# ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลบวกของผลคูณของจำนวนเต็มหนึ่งกับเลขโดด 9 กับผลบวกของจำนวนเต็มเดียวกันกับเลขโดด 9

# GENERALIZED BEAUTY : THE SUM OF THE PRODUCT OF ANY INTEGER AND THE DIGIT NUMBER 9 AND THE SUM OF THE SAME INTEGER AND THE DIGIT NUMBER 9

[1)] **ปฏิภาน พรหมรักษ์ ,** [2)] อัยเรศ เอี่ยมพันธ์

[1)] นิสิตระดับปริญญาตรี สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา

[2)] ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา

[1)] **Patipan Prommaruk ,** [2)] Aiyared Iampan[2]

[1)] Undergraduate student, Department of Mathematics, School of Science, University of Phayao

[2)] Assistant Professor, Ph.D., Department of Mathematics, School of Science, University of Phayao

Corresponding author: aiyared.ia@up.ac.th

**บทคัดย่อ**

บทความนี้ได้ประยุกต์ใช้จำนวนเศษเหลือและหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ในการศึกษาและหารูปทั่วไปของผลบวกของผลคูณของจำนวนเต็มหนึ่งกับเลขโดด $9$ กับผลบวกของจำนวนเต็มเดียวกันกับเลขโดด $9$ ผลการศึกษา พบว่ารูปทั่วไปของผลบวกของผลคูณของจำนวนเต็ม $n$ กับเลขโดด $9$ กับผลบวกของจำนวนเต็มเดียวกันกับเลขโดด $9$ นี้ สามารถเขียนได้ในรูปของจำนวนเศษเหลือ ${}_{n}9$

**คำสำคัญ :** หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ผลคูณ จำนวนเศษเหลือ ผลบวก

**Abstract**

This paper applies the remainder number and the Principle of Mathematical Induction to find a general form of the sum of the product of any integer and the digit number $9$ and the sum of the same integer and the digit number $9$. The results show that the general form of the sum of the product of an integer $n$ and the digit number $9$ and the sum of the same integer and the digit number $9$ can be written in the form of remainder number ${}_{n}9$.

**Keywords :** Principle of Mathematical Induction, product, remainder number, sum.

## บทนำและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

การประยุกต์ใช้จำนวนเศษเหลือในการคำนวณหาผลลัพธ์ของผลคูณ (ในบทความนี้ จะใช้สัญลักษณ์การคูณด้วย $\cdot$ หรือ $\times$) หรือผลบวกของจำนวนที่มีจำนวนหลักมากๆ นั้น ได้ศึกษาในหลายลักษณะที่น่าสนใจ ดังนี้ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2554) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข $1$ โดยได้ประยุกต์ใช้จำนวนเศษเหลือ $n = {}_{q}r$ เมื่อ $n = 10 \cdot q + r$ โดยที่ $q$ และ $r$ เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $0 \le r < 10$ และพบว่าผลการยกกำลังสองนี้สามารถเขียนอยู่ในรูปทั่วไปที่แน่นอนได้และมีลักษณะที่สวยงาม ดังนี้ กำหนดให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n = {}_{q}r$ เมื่อ $q$ และ $r$ เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $0 \le r < 10$ จะได้ว่า

$$(\underbrace{111...1}_{\#(1)=n})^2 = 123...9_1 0_1 1..._q (r-1)_q r_q (r-1)..._1 1_1 09...321$$

อภิสิทธิ์ เมืองมา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2556) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจากเลข $1$ ไปทางซ้ายกับเลข $9$ โดยได้พบว่าผลการยกกำลังสองนี้สามารถเขียนอยู่ในรูปทั่วไปที่แน่นอนได้ ดังนี้ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n$ จะได้ว่า สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n$ โดยที่ $n = {}_q r$ เมื่อ $q$ และ $r$ เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $0 \le r < 10$ จะได้ว่า

$$({}_q r_q (r-1)\dots{}_1 1_1 09\dots 321)\times 9 = \begin{cases} {}_q(r-1)\,\underbrace{888...8}_{\#(8)={}_q(r-1)}\,9\,, & 1 \le r < 10 \\ {}_{q-1}9\underbrace{888...8}_{\#(8)={}_{q-1}9}9 & , r = 0 \end{cases}$$

ณัฐพงษ์ พรมวงษ์ และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2555) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข $3$ (เลข $6$) ยกเว้นหลักหน่วยเป็นเลข $4$ (เลข $7$) โดยได้พบว่าผลการยกกำลังสองนี้สามารถเขียนอยู่ในรูปทั่วไปที่แน่นอนได้ ดังนี้ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n$ จะได้ว่า

$$(\underbrace{333\dots3}_{\#(3)=n}4)^2 = \underbrace{111\dots1}_{\#(1)=n+1}\underbrace{555\dots5}_{\#(5)=n}6 \quad \text{และ} \quad (\underbrace{666\dots6}_{\#(6)=n}7)^2 = \underbrace{444\dots4}_{\#(4)=n+1}\underbrace{888\dots8}_{\#(8)=n}9$$

แสงประทีป นนกระโทก และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2555) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลบวกของผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข $6$ (เลข $3$ และ $9$ ตามลำดับ) กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข $6$ (เลข $3$ และ $9$ ตามลำดับ) โดยได้พบว่าผลบวกของผลการยกกำลังสองนี้สามารถเขียนอยู่ในรูปทั่วไปที่แน่นอนได้ ดังนี้ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n$ จะได้ว่า

$$(\underbrace{666\dots6}_{\#(6)=n})^2 + \underbrace{666\dots6}_{\#(6)=n} = \underbrace{444\dots4}_{\#(4)=n}\underbrace{222\dots2}_{\#(2)=n}$$

$$(\underbrace{333\dots3}_{\#(3)=n})^2 + \underbrace{333\dots3}_{\#(3)=n} = \underbrace{111\dots1}_{\#(1)=n}\underbrace{222\dots2}_{\#(2)=n}$$

และ $$(\underbrace{999\dots9}_{\#(9)=n})^2 + \underbrace{999\dots9}_{\#(9)=n} = \underbrace{999\dots9}_{\#(9)=n}\underbrace{000\dots0}_{\#(0)=n}$$

ดาราวรรณ ดั้นเมฆ และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2555) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวน $143$ กับจำนวนเต็มบวกที่หารลงตัวด้วยจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด $7$ ซึ่งพบว่า กำหนดให้ $m$ เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $m \ge 3$ และสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n$ จะได้ว่า

$$143 \times \underbrace{777\dots7}_{\#(7)=m} \times n = nnn\underbrace{(2\cdot n)(2\cdot n)(2\cdot n)\dots(2\cdot n)}_{\#(2\cdot n)=m-3}nnn$$

รัตติญา บุญเรือง และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2555) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวน $12345679$ กับจำนวนเต็มบวกที่เลข $9$ หารลงตัว ซึ่งพบว่า ถ้า $n = {}_{q}r$ แล้ว

$$12345679 \cdot 9 \cdot n = \underbrace{{}_{q}r\,{}_{q}r\,{}_{q}r \ldots {}_{q}r}_{\#({}_{q}r)=9}$$

เอี่ยมพันธ์ (2556) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไประหว่างจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข $1$ กับสมการเชิงเส้น โดยได้พบความสัมพันธ์ดังนี้ กำหนดให้ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n = {}_{q}r$ เมื่อ $q$ และ $r$ เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $0 \le r < 10$ จะได้ว่า

$$\underbrace{111\ldots111}_{\#(1)={}_{q}r} = 9 \cdot \left[123\ldots {}_{q}(r-3)\,{}_{q}(r-2)\,{}_{q}(r-1)\right] + {}_{q}r$$

จากการสังเกตผลบวกของผลคูณของจำนวนเต็มหนึ่งกับเลขโดด $9$ กับผลบวกของจำนวนเต็มเดียวกันกับเลขโดด $9$ ซึ่งลักษณะผลลัพธ์ที่ได้นั้นสามารถอธิบายในรูปของจำนวนเศษเหลือได้ และมีรูปทั่วไปที่แน่นอน

ก่อนอื่นเราขอแนะนำให้รู้จักกับสองทฤษฎีบทที่เป็นเครื่องมือสำคัญในการศึกษา ดังนี้

**ทฤษฎีบท 1 ขั้นตอนวิธีการหาร** (The Division Algorithm) (Clark, 2002) ถ้า $a$ และ $b$ เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $b \neq 0$ แล้วมีจำนวนเต็ม $q$ และ $r$ เพียงชุดเดียวเท่านั้น ซึ่ง

$a = b \cdot q + r$ และ $0 \le r < |b|$

**ทฤษฎีบท 2 หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์** (The Principle of Mathematical Induction) (Clark, 2002) กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความเกี่ยวกับจำนวนเต็มบวก $n$ และกำหนดให้ $n_0$ เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งสอดคล้องกับข้อความต่อไปนี้

(1) $P(n_0)$ เป็นจริง

(2) ถ้า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก $k \ge n_0$ แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \ge n_0$

เพื่อความสะดวกต่อการศึกษาจะแนะนำให้รู้จักกับสัญลักษณ์ดังต่อไปนี้

จากขั้นตอนวิธีการหารที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น อัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2554) และณัฐวุฒิ พลอาสา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2556) ได้นิยามจำนวนเศษเหลือ (remainder number) ไว้ดังนี้ กำหนดให้ $a$ เป็นจำนวนเต็มใดๆ และ $b = 10$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม $q$ (ผลหาร) และ $r$ (เศษเหลือ) ซึ่ง $a = 10 \cdot q + r$ และ $0 \le r < 10$ ฉะนั้น $r$ เป็นจำนวนหนึ่งหลักหรือเลขโดดนั่นเอง สัญลักษณ์จำนวนเศษเหลือสำหรับ $a$ โดย

$$a = {}_{q}r \qquad (1)$$

เช่น

$$\begin{array}{cccccc}
9 = {}_{0}9 & 109 = {}_{10}9 & 1009 = {}_{100}9 & -9 = {}_{-1}1 & -109 = {}_{-11}1 & -1009 = {}_{-101}1 \\
19 = {}_{1}9 & 119 = {}_{11}9 & 1019 = {}_{101}9 & -19 = {}_{-2}1 & -119 = {}_{-12}1 & -1019 = {}_{-102}1 \\
29 = {}_{2}9 & 129 = {}_{12}9 & 1029 = {}_{102}9 & -29 = {}_{-3}1 & -129 = {}_{-13}1 & -1029 = {}_{-103}1 \\
\vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\
99 = {}_{9}9 & 199 = {}_{19}9 & 1099 = {}_{109}9 & -99 = {}_{-10}1 & -199 = {}_{-20}1 & -1099 = {}_{-110}1
\end{array}$$

เพื่อความสะดวก ยังคงจะเขียน ${}_0r$ ด้วย $r$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $0 \le r < 10$

**บทนิยาม 1** ณัฐวุฒิ พลอาสา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2556) กำหนดให้ ${}_{\mathbb{Z}}\mathrm{R}$ แทนเซตของจำนวนใน ทั้งหมด นั่นคือ

$$ {}_{\mathbb{Z}}\mathrm{R} = \{ {}_q r \mid r, q \in \mathbb{Z} \text{ และ } 0 \le r < 10 \} \quad (2) $$

และเราจะเรียกสมาชิกของ ${}_{\mathbb{Z}}\mathrm{R}$ ว่า **จำนวนเศษเหลือ** (remainder number)

จากการแปลงเลขฐานสิบใน (1) นั้น จะเห็นว่าเลขที่ถูกแปลงขึ้นมาไม่ใช่เลขฐานสิบปกติ ฉะนั้นก่อนที่จะกล่าวถึงทฤษฎีบทที่สำคัญและนำทฤษฎีบทไปประยุกต์ใช้ เพื่อให้เข้าใจผลลัพธ์ได้ง่ายจะแนะนำการแปลงเลขจาก (1) กลับไปเป็นเลขฐานสิบที่ทุกคนคุ้นเคย

จาก อภิสิทธิ์ เมืองมา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2556) จะได้ว่าการแปลงจำนวนที่ได้จากการเรียงกันของจำนวนเศษเหลือเป็นเลขฐานสิบ ทำได้ดังนี้

$$ {}_{q_n}r_n\,{}_{q_{n-1}}r_{n-1}\ldots{}_{q_3}r_3\,{}_{q_2}r_2\,{}_{q_1}r_1 = q_n(r_n+q_{n-1})\ldots(r_3+q_2)(r_2+q_1)r_1 \text{ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } n $$

เช่นการแปลง ${}_7 1_{98}4263_{857}85_1 4_9 2$ ที่ได้จากการเรียงกันของจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
{}_7 1_{98}4263_{857}85_1 4_9 2 &= 7(1+98)426(3+857)8(5+1)(4+9)2 \\
&= 7(99)426(860)86(13)2 \\
&= 7_9 9426_{86}086_1 32 \\
&= (7+9)942(6+86)08(6+1)32 \\
&= (16)942(92)08732 \\
&= 16942_9 208732 \\
&= 1694(2+9)208732 \\
&= 1694(11)208732 \\
&= 1694_1 1208732 \\
&= 169(4+1)1208732 \\
&= 16951208732
\end{aligned}
$$

การศึกษาและการประยุกต์ของจำนวนเศษเหลือดูได้จากเอกสารอ้างอิง [1-9]

**บทตั้ง 1** ณัฐวุฒิ พลอาสา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2556) กำหนดให้ $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n = {}_q r$ แล้ว

$$ -n = \begin{cases} {}_{-q}0 & ;\ r = 0 \\ {}_{-(q+1)}(10-r) & ;\ r \ne 0 \end{cases} \quad (3) $$

**ทฤษฎีบท 3** อภิสิทธิ์ เมืองมา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2556) กำหนดให้ $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, m \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $0 \le s_i \le 9$ จะได้ว่า

$$ {}_m s_1 s_2 s_3 \ldots s_n = m \cdot 1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n} + s_1 s_2 s_3 \ldots s_n \quad (4) $$

**ผลการศึกษาหลัก**

จากการสังเกตผลบวกของผลคูณของจำนวนเต็มหนึ่งกับเลขโดด 9 กับผลบวกของจำนวนเต็มเดียวกันกับ เลขโดด 9 ซึ่งทำให้เราพบความสัมพันธ์ที่น่าสนใจ ดังนี้

$$\begin{array}{lllllllll}
(0\times 9) & + & (0+9) & = & {}_{0}9, & (10\times 9) & + & (10+9) & = {}_{10}9 \\
(1\times 9) & + & (1+9) & = & {}_{1}9, & (11\times 9) & + & (11+9) & = {}_{11}9 \\
(2\times 9) & + & (2+9) & = & {}_{2}9, & (12\times 9) & + & (12+9) & = {}_{12}9 \\
(3\times 9) & + & (3+9) & = & {}_{3}9, & (13\times 9) & + & (13+9) & = {}_{13}9 \\
(4\times 9) & + & (4+9) & = & {}_{4}9, & (14\times 9) & + & (14+9) & = {}_{14}9 \\
(5\times 9) & + & (5+9) & = & {}_{5}9, & (15\times 9) & + & (15+9) & = {}_{15}9 \\
(6\times 9) & + & (6+9) & = & {}_{6}9, & (16\times 9) & + & (16+9) & = {}_{16}9 \\
(7\times 9) & + & (7+9) & = & {}_{7}9, & (17\times 9) & + & (17+9) & = {}_{17}9 \\
(8\times 9) & + & (8+9) & = & {}_{8}9, & (18\times 9) & + & (18+9) & = {}_{18}9 \\
(9\times 9) & + & (9+9) & = & {}_{9}9, & (19\times 9) & + & (19+9) & = {}_{19}9
\end{array} \qquad (5)$$

จากผลบวก (5) เราพบว่าจำนวนเต็ม $n$ เมื่อ $0 \le n \le 19$ มีผลโดยตรงต่อผลบวกที่ได้ ซึ่งลักษณะผลบวกที่ได้จะอยู่ในรูปของจำนวนเศษเหลือ ${}_{n}9$ ดังนั้นผู้เขียนจึงเกิดข้อสงสัยว่าหาก $n$ เป็นจำนวนเต็มใดๆ แล้วผลบวกของผลคูณของจำนวนเต็ม $n$ กับเลขโดด $9$ กับผลบวกของจำนวนเต็ม $n$ กับเลขโดด $9$ ยังคงมีค่าเท่ากับ ${}_{n}9$ หรือไม่

จากข้อสังเกตข้างต้น จะพบว่าผลบวกนี้เป็นจริงสำหรับจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่าหรือเท่ากับจำนวนเต็มบวก $19$ ต่อไปจะยกตัวอย่างที่สนับสนุนข้อสงสัยข้างต้นสำหรับการศึกษาครั้งนี้

**ตัวอย่าง 1** ผลลัพธ์ของ

$$(58\times 9)+(58+9)=589={}_{58}9$$

**ตัวอย่าง 2** ผลลัพธ์ของ

$$\begin{aligned}
&(-58\times 9)+(-58+9) \\
&=-522-49 \\
&=-571 \\
&={}_{-58}9
\end{aligned}$$

จากทั้งสองตัวอย่าง เราพบว่าผลลัพธ์ที่ได้สอดคล้องกับข้อสังเกตข้างต้นของเรา และนำไปสู่ทฤษฎีบทหลักดังต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 4** สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n$ จะได้ว่า

$$(n\times 9)+(n+9)={}_{n}9 \qquad (6)$$

**การพิสูจน์** กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$(n\times 9)+(n+9)={}_{n}9$$

สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n$

**กรณีที่ 1 :** $n=0$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(n\times 9)+(n+9) &= (0\times 9)+(0+9) \\
&= 0+9 \\
&= 9 \\
&= {}_{0}9
\end{aligned}$$

ดังนั้น $P(0)$ เป็นจริง

**กรณีที่ 2 :** $n>0$

เนื่องจาก $(1\times 9)+(1+9)=19={}_{1}9$ จะได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง กำหนดให้ $k$ เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $P(k)$ เป็นจริง จะได้ว่า

$$(k\times 9)+(k+9)={}_{k}9$$

เราจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง พิจารณา

$$
\begin{aligned}
((k+1)\times 9)+((k+1)+9) &= ((k\times 9)+(1\times 9))+((k+9)+1)\\
&= (k\times 9)+9+(k+9)+1\\
&= (k\times 9)+(k+9)+10\\
&= {}_{k}9+10 \qquad \text{(โดยสมมุติฐาน)}\\
&= k9+10\\
&= (k+1)(9+0)\\
&= (k+1)9\\
&= {}_{(k+1)}9
\end{aligned}
$$

ฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง
ดังนั้น $(n\times 9)+(n+9)={}_{n}9$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n$

**กรณีที่ 3 :** $n<0$
จะได้ว่า $n=-m$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก $m$ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
(n\times 9)+(n+9) &= (-m\times 9)+(-m+9)\\
&= ((-m\times 9)-m)+9\\
&= (-m\times(9+1))+9\\
&= (-m\times 10)+9\\
&= {}_{-m}9\\
&= {}_{n}9 \qquad \text{(โดย (4))}
\end{aligned}
$$

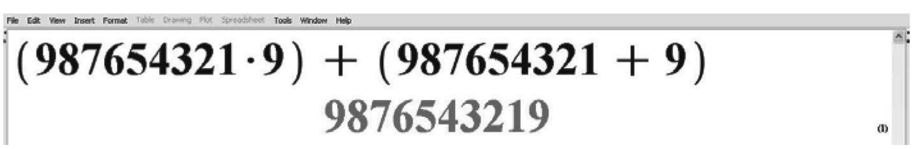
ฉะนั้น $(n\times 9)+(n+9)={}_{n}9$ สำหรับทุกจำนวนเต็มลบ $n$
ดังนั้น เราสรุปได้ว่า $(n\times 9)+(n+9)={}_{n}9$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n$

ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงถึงการหาผลบวกของผลคูณของจำนวนเต็มหนึ่งกับเลขโดด $9$ กับผลบวกของจำนวนเต็มเดียวกันกับเลขโดด $9$ โดยประยุกต์ใช้ทฤษฎีบท 4 ซึ่งเป็นการหาผลบวกที่ถูกต้องและรวดเร็ว

**ตัวอย่าง 3** จงหาผลลัพธ์ของ $(987654321\times 9)+(987654321+9)$
**วิธีทำ** จากทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
(987654321\times 9)+(987654321+9) &= {}_{987654321}9\\
&= 9876543219
\end{aligned}
$$

**ตรวจคำตอบ**



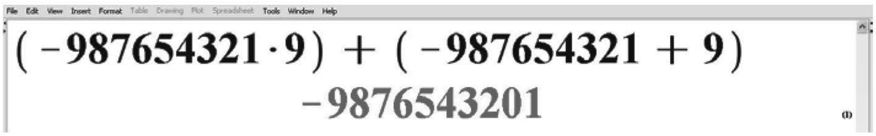

**รูปที่ 1 :** $(987654321\times 9)+(987654321+9)$

**ตัวอย่าง 4** จงหาผลลัพธ์ของ $(-987654321\times 9)+(-987654321+9)$

**วิธีทำ** จากทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(-987654321\times 9)+(-987654321+9) &= {}_{-987654321}9\\ &= (-987654321\times 10)+9\\ &= -9876543210+9 && \text{(โดย (4))}\\ &= -9876543201\end{aligned}$$

**ตรวจคำตอบ**




รูปที่ 2 : $(-987654321\times 9)+(-987654321+9)$

**ตัวอย่าง 5** จงหาผลลัพธ์ของ

$$(99887766554433221100\times 9)+(99887766554433221100+9)$$

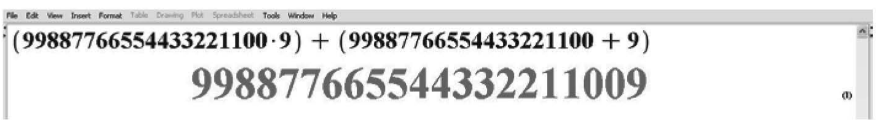
**วิธีทำ** จากทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า

$$(99887766554433221100\times 9)+(99887766554433221100+9)$$

$$= {}_{99887766554433221100}9$$

$$= 998877665544332211009$$

**ตรวจคำตอบ**




รูปที่ 3 : $(99887766554433221100\times 9)+(99887766554433221100+9)$

**ตัวอย่าง 6** จงหาผลลัพธ์ของ

$$(-99887766554433221100\times 9)+(-99887766554433221100+9)$$

**วิธีทำ** จากทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า

$$(-99887766554433221100\times 9)+(-99887766554433221100+9)$$

$$= {}_{-99887766554433221100}9$$

$$= (-99887766554433221100\times 10)+9 \qquad \text{(โดย (4))}$$

$$= -998877665544332211000+9$$

$$= -998877665544332210991$$

**ตรวจคำตอบ**


รูปที่ 4 : $(-99887766554433221100\times 9)+(-99887766554433221100+9)$

**สรุปและวิจารณ์ผล**

จากการศึกษา เราพบรูปทั่วไปที่แน่นอนของผลบวกของผลคูณของจำนวนเต็มหนึ่งกับเลขโดด $9$ กับผลบวกของจำนวนเต็มเดียวกันกับเลขโดด $9$ ตามทฤษฎีบท 4 ดังนี้

$$(n\times 9)+(n+9)= {}_{n}9$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n$

จากบทความนี้ ผู้อ่านสามารถศึกษาลักษณะทางพีชคณิตที่สวยงามของจำนวนเต็มใดๆ ได้โดยอาศัยจำนวนเศษเหลือและหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ในการสร้างเลขโดดและการพิสูจน์

**กิตติกรรมประกาศ**

ผู้เขียนขอขอบพระคุณผู้ประเมินบทความวิชาการทุกท่าน สำหรับข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์อย่างมากในการปรับปรุงบทความให้สำเร็จลุล่วงได้อย่างสมบูรณ์ โดยบทความนี้ได้รับการสนับสนุนจากกลุ่มวิจัย : Group for Young Algebraists in University of Phayao (GYA)

**เอกสารอ้างอิง**

ณัฐพงษ์ พรมวงษ์ และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2555). ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 3 (เลข 6) ยกเว้นหลักหน่วยเป็นเลข 4 (เลข 7). **วารสารวิชาการ มหาวิทยาลัยราชภัฏกาญจนบุรี.** 1(1). 41-49.

ณัฐวุฒิ พลอาสา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2556). ความสวยงามวางนัยทั่วไป : การเริ่มต้นของกรุ๊ปของจำนวนเศษเหลือ. **วารสารนเรศวรพะเยา.** 6(1). 25-30.

ดาราวรรณ ดั้นเมฆ และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2555). ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลคูณของจำนวน 143 กับจำนวนเต็มบวกที่หารลงตัวด้วยจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 7. **วารสารวิทยาศาสตร์ มศว.** 28(2). 185-198.

รัตติญา บุญเรือง และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2555). ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลคูณของจำนวน 12345679 กับจำนวนเต็มบวกที่เลข 9 หารลงตัว. **วารสารนเรศวรพะเยา.** 5(3). 327-332.

แสงประทีป นนกระโทก และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2555). ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลบวกของผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 6 กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 6. **วารสารวิทยาศาสตร์แห่งมหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบุรี.** 9(1). 80-90.

อภิสิทธิ์ เมืองมา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2556). ความสวยงามวางนัยทั่วไป : การนิยามจำนวนหลายหลักที่แต่ละหลักเป็นจำนวนเต็ม. **วารสารวิชาการ มหาวิทยาลัยราชภัฏอุตรดิตถ์.** 8(2). 49-60.

อภิสิทธิ์ เมืองมา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2556). ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจากเลข 1 ไปทางซ้ายกับเลข 9. **วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี.** 15(1). 75-83.

อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2554). ความสวยงามวางนัยทั่วไป : การยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1. **วารสารนเรศวรพะเยา.** 4(2). 29-35.

อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2556). ความสวยงามวางนัยทั่วไป : จำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1 และสมการเชิงเส้น. **วารสารวิทยาศาสตร์ มข.** 41(4). 919-927.

Clark, W. E. (2002). **Elementary Number Theory.** Department of Mathematics, University of South Florida.