

สูตรความกว้าง ความยาว และความสัมพันธ์เวียนเกิด ของกระดาษชุด A, B และ C

Width & Length Formulas and Recurrence Relations of A, B and C Series Paper

ปานระพี กลับบ้านเกาะ^{1*} ปาลิตา อเนก¹ ปฐมมาพร เอื้อทรัพย์อนันต์¹

วัชรพันธ์ ทองจันทา² และรุ่งนภา มีใจ²

¹นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนราชินีบูรณะ

²ครูกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนราชินีบูรณะ

9 ถนนหน้าพระ อำเภอมืองนครปฐม จังหวัดนครปฐม 73000

Panrapee Klabankho^{1*} Palita Aneak¹ Pathamaporn Aueasapanan¹

Watchraphan Tongjanta² and Rungnapa Meejai²

¹Mathayomsuksa 2 Students, Rachineeburana School

²Department of Mathematics, Rachineeburana School

9, Nhapha Street, Meang Nakhon Pathom District, Nakhon Pathom Province, 7300

บทคัดย่อ

โครงการเรื่อง สูตรความกว้าง ความยาว และความสัมพันธ์เวียนเกิดของกระดาษชุด A, B และ C มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ และหาสูตรความกว้าง ความยาว รวมไปถึงความสัมพันธ์เวียนเกิดของกระดาษชุด A, B และ C แล้วนำความสัมพันธ์ดังกล่าวมาสร้างกระดาษชุด R โดยศึกษากระดาษรหัส 0 - 10

จากการศึกษาทราบว่าอัตราส่วนของความกว้าง : ความยาว ของกระดาษทั้ง 3 ชุด เป็น 1 : $\sqrt{2}$ เนื่องจากต้องการให้เมื่อแบ่งครึ่งกระดาษตามความยาวแล้วขนาดของกระดาษที่แบ่งครึ่งก็ยังคงมีสัดส่วนเดียวกัน จากนั้นคณะผู้จัดทำได้นำอัตราส่วนของความกว้าง : ความยาว จากความสัมพันธ์ดังกล่าวมาหาสูตรความกว้างและความยาวของกระดาษทั้ง 3 ชุด ได้ดังนี้

$$W_{An} = 10^3 \times 2^{-\left(\frac{2n+1}{4}\right)} \quad L_{An} = 10^3 \times 2^{\frac{1-2n}{4}} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, 10$$

$$W_{Bn} = 10^3 \times 2^{-\frac{n}{2}} \quad L_{Bn} = 10^3 \times 2^{\left(\frac{1-n}{2}\right)} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, 10$$

$$W_{Cn} = 10^3 \times 2^{-\left(\frac{1+4n}{8}\right)} \quad L_{Cn} = 10^3 \times 2^{\left(\frac{3-4n}{8}\right)} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, 10$$

ความสัมพันธ์เวียนเกิดของความกว้างและความยาวของกระดาษทั้ง 3 ชุดซึ่งสามารถเขียนได้ในรูป

$$a_n = a_{n-1} \times 2^{-\frac{1}{2}} \text{ โดย } a_0 \text{ เป็น ความกว้างและความยาวของกระดาษชุด A, B และ C รหัส 0}$$

* ผู้รับผิดชอบบทความ : panrapeeklabankho@gmail.com

กระดาษชุด R คณะผู้จัดทำกำหนดเส้นทแยงมุมของกระดาษ R0 ให้มีความยาว 1,000 มิลลิเมตร และอัตราส่วนของความกว้าง : ความยาว เป็น $1 : \sqrt{2}$ ทำให้ได้สูตรความกว้างและความยาวดังนี้

$$W_{Rn} = 10^3 \times 3^{\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{n}{2}} \quad L_{Rn} = 10^3 \times 3^{\frac{1}{2}} \times 2^{\left(\frac{1-n}{2}\right)} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, 10$$

นอกจากนั้น ความกว้างและความยาวของกระดาษชุด R ยังมีความสัมพันธ์เวียนเกิดที่เหมือนกับกระดาษชุด A, B และ C อีกด้วย

คำสำคัญ: สูตรความกว้าง ความยาว กระดาษชุด A, B และ C ความสัมพันธ์เวียนเกิด

Abstract

This purpose of this mathematical project entitle: “Width & length formulas and recurrence relations of A, B, and C series paper” was to study the relation and finding a formula of width, length and recurrence relation of A, B, and C series paper and applied to R series paper by 0-10 papers code.

The result of this project founded; the ratio of width: length of 3 series paper was $1 : \sqrt{2}$ because, when split half the paper, the size of the half-divided paper is still the same. Then organizers adopted the ratio of width: length from the relationship to the formula, width and length of the 3 series paper of the formulas showed;

$$\begin{aligned} W_{An} &= 10^3 \times 2^{-\left(\frac{2n+1}{4}\right)} & L_{An} &= 10^3 \times 2^{\frac{1-2n}{4}} & n &= 0, 1, 2, 3, \dots, 10 \\ W_{Bn} &= 10^3 \times 2^{-\frac{n}{2}} & L_{Bn} &= 10^3 \times 2^{\left(\frac{1-n}{2}\right)} & n &= 0, 1, 2, 3, \dots, 10 \\ W_{Cn} &= 10^3 \times 2^{-\left(\frac{1+4n}{8}\right)} & L_{Cn} &= 10^3 \times 2^{\left(\frac{3-4n}{8}\right)} & n &= 0, 1, 2, 3, \dots, 10 \end{aligned}$$

The recurrence relations of the width and length of the 3 series paper can be written as $a_n = a_{n-1} \times 2^{-\frac{1}{2}}$ when a_0 was the width and length of the paper series A, B and C code 0.

For R-paper, the organizer sets the diagonal of the paper R0 to a length of 1,000 mm and ratio of width: length was $1 : \sqrt{2}$. So, the formula width and length as follows;

$$W_{Rn} = 10^3 \times 3^{\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{n}{2}} \quad L_{Rn} = 10^3 \times 3^{\frac{1}{2}} \times 2^{\left(\frac{1-n}{2}\right)} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, 10$$

In addition, the width and length of the R-series paper is similar to that of paper sets A, B, and C.

Keyword: formula width and length, paper series A, B and C, and recurrence relations.

1. บทนำ

เนื่องจากคณะผู้จัดทำได้มีโอกาสทำรายงานในวิชาต่างๆ อยู่บ่อยครั้ง จึงเข้าออกร้านถ่ายเอกสาร อยู่เป็นประจำได้สังเกตเห็นว่ามีลูกค้าของร้านถ่ายเอกสารนำกระดาษเอกสารขนาด A4 มาย่อให้เป็นกระดาษ A5 ด้วยความสงสัยจึงถามเจ้าของร้านว่า สามารถขยายให้มีขนาดใหญ่กว่า A4 ได้หรือไม่ เจ้าของร้านแนะนำว่ามีกระดาษ A3 ซึ่งมีขนาดใหญ่กว่ากระดาษ A4 และสามารถทำได้โดยใช้ฟังก์ชันในเครื่องถ่ายเอกสาร จากนั้น เจ้าของร้านได้หยิบกระดาษขนาด A3 ให้ดู ทำให้คณะผู้จัดทำสังเกตเห็นว่า ขนาดของกระดาษ A4 เท่ากับขนาดของกระดาษ A3 พับครึ่งตามความยาว และเมื่อพับครึ่งกระดาษ A4 ตามความยาวก็จะเท่ากับขนาดของกระดาษ A5 เช่นกัน ด้วยเหตุนี้คณะผู้จัดทำจึงเกิดความสงสัยขึ้นมาว่า ทำไมกระดาษจึงมีลักษณะเช่นนั้น รวมถึงขนาดของกระดาษมีความสัมพันธ์กันอย่างไร และเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์หรือไม่ จึงเกิดเป็นจุดเริ่มต้นของโครงการในครั้งนี้

หลังจากที่ได้ความคิดที่จะศึกษาอะไรแล้ว ทางคณะผู้จัดทำจึงได้ไปหาข้อมูลเกี่ยวกับกระดาษเพิ่มเติมพบว่า กระดาษที่ขึ้นต้นด้วย A นั้น มีตั้งแต่ A0 - A10 นอกจากนั้นยังมีกระดาษที่ขึ้นต้นด้วย B และ C ซึ่งเป็นกระดาษที่อยู่ในมาตรฐานขนาดกระดาษในระบบ ISO จุดเด่นของมาตรฐานนี้ คือ เมื่อนำกระดาษที่มีขนาดตามที่กำหนดไว้มาพับครึ่งตามความยาว ขนาดของกระดาษยังคงมีสัดส่วน (อัตราส่วนของด้านกว้างกับด้านยาว) เดียวกับขนาดก่อนพับ และหากพับไปอีก ขนาดใหม่ก็ยังคงมีสัดส่วนเท่าเดิม ประโยชน์ที่ได้คือ เมื่อนำกระดาษไปตัดแบ่งใช้งานหรือหากมีงานที่ต้องการย่อ-ขยาย จะไม่เกิดการเสียเศษกระดาษ จากการที่กระดาษมีสัดส่วนแบบนี้ คณะผู้จัดทำคาดว่าจะหาแบบรูปจากความกว้างและความยาวของกระดาษดังกล่าวเพื่อสรุปเป็นสูตรที่สามารถคำนวณหาความกว้างและความยาวได้ ตลอดจนศึกษาความสัมพันธ์เวียนเกิดที่เกิดจากความกว้างและความยาวของกระดาษทั้ง 3 ชุดนี้ ซึ่งอาจใช้ประโยชน์จากความสัมพันธ์ที่คณะผู้จัดทำสร้างขึ้นได้ในอนาคตต่อไป

ดังที่กล่าวมานี้ ทางคณะผู้จัดทำจึงสนใจศึกษาความสัมพันธ์ของกระดาษ หาสูตรความกว้าง ความยาว และความสัมพันธ์เวียนเกิดของกระดาษชุด A, B และ C และนำความสัมพันธ์ของกระดาษเหล่านี้ไปประยุกต์ใช้ให้เกิดประโยชน์ต่อไป อีกทั้งในปี พ.ศ. 2562 โรงเรียนราชินีบูรณะ จะมีอายุครบ 100 ปี คณะผู้จัดทำจึงสนใจที่จะสร้างกระดาษชุด R โดยให้มีความสัมพันธ์เดียวกับกระดาษชุด A, B และ C เพื่อรำลึกพระมหากรุณาธิคุณของสมเด็จพระศรีพัชรินทราบรมราชินีนาถ ผู้พระราชทานกำเนิดโรงเรียนราชินีบูรณะ

2. วัตถุประสงค์

1. เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ของกระดาษชุด A, B และ C
2. เพื่อหาสูตรความกว้าง ความยาว และความสัมพันธ์เวียนเกิดของกระดาษชุด A, B และ C
3. เพื่อนำความสัมพันธ์ของกระดาษชุด A, B และ C มาสร้างกระดาษชุด R

3. ขอบเขตการศึกษา

โครงการคณิตศาสตร์ เรื่อง สูตรความกว้าง ความยาว และความสัมพันธ์เวียนเกิดของกระดาษชุด A, B และ C ซึ่งเป็นกระดาษ A0 - A10, B0 - B10 และ C0 - C10 เท่านั้น

4. นิยามเชิงปฏิบัติการ

1. มาตรฐานของกระดาษในระบบ ISO หมายถึง มาตรฐานที่กำหนดโดยองค์การมาตรฐานระหว่างประเทศ จุดเด่นของมาตรฐานนี้คือเมื่อแบ่งครึ่งตามแนวยาวแล้วยังคงมีสัดส่วนเดียวกันหมด หากแบ่งครึ่งไปอีก ขนาดกระดาษก็ยังคงมีสัดส่วนเดียวกันหมด ซึ่งอัตราส่วนของความกว้างต่อความยาวในกระดาษมาตรฐานนี้ คือ $1 : \sqrt{2}$

2. กระดาษชุด A หมายถึง กระดาษที่กำหนดพื้นที่ของ A0 ให้มีขนาดเท่ากับ 1 ตารางเมตร กระดาษ A0 จึงมีขนาดเท่ากับ $841 \times 1,189$ มิลลิเมตร เมื่อทำการแบ่งครึ่งตามความยาวจะได้เป็นกระดาษ A1 และหากทำการแบ่งไปเรื่อยๆ ก็จะได้กระดาษ A2 - A10

3. กระดาษชุด B หมายถึง กระดาษที่กำหนดให้ B1 มีขนาดอยู่ระหว่าง A0 กับ A1 ทำให้ความกว้างของ B0 เป็น 1,000 มิลลิเมตร ขนาดของกระดาษ B0 จึงเป็น $1,000 \times 1,414$ มิลลิเมตร โดยเมื่อทำการแบ่งครึ่งกระดาษ B0 ตามความยาวจะได้เป็นกระดาษ B1 และหากทำการแบ่งไปเรื่อยๆ ก็จะได้กระดาษ B2 - B10

4. กระดาษชุด C หมายถึง กระดาษที่กำหนดให้ C0 เกิดจากการหาค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของพื้นที่กระดาษ A0 และ B0 เพื่อไว้กำหนดขนาดของเอกสาร ทำให้กระดาษชุด C ใหญ่กว่ากระดาษชุด A แต่เล็กกว่ากระดาษชุด B โดยเมื่อทำการแบ่งครึ่งกระดาษ C0 ตามความยาวจะได้เป็นกระดาษ C1 และหากทำการแบ่งไปเรื่อยๆ ก็จะได้กระดาษ C2 - C10

5. กระดาษชุด R หมายถึง กระดาษที่ผู้จัดทำสร้างขึ้นโดยกำหนดให้ R0 มีขนาดใหญ่ที่สุด และกำหนดเส้นทแยงมุมของ R0 ให้มีขนาด 1,000 มิลลิเมตร โดยเมื่อทำการแบ่งครึ่งกระดาษ R0 ตามความยาวจะได้เป็นกระดาษ R1 และหากทำการแบ่งไปเรื่อยๆ ก็จะได้กระดาษ R2 - R10

6. ยุทธวิธีช่วยคิดคณิตศาสตร์ หมายถึง วิธีการหรือแนวทางที่นำมาช่วยแก้ปัญหาหรือหาคำตอบจากปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่มีความหลากหลาย โดยใช้ความรู้ ความสามารถทางคณิตศาสตร์ และใช้จินตนาการทางความคิดมาสร้างสรรค์การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์อย่างสมเหตุสมผล

7. ความสัมพันธ์เวียนเกิด หมายถึง ความสัมพันธ์ที่เกิดจากความกว้างและความยาวของกระดาษชุด A, B, C และ R

8. ความยาว หมายถึง ระยะที่ยาวที่สุดของด้านกระดาษชุด A, B, C และ R มีหน่วยเป็นมิลลิเมตร

9. ความกว้าง หมายถึง ระยะที่สั้นที่สุดของด้านกระดาษชุด A, B, C และ R มีหน่วยเป็นมิลลิเมตร

5. ขั้นตอนการดำเนินการ

1. ขั้นเตรียมการ

1.1 คณะผู้จัดทำมีสมาชิก 3 คน คือ เด็กหญิงปานระพี กลับบ้านเกาะ เด็กหญิงปาไลตา อเนก และเด็กหญิงปฐมภาพร เอื้อทรัพย์อนันต์ ได้ศึกษาการทำโครงการจากเอกสาร ตำรา อินเทอร์เน็ต

1.2 คณะผู้จัดทำเลือกหัวข้อโครงการคณิตศาสตร์ที่สนใจและเสนอหัวข้อต่อครูที่ปรึกษา

1.3 คณะผู้จัดทำและครูที่ปรึกษาร่วมกันอภิปรายในหัวข้อที่จะจัดทำ จนได้ข้อสรุปหัวข้อที่จะจัดทำโครงการเรื่อง “สูตรความกว้าง ความยาว และความสัมพันธ์เวียนเกิดของกระดาษชุด A, B และ C”

2. ชั้นวางแผนการดำเนินการ

2.1 ศึกษาข้อมูลเกี่ยวกับเรื่อง ความสัมพันธ์ของกระดาษชุด A, B และ C และสอบถามข้อมูลเกี่ยวกับการใช้งานกระดาษจากเจ้าหน้าที่ถ่ายเอกสารของโรงเรียนราชินีบูรณะ

2.2 ศึกษาข้อมูลเกี่ยวกับเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง เช่น เลขยกกำลัง อัตราส่วน ค่าเฉลี่ย เรขาคณิต และการใช้ยุทธวิธีช่วยคิดคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา และสำหรับเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่ยังไม่เคยเรียน คณะผู้จัดทำศึกษาข้อมูลจากห้องสมุดโรงเรียน อินเทอร์เน็ต และจากครูที่ปรึกษาโครงการ

3. ชั้นลงมือปฏิบัติ

3.1 ทำการทดลองเบื้องต้นเกี่ยวกับความสัมพันธ์ของกระดาษ โดยจากการศึกษาทราบว่ากระดาษชุด A, B และ C มีอัตราส่วนของความกว้าง : ความยาว เป็น $1 : \sqrt{2}$ จึงทำการทดลองเบื้องต้นโดยการนำความยาวของกระดาษชุด A, B และ C หาด้วยความกว้าง ได้ว่าผลที่ได้จากความยาวของกระดาษชุด A, B และ C หาด้วยความกว้าง มีค่าใกล้เคียงกับ $\sqrt{2}$ ซึ่งมีค่าประมาณ 1.4142 และยังสังเกตเห็นอีกว่าความยาวของกระดาษจะเท่ากับความกว้างของกระดาษรหัสก่อนหน้า เช่น กระดาษ A4 ยาว 297 มิลลิเมตร และกระดาษ A3 กว้าง 297 มิลลิเมตร จะเห็นได้ว่าความยาวของกระดาษ A4 มีขนาดเท่ากับความกว้างของกระดาษ A3 และอาจกล่าวได้ว่าความกว้างของกระดาษจะทั้ง 3 ชุด จะเท่ากับหรือใกล้เคียงกับครึ่งหนึ่งของความยาวของกระดาษรหัสก่อนหน้า เช่น กระดาษ B1 กว้าง 707 มิลลิเมตร และกระดาษ B0 ยาว 1,414 มิลลิเมตร จะสังเกตเห็นว่ากระดาษ B1 มีความกว้างเป็นครึ่งหนึ่งของความยาวกระดาษ B0 เป็นลักษณะเช่นนี้ทั้งกระดาษชุด A, B และ C

3.2 รวบรวมข้อมูลที่ศึกษามาได้ และนำมาหาความสัมพันธ์และทำการแสดงว่าอัตราส่วนของความกว้าง : ความยาว ของกระดาษชุด A, B และ C เป็น $1 : \sqrt{2}$ โดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์

3.3 รวบรวมความสัมพันธ์ของกระดาษชุด A, B และ C ที่ศึกษานำมาใช้ในการหาสูตรความกว้าง ความยาวและหาความสัมพันธ์เวียนเกิดของกระดาษชุด A, B และ C โดยใช้ยุทธวิธีช่วยคิดคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย การหาแบบรูป (Find a Pattern) การสร้างตาราง (Make a Table) และการวาดภาพ (Draw a Picture)

3.4 รวบรวมความสัมพันธ์ของกระดาษชุด A, B และ C มาสร้างกระดาษชุด R

4. ชั้นสรุปรายงานผล

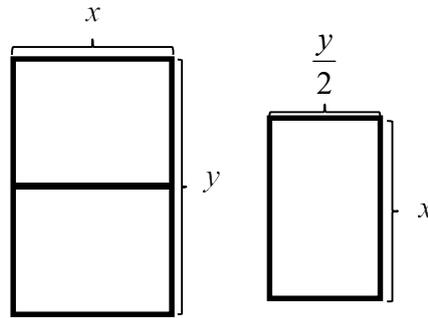
4.1 แบ่งหน้าที่ให้สมาชิกแต่ละคนรับผิดชอบการเขียนรายงานโครงการ

4.2 ดำเนินการจัดทำโครงการฉบับร่างจากนั้นนำเสนอต่อครูที่ปรึกษาโครงการ ร่วมกันตรวจสอบและรับฟังข้อเสนอแนะเพื่อปรับปรุงแก้ไข

6. ผลการศึกษา

1. กระดาษชุด A, B และ C เมื่อนำมาแบ่งครึ่งตามความยาว ขนาดของกระดาษที่ยังคงมีสัดส่วน (อัตราส่วนของด้านกว้างกับด้านยาว) เดียวกับขนาดก่อนพับ และหากแบ่งครึ่งตามความยาวไปอีก ขนาดใหม่

ก็ยังคงมีสัดส่วนเดียวกันหมด เพื่อให้ได้ผลตามที่กล่าวมาข้างต้น จึงได้มีการคำนวณและพบว่าอัตราส่วนของความกว้าง : ความยาว เป็น $1 : \sqrt{2}$ ดังนี้



ภาพที่ 1 แสดงการแบ่งครึ่งตามความยาวของกระดาษชุด A, B และ C โดย x แทนความกว้างและ y แทนความยาว ของกระดาษแผ่นใหญ่

จากภาพที่ 1 สังเกตว่าเมื่อแบ่งครึ่งกระดาษตามความยาว จะได้ความกว้างของกระดาษแผ่นใหญ่เป็นความยาวของกระดาษที่แบ่งครึ่งและครึ่งหนึ่งของความยาวกระดาษแผ่นใหญ่เป็นความกว้างของกระดาษที่แบ่งครึ่งซึ่งอัตราส่วนของความกว้าง : ความยาว ของกระดาษทั้งสองนั้นเท่ากัน

สมการที่ได้คือ
$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{y}{2}}{x}$$

เมื่อจัดรูปสมการดังกล่าวจะได้

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{y}{2x} \\ \frac{x}{y} &= \frac{y}{2x} \\ \frac{x^2}{y^2} &= \frac{1}{2} \\ \sqrt{\frac{x^2}{y^2}} &= \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \frac{x}{y} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

จากสมการจะได้อัตราส่วนของความกว้าง : ความยาว เป็น $1 : \sqrt{2}$ ตามต้องการ

2. ความกว้างและความยาวของกระดาษชุด A จากความสัมพันธ์แล้วนำมาจัดรูปจะเห็นเป็นแบบรูปซึ่งสามารถสรุปเป็นสูตรของความกว้างและความยาวของกระดาษชุด A ได้ดังนี้

$$W_{An} = 10^3 \times 2^{-\left(\frac{2n+1}{4}\right)} \quad L_{An} = 10^3 \times 2^{\frac{1-2n}{4}}$$

3. ความกว้างและความยาวของกระดาษชุด B จากความสัมพันธ์แล้วนำมาจัดรูปจะเห็นเป็นแบบรูปซึ่งสามารถสรุปเป็นสูตรของความกว้างและความยาวของกระดาษชุด B ได้ดังนี้

$$W_{Bn} = 10^3 \times 2^{-\frac{n}{2}} \quad L_{Bn} = 10^3 \times 2^{\left(\frac{1-n}{2}\right)}$$

4. ความกว้างและความยาวของกระดาษชุด C จากความสัมพันธ์แล้วนำมาจัดรูปจะเห็นเป็นแบบรูปซึ่งสามารถสรุปเป็นสูตรของความกว้างและความยาวของกระดาษชุด C ได้ดังนี้

$$W_{Cn} = 10^3 \times 2^{-\left(\frac{1+4n}{8}\right)} \quad L_{Cn} = 10^3 \times 2^{\left(\frac{3-4n}{8}\right)}$$

5. ความกว้างและความยาวของชุด A, B และ C มีความสัมพันธ์กับรหัสก่อนหน้าซึ่งเมื่อจัดรูปจะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$W_{An} = W_{A(n-1)} \times 2^{-\frac{1}{2}} \quad L_{An} = L_{A(n-1)} \times 2^{-\frac{1}{2}} \quad \text{โดย } n = 0, 1, 2, \dots, 10$$

$$W_{Bn} = W_{B(n-1)} \times 2^{-\frac{1}{2}} \quad L_{Bn} = L_{B(n-1)} \times 2^{-\frac{1}{2}} \quad \text{โดย } n = 0, 1, 2, \dots, 10$$

$$W_{Cn} = W_{C(n-1)} \times 2^{-\frac{1}{2}} \quad L_{Cn} = L_{C(n-1)} \times 2^{-\frac{1}{2}} \quad \text{โดย } n = 0, 1, 2, \dots, 10$$

6. กระดาษเริ่มจากการสร้างกระดาษที่มีขนาดใหญ่ที่สุดนั่นคือกระดาษ R0 โดยคณะผู้จัดทำได้กำหนดให้เส้นทแยงมุมของกระดาษ R0 มีความยาว 1,000 มิลลิเมตร และอัตราส่วนของความกว้าง : ความยาว เป็น $1 : \sqrt{2}$ ได้สูตรของความกว้างและความยาวของกระดาษชุด A ได้ดังนี้

$$W_{Rn} = 10^3 \times 3^{-\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{n}{2}} \quad L_{Rn} = 10^3 \times 3^{\frac{1}{2}} \times 2^{\left(\frac{1-n}{2}\right)}$$

ความกว้างและความยาวของกระดาษชุด R ก็มีความสัมพันธ์กันกับรหัสก่อนหน้าเช่นกันดังนี้

$$W_{Rn} = W_{R(n-1)} \times 2^{-\frac{1}{2}} \quad L_{Rn} = L_{R(n-1)} \times 2^{-\frac{1}{2}} \quad \text{โดย } n = 0, 1, 2, \dots, 10$$

7. สรุปผลการศึกษา

1. กระดาษชุด A, B และ C เมื่อนำมาแบ่งครึ่งตามความยาว ขนาดของกระดาษยังคงมีสัดส่วน (อัตราส่วนของด้านกว้างกับด้านยาว) เดียวกับขนาดก่อนพับ และหากแบ่งครึ่งไปอีกขนาดใหม่ก็ยังคงมีสัดส่วนเดียวกันทั้งหมดเพื่อให้ได้ผลตามที่กำหนดได้มีการคำนวณและพบว่าอัตราส่วนของความกว้าง : ความยาว เป็น $1 : \sqrt{2}$

2. สูตรความกว้างและความยาวของกระดาษชุด A ได้แก่

$$W_{An} = 10^3 \times 2^{-\left(\frac{2n+1}{4}\right)} \quad L_{An} = 10^3 \times 2^{\frac{1-2n}{4}}$$

3. สูตรความกว้างและความยาวของกระดาษชุด B ได้แก่

$$W_{Bn} = 10^3 \times 2^{-\frac{n}{2}} \quad L_{Bn} = 10^3 \times 2^{\left(\frac{1-n}{2}\right)}$$

4. สูตรความกว้างและความยาวของกระดาษชุด C ได้แก่

$$W_{Cn} = 10^3 \times 2^{-\left(\frac{1+4n}{8}\right)} \quad L_{Cn} = 10^3 \times 2^{\left(\frac{3-4n}{8}\right)}$$

5. ความสัมพันธ์เวียนเกิดความสัมพันธ์เวียนเกิดของกระดาศชุด A, B และ C ได้แก่

$$a_n = a_{n-1} \times 2^{-\frac{1}{2}} \text{ โดย } a_0 \text{ เป็นความกว้างและความยาวของกระดาศชุด A, B และ C รหัส 0}$$

6. ความกว้าง ความยาวและสูตรของกระดาศชุด R แสดงดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 1 ความกว้างและความยาวของกระดาศชุด R

n	W_{Rn}	L_{Rn}
0	577	816
1	408	577
2	289	408
3	204	289
4	144	204
5	102	144
6	72	102
7	51	72
8	36	51
9	26	36
10	18	26

7. สูตรความกว้างและความยาวของกระดาศชุด R ได้แก่

$$W_{Rn} = 10^3 \times 3^{-\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{n}{2}}$$

$$L_{Rn} = 10^3 \times 3^{-\frac{1}{2}} \times 2^{\left(\frac{1-n}{2}\right)}$$

8. อภิปรายผล

1. กระดาศชุด A, B และ C มีอัตราส่วนของความกว้าง : ความยาว เป็น $1 : \sqrt{2}$ เนื่องจากต้องการให้เมื่อแบ่งครึ่งกระดาศตามแนวยาวแล้วขนาดของกระดาศที่แบ่งครึ่งก็ยังคงมีสัดส่วนเดียวกัน ซึ่งสามารถแสดงให้เห็นได้ว่าต้องเป็น $1 : \sqrt{2}$ โดยการใช้เรื่องสัดส่วน อัตราส่วน และอาศัยยุทธวิธีช่วยคิดคณิตศาสตร์เข้ามาช่วยในเรื่องการวาดภาพ ทำให้เห็นภาพของความสัมพันธ์ของกระดาศ และเขียนแสดงความสัมพันธ์ดังกล่าวได้

2. การหาสูตรความกว้างและความยาวของกระดาศชุด A, B และ C ทำได้โดยอาศัยความสัมพันธ์ของกระดาศที่ได้ทำการศึกษา และเนื้อหาคณิตศาสตร์ เช่น เลขยกกำลัง อัตราส่วน เป็นต้น นอกจากนี้ยังใช้ยุทธวิธีช่วยคิดคณิตศาสตร์ การหาแบบรูป (Find a Pattern) การสร้างตาราง (Make a Table) และการวาดภาพ (Draw a Picture) ซึ่งผลที่ได้เป็นสูตรความกว้างและความยาวของกระดาศชุด A, B และ C แต่เนื่องจากกระดาศทั้ง 3 ชุดสร้างจากอัตราส่วนของความกว้าง : ความยาวเป็น $1 : \sqrt{2}$ ซึ่ง $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

ทำให้เมื่อแทนค่าลงในสูตรแล้วได้ค่าที่ไม่ตรงกับความจริงและความยาวของกระดาศจริง เพราะความกว้างและความยาวของกระดาศจริงเกิดจากการปิดเศษเป็นจำนวนเต็ม เนื่องจากไม่สามารถสร้างกระดาศที่มีอัตราส่วนของความกว้าง : ความยาว เป็น $1 : \sqrt{2}$ ได้อย่างพอดี ดังนั้น กระดาศชุด A, B และ C ที่เราใช้อยู่ในปัจจุบัน จึงไม่ได้มีอัตราส่วนของความกว้าง : ความยาว เป็น $1 : \sqrt{2}$ แต่เป็นอัตราส่วนที่ใกล้เคียงกับอัตราส่วนดังกล่าว

จากการจัดรูปความกว้างและความยาวของกระดาศชุด A, B และ C จะเห็นเป็นความสัมพันธ์เวียนเกิด ซึ่งทั้งความกว้างและความยาวของกระดาศทั้ง 3 ชุด มีลักษณะความสัมพันธ์ที่เหมือนกัน เห็นได้จากความกว้างและความยาวของกระดาศทั้ง 3 ชุด สามารถจัดรูปกระดาศรหัสตั้งแต่ 1 - 10 ให้อยู่ในรูปของความกว้างและความยาวของเลขรหัสก่อนหน้า ซึ่งสามารถเขียนได้ในรูป $a_n = a_{n-1} \times 2^{-\frac{1}{2}}$ โดย a_0 เป็นความกว้างและความยาวของกระดาศชุด A, B และ C รหัส 0 นั่นเอง คณะผู้จัดทำคาดว่าสาเหตุที่ทำให้กระดาศทั้ง 3 ชุด มีลักษณะของความสัมพันธ์เวียนเกิดของความกว้างและความยาวเหมือนกัน มาจากการที่กระดาศทั้ง 3 ชุด ถูกสร้างมาจากการกำหนดให้อัตราส่วนของความกว้าง : ความยาว เป็น $1 : \sqrt{2}$ ทำให้เมื่อศึกษาความสัมพันธ์เวียนเกิด จึงมีลักษณะความสัมพันธ์ที่เหมือนกันเพียงแต่ค่าเริ่มต้นนั้น คือ a_0 แตกต่างกันไป ทำให้ได้ตัวเลขแต่ละชุดออกมาต่างกัน ซึ่งผลที่ได้ก็คือความกว้างและความยาวของกระดาศทั้ง 3 ชุดนั่นเอง

3. กระดาศชุด R สร้างมาจากการศึกษาความสัมพันธ์ของกระดาศชุด A, B และ C ซึ่งมีอัตราส่วนของความกว้าง : ความยาว เป็น $1 : \sqrt{2}$ โดยคณะผู้จัดทำกำหนดให้กระดาศชุด R0 มีเส้นทแยงมุมเท่ากับ 1000 มิลลิเมตร เพื่อให้เป็นกระดาศชุดที่สร้างขึ้นโดยโรงเรียนราชินีบูรณะและในอีก 2 ปีข้างหน้าโรงเรียนราชินีบูรณะจะมีอายุครบ 100 ปี อาจนำกระดาศชุด R ไปใช้ในการจัดทำเอกสาร สมุด หนังสือต่างๆ เพื่อให้เป็นเอกลักษณ์ของงาน 100 ปี โรงเรียนราชินีบูรณะ ยิ่งไปกว่านั้น เมื่อศึกษาความสัมพันธ์เวียนเกิดพบว่าสามารถจัดรูปกระดาศรหัสตั้งแต่ 1-10 ให้อยู่ในรูปของความกว้างและความยาวของเลขรหัสก่อนหน้า ซึ่งเขียนได้ในรูป $a_n = a_{n-1} \times 2^{-\frac{1}{2}}$ โดย a_0 เป็นความกว้างและความยาวของกระดาศรหัส 0 เช่นเดียวกับกระดาศชุด A, B และ C คณะผู้จัดทำคาดว่าสาเหตุที่ทำให้กระดาศชุดนี้มีความสัมพันธ์เวียนเกิดเหมือนกับกระดาศทั้ง 3 ชุด เนื่องจากคณะผู้จัดทำได้นำแนวคิดในการสร้างกระดาศชุดนี้มาจากกระดาศทั้ง 3 ชุด นั่นคือ อัตราส่วนของความกว้าง : ความยาว เป็น $1 : \sqrt{2}$ จึงทำให้ความสัมพันธ์เวียนเกิดที่ได้ เหมือนกัน

9. ข้อเสนอแนะ

1. สามารถนำสูตรและความสัมพันธ์เวียนเกิดมาใช้ในการคำนวณความกว้างและความยาวของกระดาศชุด A, B และ C
2. สามารถนำแนวคิดที่ได้จากการทำโครงการไปสร้างกระดาศรูปแบบอื่นๆ ที่มีความสัมพันธ์เดียวกับกระดาศชุด A, B และ C ได้
3. อาจมีการศึกษาการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์มาใช้ในการเขียนโปรแกรมในการคำนวณขนาดของความกว้างและความยาวของกระดาศชุด A, B และ C

4. ในการทำโครงการต่อไปอาจนำหลักการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการพิสูจน์ความสัมพันธ์นี้
ให้มีความน่าเชื่อถือมากยิ่งขึ้น

10. เอกสารอ้างอิง

กลุ่มวิจัยและพัฒนาองค์กรแห่งการเรียนรู้ สำนักพัฒนานวัตกรรมการจัดการศึกษา. (2552). **ยุทธวิธีช่วยคิด
คณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.

ไพศาล นาคมหาชาลสินธุ์ และวิชาญ ลีวศิริตัญญูกุล. (2548). **คอมบินาทอริก**. กรุงเทพฯ : ด่านสุทธา.

เยาวลักษณ์ เตียรณบรรจง. (2557). **เลขยกกำลัง**. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

รัชพล ธนาภากรรัตนกุล. (2552). **อัตราส่วน - ร้อยละ**. กรุงเทพฯ : ห้างหุ้นส่วนเจริญรัฐการพิมพ์จำกัด.

โรงพิมพ์ตำรวจสำนักงานตำรวจแห่งชาติ. (2555). **มาตรฐานขนาดของกระดาษ**. สืบค้นเมื่อวันที่ 20 กรกฎาคม
2560 จาก <http://policeprinting.police.go.th/ppb/?p=1274>.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2553). **หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน
คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2**. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

_____ (2556). **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม
คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2**. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

_____ (2555). **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม
คณิตศาสตร์ เล่ม 5 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 - 6**. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

Robin Kinross. (2009). **A4 and before Towards a long history of paper sizes**. [Cited 10
July 2017]. Available from [https://www.nias.knaw.nl/Publications/KB%20Lecture/KB-
_06_Robert%20Kinross](https://www.nias.knaw.nl/Publications/KB%20Lecture/KB-
_06_Robert%20Kinross).