนสังเกตได้ชัด ความสามารถอัดตัวได้ของดินนอกจากจะขึ้นอยู่กับความหนาแน่นแล้วยังขึ้นอยู่กับรูปร่าง (Grain Shape) การเรียงตัวและการกระจายขนาดของเม็ดดินด้วย

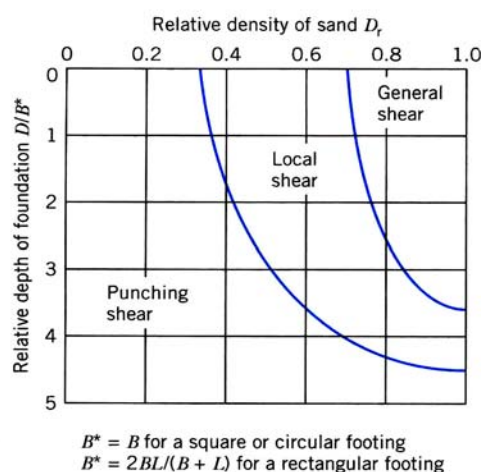
ข. ลักษณะการวางตัวของชั้นดิน (Soil Profile) ฐานรากที่วางอยู่บนชั้นทรายที่อัดแน่น อาจเกิดการพิบัติแบบเฉือนทะลุได้ ถ้ามีชั้นดินอ่อนหรือทรายหลวมซึ่งเป็นดินที่สามารถอัดตัวได้มากเป็นชั้นดินที่อยู่ภายใต้ชั้นทรายอัดแน่นนั้น

ค. ความสม่ำเสมอของมวลดิน ดินที่มีสมบัติสม่ำเสมอ (Homogeneous Soil) ถ้ามีความหนาแน่นมากก็จะเกิดการพิบัติแบบทั่วไป แต่ดินที่มีสมบัติไม่คงที่ตลอดมวลดินการพิบัติของดินได้ฐานรากดินก็อาจเกิดเป็นแบบเฉพาะแห่ง

ง. ลักษณะกระทำของน้ำหนักบรรทุก เมื่อน้ำหนักบรรทุกที่กระทำต่อฐานรากเป็นน้ำหนักบรรทุกที่ไม่อยู่ในแนวคิ่ง หรือน้ำหนักบรรทุกที่เคลื่อนที่ (Transient or Dynamics Load) แม้ว่าฐานรากนั้นวางอยู่บนทรายอัดแน่น ก็อาจเกิดการพิบัติแบบเฉือนทะลุได้

จ. ความลึกและความกว้างของฐานราก ถ้าฐานรากมีความลึกของฐานเมื่อเทียบกับความกว้างมากกว่าก็มีแนวโน้มที่จะเกิดการพิบัติแบบเฉือนทะลุได้มากกว่า แม้ว่าฐานรากนั้นจะวางอยู่บน

ชั้นทรายอัดแน่นก็ตาม ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนของความลึกต่อความกว้างของฐาน (D/B) กับความหนาแน่นสัมพัทธ์ซึ่งมีผลต่อการคาดหมายลักษณะของการพังทลาย ดังแสดงในภาพที่ 11



ภาพที่ 11 ลักษณะการพังทลายในทรายที่ระดับความแน่นสัมพัทธ์ต่างๆ

ที่มา: Cernica (1995)

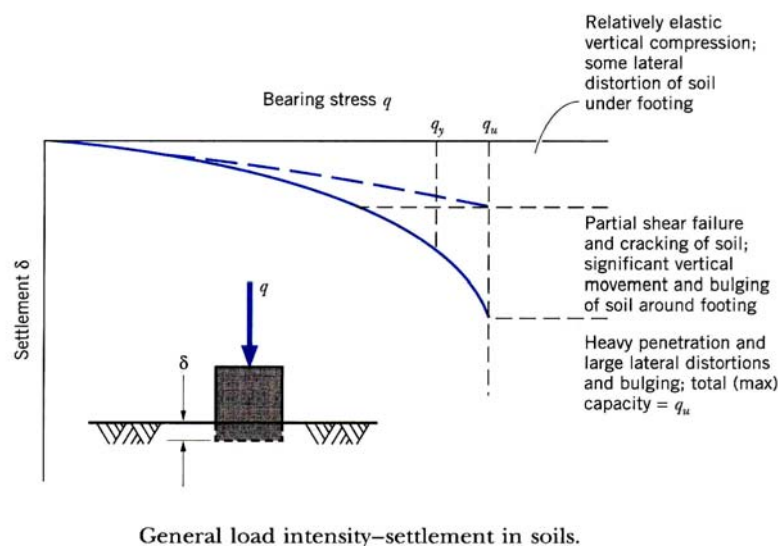
หน่วยแรงแบกทานของดิน (Bearing Capacity of Soil)

คำจำกัดความ

บุญเทพ (2542) กล่าวว่า แรงแบกทานเป็นแรงที่ฐานรากรับมาจากโครงสร้างหลักเพื่อส่งถ่ายลงสู่พื้นดิน สำหรับฐานรากตื้นมักจะพิจารณาในรูปแบบแรงแบกทานต่อหน่วยพื้นที่ฐานราก ซึ่งเรียกว่าหน่วยแรงแบก (Bearing Stress, q)

Cernica (1995) ให้คำจำกัดความของค่าหน่วยแรงแบกทานยึดหยุ่น (q_y) คือ ค่าหน่วยแรง ณ จุดที่เริ่มมีการวิบัติขึ้น และหน่วยแรงแบกทานประลัย (Ultimate Bearing Capacity, q_u) คือ ค่าหน่วยแรง ณ จุดที่เกิดการวิบัติ มีการทรุดตัวของฐานรากเกิดขึ้นมากอย่างทันทีทันใดโดยระนาบของผิววิบัติขึ้นไปสัมผัสที่ผิวดินพอดี ตามภาพที่ 12

หน่วยแรงแบกทานที่ยอมให้ (Allowable Bearing Stress, q_a) เป็นค่าหน่วยแรงที่เลือก หลังจากพิจารณาเรื่องความปลอดภัยต่อการไม่มีเสถียรภาพ ระยะทรุดตัวที่ยอมให้และความประหยัด แล้วหารค่าหน่วยแรงดังกล่าวด้วยตัวประกอบความปลอดภัย F ที่เลือกใช้



ภาพที่ 12 การเปลี่ยนแปลงสภาพของมวลดินในชั้นดินฐานรากภายใต้การเพิ่มน้ำหนักบรรทุก
ที่มา: Cernica (1995)

วิธีการวิเคราะห์หน่วยแรงแบกทานของดิน

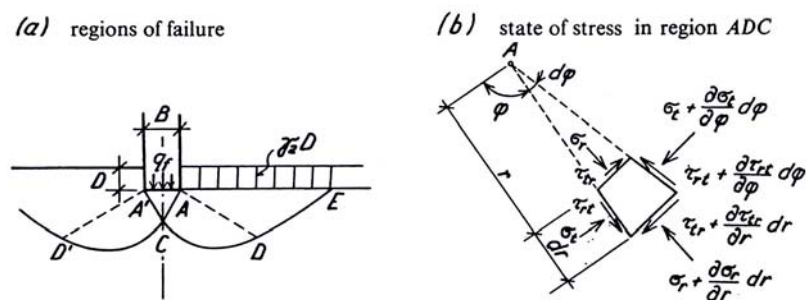
ในแต่ละวิธีการวิเคราะห์เพื่อแก้ปัญหานี้ จะมีการกำหนดเงื่อนไขให้มีความสอดคล้องกับสมการดังต่อไปนี้ คือ Equation of Equilibrium, Compatibility Equation, Constitutive of Material และ Boundary Condition ซึ่งทั้งหมดเป็นสมการที่ใช้ควบคุมหน่วยแรงและการเคลื่อนตัวที่เกิดขึ้น หากจะแบ่งหมวดของวิธีการวิเคราะห์ตามเงื่อนไขที่แต่ละวิธีใช้ Pott (2001) ได้เสนอการแบ่งกลุ่มตามเงื่อนไขและข้อจำกัดของแต่ละวิธีดังนี้

1. Closed Form Solution

เป็นวิธีการหาผลเฉลยแบบ Exact Theoretical Solution เหมาะกับการแก้ปัญหาที่มีรูปแบบที่ไม่ซับซ้อน พฤติกรรมของวัสดุเป็นแบบเส้นตรง (Linear Elastic Material) ซึ่งการแก้ปัญหาทั้งหมดจะอยู่ในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์

วิธีนี้จะเป็นการหาผลเฉลยโดยการอินทิเกรตโดยตรงจากสมการ ซึ่งผลเฉลยนั้นจะต้องใช้เงื่อนไขในการวิเคราะห์ดังนี้คือ 1. Boundary Condition 2. Equation of Equilibrium 3. Compatibility Equation 4. Constitutive of Material หากคิดตามทฤษฎีแล้วเราสามารถที่จะหาคำตอบของผลเฉลยตั้งแต่ช่วงเริ่มต้นที่มีการรับน้ำหนักจนกระทั่งเกิดการวิบัติ แต่เนื่องจากความซับซ้อนของคุณสมบัติของดินที่มีพฤติกรรมแบบ Nonlinearly จึงต้องมีการกำหนดสมมุติฐานขึ้นมาว่ามวลดินมีลักษณะเป็น An Homogenous Isotropic Linear Elastic รูปร่างของปัญหาเป็นแบบสมมาตร และพิจารณาปัญหาเป็นแบบ Plane Strain หรือ Two-Dimensional Strain ตัวอย่างของการแก้ปัญหาดังนี้ได้เสนอโดย Poulos and Davis (1974)

Prandtl (1921) ทำการวิเคราะห์ด้วยวิธี Closed Form Solution โดยมีสมมุติฐานว่าดินเป็นแบบ Homogenous Isotropic Semi-infinite Solid มีน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอโดยรอบฐานรากแบบ Strip และพิจารณาปัญหาแบบ Plane Strain โจทย์ของปัญหาคือทำการกดแท่งเหล็กคั่นลงในแผ่นเหล็กทำให้เกิดการยุบตัวแบบพลาสติกหรือเรียกว่าขอบเขตพลาสติก (Plastic Zone) ได้แท่งเหล็กคั่น การทรุดตัวที่เกิดขึ้นมีค่าน้อยมากและภายในขอบเขตพลาสติกได้แท่งเหล็กจะไม่มีการเปลี่ยนแปลงปริมาตรเกิดขึ้น (Poisson's Ratio = 0.5)



Prandtl's solution of bearing capacity

ภาพที่ 13 ระบายการวิบัติและสภาวะของหน่วยแรง ณ จุดที่พิจารณาในส่วนของมวล ADC

เสนอโดย Prandtl

ที่มา: Bazant (1979)

จากภาพที่ 13 Prandtl (1921) แบ่งรูปร่างการวิบัติออกเป็นสามส่วน คือ A'AC, ADC และ AED โดยทั้งสองด้านของรูปร่างนั้นสมมาตรกัน เหนือเส้น A'A มีน้ำหนัก q มากระทำ ดังนั้น ณ

ตำแหน่งดังกล่าวจะมีค่าเป็นหน่วยแรงหลัก (Major Principal Stress) แนวตั้งเนื่องจากเส้นตรง A'A ที่ผิวฐานของฐานรากสมมุติให้มีลักษณะเป็นผิวแบบราบเรียบ (Smooth) ถือว่าไม่มีแรงเสียดทานเกิดขึ้น นั่นก็คือไม่มีหน่วยแรงเฉือนเกิดขึ้นนั่นเอง หน่วยแรงในแนวราบก็จะเป็นค่าหน่วยแรงรอง (Minor Principal Stress) ส่วน A'AC จะถือว่าอยู่ในสภาวะเชิงรุก (Active Rankine State) เพราะว่ามีน้ำหนักรากกระทำมวลก่อนนี้จะเคลื่อนที่ลงดันให้มวลด้านข้างมีการเคลื่อนตัวออกไป เหนือเส้นตรง AE จะมีน้ำหนักรากกระทำอยู่โดยน้ำหนัก $\gamma_2 D$ นี้แทนมวลดินที่มีความลึก D ดังนั้น หากพิจารณาที่เส้นตรง AE นี้จะได้ว่าหน่วยแรงแนวตั้งที่เกิดขึ้นเป็นค่าหน่วยแรงรอง (Minor Principal Stress) ส่วนหน่วยแรงในแนวราบจะเป็นค่าหน่วยแรงหลัก โดยมวล AED จะถูกดันให้เคลื่อนตัวขึ้นหากฐานรากมีการรับน้ำหนัก ดังนั้น จึงจัดอยู่ในสภาวะ Passive Rankine State และมวลส่วนที่เชื่อมต่อระหว่าง A'AC กับ AED ก็จะต้องมีค่าหน่วยแรงที่สัมพันธ์และสอดคล้องกับมวลที่อยู่ด้านข้าง โดยรูปร่างของส่วนที่สามนี้มีลักษณะเป็น Logarithmic Spirals เมื่อพิจารณาระบบให้อยู่ในภาวะสมดุลและสอดคล้องกับเงื่อนไขการวิบัติแล้ว จะสามารถเขียนสมการสมดุลของมวลส่วนที่ 2 ในระบบพิกัด Plane Polar (r, φ) ได้ดังสมการที่ 2 และ 3

$$\sigma_r - \sigma_t + r \frac{\partial \sigma_t}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \sigma_t}{\partial \varphi} + r \frac{\partial \tau}{\partial r} + 2\tau = 0 \quad (3)$$

จากการพิสูจน์แล้วว่า $\tau_{rt} = \tau_{tr} = \tau$ และสมการสมดุลมีฟังก์ชันหน่วยแรง (Stress Function, F) ที่สอดคล้องดังสมการที่ 4, 5 และ 6 โดยที่รูปแบบของฟังก์ชัน F แสดงในสมการที่ 7

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \quad (4)$$

$$\sigma_t = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \quad (5)$$

$$\tau = \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \varphi} \quad (6)$$

$$F = \frac{r^2}{2} f(\varphi) \quad (7)$$

นำค่าหน่วยแรงต่างๆ σ_r , σ_t และ τ แทนลงในเงื่อนไขการวิบัติจากหน่วยแรงเฉือน (Shear Failure Condition) ซึ่งจะทำให้ได้สมการอนุพันธ์อันดับที่สอง จากนั้นทำการแก้สมการเพื่อหาค่าฟังก์ชัน f โดยผลเฉลยหรือค่ากำลังรับน้ำหนักของดินมีค่าเท่ากับสมการที่ 8

$$q = \gamma_2 D \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \exp(\pi \tan \phi) + c \cot \phi \left[\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \exp(\pi \tan \phi) - 1 \right] \quad (8)$$

$$q = \gamma_2 D N'_q + c N'_c \quad (9)$$

$$N'_q = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \exp(\pi \tan \phi)$$

$$N'_c = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \exp(\pi \tan \phi)$$

$$N'_c = (N'_q - 1) \cot \phi$$

จากสมการจะเห็นว่าค่า N'_q และ N'_c จะขึ้นอยู่กับค่ามุมเสียดทานภายใน ϕ ดังนั้น เงื่อนไขของสมการคือไม่พิจารณาค่าหน่วยน้ำหนักของวัสดุและมีน้ำหนักภายนอก $\gamma_2 D$ กระทำอย่างสม่ำเสมอกระจายอยู่โดยรอบฐานรากที่มีความกว้าง B

หากดินมีค่ามุมเสียดทานภายใน $\phi = 0$ แล้วจะได้ผลเฉลยจากสมการของ Prandtl คือ

$$q = \gamma_2 D + c(\pi + 2) \quad (10)$$

2. Limit Equilibrium Method

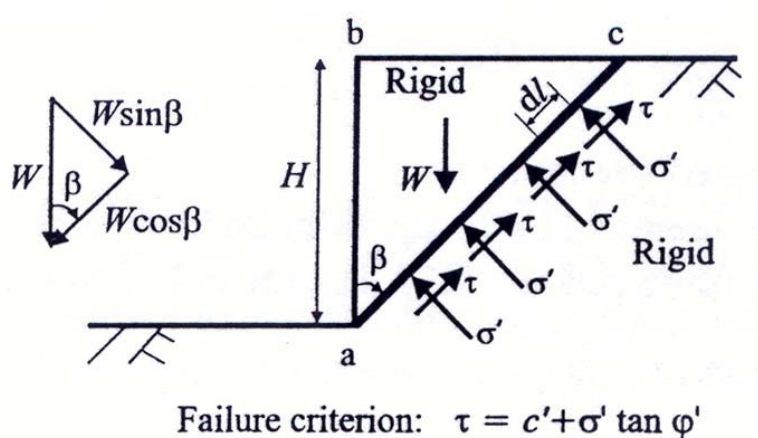
วิธีนี้เป็นการวิเคราะห์โดยทำการกำหนดคะแนนสมมุติของการวิบัติของมวลดิน แล้วใช้หลักของสมดุลทางกลศาสตร์มาแก้ปัญหา โดยที่ ณ จุดวิบัติให้ทุกๆจุดบนระนาบที่สมมุติสอดคล้องกับ Yield Criterion ที่กำหนด โดยที่ระนาบดังกล่าวสามารถที่จะมีรูปร่างเป็นรูปโค้ง สามเหลี่ยม วงกลม หรือผสมกันหลากหลายรูปร่างก็ได้ โดยที่ระบบที่อยู่เหนือเส้นระนาบที่เราสมมุติขึ้นรวมทั้งสิ่งภายนอกที่กระทำต่อระบบเท่านั้นที่เราจะพิจารณา โดยจะไม่พิจารณาหน่วยแรงที่เกิดขึ้นภายในระบบที่พิจารณาอยู่เลย

ในปี 1773 คูลอมบ์ ได้คิดทฤษฎีที่มีชื่อว่าทฤษฎีแรงดันดินของคูลอมบ์ (Coulomb's Earth Pressure Theory) โดยอาศัยหลักการของ Limit Equilibrium ในทฤษฎีกล่าวว่าการพังทลายของดินมีขอบเขต ผิวขอบเขตของการพังทลายจะเป็นระนาบ (Failure Surface are Plane) และสามารถหาสมการหน่วยแรงแบกทานของดินได้ด้วยการวิเคราะห์ตามลักษณะระนาบของการวิบัติ โดยทฤษฎีดังกล่าวก็คือทฤษฎีแรงดันดินของกำแพงกันดิน

จากภาพตลอดผิวการวิบัติจะมีหน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือนกระทำอยู่ตลอดผิว ac ดังภาพที่ 14 ถ้าผิวดังกล่าวมีความยาว l ดังนั้นสามารถทำการอินทิกรัลได้ดังสมการที่ 11

$$\int_0^l \tau dl = \int_0^l c' dl + \int_0^l \sigma' \tan \phi' dl \quad (11)$$

$$\int_0^l \tau dl = c'l + \tan \phi' \int_0^l \sigma' dl \quad (12)$$



ภาพที่ 14 ลักษณะการวิบัติในการหาผลเฉลยแบบวิธี Limit Equilibrium
ที่มา: Pott (1999)

พิจารณาสมดุลภายในรูปปิด abc จะได้ว่า

$$\int_0^l \sigma' dl = W \sin \beta \quad (13)$$

$$\int_0^l \tau dl = W \cos \beta \quad (14)$$

$$W = \frac{1}{2} \gamma H^2 \tan \beta$$

$$l = \frac{H}{\cos \beta}$$

$$H = \text{ความสูงของกำแพงดิน}$$

$$\beta = \text{มุมภายในรูปสามเหลี่ยมโดยวัดจากแนวตั้งของกำแพงดิน}$$

$$\tau = \text{หน่วยแรงเฉือน}$$

$$c' = \text{ความเชื่อมั่นแน่นของดิน (Cohesion)}$$

$$\sigma' = \text{หน่วยแรงประสิทธิผล}$$

$$l = \text{ความยาวของระนาบผิววิกฤติ}$$

$$\phi = \text{มุมเสียดทานภายในของดิน (Angle of Internal Friction)}$$

นำค่าจากสมการที่ 13 และสมการที่ 14 แทนลงในสมการที่ 12 จะได้ค่าดังสมการที่ 15

$$H = \frac{2c' \cos \phi' \cos(2\beta + \phi')}{\gamma \cos(\beta + \phi') \sin \beta} \quad (15)$$

ค่ามุม β ที่ให้ผลเฉลย H สามารถหาได้จากการดิฟเฟอเรนเชียล H เทียบกับ β ดังแสดงในสมการที่ 16

$$\frac{\partial H}{\partial \beta} = \frac{-2c' \cos \phi' \cos(2\beta + \phi')}{\gamma (\sin \beta \cos(\beta + \phi'))^2} \quad (16)$$

เมื่อทำให้ $\frac{\partial H}{\partial \beta} = 0$ แล้วจะได้ค่ามุม $\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi'}{2}$ และแทนค่ามุมนี้ลงในสมการที่ 15 จะได้ค่า H_{LE} ดังนี้

$$H_{LE} = \frac{2c' \cos \phi'}{\gamma \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi'}{2}) \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi'}{2})} \quad (17)$$

$$H_{LE} = \frac{4c'}{\gamma} \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi'}{2}) \quad (18)$$

หรือหากพิจารณาในรูปของหน่วยแรงรวม(Total Stress) สมการจะสามารถลดรูป
สมการได้สมการที่ 19

$$H_{LE} = \frac{4S_u}{\gamma} \quad (19)$$

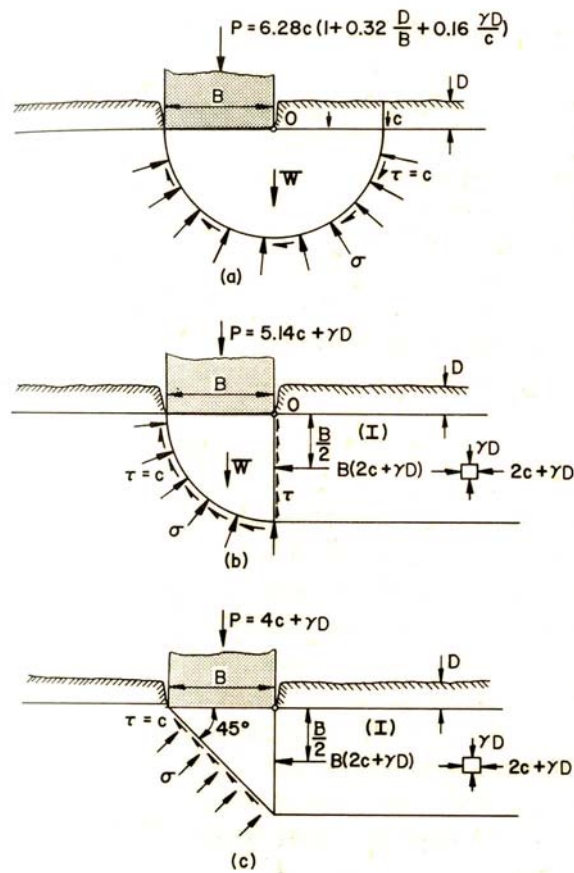
$$S_u = \text{Undrained Shear Strength}$$

$$\gamma = \text{หน่วยน้ำหนักของดิน (Unit Weight of Soil)}$$

ต่อมาในปี 1857 Rankine ได้เสนอทฤษฎี Rankine Wedge Theory for Bearing Capacity ซึ่งเป็นสมการหน่วยแรงแบกทานของดิน โดยวิเคราะห์ฐานรากที่วางอยู่บนผิวดิน แล้วกำหนดรูปร่างการวิบัติเป็นแบบรูปสี่เหลี่ยม ส่วน Fellenius วิเคราะห์ฐานรากที่วางอยู่บนดินโดยกำหนดรูปร่างการวิบัติเป็นรูปวงกลม และยังคงมีการพัฒนาสมการตามมามากมาย เช่น Terzaghi และ Meyerhof โดยทำการวิเคราะห์เพิ่มเติมในส่วนต่างๆ เช่น ผลเนื่องจากฐานรากที่วางลึกลงไปจากระดับผิวดิน หรือมีการกำหนดรูปร่างการวิบัติที่แตกต่างกันออกไป

จะเห็นว่าการวิเคราะห์ด้วยวิธี Limit Equilibrium โดยการกำหนดรูปร่างผิวการวิบัติที่แตกต่างกันก็จะให้ค่าผลเฉลยที่แตกต่างกันด้วย ขึ้นอยู่กับว่ารูปร่างใดจะใกล้เคียงกับผลเฉลยที่ถูกต้องมากที่สุด ตัวอย่างการวิเคราะห์ด้วยรูปร่างที่แตกต่างกันแสดงในภาพที่ 15 โดยมีสมมุติฐานว่าฐานรากวางอยู่บนดินเหนียว ค่ามุมเสียดทานภายในมีค่าเท่ากับศูนย์ ($\phi = 0$) ในภาพที่ 15a เป็นการสมมุติผิววิบัติเป็นรูปครึ่งวงกลม การวิเคราะห์ทำการหาโมเมนต์รอบจุด o ที่ขอบของฐานรากโดยที่ระนาบผิววิบัติมีหน่วยแรงตั้งฉากกระทำอยู่ ส่วนหน่วยแรงเฉือนที่กระทำกำหนดให้มีค่าเท่ากับค่าความเชื่อมแน่นของดิน ผลของการหาโมเมนต์ได้ดังสมการที่ 20

$$-P\frac{1}{2}B + \pi BcB + BD\gamma\frac{1}{2}B + DcB = 0 \quad (20)$$



ภาพที่ 15 รูปแบบผิววิบัติที่ใช้ในการวิเคราะห์ด้วยวิธี Limit Equilibrium ที่ดินมีค่า $\phi = 0$

(a) รูปแบบผิววิบัติเป็นรูปวงกลมรัศมี B (b) รูปแบบผิววิบัติเป็นรูปครึ่งวงกลมรัศมี B

(c) รูปแบบผิววิบัติเป็นรูปสามเหลี่ยม

ที่มา: Chen (1975)

ดังนั้นจะได้ค่า Ultimate Bearing Capacity of Footing เท่ากับสมการที่ 22

$$q_0 = \frac{P}{B} \quad (21)$$

$$q_0 = 6.28c\left(1 + 0.32 \frac{D}{B} + 0.16 \frac{\gamma D}{c}\right) \quad (22)$$

ส่วนภาพที่ 15b เป็นการกำหนดรูปร่างผิวการวิบัติแบบผสมคือมวลดินที่อยู่ใต้ฐานรากให้มีลักษณะเป็นครึ่งวงกลมรัศมีเท่ากับ ความกว้างของฐานราก โดยมีศูนย์กลางการหมุนอยู่ที่จุด O

ที่ขอบฐานราก มวลดินรูปครึ่งวงกลมใต้ฐานรากจะมีหน่วยแรงตั้งฉากกระทำอยู่และมีหน่วยแรงเฉือนที่มีค่าเท่ากับ c (Cohesion) กระทำอยู่ ส่วนด้านที่เป็นแนวดิ่งใต้จุด 0 ลงมาหน่วยแรงเฉือนจะกระทำผ่านจุดหมุนพอดีส่วนค่าหน่วยแรงตั้งฉากนั้นมีค่าเท่ากับ $2c + \gamma D$ โดยค่า γD แทนค่าน้ำหนักที่กระทำเนื่องจากน้ำหนักของดินเหนือจุดที่พิจารณา ส่วนค่า $2c$ เป็นผลต่างของ Principal Stress ที่ยอมให้ เมื่อทำการหาโมเมนต์รอบจุดหมุนจะได้ค่ากำลังแบกทานของดินดังสมการที่ 24

$$q_0 = \frac{P}{B} \quad (23)$$

$$q_0 = c(\pi + 2) + \gamma D \quad (24)$$

$$q_0 = 5.14c + \gamma D \quad (25)$$

$$q_0 = \text{ค่าแรงแบกทานของดิน (Ultimate Bearing Capacity)}$$

$$P = \text{น้ำหนักที่ฐานรากถูกกระทำ}$$

$$B = \text{ความกว้างของฐานราก}$$

$$D = \text{ความลึกของดินเหนือระดับฐานของฐานราก}$$

$$c = \text{ความเชื่อมแน่นของดิน (cohesion)}$$

$$\gamma = \text{หน่วยน้ำหนักของดิน (Unit weight of Soil)}$$

ในกรณีที่ค่า D มีค่าเท่ากับศูนย์ สมการที่ 25 จะลดรูปได้เป็น $q_0 = 5.14c$ ส่วนสมการที่ 22 จะลดรูปเหลือ $q_0 = 6.28c$ ซึ่งมีผลต่างระหว่างสองสมการประมาณ 20 เปอร์เซ็นต์

ส่วนในภาพที่ 15c ซึ่งกำหนดรูปร่างเป็นรูปบล็อกสามเหลี่ยมซึ่งจากการวิเคราะห์จะได้ค่ากำลังแบกทานของดินดังสมการที่ 26

$$q_0 = 4c + \gamma D \quad (26)$$

3. Limit Analysis

วิธี Limit Analysis เป็นการพิจารณาพฤติกรรมช่วงการวิบัติหรือการใช้ Bounds Theorem of Plastic Theory เพื่อหาช่วงขอบเขตบนและขอบเขตล่างของจุดที่เกิดการวิบัติ การหาช่วงของคำตอบแบ่งออกเป็น 2 ทฤษฎี คือ ทฤษฎีการวิเคราะห์หาขอบเขตบน (Upper-bound Theorem) และทฤษฎีการวิเคราะห์หาขอบเขตล่าง (Lower-bound Theorem) โดยมีสมมุติฐานอยู่ว่า 1. พฤติกรรม

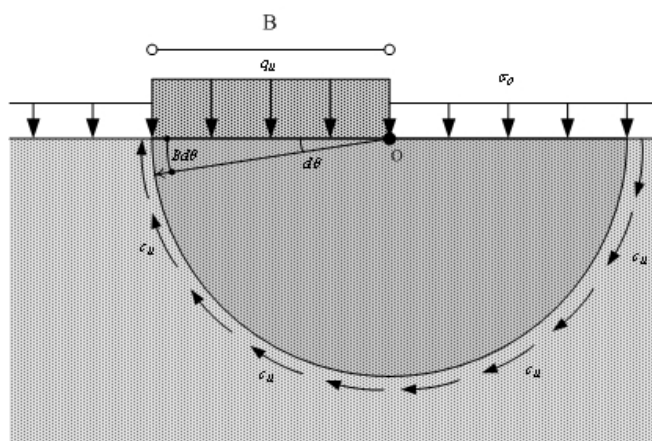
ของดินเป็นแบบ Ideal Plasticity โดยที่ไม่มีการเกิด Work Hardening/Softening 2. Plastic Strain ที่เกิดขึ้นจะตั้งฉากกับผิวของ Yield Surface (Normality Condition) 3. ไม่มีการพิจารณาผลเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของรูปร่างของมวลดินขณะเกิดการวิบัติ จากสมมติฐานทั้งสามข้อข้างต้นสรุปได้อีกที่ว่ามวลดินมีลักษณะแบบ Rigid Perfectly Plastic Behavior with an Associated Flow Rule.

3.1 ทฤษฎีการวิเคราะห์หาขอบเขตบน (Upper-bound Theorem or Unsafe Theorem)

เป็นการหาคำน่าหนักที่ทำให้เกิดการวิบัติ โดยหาสมการอัตราของงานภายนอกที่กระทำต่อระบบจะต้องเท่ากับอัตราของงานที่ระบบระบายออก โดยสมการดังกล่าวจะต้องสอดคล้องกับ 1. Velocity Boundary Condition 2. Strain and Velocity Compatibility Condition 3. Flow Rule ดังนั้น วิธีนี้จะพิจารณาเฉพาะ Velocity Mode และ Energy Dissipation เท่านั้นโดยไม่คำนึงถึงสมดุลของหน่วยแรงภายในระบบ

Azizi (2000) ได้เสนอตัวอย่างสมการค่ากำลังแบกทานของดินที่วิเคราะห์ด้วยทฤษฎีการวิเคราะห์หาขอบเขตบนไว้ดังนี้

ก. กำหนดระนาบผิววิบัติเป็นรูปวงกลมดังแสดงในภาพที่ 16 โดยฐานรากมีความกว้างเท่ากับ B มวลใต้ฐานรากขณะเกิดการวิบัติจะหมุนรอบจุดหมุนคือจุด O ที่ขอบของฐานราก การหมุนด้วยมุม $d\theta$ จะทำให้เกิดการยุบตัวของมวลเท่ากับ $Bd\theta$



ภาพที่ 16 พฤติกรรมการวิบัติของผิววิบัติรูปวงกลม

ที่มา: Azizi (2000)

ดังนั้นงานที่เกิดจากแรงภายนอก (δE) มีค่าเท่ากับสมการที่ 27

$$\delta E = \frac{1}{2} B d \theta (q_u - \sigma_o) B \quad (27)$$

ส่วนพลังงานตลอดระยะนาบผิววิบัติรูปวงกลมที่ระบายออกจากระบบมีค่าเท่ากับสมการที่ 28

$$\delta W = \pi B c_u B d \theta \quad (28)$$

จากทฤษฎีที่ว่างานที่กระทำต่อระบบจะต้องมีค่าเท่ากับงานที่ระบบระบายออกนั้น ดังนั้น สมการที่ 27 จะเท่ากับสมการที่ 28 แล้วทำการแก้สมการเพื่อหาผลเฉลยหรือค่าแรงต้านทานของดิน ซึ่งได้ผลเฉลยหรือค่ากำลังแบกทานของดินดังสมการที่ 29

$$q_u = \sigma_o + 2\pi c_u \quad (29)$$

$$q_u = \text{ค่าแรงต้านทานของดิน}$$

$$\sigma_o = \text{หน่วยแรงตั้งฉาก}$$

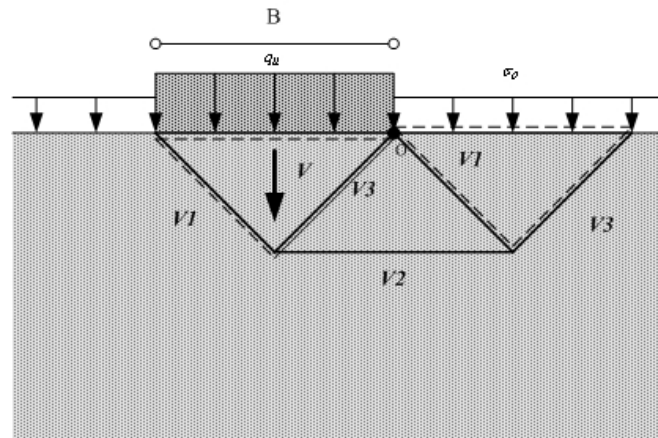
$$\sigma_o = \gamma D$$

$$D = \text{ความลึกของดินเหนือระดับฐานของฐานราก}$$

$$\gamma = \text{หน่วยน้ำหนักของดิน (Unit Weight of Soil)}$$

$$c_u = \text{ความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion) แบบ Undrained}$$

ข. กำหนดระยะนาบผิววิบัติเป็นบล็อก (Sliding Rigid Blocks) ดังภาพที่ 17 โดยพฤติกรรมการวิบัติเกิดจากการเคลื่อนที่ลงของบล็อกดินใต้ฐานรากด้วยความเร็ว V ในขณะที่บล็อกตรงกลางจะดันตัวไปทางด้านข้างแล้วทำให้บล็อกที่สามที่อยู่ริมสุดเคลื่อนตัวขึ้นด้านบน การเคลื่อนตัวของบล็อกทั้งหมดจะเกิดแรงต้านทานบนผิวระยะนาบที่สัมผัสกันและความเร็วในการเคลื่อนที่ของบล็อกแต่ละอันก็จะมีค่าที่แตกต่างกันไป โดยสามารถหาความเร็วในการเคลื่อนที่ของบล็อกได้ตามหลักเรขาคณิต คือ



ภาพที่ 17 พฤติกรรมการวิบัติของ Sliding Rigid Blocks

ที่มา: Azizi (2000)

$$V_1 = V_3 = V\sqrt{2} \quad (30)$$

และ

$$V_2 = 2V \quad (31)$$

และสามารถหาค่างานที่เกิดจากแรงภายนอกที่กระทำต่อระบบได้ดังสมการที่ 32 คือ

$$\delta E = (q_u - \sigma_o)BV \quad (32)$$

และพลังงานตลอดกระบวนการวิบัติที่ระบบระบายออก หาได้ดังสมการที่ 34 คือ

$$\delta W = 4 \frac{B}{\sqrt{2}} c_u V\sqrt{2} + 2VBc_u \quad (33)$$

$$\delta W = 6BVc_u \quad (34)$$

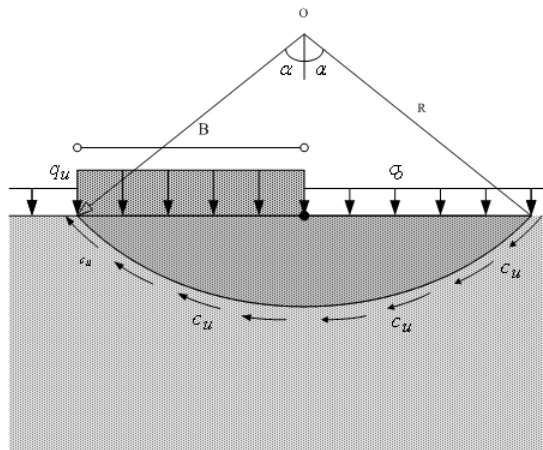
จากหลักการที่งานเนื่องจากแรงภายนอกที่กระทำต่อระบบจะต้องเท่างาน
พลังงานที่ระบบระบายออก จะสามารถเขียนสมการดังกล่าวที่อนุพันธ์เทียบกับมุมที่ α ได้ดังสมการ
ที่ 35

$$\frac{\partial q_u}{\partial \alpha} = \frac{4c_u}{\sin^2 \alpha} \left(1 - \frac{2\alpha}{\tan \alpha}\right) \quad (35)$$

ซึ่งผลเฉลยหรือค่ากำลังแบกทานของดินปัญหานี้มีค่าดังนี้

$$q_u = \sigma_0 + 5.53c \quad (36)$$

ค. กำหนดระนาบผิววิบัติเป็นผิวโค้งรัศมี R ดังภาพที่ 18 รูปการวิบัติดังกล่าวมีจุดศูนย์กลางการหมุนอยู่ที่จุด o ความกว้างฐานราก B แทนด้วย $B = R \sin \alpha$ สมการงานเนื่องจากแรงภายนอกจะได้ดังสมการที่ 37



ภาพที่ 18 พฤติกรรมการวิบัติรูปผิวโค้งรัศมี R

ที่มา: Azizi (2000)

$$\delta E = \frac{1}{2} R d\theta \sin \alpha (q_u - \sigma_0) R \sin \alpha \quad (37)$$

และพลังงานที่ระบบระบายออกเนื่องจากการเฉือนของดินจะได้ดังสมการที่ 38

$$\delta W = 2\alpha R c_u R d\theta \quad (38)$$

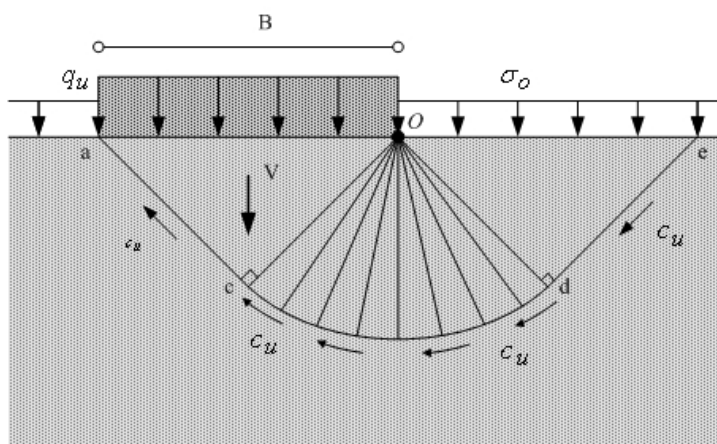
จากหลักการงานเนื่องจากแรงภายนอกที่กระทำต่อระบบต้องเท่ากับพลังงานที่ระบบระบายออก เขียนได้ดังสมการที่ 39

$$(q_u - \sigma_o) = \frac{4\alpha}{\sin^2 \alpha} c_u \quad (39)$$

โดยที่ค่ามุม α ที่น้อยที่สุดจะทำให้ได้ค่าน้ำหนักที่ทำให้เกิดการวิบัติของดิน ดังนั้น ต้องทำการดิฟเฟอเรนเชียลสมการที่เทียบกับมุม α แล้วพิจารณาสมการให้เท่ากับศูนย์แล้วแก้สมการจะได้ค่ามุม α ที่สอดคล้องกับสมการคือ $\tan \alpha = 2\alpha$ หรือ $\alpha = 0.37\pi$ (67°) นำค่ามุมนี้แทนลงในสมการที่ 39 ผลเฉลยของสมการหรือค่ากำลังแบกทานของดินดังสมการที่ 40

$$q_u = \sigma_o + 5.53c \quad (40)$$

ง. กำหนดระนาบผิววิบัติเป็นรูปพัด (Shear Fan) ดังภาพที่ 19 จะเห็นว่าบล็อกสองอันประกบอยู่ทางด้านซ้ายและด้านขวาของบล็อกตรงกลางที่เป็นรูปพัด พฤติกรรมการวิบัติจะเริ่มจากบล็อกสามเหลี่ยมที่อยู่ใต้ฐานรากจะถูกกดให้เคลื่อนที่ลงดินให้บล็อกรูปพัดที่อยู่ตรงกลางให้หมุนรอบจุดหมุน o ด้วยค่ามุม $d\theta$ และดันให้บล็อกที่สามที่อยู่ขวาสุดเคลื่อนที่ไปพร้อมกัน



ภาพที่ 19 ความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่บล็อกสามเหลี่ยมกับบล็อกรูปพัด

ที่มา: Azizi (2000)

จากภาพที่ 19 สามารถหาความยาวด้าน oc ได้เท่ากับ $\frac{B}{\sqrt{2}}$ และความเร็วในการเคลื่อนที่ตลอดเส้น ac, cO, Od และ de นั้นมีค่าเท่ากับ $V\sqrt{2}$ สามารถเขียนสมการงานเนื่องจากแรงภายนอกที่กระทำต่อระบบได้ดังสมการที่ 41 และสมการพลังงานที่ระบบระบายออกตลอดแนวระนาบ ac, cd และ de ได้ดังสมการที่ 42

$$\delta E = (q_u - \sigma_o)BV \quad (41)$$

$$\delta W_1 = \frac{B}{\sqrt{2}}c_u V\sqrt{2} + \frac{B}{\sqrt{2}}c_u V\sqrt{2} + \frac{B}{\sqrt{2}}c_u V\sqrt{2} \quad (42)$$

$$\delta W_1 = BVc_u \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) \quad (43)$$

ส่วนการระบายพลังงานในส่วนของระนาบส่วนที่มีรูปพัดสามารถอินทิเกรตได้ดังสมการที่ 44 ดังนั้น พลังงานที่ระบบระบายออกรวมได้ดังสมการที่ 45

$$\delta W_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} c_u \frac{B}{2} V\sqrt{2} d\theta \quad (44)$$

$$\delta W = c_u BV \frac{\pi}{2} \quad (45)$$

ณ จุดวิบัติงานที่เกิดจากแรงภายนอกจะเท่ากับพลังงานที่ระบบคายออกมา นำสมการที่ 41 เท่ากับสมการที่ 45 จะได้ผลเฉลยของสมการหรือค่ากำลังแบกทานของดินดังสมการที่ 46

$$q_u = \sigma_o + (2 + \pi)c_u \quad (46)$$

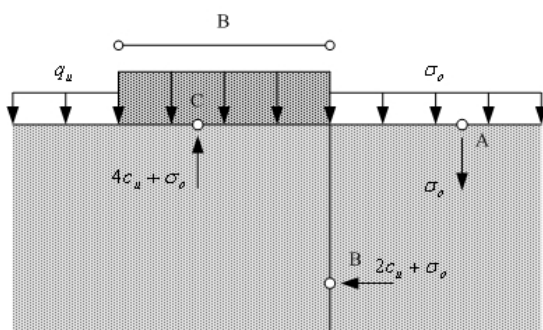
3.2 ทฤษฎีการวิเคราะห์หาขอบเขตล่าง (Lower-Bound Theorem or Safe Theorem)

จะเป็นการหาค่าต่ำที่สุดที่ทำให้เกิดการวิบัติของดิน โดยทำการวิเคราะห์ค่าหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในมวลดินในแต่ละตำแหน่งที่เกิดจากแรงภายนอกและน้ำหนักของมวลดินเอง โดยหน่วยแรงในระบบจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขดังต่อไปนี้ 1. Equilibrium Equations 2. Stress Boundary Equation 3. Yield Criterion

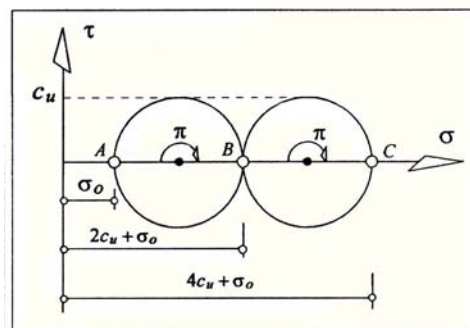
Azizi (2000) ได้แสดงตัวอย่างการวิเคราะห์ด้วยทฤษฎีการวิเคราะห์หาขอบเขตล่าง โดยจะพิจารณาสถานะของหน่วยแรง ณ จุดที่พิจารณาร่วมกับการใช้หลักการของ Morh's Circle ตัวอย่างการวิเคราะห์มีดังต่อไปนี้

1. การกำหนดเส้นตรงแบ่งมวลดินที่จุด O ได้ขอบของฐานรากดังภาพที่ 20 โดยผิวสัมผัสระหว่างมวลทั้งสองด้านกำหนดให้ไม่มีหน่วยแรงเฉือนเกิดขึ้น เมื่อมีหน่วยแรงเฉือน หน่วยแรง ณ จุดที่พิจารณาจะมีค่าเป็นหน่วยแรงหลัก (Principal Stress) เมื่อพิจารณาจุด A หน่วยแรงหลักแนวตั้งจะมีค่าเท่ากับ $\sigma_A = \sigma_o$ โดยหมุนทำมุม π กับจุด B ใน Morh's Circle ซึ่งค่าหน่วยแรงหลักแนวราบที่จุด B ก็จะมีค่าเท่ากับ $\sigma_B = 2c_u + \sigma_o$ และเมื่อหมุนทำมุมอีก 180° หน่วยแรงหลักแนวราบที่จุด B จะเป็นค่าหน่วยแรงหลักทางแนวตั้งหรือค่ากำลังแบกทานของดิน สำหรับปัญหานี้ดังสมการที่ 47

$$q_u = 4c_u + \sigma_o \quad (47)$$



(a) จุดที่พิจารณาหน่วยแรง



(b) ความสัมพันธ์ของหน่วยแรงในวงกลมมอร์

ภาพที่ 20 การแบ่งมวลเพื่อพิจารณาหน่วยแรงในมวลดินและค่าหน่วยแรงในวงกลมมอร์

กรณีแบ่งมวลดินเป็นสองส่วน

ที่มา: Azizi (2000)

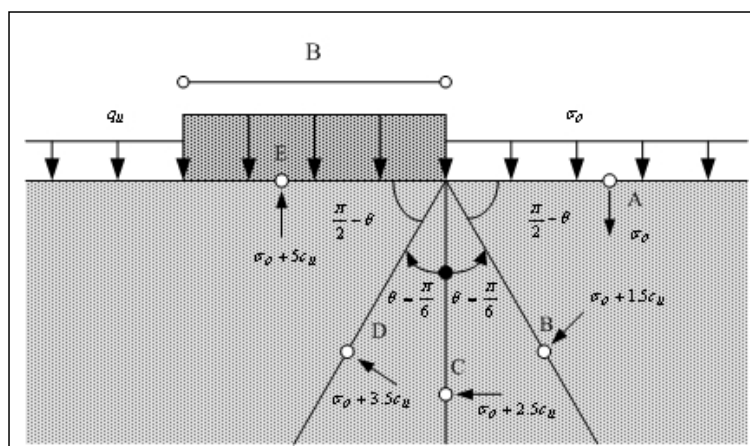
2. การกำหนดเส้นตรงแบ่งมวลดินออกเป็นสามส่วนดังภาพที่ 21 แสดงสถานะของหน่วยแรงที่เส้นแบ่งมวลดินสามเส้นที่ผ่านจุด B C และ D ดังภาพที่ 22 มีจุดหมุนอยู่ที่ขอบฐานรากด้านขวา จากจุด A ไปที่จุด B จะต้องหมุนรอบจุดหมุนเป็นมุม $\pi - 2\theta$ โดยมุมนี้มีค่าเป็นสอง

เท่าของค่ามุมจากรูปที่พิจารณาเมื่อนำพล็อตลงในวงกลมมอร์ ดังนั้น จะได้ค่าหน่วยแรงที่จุด B เท่ากับสมการ 48

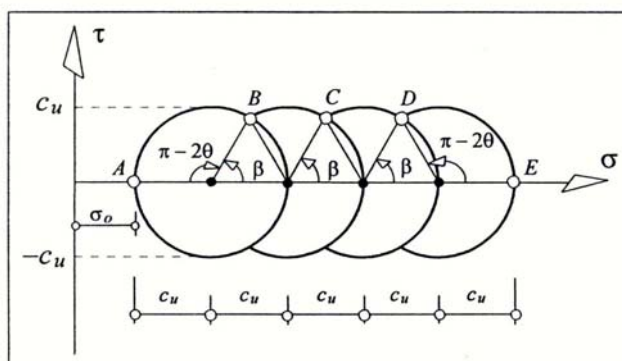
$$\sigma_B = \sigma_o + c_u + c_u \cos \beta \quad (48)$$

กำหนดมุม $\beta = \frac{\pi}{2} - \theta$ และที่จุด B ค่ามุม $\theta = \frac{\pi}{6}$ จะได้ค่า σ_B ดังสมการที่ 49

$$\sigma_B = \sigma_o + 1.5c_u \quad (49)$$



ภาพที่ 21 การแบ่งมวลเพื่อพิจารณาหน่วยแรงในมวลดินโดยแบ่งออกเป็น 3 จุด
ที่มา: Azizi (2000)



ภาพที่ 22 หน่วยแรง ณ จุดที่พิจารณาในวงกลมมอร์
ที่มา: Azizi (2000)

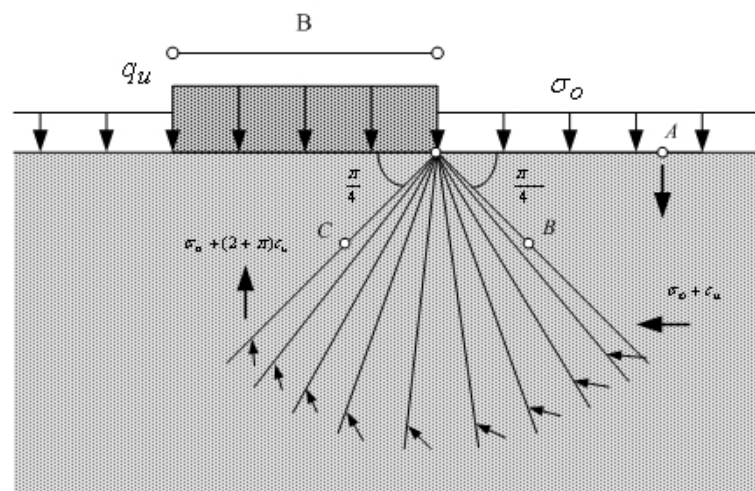
พิจารณาจากภาพที่ 22 ผลเฉลยหรือค่ากำลังแบกทานของดินหาได้ดังสมการที่ 52

$$p_2 - p_1 = 2c_u \cos \beta \quad (50)$$

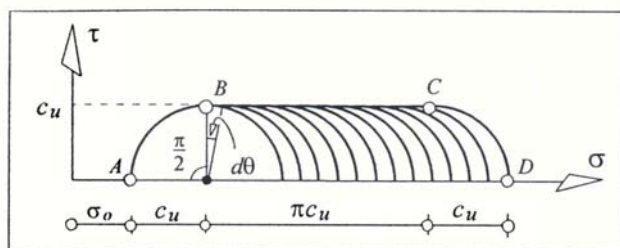
$$\Delta p = 2c_u \sin \theta \quad (51)$$

$$q_u = \sigma_0 + 5c_u \quad (52)$$

3. การกำหนดเส้นแบ่งมวลออกเป็นรูปพัดตรงกลางและประกบด้วยรูปลิ้มทางคันซ้ายและด้านขวาดังภาพที่ 23 โดยกำหนดจุดหมุนของระนาบผิววิบัติอยู่ที่ขอบของฐานราก พิจารณาว่าเส้นแบ่งมวลดินเป็นรูปพัดทำมุม $\theta = \frac{\pi}{2}$ โดยแต่ละเส้นทำมุม $d\theta$ เมื่อนำค่าหน่วยแรงไปพล็อตลงในวงกลมมอร์จากจุด A ไปยังจุด B ต้องหมุนทำมุม 90° โดยมีค่าหน่วยแรงเท่ากับ $\sigma_0 + c_u$ ส่วนที่แต่ละจุดบนเส้นแบ่งย่อยที่ทำมุม $d\theta$ ดังภาพที่ 24 ค่าผลต่างของหน่วยแรงมีค่าเท่ากับสมการที่ 53



ภาพที่ 23 การแบ่งมวลเพื่อพิจารณาหน่วยแรงในมวลดินโดยแบ่งออกเป็นมุม $d\theta$
ที่มา: Azizi (2000)



ภาพที่ 24 หน่วยแรง ณ จุดที่พิจารณาในวงกลมมอร์

ที่มา: Azizi (2000)

$$dp = 2c_u \sin d\theta \approx 2c_u d\theta \quad (53)$$

จะเห็นว่าค่าผลต่างของหน่วยแรงระหว่างจุด B ถึง C หาได้จากการอินทิเกรตดังสมการที่ 54

$$\Delta p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2c_u d\theta \quad (54)$$

$$\Delta p = \pi c_u \quad (55)$$

ดังนั้น ค่าหน่วยแรงหลักแนวตั้งที่จุด D หรือค่าแรงดันดิน ณ จุดใดจุดหนึ่งจะมีค่าเท่ากับ สมการที่ 56 โดยคำตอบนี้เป็นค่าที่มากที่สุดในทฤษฎีการวิเคราะห์หาคอบเขตล่าง

$$q_u = \sigma_0 + (2 + \pi)c_u \quad (56)$$

3. Numerical Method

เป็นการแก้ปัญหาคำนวณด้วยวิธีการทางตัวเลข (Numerical method) ซึ่งปัญหามีสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equation) ควบคุมไว้ วิธีนี้เป็นวิธีที่พยายามที่จะทำให้คำตอบที่ได้สอดคล้องกับทุกๆ เงื่อนไขตามทฤษฎีที่ต้องการอันได้แก่ 1. the Boundary Condition 2. the Equation of Equilibrium 3. the Compatibility Equation 4. the Constitutive of Material วิธีที่นิยมใช้ในการแก้ปัญหาคำนวณด้วยวิธีการทางตัวเลขคือ วิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite Differrent Method) ต่อมาวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ (Finite Element Method) ก็เริ่มเป็นที่นิยม โดยมีการพัฒนาโปรแกรมขึ้นมามากมายรวมทั้งประสิทธิภาพของคอมพิวเตอร์

นั้นมีสูงขึ้นเรื่อยๆ จึงช่วยให้การวิเคราะห์ปัญหาในงานวิศวกรรมปลูกพืชด้วยระบบวิธีไฟในดอ์ลิเมนต์
ง่ายขึ้นและแพร่หลายในปัจจุบัน

ข้อดีของการวิเคราะห์ด้วยวิธีนี้มีมากมาย เช่น การจำลองพฤติกรรมของดินที่มีลักษณะไม่เป็นเส้นตรงได้ การกำหนดรูปร่างของปัญหาได้ตามลักษณะจริง สามารถกำหนดขั้นตอนการวิเคราะห์ได้ (Construction Procedure) สามารถไล่ชิ้นส่วนของโครงสร้างได้ เช่น โครงสร้างกำแพงกันดิน ทำให้เราสามารถที่จะประมาณพฤติกรรมที่น่าจะเกิดขึ้นในขั้นตอนต่างๆของการก่อสร้าง นอกจากนั้นก็สามารถที่จะวิเคราะห์ปัญหาในทางสามมิติได้ซึ่งก็ขึ้นอยู่กับประสิทธิภาพของโปรแกรมนั้น ซึ่งผลการวิเคราะห์ที่ดีนั้นก็ขึ้นอยู่กับความสมบูรณ์ของข้อมูลที่นำมาใช้วิเคราะห์และความชำนาญของผู้วิเคราะห์ว่าเข้าใจข้อมูลและโปรแกรมที่ใช้นั้นดีมากน้อยเพียงใด

โดยสรุปแล้วสามารถที่จะเปรียบเทียบเงื่อนไขที่ต้องใช้และข้อจำกัดสำหรับแต่ละวิธีในการวิเคราะห์ได้ โดยได้แสดงไว้ในตารางที่ 1

ตารางที่ 1 เงื่อนไขในการวิเคราะห์ของแต่ละวิธีในการหาผลเฉลยของปัญหา

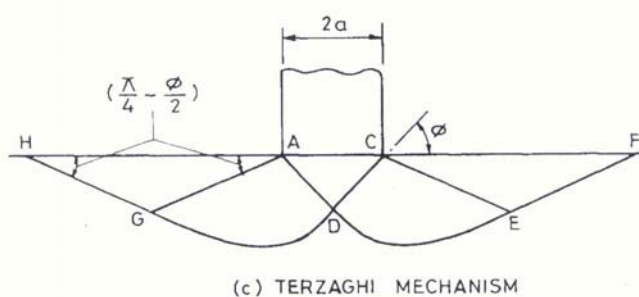
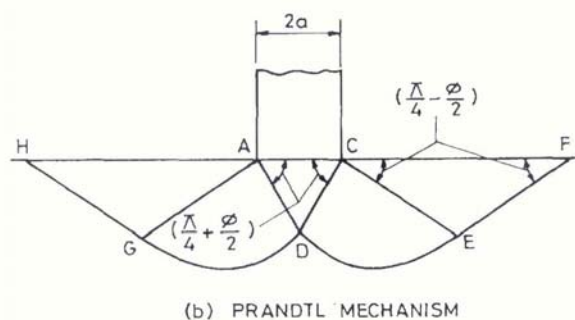
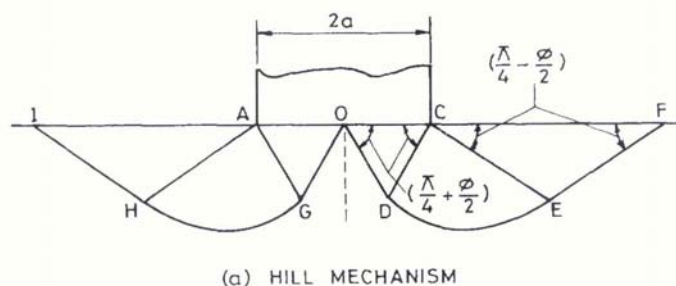
Method of Analysis		Solution Requirements			
		Equilibrium	Compatibility	Constitutive Behavior	Boundary Conditons
					Force Disp.
Closed Form		S	S	Linear Elastic	S S
Limit Equilibrium		S	NS	Rigid with a failure criterion	S NS
Stress Field		S	NS	Rigid with a failure criterion	S NS
Limit Analysis	Lower Bound	S	NS	Ideal plasticity with associates flow rule	S NS
	Upper Bound	NS	S		NS S
Beam-Spring Approaches		S	S	Soil modeled by springs or elastic interaction factors	S S
Full Numerical Analysis		S	S	Any	S S

หมายเหตุ S = Satisfied , NS = Non-Satisfied

ที่มา: Potts (1999)

พฤติกรรมการวิบัติของดินใต้ฐานรากแบบ Strip Footing

พฤติกรรมการวิบัติเป็นสมมุติเส้นแนวทางการเคลื่อนที่ที่ไม่ต่อเนื่อง (The Line of Velocity Discontinuity) ของมวลดินเมื่อเกิดการวิบัติ โดยพฤติกรรมการวิบัติที่ใช้กันในปัจจุบันและใช้เป็นแนวทางในการวิเคราะห์มี 3 แบบด้วยกัน คือ Hill Mechanism, Prandtl Mechanism และ Terzaghi Mechanism



ภาพที่ 25 พฤติกรรมการวิบัติของดินใต้ฐานรากแบบ Strip Footing

(a) พฤติกรรมการวิบัติของ Hill (b) พฤติกรรมการวิบัติของ Prandtl

(c) พฤติกรรมการวิบัติของ Terzaghi

ที่มา: Manoharan and Dasgupta (1993)

ก. สำหรับ Hill Mechanism ดังแสดงในภาพที่ 25a เป็นลักษณะการวิบัติแบบสมมาตรโดยตำแหน่งของแกนอยู่ที่กึ่งกลางของฐานราก เมื่อมวลดินเกิดการวิบัติจะทำให้มวลที่อยู่เหนือเส้นผิววิบัติสมมุติ ODEF เกิดการเคลื่อนตัวอย่างรวดเร็ว โดยมวลที่อยู่เหนือเส้นสมมุติดังกล่าวสามารถแบ่งออกได้เป็น 3 ส่วน ส่วนแรก ODC เป็น Rigid Triangular Wedge โดยทำมุม $\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{\phi}{2}\right)$ กับฐานของฐานราก ส่วน Interface ระหว่างฐานรากกับดินเป็นแบบ Smooth หรือไม่มีแรงหน่วยแรงเฉือน และยอมให้มีการเคลื่อนตัวในแนวราบของ Wedge ได้ ส่วนที่สอง DCE เรียกว่า Log-Spiral Shear Zone โดยทำมุม $\frac{\pi}{2}$ และส่วนที่สาม ECF เรียกว่า Passive Rankine's Triangular Wedge ส่วนนี้จะทำมุม $\left(\frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{\phi}{2}\right)$ กับเส้นตรง CF

ข. Prandtl Mechanism มีพฤติกรรมการวิบัติดังภาพที่ 25b โดยเริ่มจากส่วนที่หนึ่ง ACD จะเกิด Rigid Triangular Wedge โดยทำมุม $\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{\phi}{2}\right)$ กับฐานของฐานราก โดยจะเคลื่อนตัวลงข้างล่าง สัมพันธ์กันกับฐานราก ส่วนที่สอง DCE จะเกิดเป็นรูป Log-Spiral โดยทำมุม $\frac{\pi}{2}$ และส่วนที่สาม ECF เป็น Passive Rankine's Wedge โดยส่วนนี้จะทำมุม $\left(\frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{\phi}{2}\right)$ กับเส้นตรง CF สำหรับของ Prandtl นั้นจะพิจารณาว่าผิวสัมผัสระหว่างฐานรากกับดินนั้นเป็นแบบ Smooth คือไม่มีหน่วยแรงเฉือนเกิดขึ้นที่ผิวสัมผัสระหว่างฐานรากกับผิวดิน

ค. Terzaghi Mechanism เป็นการพัฒนามาจากพฤติกรรมของ Prandtl โดยทำการพิจารณาแยกมวลดินที่เกิดการเคลื่อนตัวออกเป็นสามส่วนเช่นกัน แตกต่างกันตรงที่มุมของ Triangular Wedge ที่กระทำกับฐานราก ดังแสดงในภาพที่ 25c คือส่วนแรก ACD เรียกว่า Triangular Wedge ทำมุมกับฐานรากเท่ากับ ϕ ส่วนที่สอง DCE เรียกว่า Log-Spiral Shear Zone และส่วนที่สาม ECF เรียกว่า Passive Rankine's Triangular Wedge โดยที่มุม $\left(\frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{\phi}{2}\right)$ กับเส้นตรง CF เช่นกัน ส่วนที่ฐานของฐานรากกำหนดให้เป็นแบบขรุขระ ไม่ยอมให้บริเวณผิวสัมผัสของฐานรากกับ Rigid Triangular Wedge มีการเคลื่อนตัวทางแนวราบ

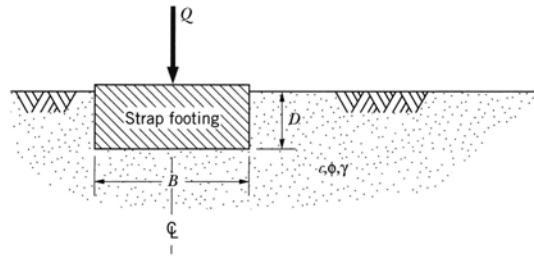
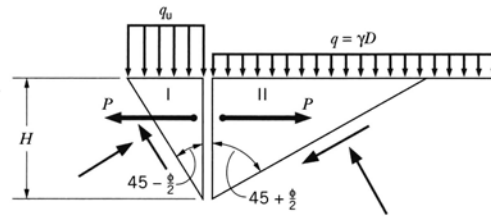
สมการทั่วไปสำหรับการประมาณค่ากำลังแบกทานของดิน

ทฤษฎีที่ใช้ในการประมาณค่าความสามารถรับน้ำหนักของดินสำหรับฐานรากตื้นนั้นมีด้วยกันหลายทฤษฎีด้วยกัน เช่น Closed-Form Solution, Limit Analysis และ Limit Equilibrium ซึ่งวิธี Limit Equilibrium นั้นเป็นที่นิยมในการใช้เพื่อวิเคราะห์หาสมการค่ากำลังแบกทานของดิน

สำหรับสมการทั่วไปที่ใช้กันอยู่ในปัจจุบันนั้นมีด้วยกันหลากหลายสมการ แต่ละสมการก็จะมีผลแตกต่างกันได้แก่ การกำหนดสมมุติฐานในการวิเคราะห์ที่ไม่เหมือนกัน เช่น Prandtl สมมุติว่าไม่มีหน่วยแรงเฉือนระหว่างฐานรากกับดินใต้ฐานราก หรือที่เรียกว่า Smooth ส่วน Terzaghi กลับสมมุติว่ามีหน่วยแรงเฉือนเกิดขึ้นระหว่างฐานรากกับดินใต้ฐานรากหรือที่เรียกว่า Rough นอกจากนั้นก็ยังมีความแตกต่างอีกมากมาย เช่น รูปร่างของระนาบการวิบัติของมวลดิน รูปร่างของฐานราก ลักษณะการกระทำของน้ำหนักของฐานราก ระดับความลึกที่วางฐานราก เป็นต้น ดังนั้น มีความจำเป็นอย่างยิ่งในการศึกษาความแตกต่างของแต่ละสมการที่นำมาใช้ โดยรายละเอียดของแต่ละสมการมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

ก. สมการกำลังแบกทานของดินจากทฤษฎีรูปเล่มของแรงดัน (Rankine Wedge Theory for Bearing Capacity)

จากภาพที่ 26 แสดงให้เห็นฐานรากที่มีลักษณะยาวต่อเนื่องและด้านกว้างที่แคบหรืออัตราส่วนระหว่างความยาวต่อความกว้างค่ามาก โดยฐานรากวางอยู่ลึกจากระดับผิวดินเท่ากับ D ดินฐานรากเป็นดินแบบ $c - \phi$ ได้สมมุติพฤติกรรมของดินใต้ฐานรากเมื่อเกิดการวิบัติว่ารูปเล่มที่ I อยู่ในสภาวะเชิงรุก (Active Rankine Wedge) ซึ่งจะเคลื่อนตัวลงด้านล่างและเคลื่อนไปทางด้านขวา รูปเล่มที่ II อยู่ในสภาวะเชิงรับ (Passive Rankine Wedge) ซึ่งจะถูกดันไปทางด้านขวาแล้วจะเคลื่อนตัวไปทางด้านบน โดยที่ปฏิกิริยาทางแนวราบระหว่างรูปเล่มทั้งสองมีค่าเท่ากับ P มีทิศทางที่เกิดขึ้นระหว่างสองรูปเล่มในทิศทางตรงกันข้าม ค่าแรงปฏิกิริยาในรูปเล่มที่ I สามารถหาได้จากสมการแรงดันเชิงรุก ส่วนรูปเล่มที่ II สามารถหาได้จากสมการแรงดันเชิงรับ ดังสมการที่ 57 และสมการที่ 58 ตามลำดับ การวิเคราะห์ของ Rankine มีข้อยกเว้นของสมมุติฐานคือ หน่วยแรงเฉือนที่เกิดขึ้นระหว่างรูปเล่มทั้งสองจะไม่นำมาพิจารณาในการวิเคราะห์

(a) Footing in $(c-\phi)$ soil.

(b) Rankine wedges.

ภาพที่ 26 รูปลิ่มแรงดันดินในการหาค่ากำลังรับน้ำหนักของ Rankine

(a) สมมุติฐานของปัญหา (b) พฤติกรรมการวิบัติของฐานรากโดย Rankine

ที่มา: Cernica (1995)

$$P = \frac{1}{2} \gamma K_a H^2 - 2cH\sqrt{K_a} + q_u K_a H \quad (57)$$

$$P = \frac{1}{2} \gamma K_p H^2 + 2cH\sqrt{K_q} + q_u K_p H \quad (58)$$

$$K_a = \tan^2 \left(45 - \frac{\phi}{2} \right)$$

$$K_p = \tan^2 \left(45 + \frac{\phi}{2} \right)$$

จากที่แรงปฏิกิริยาจากทั้งสองรูปลิ่มมีค่าเท่ากัน ดังนั้นสมการที่ 59

$$\frac{1}{2} \gamma K_a H^2 - 2cH\sqrt{K_a} + q_u K_a H = \frac{1}{2} \gamma K_p H^2 + 2cH\sqrt{K_a} + q K_p H \quad (59)$$

$$\begin{aligned}
q_u &= \frac{1}{2} \gamma H \left(\frac{1}{K_a} \right) (K_p - K_a) + \frac{2c}{K_a} (\sqrt{K_p} + \sqrt{K_a}) + q K_p^2 \quad (60) \\
K_p &= \frac{1}{K_a} \\
H &= \frac{B}{2 \tan(45 - \frac{\phi}{2})} \\
H &= \frac{B}{2 \sqrt{K_a}}
\end{aligned}$$

ดังนั้น สมการค่ากำลังแบกทานของดินจะมีค่าดังสมการที่

$$q_u = \frac{1}{4} \gamma B K_p^{3/2} (K_p - K_p^{-1}) + 2c K_p (K_p^{1/2} + K_p^{-1/2}) + q K_p^2 \quad (61)$$

$$q_u = \frac{1}{4} \gamma B (K_p^{5/2} - K_p^{1/2}) + 2c (K_p^{3/2} + K_p^{1/2}) + q K_p^2 \quad (62)$$

$$q_u = c N_c + q N_q + \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma \quad (63)$$

$$N_c = 2 (K_p^{3/2} + K_p^{1/2})$$

$$N_q = K_p^2$$

$$N_\gamma = \frac{1}{2} (K_p^{5/2} - K_p^{1/2})$$

$$q_{ult} = \text{ค่ากำลังแบกทานของดิน}$$

$$q_o = \text{น้ำหนักของดินที่ความลึก } D_f = \gamma D_f$$

$$\gamma = \text{หน่วยน้ำหนักของดินเหนือความลึก } D_f$$

$$D_f = \text{ความลึกของฐานรากจากผิวดินถึงขอบล่างของฐานราก}$$

$$c = \text{ความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion)}$$

$$\phi = \text{มุมเสียดทานภายในของดิน (Angle of Internal Friction)}$$

$$B = \text{ความกว้างของฐานราก (Width of Footing)}$$

$$N_c, N_q, N_\gamma = \text{ตัวประกอบความสามารถแรงแบกทานของดิน (Bearing Capacity Factors)}$$

Capacity Factors)

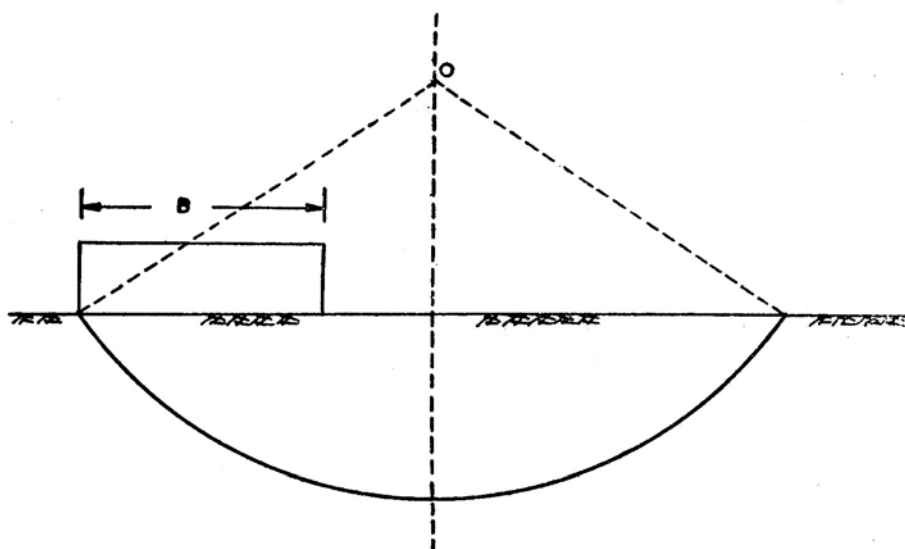
สำหรับดินเหนียว ค่าแรงยึดเหนี่ยวในสภาวะไม่คายน้ำ (C_u , Undrained Condition) จะมีค่าเท่ากับค่ากำลังรับแรงเฉือนแบบไม่คายน้ำ (S_u , Undrained Shear Strength) สำหรับฐานรากที่วางบนผิวดินโดยตรง โดย $\phi = 0$ จะได้ค่าตัวประกอบความสามารถแรงแบกทานของดิน คือ ที่ $\phi = 0$, $N_c = 4$, $N_q = 1$ และ $N_\gamma = 0$ ดังนั้น สมการที่ 63 จะมีค่าดังสมการที่ 64

$$q_{ult} = 4S_u + q_0 \quad (64)$$

ข. สมการกำลังแบกทานของดินเสนอโดย Fellenius (Fellenius Theory for Bearing Capacity)

Fellenius เสนอวิธีการหาค่ากำลังแบกทานของดินเนื่องจากฐานรากที่กระทำอยู่บนดินเหนียว โดยสมมุติระนาบการวิบัติเป็นรูปวงกลมดังภาพที่ 27 สำหรับค่ากำลังแบกทานของดินที่ถูกกระทำด้วยฐานรากแบบ Strip โดยฐานรากดังกล่าววางอยู่บนผิวดินโดยตรง สมการกำลังแบกทานของดินจะเขียนได้ดังสมการที่ 65

$$q_u = 5.5c \quad (65)$$



ภาพที่ 27 ลักษณะการพิบัติของฐานรากตามนิยามของ Fellenius

ที่มา: Bazant (1979)

นอกจากนี้ Wilson (1941) เสนอเพิ่มผลเนื่องความลึกของฐานรากจากระดับผิวดิน โดยแสดงในรูปอัตราส่วนระหว่างระดับความลึกกับความกว้างของฐานราก ดังสมการที่ 66

$$q_u = 5.5c \left(1 + 0.38 \frac{D}{B} \right) \quad (66)$$

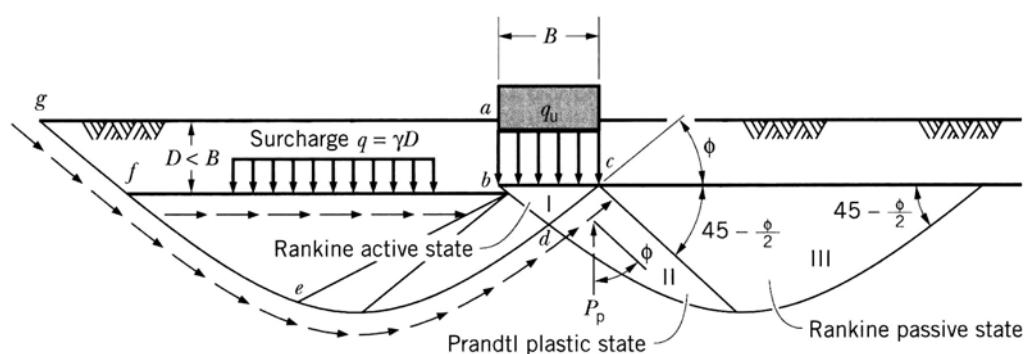
โดย

D = ความลึกของฐานรากจากระดับผิวดิน

B = ความกว้างของฐานราก

c = ค่าความเชื่อมแน่นของดิน

ค. สมการกำลังแบกทานของดินเสนอโดย Terzaghi (Terzaghi Theory for Bearing Capacity)



ภาพที่ 28 ลักษณะการพังทลายของฐานรากตามนิยามของ Terzaghi

ที่มา: Cernica (1995)

Terzaghi (1943) ได้พัฒนาสมการกำลังแบกทานของดินโดยใช้ทฤษฎีรูปลิ้มของแรงดันของ Rankine แต่สมมุติพฤติกรรมการวิบัติตามแบบของ Prandtl โดยพิจารณาผลเนื่องจากน้ำหนักของดินด้วย โดยสมมุติว่าการหาค่ากำลังแบกทานของดินสามารถหาได้จากผลรวมของปัจจัยสามอย่างหรือสามารถใช้กฎการรวมซ้อนแรง (Superposition) ได้ สมมุติฐานในการวิเคราะห์ค่ากำลังแบกทานของดินสำหรับฐานรากตื้นดังนี้

- ฐานรากเป็นฐานรากยาวไม่รู้จักยาวอยู่บนดินในอุดมคติ ซึ่งมีสมบัติคงที่เป็นเนื้อเดียวตลอดมีค่าแรงยึดเหนี่ยวและค่ามุมเสียดทานภายใน
- ผิวใต้ฐานของฐานรากเป็นผิวหยาบ
- ด้านข้างของรูปลิ้มที่เกิดขึ้นใต้ฐานจะเอียงทำมุม ϕ โดยกับแนวราบ
- ผิวระนาบของการพิบัติเป็นรูปเส้นโค้งก้นหอย (Logarithmic Spiral Curve)
- ระบายตัดของพลาสติกโซน (Plastic Zone) อยู่ในสภาวะพาสซีฟ (Passive Rankine State)
- หน่วยแรงเฉือนเกิดขึ้นตลอดทั่วทั้งพลาสติกโซน
- หน่วยแรงกดเหนือจุดที่พิจารณา (Overburden Pressure) แทนโดยน้ำหนักกดที่สมมูลกัน (Equivalent Surcharge load) และไม่มีกำลังรับแรงเฉือน
- กฎการเสริมกันสามารถใช้ได้

จากภาพที่ 28 พฤติกรรมของดินใต้ฐานรากขณะเกิดการวิบัติ Terzaghi กล่าวว่า จะไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของระนาบการวิบัติ ดินใต้ฐานรากส่วนที่ I abc จะถูกกดให้เคลื่อนที่ลง ส่วนดินในส่วนที่ II และ III ไปเคลื่อนที่ไปทางด้านข้าง การเคลื่อนตัวไปทางด้านข้างนี้จะถูกต้านด้วยหน่วยแรงเฉือนของดินที่เกิดขึ้นตามระนาบการวิบัติและแรงต้านที่เกิดจากน้ำหนักตัวของโซน II และ III เองด้วย

Terzaghi (1943) กล่าวว่า ค่ากำลังแบกทานของดินหาได้จากการใช้กฎการเสริมกัน (Superposition) โดยจะประกอบไปด้วย 3 ส่วนดังนี้

1. q_c คือ ค่าความสามารถรับน้ำหนักของดินซึ่งถือว่าเป็นมวลเสมือนไร้น้ำหนักที่มีค่าแรงยึดเหนี่ยว โดยไม่คือน้ำหนักบรรทุกเหนือระดับฐานราก (Surcharge Load)
2. q_u คือ ค่าความสามารถรับน้ำหนักของดินซึ่งถือว่าเป็นมวลเสมือนไร้น้ำหนัก โดยคือน้ำหนักบรรทุกเหนือระดับฐานราก (Overburden Pressure, q_u) แต่ไม่คิดค่าแรงยึดเหนี่ยวของดินที่เป็นน้ำหนักบรรทุกนั้น
3. q_γ คือ ค่าความสามารถรับน้ำหนักของดินที่ไม่มีค่าแรงยึดเหนี่ยว (Cohesionless Soil) โดยคือน้ำหนักของมวลดินนั้นและไม่มีน้ำหนักบรรทุกเหนือระดับฐานราก (Surcharge)

ค่าความสามารถรับน้ำหนักประลัยของดินทั้งหมด (q_{ult}) เท่ากับผลรวมของเทอมทั้งสามตามสมการที่ 67

$$q_{ult} = q_c + q_q + q_\gamma \quad (67)$$

สำหรับฐานรากยาวต่อเนื่อง

$$q_{ult} = cN_c + qN_q + \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma \quad (68)$$

ฐานรากรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

$$q_{ult} = 1.3 cN_c + qN_q + 0.4 \gamma B N_\gamma \quad (69)$$

ฐานรากรูปวงกลม

$$q_{ult} = 1.3 cN_c + qN_q + 0.3 \gamma B N_\gamma \quad (70)$$

$$N_c = \cot \phi \left[\frac{a^2}{2 \cos^2 \left(45 + \frac{\phi}{2} \right)} - 1 \right]$$

$$N_q = \frac{a^2}{2 \cos^2 \left(45 + \frac{\phi}{2} \right)}$$

$$N_\gamma = \frac{1}{2} \tan \phi \left(\frac{K_{p\gamma}}{\cos^2 \phi} - 1 \right)$$

$$K_{p\gamma} = 3 \tan^2 \left[45 + \frac{\phi + 33}{2} \right]$$

$$a = e^{(3\pi/4 - \phi/2) \tan \phi}$$

$$q_{ult} = \text{ความสามารถรับน้ำหนักประลัยของดิน (Ultimate Soil Bearing Pressure)}$$

$$c = \text{ค่าความเชื่อมแน่นของดิน (Cohesion)}$$

q = น้ำหนักที่กระทำเหนือระดับฐานของฐานราก เท่ากับ γD_f

B = ด้านแคบที่สุดสำหรับฐานรากรูปสี่เหลี่ยมหรือด้านกว้างของฐานรากยาว

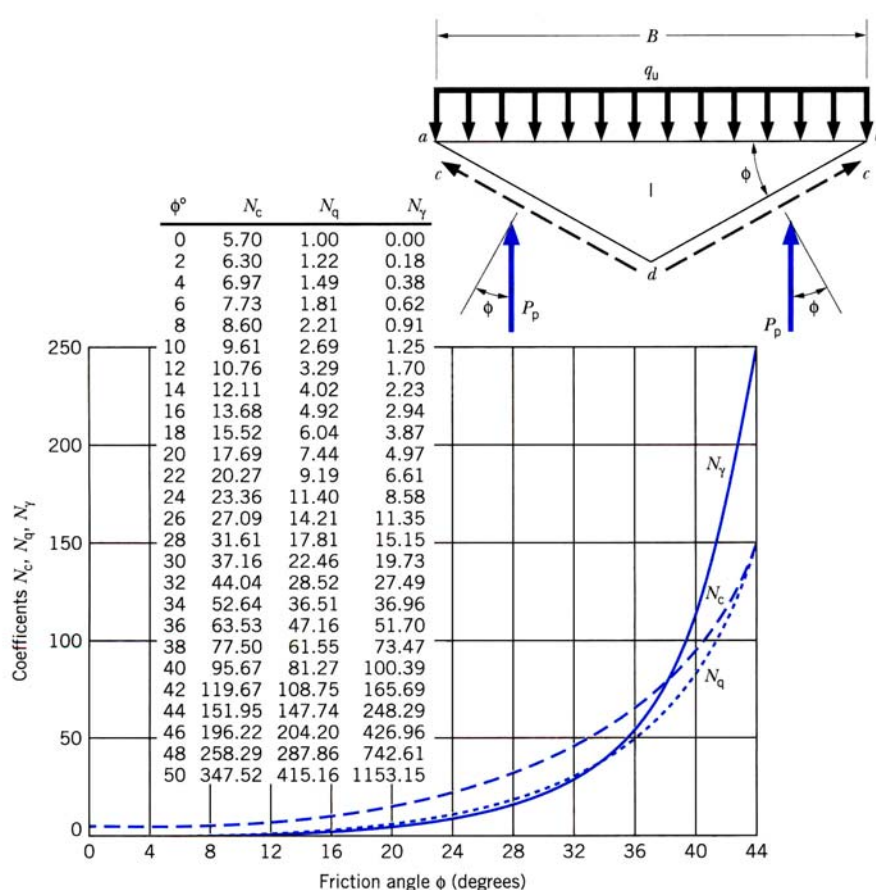
ต่อเนื่องหรือเส้นผ่านศูนย์กลางของฐานรากรูปวงกลมตามลำดับ

ϕ = มุมเสียดทานภายใน (Angle of Internal Friction)

γ = หน่วยน้ำหนักของดิน (Unit Weight of Soil)

N_c, N_q, N_γ = ตัวประกอบความสามารถรับน้ำหนักของดิน (Bearing Capacity

Factors) ดังแสดงไว้ในภาพที่ 29

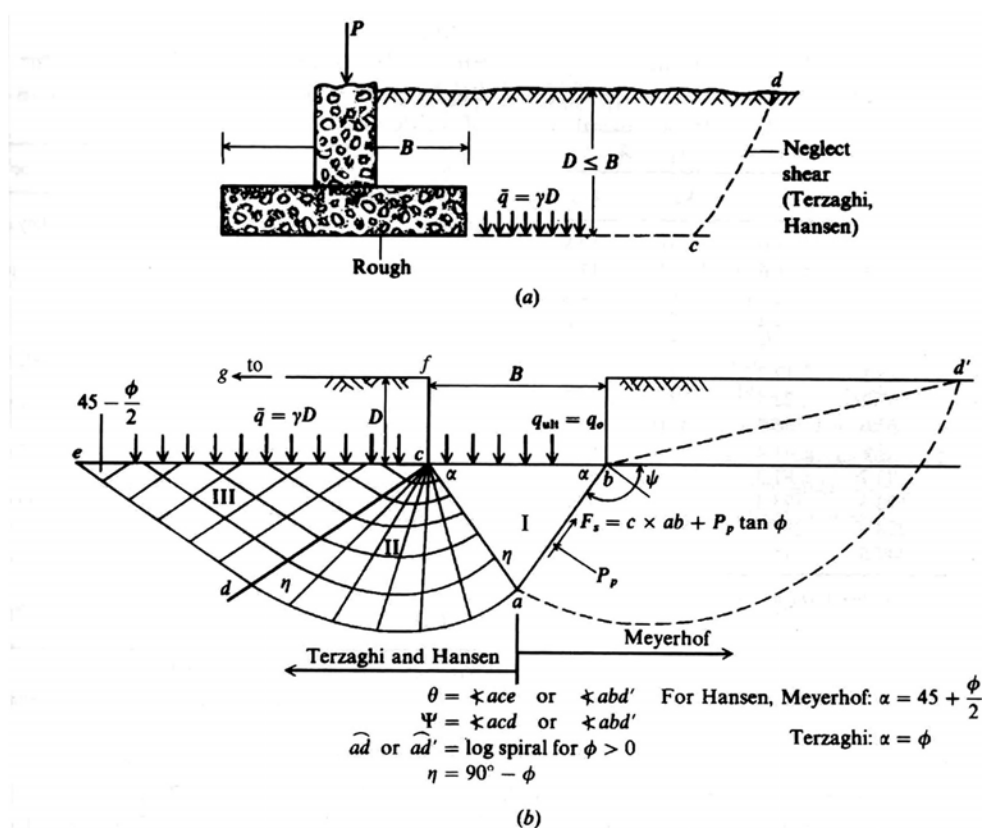


ภาพที่ 29 ค่าตัวประกอบความสามารถรับน้ำหนักของดินของ Terzaghi

ที่มา: Bowles (1996)

ง. สมการกำลังแบกทานของดินเสนอโดย Meyerhof (The Evaluation of Bearing Capacity by Meyerhof)

Meyerhof เสนอสมการหาค่ากำลังแบกทานของดินเหมือนกับสมการของ Terzaghi แต่เพิ่มผลเนื่องจากแรงเฉือนของดินที่อยู่เหนือระดับฐานรากดังภาพที่ 30 และพิจารณาหาตัวประกอบเนื่องจากรูปร่างฐานราก ระดับความลึกของฐานรากและมุมที่น้ำหนักกระทำต่อฐานรากด้วย



ภาพที่ 30 ลักษณะการพิบัติของฐานรากตามนิยามของ Meyerhof

ที่มา: Cernica (1995)

สมการของ Meyerhof ในการหาค่าความสามารถรับน้ำหนักประลัยของดิน สำหรับฐานรากยาวต่อเนื่อง คือ

Vertical Load

$$q_{ult} = cN_c s_c d_c + qN_q s_q d_q + 0.5 \gamma B N_\gamma s_\gamma d_\gamma \quad (71)$$

Inclined Load

$$q_{ult} = cN_c s_c d_c i_c + qN_q s_q d_q i_q + 0.5 \gamma B N_\gamma s_\gamma d_\gamma i_\gamma \quad (72)$$

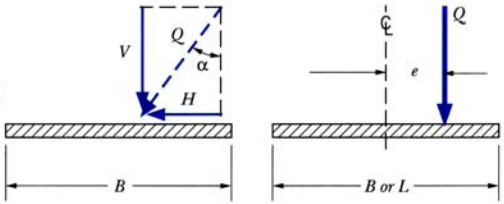
$$N_c = (N_q - 1) \cot \phi$$

$$N_q = e^{\pi \tan \phi} \tan^2 \left(45 + \frac{\phi}{2} \right)$$

$$N_\gamma = (N_q - 1) \tan(1.4\phi)$$

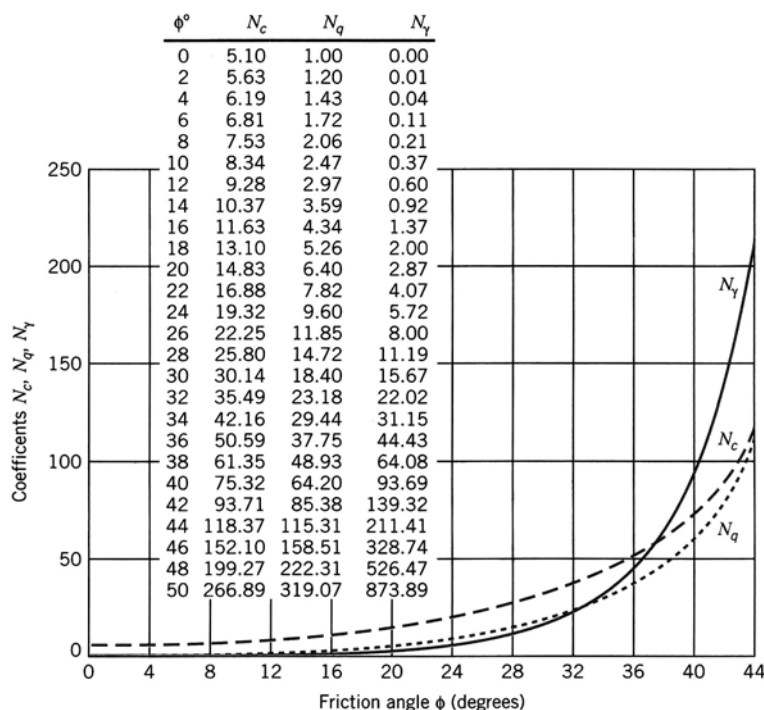
For ϕ	Shape	Depth	Inclination
Any ϕ	$s_c = 1 + 0.2 K_p \frac{B}{L}$	$d_c = 1 + 0.2 \sqrt{K_p} \frac{D}{B}$	$i_c = i_q = \left(1 - \frac{\alpha}{90^\circ} \right)^2$
For $\phi = 0^\circ$	$s_q = s_\gamma = 1.0$	$d_q = d_\gamma = 1.0$	$i_\gamma = 1$
For $\phi \geq 10^\circ$	$s_q = s_\gamma = 1 + 0.1 K_p \frac{B}{L}$	$d_q = d_\gamma = 1 + 0.1 \sqrt{K_p} \frac{D}{B}$	$i_\gamma = \left(1 - \frac{\alpha}{\phi} \right)^2$

$K_p = \tan^2 \left(45 + \frac{\phi}{2} \right)$
 $\alpha =$ angle of resultant measured from vertical axis



When triaxial ϕ is used for plane strain, adjust ϕ to obtain $\phi_{ps} = \left(1.1 - 0.1 \frac{B}{L} \right) \phi_{\text{triaxial}}$

ภาพที่ 31 ค่าตัวประกอบรูปร่างความลึก และความเอียงของน้ำหนักบรรทุกของ Meyerhof
ที่มา: Cernica (1995)



Meyerhof's bearing-capacity coefficients.

ภาพที่ 32 ค่าของตัวประกอบความสามารถรับน้ำหนัก N_c , N_q และ N_γ ของ Meyerhof
ที่มา: Cernica(1995)

จ. สมการกำลังแบกทานของดินเสนอโดย Hansen (Brinch Hansen Theory for Bearing Capacity)

Hansen (1952) ได้เสนอทฤษฎีซึ่งมีวิธีคำนวณเช่นเดียวกับสมการของเทอร์ซากิ แต่ได้พิจารณาหาค่าตัวประกอบรูปร่างฐานราก ความลึกของฐานราก และแนวที่แรงกระทำต่อฐานราก (Inclination or Eccentricity of load) เพิ่มขึ้น สมการค่ากำลังแบกทานของดินที่ Hansen เขียนได้ดังสมการที่ 73

$$Q_{ult} = cN_c s_c d_c i_c g_c b_c + qN_q s_q d_q i_q g_q b_q + 0.5\gamma B' N_\gamma s_\gamma d_\gamma i_\gamma g_\gamma b_\gamma \quad (73)$$

$$N_c = (N_q - 1) \cot \phi$$

$$N_q = e^{\pi \tan \phi} \tan^2 \left(45 + \frac{\phi}{2} \right)$$

$$N_\gamma = 1.50 (N_q - 1) \tan \phi$$

s = ตัวประกอบรูปร่างฐานราก (Shape factor)

d = ตัวประกอบความลึก (Depth factor)

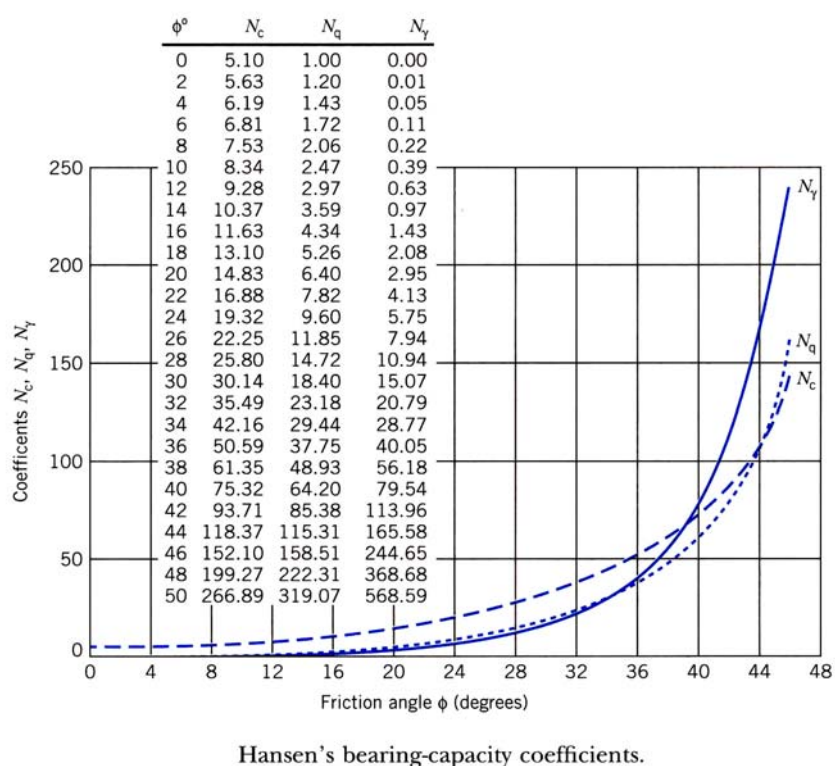
i = ตัวประกอบความเอียงของน้ำหนักรบรรทุก

g = ตัวประกอบความเอียงของฐานราก

b = ตัวประกอบความเอียงของลาดดิน

N_c, N_q, N_γ = ตัวประกอบความสามารถรับน้ำหนักของดิน (Bearing Capacity Factors) ดังแสดงในภาพที่ 33

ส่วนตัวประกอบรูปร่าง ความลึก ตัวประกอบความเอียงของน้ำหนักรบรรทุก ความเอียงของฐานราก และความเอียงของลาดดินได้แสดงในภาพที่ 34



ภาพที่ 33 ค่าตัวประกอบความสามารถรับน้ำหนักของดินสำหรับใช้ในสมการของ Hansen
ที่มา: Cernica (1995)

Shape Factors

Since failure can take place either along the long sides, or along the short sides, Brinch Hansen proposed two sets of shape factors.

$$s_{cB}^a = 0.2 i_{cB}^a B/L$$

$$s_{cL}^a = 0.2 i_{cL}^a L/B$$

$$s_{qB} = 1 + \sin \phi \cdot Bi_{qB}/L$$

$$s_{qL} = 1 + \sin \phi \cdot Li_{qL}/B$$

$$s_{\gamma B} = 1 - 0.4 (Bi_{\gamma B}) : (Li_{\gamma L})$$

$$s_{\gamma L} = 1 - 0.4 (Li_{\gamma L}) : (Bi_{\gamma B})$$

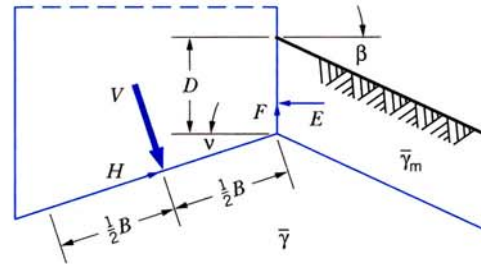
For the last two factors the special rule must be followed, that the value exceeding 0.6 should always be used.

Base and Ground Inclusion Factors

$$b_c^a = \frac{2\nu}{\pi + 2} = \frac{\nu^\circ}{147^\circ} \quad b_q = e^{-2\nu \tan \phi} \quad b_\gamma = e^{-2.7\nu \tan \phi}$$

$$g_c^a = \frac{2\beta}{\pi + 2} = \frac{\beta^\circ}{147^\circ} \quad g_q = [1 - 0.5 \tan \beta]^5 = g_\gamma$$

Load Inclusion Factors



$$i_c^a = 0.5 - 0.5 \sqrt{1 - H/Ac_u}$$

$$i_q = [1 - 0.5 H : (V + Ac \cot \phi)]^5 \quad \text{for } \nu = 0^\circ$$

$$i_\gamma = [1 - 0.7 H : (V + Ac \cot \phi)]^5$$

$$i_\gamma = [1 - (0.7 - \nu^\circ/450^\circ) H : (V + Ac \cot \phi)]^5 \quad \nu > 0^\circ$$

Depth Factors

$$d_c^a = 0.4 D/B$$

for $D \leq B$.

$$d_q = 1 + 2 \tan \phi (1 - \sin \phi)^2 D/B$$

$$d_c^a = 0.4 \arctan D/B$$

for $D > B$

$$d_q = 1 + 2 \tan \phi (1 - \sin \phi)^2 \arctan D/B$$

$$d_\gamma = 1$$

ภาพที่ 34 ตัวประกอบรูปร่าง ความลึก ความเอียงของน้ำหนักบรรทุก ความเอียงของฐานราก ความเอียงของลาดดิน ที่เสนอโดย Hansen

ที่มา: Cernica (1995)

จ. สมการกำลังแบกทานของดินเสนอโดย Vesic (Vesic Theory for Bearing Capacity)

Vesic เสนอสมการหาค่ากำลังแบกทานของดินที่เหมือนกันกับ Hansen โดยที่ค่าตัวประกอบ N_c และ N_q จะมีค่าเท่ากับที่ Hansen เสนอไว้ แต่สมการค่าตัวประกอบ N_γ จะแตกต่างกันไป ดังนั้นสมการหาค่ากำลังแบกทานของดินโดย Vesic มีค่าดังสมการที่ 74

$$Q_{ult} = cN_c s_c d_c i_c g_c b_c + qN_q s_q d_q i_q g_q b_q + 0.5\gamma B' N_\gamma s_\gamma d_\gamma i_\gamma g_\gamma b_\gamma \quad (74)$$

$$N_c = (N_q - 1) \cot \phi$$

$$N_q = e^{\pi \tan \phi} \tan^2 \left(45 + \frac{\phi}{2} \right)$$

$$N_\gamma = 2(N_q + 1) \tan \phi$$

$$s = \text{ตัวประกอบรูปร่างฐานราก (Shape factor)}$$

$$d = \text{ตัวประกอบความลึก (Depth factor)}$$

$$i = \text{ตัวประกอบความเอียงของน้ำหนักรบรรทุก}$$

$$g = \text{ตัวประกอบความเอียงของฐานราก}$$

$$b = \text{ตัวประกอบความเอียงของลาดดิน}$$

N_c, N_q, N_γ = ตัวประกอบความสามารถรับน้ำหนักของดิน (Bearing Capacity Factors) ตามที่แสดงในภาพที่ 35 และภาพที่ 36

ϕ	N_c	N_q	$N_{\gamma(H)}$	$N_{\gamma(M)}$	$N_{\gamma(V)}$	N_q/N_c	$2 \tan \phi (1 - \sin \phi)^2$
0	5.14*	1.0	0.0	0.0	0.0	0.195	0.000
5	6.49	1.6	0.1	0.1	0.4	0.242	0.146
10	8.34	2.5	0.4	0.4	1.2	0.296	0.241
15	10.97	3.9	1.2	1.1	2.6	0.359	0.294
20	14.83	6.4	2.9	2.9	5.4	0.431	0.315
25	20.71	10.7	6.8	6.8	10.9	0.514	0.311
26	22.25	11.8	7.9	8.0	12.5	0.533	0.308
28	25.79	14.7	10.9	11.2	16.7	0.570	0.299
30	30.13	18.4	15.1	15.7	22.4	0.610	0.289
32	35.47	23.2	20.8	22.0	30.2	0.653	0.276
34	42.14	29.4	28.7	31.1	41.0	0.698	0.262
36	50.55	37.7	40.0	44.4	56.2	0.746	0.247
38	61.31	48.9	56.1	64.0	77.9	0.797	0.231
40	75.25	64.1	79.4	93.6	109.3	0.852	0.214
45	133.73	134.7	200.5	262.3	271.3	1.007	0.172
50	266.50	318.5	567.4	871.7	761.3	1.195	0.131

ภาพที่ 35 ค่าตัวประกอบความสามารถรับน้ำหนักของดินสำหรับใช้ในสมการของ Vesic
ที่มา: Bowles (1996)

Inclination factors	Ground factors (base on slope)
$i'_c = 1 - \frac{mH_i}{A_f c_a N_c} \quad (\phi = 0)$	$g'_c = \frac{\beta}{5.14} \quad \beta \text{ in radians}$
$i_c = i_q - \frac{1 - i_q}{N_q - 1} \quad (\phi > 0)$	$g_c = i_q - \frac{1 - i_q}{5.14 \tan \phi} \quad \phi > 0$
i_q , and m defined below	i_q defined with i_c
$i_q = \left[1.0 - \frac{H_i}{V + A_f c_a \cot \phi} \right]^m$	$g_q = g_\gamma = (1.0 - \tan \beta)^2$
Base factors (tilted base)	
$i_\gamma = \left[1.0 - \frac{H_i}{V + A_f c_a \cot \phi} \right]^{m+1}$	$b'_c = g'_c \quad (\phi = 0)$
$m = m_B = \frac{2 + B/L}{1 + B/L}$	$b_c = 1 - \frac{2\beta}{5.14 \tan \phi}$
$m = m_L = \frac{2 + L/B}{1 + L/B}$	$b_q = b_\gamma = (1.0 - \eta \tan \phi)^2$

ภาพที่ 36 ค่าตัวประกอบรูปร่างความลึก และความเอียงของดินในสมการของ Vesic
ที่มา: Bowles (1996)

ทฤษฎีทางด้าน Continuum Mechanics

Continuum Mechanics เป็นเรื่องที่เกี่ยวข้องกับวัสดุที่เป็นของแข็ง ของเหลว และก๊าซ โดยมีสมมติฐานว่าวัสดุเหล่านี้เป็นมวลที่มีความต่อเนื่อง จุดมุ่งหมายของการศึกษาคือเพื่ออธิบายถึงการยุบตัวและการเคลื่อนที่ของวัสดุเนื่องจากแรงภายนอกที่มากระทำ ในการอธิบายถึงแรง การยุบตัว หรือการเคลื่อนที่ที่จะแสดงอยู่ในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์ โดยอ้างอิงตำแหน่งที่พิจารณากับระบบพิกัดเพื่อความสะดวกในการแก้ปัญหา

ทฤษฎีพื้นฐานที่เกี่ยวกับ Continuum Mechanics ที่ควรทราบมี 3 ทฤษฎีคือ ทฤษฎียืดหยุ่น (Theory of Elasticity) ทฤษฎีอีลาสโตพลาสติก (Theory of Elastoplastic) และทฤษฎีพลาสติก (Theory of Plasticity) ในแต่ละทฤษฎีก็จะใช้ในการวิเคราะห์พฤติกรรมในแต่ละช่วงสภาวะของวัสดุ

สำหรับทฤษฎียืดหยุ่น (Theory of Elasticity) จะนำมาใช้วิเคราะห์ในช่วงที่มวลดินยังคงอยู่ในสภาวะที่ไม่มีการวิบัติเกิดขึ้นในมวลดินหรือเป็นการวิเคราะห์ในช่วงที่มีค่าความเครียดน้อยมาก สำหรับทฤษฎีพลาสติกจะนำมาใช้วิเคราะห์ในช่วงที่มีการวิบัติของมวลดินเกิดขึ้นซึ่งจะเป็นช่วงที่มวลดินมีการเคลื่อนตัวสูงมาก ส่วนรอยต่อระหว่างช่วงหรือกระบวนการเปลี่ยนแปลงจากช่วงที่มวลดินยังไม่มีการวิบัติเกิดขึ้นจนกระทั่งมวลดินมีการวิบัติเกิดขึ้นเป็นช่วงที่เรียกว่าอีลาสโต-พลาสติกต้องใช้ทฤษฎี Elasto-Plastic เข้ามาใช้ในการวิเคราะห์

Theory of Elasticity

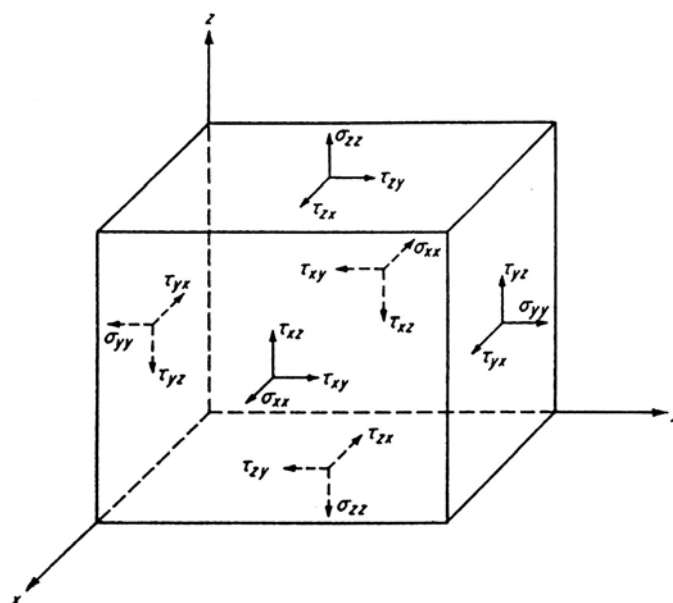
ทฤษฎียืดหยุ่น Theory of Elasticity เป็นการวิเคราะห์หาผลลัพธ์อันเนื่องมาจากปัจจัยภายนอกที่มากระทำกับมวลที่พิจารณา โดยผลลัพธ์หลักของการวิเคราะห์ที่ต้องทราบคือ ความเค้น ความเครียด และการยุบตัวของมวล สมการควบคุมสำหรับวัสดุแบบยืดหยุ่น (Governing Equation in Linear Elasticity) เพื่อใช้ในการวิเคราะห์จะประกอบไปด้วย 3 สมการหลัก ได้แก่ 1. Equations of Equilibrium. 2. Equations of Compatibility of Strain. 3. Equations of Material Behavior (Constitutive Equations) และเงื่อนไขอีกข้อที่ต้องใช้คือ Boundary Condition (B.C.) ของปัญหานั้นๆซึ่งแต่ละปัญหาก็จะมีการกำหนด B.C. ที่แตกต่างกัน

1. Equations of Equilibrium.

พิจารณามวลที่อยู่ในสภาวะสมดุลภายใต้แรงกระทำจากภายนอก เมื่อทำการพิจารณา ณ จุดเล็กๆจุดหนึ่งจะสามารถแสดงสภาวะของหน่วยแรงที่เกิดขึ้นได้ด้วยรูปสี่เหลี่ยมลูกบาศก์ที่ตั้งอยู่ในระบบพิกัดแบบ (x,y,z) ดังแสดงในภาพที่ 37

ในแต่ละระนาบจะมีหน่วยแรง (σ_{ij}) กระทำอยู่ โดยที่ i แทนระนาบที่หน่วยแรงกระทำตั้งฉาก และ j แทนทิศทางที่หน่วยแรงกระทำ หาก $i = j$ จะเรียกว่า หน่วยแรงตั้งฉาก (Normal Stress) และหาก $i \neq j$ จะเรียกว่า หน่วยแรงเฉือน ซึ่งสามารถแทน σ_{ij} ด้วย τ_{ij} ได้ ซึ่งจากภาพที่จะเขียนหน่วยแรงทั้งหมดที่เกิดขึ้นในรูปเมทริกซ์ได้ดังสมการที่ 75

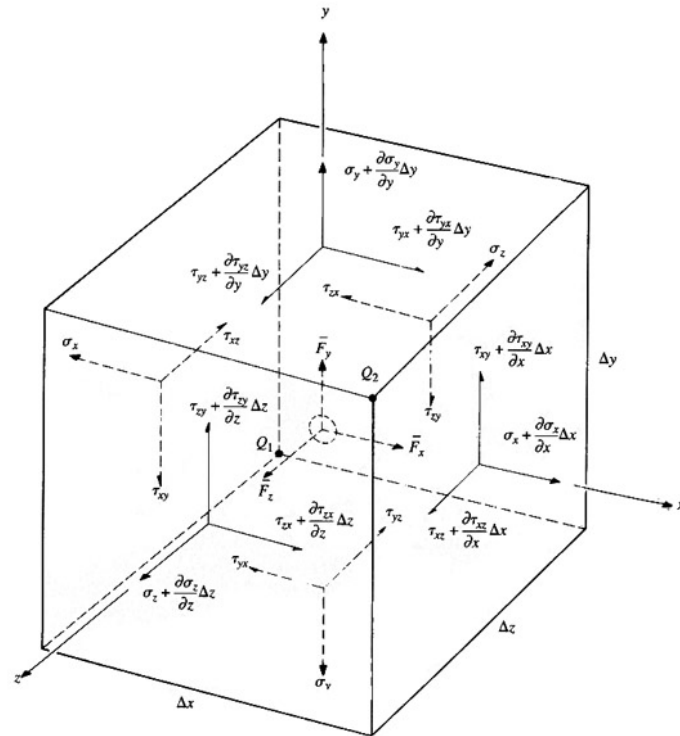
$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (75)$$



ภาพที่ 37 หน่วยแรงที่เกิดขึ้นบนแต่ละระนาบของมวลสี่เหลี่ยมลูกบาศก์

ที่มา: James W.D. and William F.R. (1991)

ในระบบ 3 มิติ ณ จุดใดๆของมวลที่มีขนาด dx , dy และ dz พิจารณาสามารถเขียนสมการสมดุลของแรงได้โดยพิจารณาจากภาพที่ 38 กำหนดให้ F_x , F_y และ F_z เป็นแรงเนื่องจากน้ำหนักของมวล



ภาพที่ 38 หน่วยแรงที่กระทำต่อมวลสี่เหลี่ยมลูกบาศก์ในสภาวะสมดุล กรณี 3 มิติ
ที่มา: Richard (1999)

เมื่อทำการรวมแรงในแนวแกน x จะได้สมการ ดังนี้

$$\sum F_x = 0 ;$$

$$\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx - \sigma_{xx} \right) dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy - \tau_{yx} \right) dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz - \tau_{zx} \right) dx dy + F_x dx dy dz = 0 \quad (76)$$

หารสมการด้วย $dx dy dz$ และทำการจัดรูปจะได้

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0 \quad (77)$$

สำหรับแกน y และ z ก็ทำเช่นเดียวกันก็จะได้สมการสมดุลดังนี้

$$\text{แกน } y \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y = 0 \quad (78)$$

$$\text{แกน } z \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z = 0 \quad (79)$$

และเมื่อพิจารณาโมเมนต์รอบแต่ละแกน จะได้ว่า

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

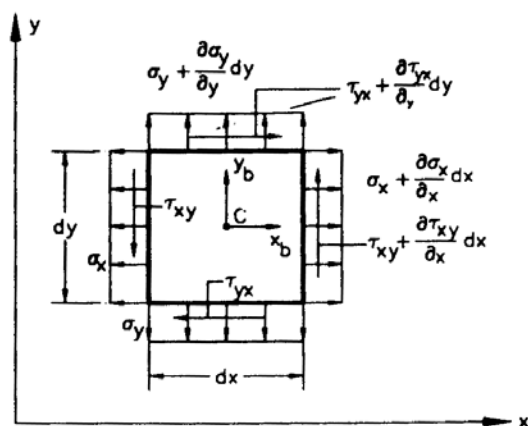
$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

หากพิจารณาในลักษณะปัญหา 2 มิติดังแสดงในภาพที่ 39 สมการสมดุลจะมีค่าดังสมการที่ 80 และสมการที่ 81

$$\text{แกน } x \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_x = 0 \quad (80)$$

$$\text{แกน } y \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y = 0 \quad (81)$$

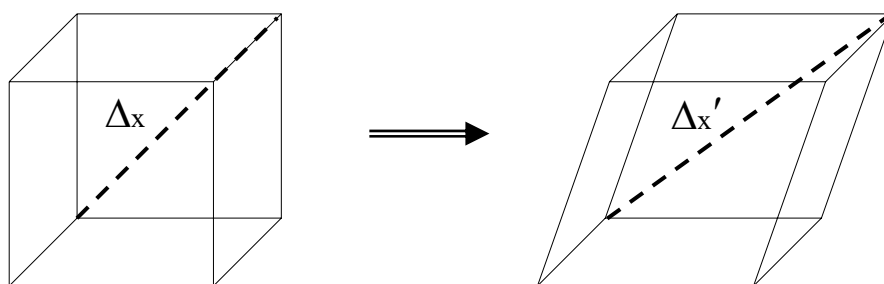


ภาพที่ 39 หน่วยแรงที่กระทำต่อมวลสี่เหลี่ยมลูกบาศก์ในสถานะสมดุล กรณี 2 มิติ
ที่มา: Richard (1999)

2. Equations of Compatibility of Strain.

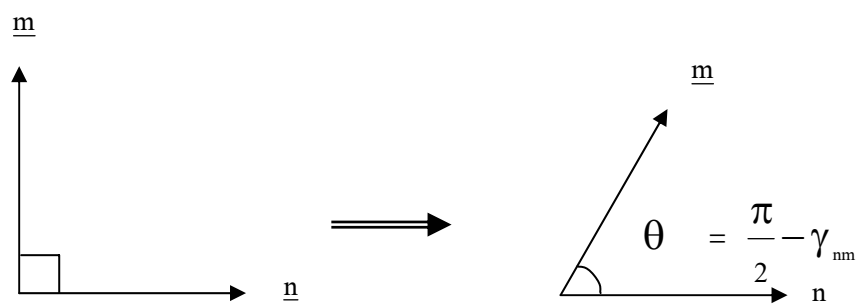
ความเครียด (Strain, ϵ) ที่เกิดขึ้นแบ่งออกเป็น 2 แบบ คือ Normal Strain และ Shear Strain ซึ่งอธิบายได้ดังนี้

Normal Strain (ϵ_{nn}) คือ อัตราส่วนระหว่างค่าความยาวที่เปลี่ยนไปต่อค่าความยาวเดิมของระยะทางระหว่างจุด 2 จุด ดังภาพที่ 40



ภาพที่ 40 การเปลี่ยนแปลงความยาวของอีลิเมนต์เมื่อมี load มากกระทำ
ที่มา: สัจชัย (2002)

Shear Strain (ϵ_{nm}) คือ อัตราส่วนระหว่างค่ามุมที่เปลี่ยนแปลงไปกับค่ามุมเดิมที่วางตั้งฉากอยู่ ดังภาพที่ 41

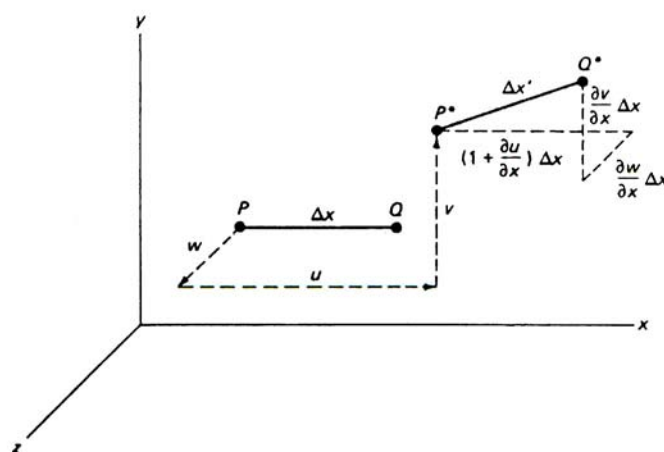


ภาพที่ 41 การเปลี่ยนแปลงมุมของอีลิเมนต์เมื่อมี load มากระทำ
ที่มา: สัจชัย (2002)

สำหรับ Normal Strain สามารถที่จะเขียนสมการได้ดังสมการที่ 82

$$\epsilon_{xx} = \frac{\Delta x' - \Delta x}{\Delta x} \quad (82)$$

$$\Delta x' = (1 + \epsilon_{xx}) \Delta x \quad (83)$$



ภาพที่ 42 Displacement Gradient ของ Normal Strain

ที่มา: Richard (1999)

จากภาพที่ 42 สามารถเขียนเวกเตอร์การกระจัดได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= \{\Delta_x, 0, 0\} \\ \overline{PQ} &= \{1, 0, 0\} \Delta_x \\ \overline{P'Q'} &= \left\{1 + \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}\right\} \Delta_x\end{aligned}$$

ดังนั้น สมการของ Normal Strain ในทิศทางแกน x มีค่าเท่ากับสมการที่ 84

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \frac{|\overline{P'Q'}| - |\overline{PQ}|}{|\overline{PQ}|} \\ \epsilon_{xx} &= \sqrt{\left(1 + 2\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} - 1 \\ \epsilon_{xx} &= \sqrt{1 + \frac{2\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} - 1 \quad (84)\end{aligned}$$

และเมื่อพิจารณา Displacement ที่เกิดขึ้นในแนวแกน y และ z ก็จะได้ สมการของ Normal Stress ดังนี้

$$\epsilon_{yy} = \sqrt{1 + \frac{2\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} - 1 \quad (85)$$

$$\epsilon_{zz} = \sqrt{1 + \frac{2\partial w}{\partial z} + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2} - 1 \quad (86)$$

สำหรับ Shear Strain จากนิยามของ Shear Strain

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \left(\frac{\pi}{2} - \theta^*\right) \\ \cos \theta^* &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}\right)\end{aligned}$$

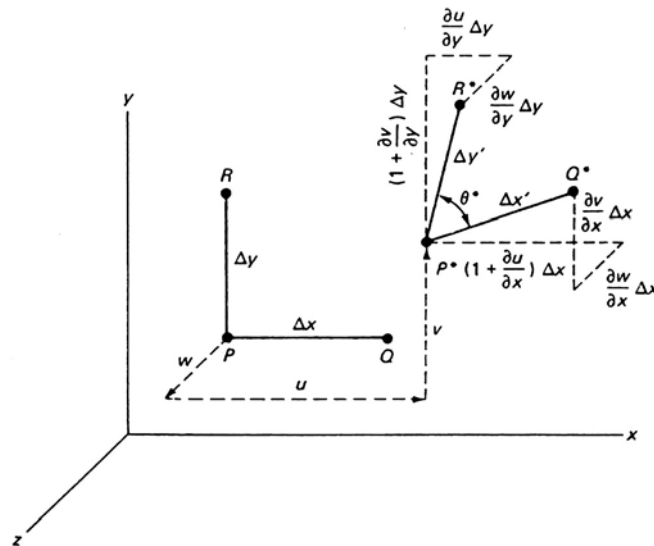
$$\cos \theta^* = \sin \gamma_{xy}$$

$$\sin \gamma_{xy} = \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \left(\frac{\Delta x}{\Delta x'} \frac{\Delta y}{\Delta y'} \right) \quad (87)$$

จากภาพที่ 43 สามารถเขียนเวกเตอร์การกระจัดได้ดังสมการที่ 88 และสมการที่ 89

$$\Delta x' = (1 + \epsilon_{xx}) \Delta x \quad (88)$$

$$\Delta y' = (1 + \epsilon_{yy}) \Delta y \quad (89)$$



ภาพที่ 43 Displacement Gradient ของ Shear Strain

ที่มา: Richard (1999) ta407d32

ดังนั้น

$$\sin \gamma_{xy} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}}{(1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)} \quad (90)$$

$$\gamma_{xy} = \arcsin \frac{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}}{(1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)} \quad (91)$$

สำหรับในแนวแกน y และ z ก็เช่นเดียวกัน

$$\gamma_{yz} = \arcsin \frac{\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z}}{(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z)} \quad (92)$$

$$\gamma_{zx} = \arcsin \frac{\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x}}{(1 + \epsilon_z)(1 + \epsilon_x)} \quad (93)$$

แต่สำหรับกรณีที่ Strain เกิดขึ้นน้อย จะสามารถลดรูปสมการของ Normal Strain และ Shear Strain ได้ดังนี้

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (94)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (95)$$

จากสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการกระจัด เพื่อตรวจสอบว่าจุดใดจุดหนึ่ง ส่วนประกอบของการกระจัด u, v และ w จะมีค่าเพียงค่าเดียวและเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องไม่ขาดตอนหรือทับซ้อนกัน จำเป็นต้องมีสมการเงื่อนไขของการต่อเนื่อง (Equation of Compatibility of Strain) เป็นตัวกำกับ ซึ่งสมการเงื่อนไขของความต่อเนื่องมี 6 สมการดังนี้

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (96)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (97)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = 2 \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \quad (98)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \quad (99)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yx}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} \quad (100)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yx}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \quad (101)$$

3. Equations of Material Behavior (Constitutive Equations)

การวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดของทฤษฎีความยืดหยุ่นเป็นการวิเคราะห์ในช่วงที่ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดเป็นเส้นตรงหรือที่ค่าความเครียดต่ำ เมื่อมีการถอนน้ำหนักออกความเครียดที่เกิดขึ้นก็สามารถกลับมาสู่จุดเริ่มต้นได้นั่นคือวัสดุดังกล่าวยังอยู่ในสภาวะอีลาสติกนั่นเอง

จากกฎของฮุค (Hooke's Law) กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดไว้ว่า ความเค้นจะแปรผันโดยตรงกับความเครียดเขียนเป็นสมการดังนี้

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &\propto \varepsilon_{kl} \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \end{aligned} \quad (102)$$

โดย σ_{ij} และ ε_{kl} คือ เวกเตอร์ของความเค้นและความเครียดตามลำดับ

$$\sigma_{ij} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} \quad \text{และ} \quad \epsilon_{kl} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

ส่วนเมทริกซ์ C_{ijkl} จะเป็นเมทริกซ์มิติ 6×6 ซึ่งค่าสัมประสิทธิ์ในเมทริกซ์ดังกล่าวเป็นค่าคุณสมบัติของวัสดุ จากสมมุติฐานของฮุกที่ว่าวัสดุนั้นมีคุณสมบัติเป็น Homogeneous Isotropy และ Linear-Elastic Behavior ซึ่งก็จะทำให้ค่าสัมประสิทธิ์ในเมทริกซ์ C_{ijkl} ลดลงอยู่ในรูปของสมการที่ 103

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (103)$$

โดย

$$\lambda, \mu = \text{Lame's Constant}$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

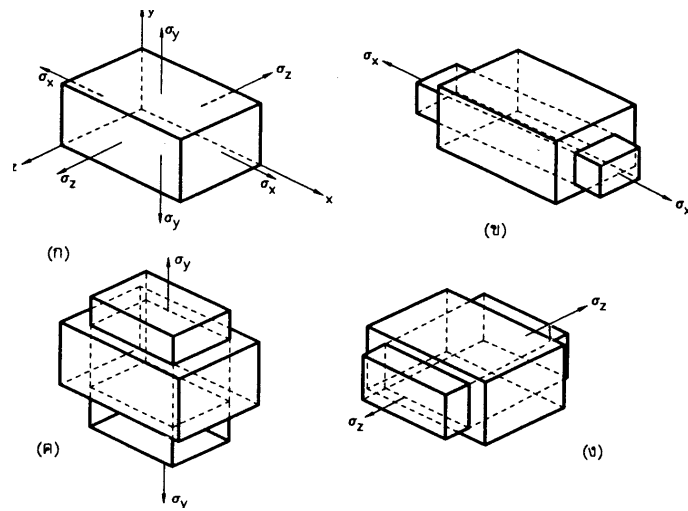
$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G$$

$$G = \text{Shear Modulus}$$

$$E = \text{โมดูลัสความยืดหยุ่น (Young's Modulus)}$$

$$\nu = \text{อัตราส่วนปัวซอง (Poisson's Ratio)}$$

หากพิจารณาแท่งเหล็กภายใต้สภาวะ Uniaxial Stress กระทำในแกน x ดังภาพที่ 44 เมื่อความเค้น σ_{xx} เกิดขึ้นก็จะทำให้เกิดความเครียดในแต่ละทิศทางดังนี้



ภาพที่ 44 การเปลี่ยนแปลงความเครียดของแท่งมวลในแต่ละทิศทางเมื่อมีความเค้นกระทำ
ที่มา: เดช (2541)

$$\epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} \quad (104)$$

$$\epsilon_{yy} = -\nu \epsilon_{xx} \quad (105)$$

$$\epsilon_{yy} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} \quad (106)$$

$$\epsilon_{zz} = -\nu \epsilon_{xx} \quad (107)$$

$$\epsilon_{zz} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} \quad (108)$$

และเมื่อมีความเค้นในสภาวะ Uniaxial Stress กระทำในแกน y ความเครียดที่เกิดขึ้นในแต่ละแกนสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\epsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} \quad (109)$$

$$\epsilon_{xx} = -\nu \epsilon_{yy} \quad (110)$$

$$\epsilon_{xx} = -\nu \frac{\sigma_{yy}}{E} \quad (111)$$

$$\epsilon_{zz} = -\nu \frac{\sigma_{yy}}{E} \quad (112)$$

และเมื่อมีความเค้นในสภาวะ Uniaxial Stress กระทำในแกน z ความเครียดที่เกิดขึ้นในแต่ละแกนสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\epsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} \quad (113)$$

$$\epsilon_{xx} = -\nu \frac{\sigma_{zz}}{E} \quad (114)$$

$$\epsilon_{yy} = -\nu \frac{\sigma_{zz}}{E} \quad (115)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (116)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (117)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \quad (118)$$

ดังนั้น เมื่อรวมค่าความเครียดที่เกิดขึ้นในแต่ละแกนทั้งหมดจะสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดได้ดังนี้

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \quad (119)$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \quad (120)$$

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (121)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (122)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (123)$$

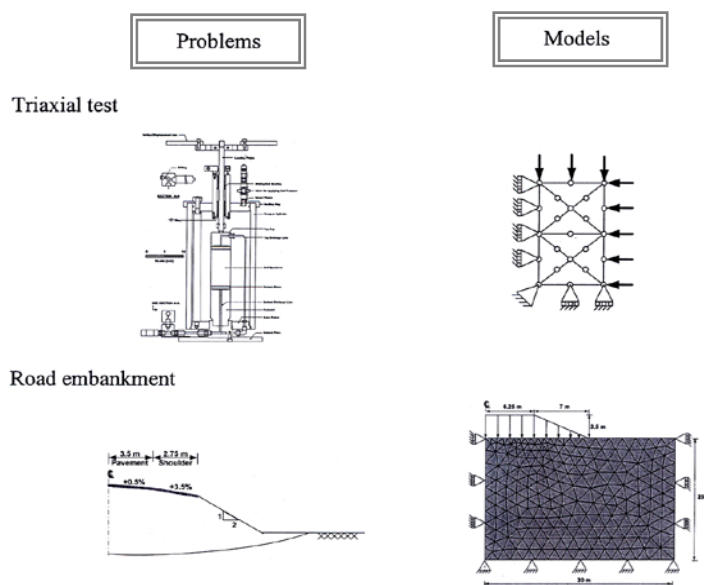
$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \quad (124)$$

หรืออาจเขียนอยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}$$

4. เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Condition)

การวิเคราะห์ปัญหาจะต้องทำการจำลองรูปแบบให้มีความใกล้เคียงกับสภาพจริงให้มากที่สุด เมื่อได้รูปแบบของปัญหาแล้วก็ต้องกำหนดเงื่อนไขขอบเขตว่ามีลักษณะเช่นใด เช่น มีน้ำหนักมากระทำอย่างไร ลักษณะการเคลื่อนตัวของขอบเขตปัญหาเป็นอย่างไร เป็นต้น ความจำเป็นของการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตปัญหานั้น โดยการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตจะกำหนดได้ 2 รูปแบบ คือ 1. กำหนดเป็นน้ำหนัก (Load Condition) 2. กำหนดเป็นการเคลื่อนที่ (Displacement Condition) ตัวอย่างของการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตแสดงดังภาพที่ 45

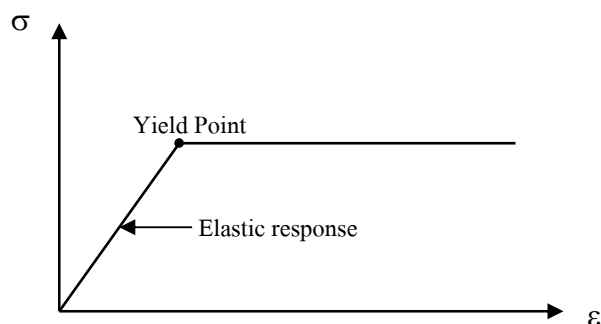


ภาพที่ 45 การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา

ที่มา: สุริวัตร (2548)

Theory of Elastoplastic

ทฤษฎี Elastoplastic จะเป็นการอธิบายถึงพฤติกรรมของวัสดุที่มีทั้งสถานะอีลาสติกและสถานะพลาสติกเกิดขึ้น ซึ่งในการวิเคราะห์นั้นซับซ้อนจึงจำเป็นที่จะต้องนำคอมพิวเตอร์เข้ามาช่วยในการแก้ปัญหา



ภาพที่ 46 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดของวัสดุ

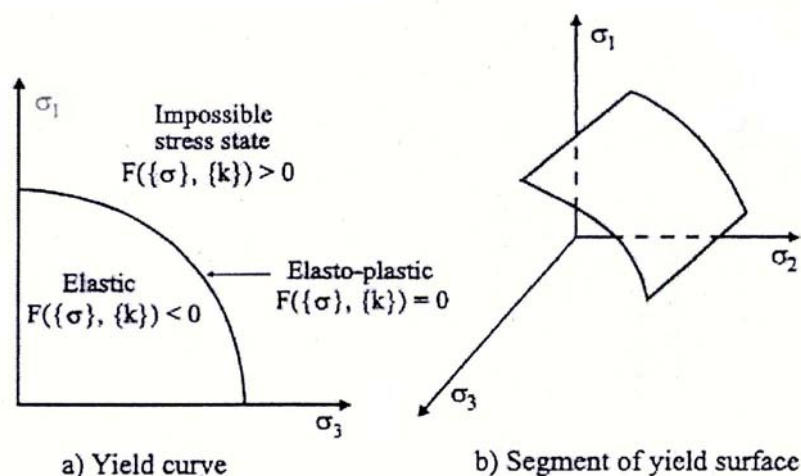
ที่มา: Davis and Selvadurai (2002)

หากพิจารณาภาพที่ 46 ในช่วงต้นเมื่อวัสดุรับน้ำหนักความเครียดจะแปรผันตามความเค้น จน ณ จุดหนึ่งที่มีค่าความเค้นมากที่สุดที่ยังคงทำให้วัสดุเกิดความเครียดยืดหยุ่น (Elastic Strain, ϵ_e) จุดดังกล่าวนี้จะเรียกว่า Yield Point โดยหากค่าความเค้นยังมีค่ามากกว่าจุดนี้หรือวัสดุยังรับน้ำหนักเกินจุด Yield ความเครียดที่เกิดขึ้นจะเป็นความเครียดพลาสติก (Plastic Strain, ϵ_p) หรือเรียกว่า Plastic Flow ดังนั้น ความเครียดทั้งหมดที่เกิดขึ้นจะประกอบด้วยความเครียดยืดหยุ่นกับความเครียดแบบพลาสติกเขียนเป็นสมการได้คือ

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (125)$$

จากสมการข้างต้น Elastic Strain เป็นการอธิบายถึงการเปลี่ยนแปลงของความเครียดที่เกิดขึ้นเนื่องจากความเค้น ส่วน Plastic Strain จะอธิบายอยู่ในรูปของความสัมพันธ์ระหว่าง Derivative ของ Yield Function กับค่าหน่วยแรงที่กระทำ โดยสามารถอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างพฤติกรรมของวัสดุกับ Yield Function ได้ดังนี้

- Plastic Strain จะเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อตำแหน่งของหน่วยแรงที่เกิดขึ้นอยู่บนพื้นผิวขอบเขตการวิบัติ, $f(\sigma_{ij}) = 0$
- หากตำแหน่งของค่าหน่วยแรงอยู่ภายในพื้นผิวขอบเขตการวิบัติ ก็จะไม่มีการเกิด Plastic Strain
- ตำแหน่งของหน่วยแรงจะต้องอยู่นอกพื้นผิวขอบเขตการวิบัติ



ภาพที่ 47 ความสัมพันธ์ระหว่าง Yield Criteria กับ Plastic Strain ที่เกิดขึ้น

ที่มา: จีรวัต (2548)

ในการหาค่าความเครียดยืดหยุ่นของปัญหาระบบ 2 มิติ ความเครียดที่พิจารณาจะประกอบไปด้วย ϵ_{xx} และ ϵ_{yy} สามารถเขียนสมการได้ดังนี้

$$\epsilon_{xx}^e = \frac{p_o}{E} \left[1 - \nu - 2\nu^2 - (1 - \nu^2) \frac{p^*}{p_o} \right] \quad (126)$$

$$\epsilon_{yy}^e = \frac{p_o}{E} \left[1 - \nu - 2\nu^2 + \nu(1 + \nu) \frac{p^*}{p_o} \right] \quad (127)$$

$$\frac{p^*}{p_o} = 1 - \frac{1}{N}$$

$$N = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi}$$

ส่วนความเครียดพลาสติกสามารถหาได้จากอัตราส่วนระหว่าง Derivative ของ Yield Function กับค่าความเค้น ณ ขณะนั้น ซึ่งสามารถเขียนความสัมพันธ์นี้ให้อยู่ในรูป Plastic Potential Function (f) ได้ดังสมการที่ 128

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (128)$$

โดย $d\lambda$ คือ Plastic Multiplier ในกรณีที่วัสดุแสดงพฤติกรรมของอีลาสติกค่า λ จะมีค่าเป็นศูนย์ และในกรณีที่วัสดุแสดงพฤติกรรมของพลาสติกค่า λ จะมีค่าเป็นบวก ส่วน Mohr-Coulomb Yield Function (f) แทนเงื่อนไขการวิบัติที่อยู่ในรูปเมทริกซ์ของหน่วยแรงหรือเรียกว่า Flow Rule

หากค่าความเครียดที่เกิดขึ้นตั้งฉากกับพื้นผิวขอบเขตการวิบัติ (Normality of Plastic Strain) จะใช้ Plastic Potential Function (f) ซึ่งจะเรียกว่า Associated Flow Rules ซึ่งแสดงสมการความเครียดพลาสติกได้ดังสมการที่ 129

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}^p &= d\lambda \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \\ f &= \sigma_{yy} - N\sigma_{xx} \\ \dot{\epsilon}_{xx}^p &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xx}} \\ \dot{\epsilon}_{xx}^p &= -\lambda N \\ \dot{\epsilon}_{yy}^p &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{yy}} \\ N &= \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \end{aligned} \quad (129)$$

แต่หากความเครียดพลาสติกที่เกิดขึ้นไม่ตั้งฉากกับพื้นผิวของเขตการวิบัติ (Yield Surface) จะใช้ Plastic Potential Function (g) แทน Mohr-Coulomb Yield Function (f) ซึ่งจะเรียกว่า Non-Associated Flow Rules ซึ่งเขียนสมการได้ดังสมการที่ 130

$$\dot{\epsilon}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad (130)$$

$$g = \sigma_{yy} - M\sigma_{xx}$$

$$M = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi}$$

โดย ϕ คือค่า Angle of Dilatancy และค่าความเครียดพลาสติกสามารถหาดังนี้

$$\dot{\epsilon}_{xx}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{xx}}$$

$$\dot{\epsilon}_{xx}^p = -\lambda M$$

$$\dot{\epsilon}_{yy}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{yy}}$$

$$\dot{\epsilon}_{yy}^p = \lambda$$

ดังนั้น สมการแสดงการเคลื่อนตัว (Strain) และอัตราการเคลื่อนตัว (Strain Rate) ของ Elastoplastic Material ซึ่งประกอบไปด้วย 2 ส่วน คือ การเคลื่อนตัวในสภาวะ Elastic และการเคลื่อนตัวที่เกิดจากสภาวะ Plastic สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\underline{\epsilon} = \underline{\epsilon}^e + \underline{\epsilon}^p, \underline{\dot{\epsilon}} = \underline{\dot{\epsilon}}^e + \underline{\dot{\epsilon}}^p \quad (131)$$

ส่วนความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดของ Elastoplastic Material ที่เขียนได้ดังสมการที่ 132

$$\underline{\dot{\sigma}}' = \underline{\underline{D}}^e \underline{\dot{\epsilon}}^e = \underline{\underline{D}}^e \left(\underline{\dot{\epsilon}} + \underline{\dot{\epsilon}}^p \right) \quad (132)$$

โดย

$$\underline{\dot{\sigma}}' = (\dot{\sigma}_{xx}, \dot{\sigma}_{yy}, \dot{\sigma}_{zz}, \dot{\sigma}_{xy}, \dot{\sigma}_{yz}, \dot{\sigma}_{zx})^T$$

$$\underline{\dot{\epsilon}} = (\dot{\epsilon}_{xx}, \dot{\epsilon}_{yy}, \dot{\epsilon}_{zz}, \dot{\epsilon}_{xy}, \dot{\epsilon}_{yz}, \dot{\epsilon}_{zx})^T$$

$$\underline{\underline{D}}^e = \text{Stiffness Matrix}$$

Theory of Plasticity

หลักการของทฤษฎีพลาสติกนั้นเป็นการสมมุติระนาบการวิบัติขึ้นมาและที่ผิวของระนาบการวิบัติกำหนดให้มีค่าเท่ากับหน่วยแรงเฉือนสูงสุด ซึ่งในการวิเคราะห์จะสมมุติให้ระบบอยู่ในสภาวะสมดุล โดยจะพิจารณาเฉพาะหน่วยแรงที่ผิวระนาบการวิบัติ แรงจากน้ำหนักของมวลดินและแรงภายนอกที่มากกระทำเท่านั้น

สมการที่ใช้สำหรับหาผลลัพธ์จะประกอบไปด้วย 1. Stress Equilibrium Equation 2. Failure Criteria เขียนสมการดังกล่าวได้ดังนี้

Equations of Equilibrium

$$\text{แกน } x \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_x = 0 \quad (133)$$

$$\text{แกน } y \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y = 0 \quad (134)$$

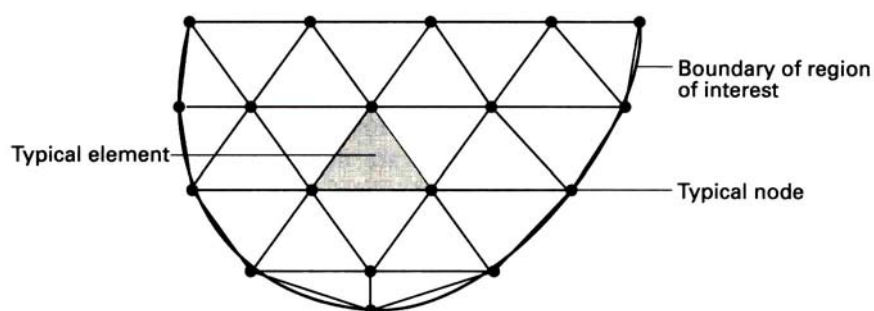
Failure Criteria

$$\sqrt{\frac{(\sigma_y - \sigma_x)^2}{4} + \tau_{xy}^2} + \frac{(\sigma_y + \sigma_x)}{2} \sin \phi = c \cos \phi \quad (135)$$

วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์

วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์เป็นวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขเพื่อใช้หาผลเฉลยของสมการทางคณิตศาสตร์ (Differential Equation) จากที่ทราบว่าหลักการของวิธี FEM คือการประมาณโดยการแบ่งบริเวณของปัญหาออกเป็นขอบเขตย่อยๆ แล้วพิจารณาสมดุลของแรงในแต่ละชิ้นส่วนย่อยทีละส่วน ซึ่งวิธี FEM จะประกอบไปด้วยขั้นตอนการคำนวณดังต่อไปนี้

1. สร้างและแบ่งขอบเขตของปัญหาเป็นพื้นที่เล็กๆ โดยพื้นที่เล็กๆนี้เรียกว่า Finite Element ดังภาพที่ 48 ในแต่ละอิลิเมนต์จะมีรูปร่างเป็นรูปหลายเหลี่ยมและเชื่อมต่อกันด้วยจุดมุม (node) รูปหลายเหลี่ยมที่นิยมใช้แสดงดังภาพที่ 49



ภาพที่ 48 การแบ่งขอบเขตปัญหาเป็นพื้นที่เล็กๆ

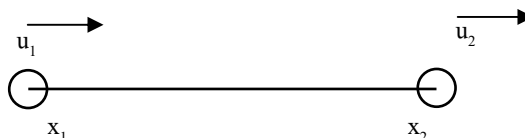
ที่มา: Fagan (1992)

Linear elements	Quadratic elements	Cubic elements
1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15

ภาพที่ 49 อิลิเมนต์ชนิดต่างๆที่ใช้ในการคำนวณ

ที่มา: จูริวัตร (2548)

สำหรับอีลิเมนต์ชนิดต่าง ๆ นั้นจะมีการเก็บค่าการเคลื่อนที่ของจุดมุมเท่านั้น และค่าการเคลื่อนที่ที่จุดมุมนี้จะใช้ในการประมาณค่าการเคลื่อนที่ภายในอีลิเมนต์ ตัวอย่างเช่น ภาพที่ 50 สามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ได้ดังนี้



ภาพที่ 50 การเคลื่อนที่ของจุดมุมของแต่ละอีลิเมนต์

ที่มา: จีรวัตร (2548)

$$u(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} u_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} u_2 \quad (136)$$

ฟังก์ชันการประมาณค่าการเคลื่อนที่ที่ตำแหน่งต่างๆ ดังสมการที่ 136 เรียกว่า Shape Function ซึ่งหากเราทราบค่าการเคลื่อนที่เมื่อทำการอนุพันธ์ฟังก์ชันการเคลื่อนที่เทียบกับพิกัดก็จะทราบค่าความเครียดได้ตามที่กล่าวไว้ในส่วนของสมการความเครียด

การพิจารณาว่าจะเลือกใช้อีลิเมนต์รูปร่างแบบใดนั้นขึ้นอยู่กับปัจจัยหลายอย่าง เช่น ความสามารถในการจำลองการเคลื่อนตัวของวัสดุ การจำลองลักษณะทางเรขาคณิตของพื้นที่ปัญหา เป็นต้น โดยอีลิเมนต์ที่มีพหุนามสูงกว่าก็จะให้ความแม่นยำสูงมากกว่า อีลิเมนต์ที่นิยมในงานวิศวกรรมพลูฟีสำหรับปัญหาในสองมิติมักใช้แบบที่ 4, 5 และ 6 ของภาพที่ 49

2. สร้างเมตริกซ์ความแข็งแกร่งอีลิเมนต์ (Element Stiffness Matrix) เมื่อแบ่งขอบเขตใหญ่ ออกเป็นชิ้นส่วนย่อยแล้ว จะพิจารณาสมมูลของแรงที่เกิดขึ้นในแต่ละชิ้นส่วน ซึ่งจะนำไปสู่สมการสมมูลของแรงชุดหนึ่ง การสร้างสมการในขั้นตอนนี้อาจจำเป็นต้องรู้ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดในแต่ละวัสดุ (Constitutive Equations) เช่น วัสดุมีพฤติกรรมตามกฎของฮุกหรือวัสดุเป็นแบบอีลาสติก-พลาสติกและมีกำลังตามเกณฑ์ของมอร์-คูลอมบ์ เป็นต้น

3. นำสมการสมมูลแรงของแต่ละอีลิเมนต์มาเขียนรวมกัน ซึ่งจะได้ระบบของสมการเขียนได้ดังสมการที่ 137 โดยทั่วไปเมทริกซ์ $[F]$ คือเมทริกซ์ของแรงกระทำภายนอกที่มีต่อระบบปัญหา ซึ่งเป็นเมทริกซ์ที่ทราบค่าแล้ว ในขณะที่เมทริกซ์ความแข็งแกร่งของระบบ $[K]$ จะต้องคำนวณขึ้นมาและ

เมทริกซ์ของการเคลื่อนที่ของจุดมุมต่างๆ $[U]$ จะเป็นเมทริกซ์ที่ไม่ทราบค่าซึ่งต้องแก้สมการหาค่าออกมา

$$[K][U] = [F] \quad (137)$$

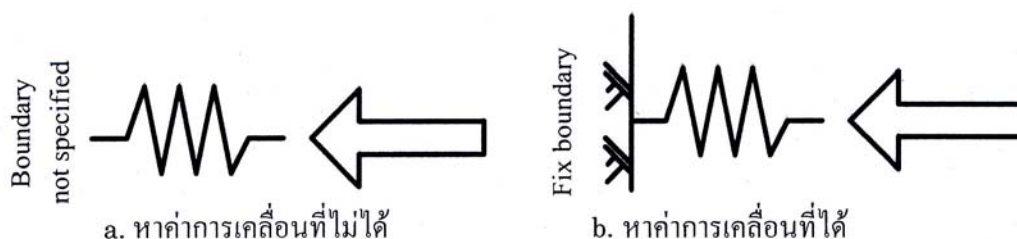
โดย

$[K]$ = เมทริกซ์ความแข็งของระบบ

$[U]$ = เมทริกซ์ของการเคลื่อนที่ของจุดมุมต่างๆ

$[F]$ = เมทริกซ์ของแรงกระทำภายนอกที่มีต่อระบบปัญหา

4. การกำหนดสภาพแวดล้อมให้กับปัญหา สำหรับตัวอย่างในงานวิศวกรรมปฐพี เช่น บริเวณใดของปัญหาที่ดินไม่สามารถเคลื่อนตัว (Fixed Boundary Condition) หรือบริเวณใดที่ดินได้รับน้ำหนักกระทำ ซึ่งการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตนี้ทำให้สามารถหาค่าผกผันของเมทริกซ์ $[K]$ ได้ ดังแสดงตัวอย่างในภาพที่ 51 จะเห็นว่าหากเราไม่กำหนดขอบเขตของปัญหาก็จะไม่สามารถหาค่าการเคลื่อนที่ของสปริงได้ เป็นต้น



ภาพที่ 51 ความสำคัญของเงื่อนไขขอบเขตที่มีผลต่อการหาผลเฉลยของระบบสมการ

ที่มา: จีรวัตร (2548)

5. การแก้ระบบสมการเพื่อหาค่าผลเฉลยปฐมภูมิ (Primary Solution) ซึ่งค่าการเคลื่อนตัวของจุดมุมหาได้จากสมการที่ 138

$$[U] = [K]^{-1}[F] \quad (138)$$

6. คำนวณหาค่าความเค้นและความเครียดจากผลเฉลยปฐมภูมิ (Primary Solution) ซึ่งความเค้นและความเครียดที่หาได้นี้เรียกว่าผลเฉลยทุติยภูมิ (Secondary Solution) เนื่องจากเป็นการนำความผลเฉลยอันแรกมาหาค่าผลเฉลยจากความสัมพันธ์ของสมการอื่นอีกที่

$$\begin{aligned} [\varepsilon] &= [B][u] \\ [\sigma] &= [C][\varepsilon] \\ [\sigma] &= [C][B][u] \end{aligned}$$

จากที่กล่าวมาทั้งหมดขั้นตอนที่สำคัญที่สุดในการคำนวณด้วยวิธี FEM คือการวิเคราะห์ผลการคำนวณว่ามีแนวโน้มความเป็นไปได้หรือมีความน่าเชื่อถือมากเพียงใด เนื่องจาก FEM เป็นเพียงเทคนิคในการแก้ปัญหาสมาการคณิตศาสตร์ชนิดหนึ่งเท่านั้น ถ้าแบบจำลองพฤติกรรมของดินที่ใช้มีความไม่ถูกต้องหรือมีการจำลองสภาพปัญหาที่ไม่ถูกต้อง ค่าทางตัวเลขที่ได้จากวิธีนี้ก็จะไม่มี ความหมายแต่อย่างใด