บทที่ 2
ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับกราฟ

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีเบื้องต้นที่ใช้ในงานวิจัย [4] โดยที่เนื้อหาหลักจะมุ่งประเด็นไปที่กราฟ รวมถึงการหาปัญหาต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด

บทนิยาม 1 กราฟ $G = (V,E)$ เป็นโครงสร้างคณิตศาสตร์ที่ประกอบด้วยเซต 2 เซต V และ E สมาชิกของ V เรียกว่า **จุด** (vertex) และสมาชิกของ E เรียกว่า **เส้น** หรือ **เส้นเชื่อม** (edge)

บทนิยาม 2 กราฟไม่ชัด (trivial graph) เป็นกราฟที่ประกอบด้วยจุด 1 จุดและไม่มีเส้น

บทนิยาม 3 จุดประชิด (adjacent vertices) คือ 2 จุดที่มีการเชื่อมต่อด้วยเส้น

บทนิยาม 4 เส้นประชิด (adjacent edges) คือ 2 เส้นที่มีจุดปลายเป็นจุดเดียวกัน

บทนิยาม 5 ถ้าจุด v เป็นจุดปลายของเส้น e แล้ว เรียก v ว่า**ตกกระทบ** (incident) บน e และ e ตกกระทบบน v

บทนิยาม 6 แนวเดิน (walk) W ในกราฟ G คือ ลำดับจำกัดของจุดและเส้นสลับกันของกราฟ G ดังนี้

$$W : v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$$

ซึ่งเส้น e_i มีจุดปลายคือ v_{i-1} และ v_i สำหรับ $1 \le i \le n$

บทนิยาม 7 กราฟเชื่อมโยง (connected) ถ้าทุก ๆ คู่ของจุด u และ v มีแนวเดินจาก u ไป v

บทนิยาม 8 กราฟมีน้ำหนัก (weighted graph) เป็นกราฟที่แต่ละเส้นระบุจำนวน
เรียกว่า น้ำหนักของเส้น ใช้สัญลักษณ์ $w(e)$

บทนิยาม 9 สับกราฟ (subgraph) ของกราฟ G คือกราฟ H ซึ่งจุดและเส้นทั้งหมดอยู่ใน G

บทนิยาม 10 สับกราฟแผ่ทั่ว (spanning subgraph) ของกราฟ G คือสับกราฟ H ของ G ที่ $V_H = V_G$

บทนิยาม 11 ต้นไม้ (tree) กราฟเชื่อมโยงที่ไม่มีวง

บทนิยาม 12 ต้นไม้แผ่ทั่ว (spanning tree) ของกราฟ คือสับกราฟแผ่ทั่วถึงที่เป็นต้นไม้

ทฤษฎีบท 1 ให้ T เป็นกราฟอย่างง่าย ที่มีจุดยอด n จุด สิ่งต่อไปนี้จะสมมูลกัน

1. T เป็นต้นไม้
2. T เป็นกราฟเชื่อมโยงและไม่มีวง
3. T เป็นกราฟเชื่อมโยงและมี n-1 เส้น
4. T ไม่มีวงและมี n-1 เส้น

ทฤษฎีบท 2 กราฟ G เป็นกราฟเชื่อมโยงก็ต่อเมื่อกราฟนั้นมีต้นไม้แผ่ทั่ว

ทฤษฎีบท 3 ขั้นตอนวิธีของครุสกอลหาน้ำหนักของต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดของกราฟเชื่อมโยงที่ไม่มีทิศทางได้

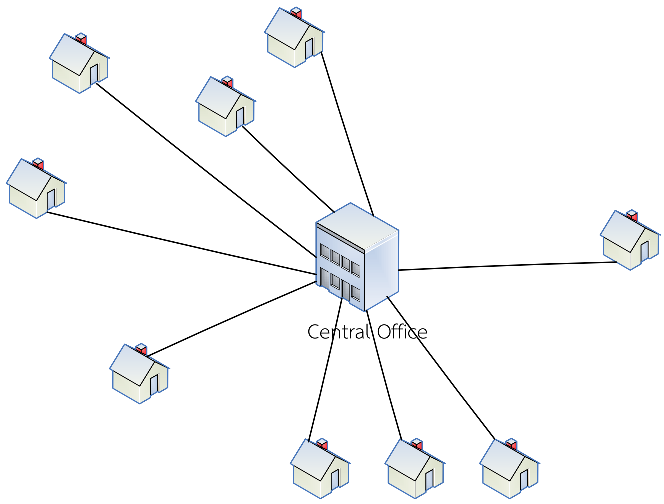
ในที่นี้จะขอรวบรวมสัญลักษณ์ที่จะใช้ ดังนี้

n	คือจำนวนเส้นในกราฟ G
T	คือต้นไม้
T^*	คือต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด
$\|V(G)\|$	คือจำนวนของจุดในกราฟ G
$\|E(G)\|$	คือจำนวนของเส้นในกราฟ G
w_G	คือน้ำหนักทั้งหมดของกราฟ G

ปัญหาต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด (Minimum Spanning Tree Problem)

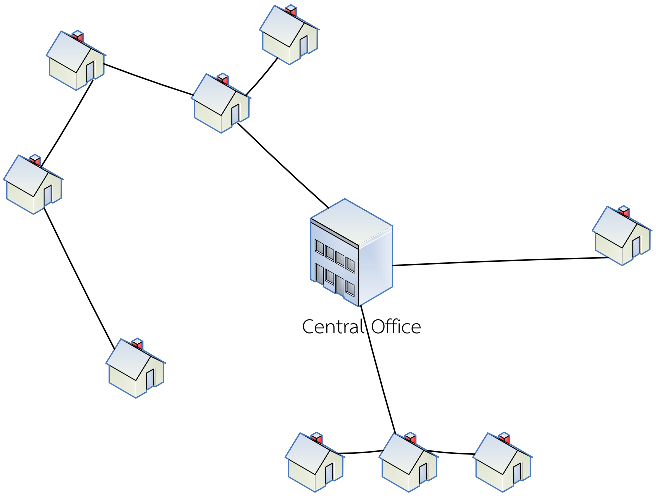
ปัญหาต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดนี้ ต้องการหาเซตของเส้นเชื่อมที่เชื่อมจุดต่างๆ ทุกจุดในข่ายงานโดยมีผลรวมของระยะทางที่สั้นที่สุด นั่นคือ ต้องการหากราฟต้นไม้สำหรับข่ายงานที่ให้ผลรวมของระยะทางสั้นที่สุดปัญหาที่เข้าข่ายนี้ได้แก่ ปัญหาโลจิสติกส์ เช่น การเดินสายโทรศัพท์ในหมู่บ้าน การเดินท่อประปา เดินสายไฟฟ้า เดินสายเคเบิล ซึ่งต้องการเชื่อมจุดทุกจุด โดยให้ได้ผลรวมของค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด

ถ้าต้องการวางสายโทรศัพท์โดยต้องเดินสายผ่าน จุดศูนย์กลาง (Central Office) ดังภาพด้านล่าง ถ้าไม่ใช้เรื่องการหาต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดมาแก้ปัญหานี้ อาจจะแก้ปัญหาโดยการเดินสายโทรศัพท์จากจุดศูนย์กลางไปยังบ้านต่างๆ ซึ่งต้องเสียค่าใช้จ่ายสำหรับต้นทุนในการวางสายสูง



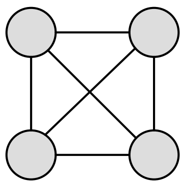
ภาพที่ 2.1 การเดินสายโทรศัพท์จากจุดศูนย์กลางไปยังบ้านแต่ละหลัง

แต่ถ้าเดินสายไฟโดยการหาค่าต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดมาประยุกต์ใช้เพื่อแก้ปัญหาโลจิสติกส์เพื่อให้เกิดต้นทุนน้อยที่สุด จะได้ดังภาพที่ 2.2



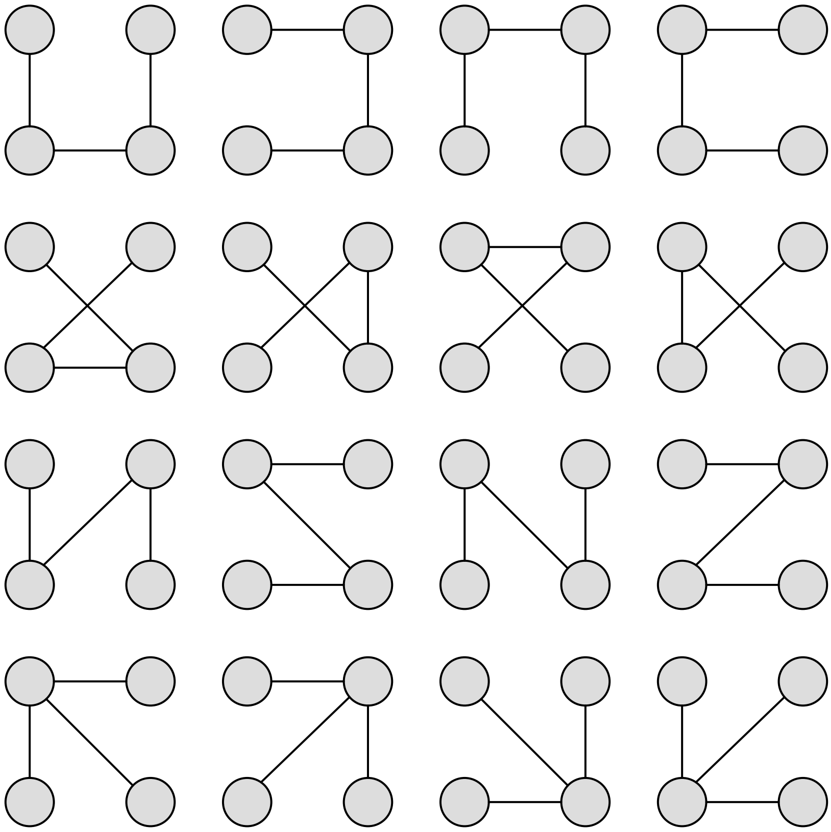
ภาพที่ 2.2 การเดินสายโทรศัพท์เพื่อให้เกิดต้นทุนน้อยที่สุด

เมื่อพิจารณาจากกราฟสมบูรณ์ (Complete Graph) ที่มี 4 จุด มีเส้นเชื่อมทั้งหมด 6 เส้น ดังภาพที่ 2.3



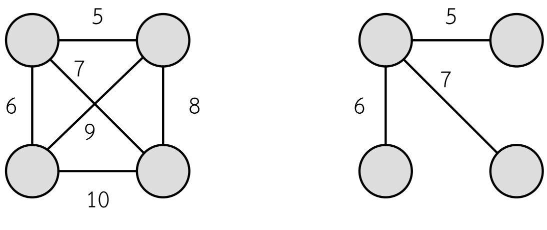
ภาพที่ 2.3 กราฟสมบูรณ์ (Complete Graph) 4 จุด

กราฟสมบูรณ์ (Complete Graph) ที่มี 4 จุด จะมีต้นไม้แผ่ทั่วทั้งหมด 16 แบบ ดังภาพที่ 2.4



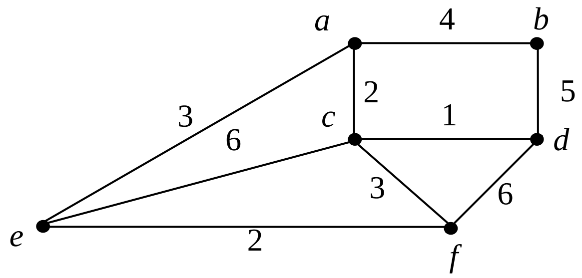
ภาพที่ 2.4 กราฟสมบูรณ์ 4 จุด มีต้นไม้แผ่ทั่วทั้งหมด 16 แบบ

ถ้ากราฟกำหนดน้ำหนักบนเส้นเชื่อมมาให้ แล้วต้องการหาต้นไม้แผ่ทั่วน้อยที่สุด สามารถหาได้ไม่ยาก นัก ถ้ากราฟที่พิจารณามีขนาดไม่ใหญ่และสับซ้อนเกินไป ดังภาพ 2.5



ภาพที่ 2.5 การหาต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดของกราฟสมบูรณ์ 4 จุด

แต่ถ้ากราฟมีขนาดใหญ่ขึ้น จะใช้ขั้นตอนในวิธีในการหาต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด ยกตัวอย่าง เช่น ในกราฟที่กำหนดน้ำหนักดังภาพที่ 1 แสดงถึงเมือง 6 แห่ง และค่าใช้จ่ายในการก่อสร้างสายไฟฟ้าระหว่างเมือง 2 เมือง โดยจะให้จุด แทนเมืองแต่ละเมือง และให้เส้น แทนเส้นทางในการก่อสร้างสายไฟฟ้า ซึ่งจะให้น้ำหนักที่อยู่บนเส้น แทนค่าใช้จ่ายในการก่อสร้าง เราต้องการสร้างระบบสายไฟฟ้าที่มีค่าใช้จ่ายน้อยที่สุดที่จะเชื่อมเมืองทั้งหมดนี้



ภาพที่ 2.6 ตัวอย่างการใช้กราฟในการแก้ปัญหาโลจิสติกส์

คำตอบจะถูกแทนได้ด้วยสับกราฟรูปหนึ่งของกราฟเริ่มต้น ซึ่งสับกราฟนี้จะต้องเป็นต้นไม้แผ่ทั่วกราฟ เพราะทุกเมืองต้องอยู่ในระบบสายไฟฟ้า สับกราฟนี้ต้องติดต่อกัน เพราะเมืองใดๆ ต้องมีสายไฟฟ้าไปเชื่อมต่อกับเมืองอื่นๆ ได้ และสับกราฟนี้ต้องมีทางเดินเพียงทางชุดเดียวระหว่างแต่ละคู่ของจุดยอด เพราะกราฟที่มีทางเดินขนานระหว่างจุดยอดคู่หนึ่งจะไม่ทำให้ระบบการก่อสร้างสายไฟฟ้ามีค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด สรุปสิ่งที่ต้องการคือ ต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดโดยมีผลรวมของน้ำหนักบนเส้นน้อยที่สุด ต้นไม้เช่นนี้เรียกว่าต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด

แบบการคำนวณที่ใช้หาต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุด [3], [5] ที่จะกล่าวถึงมีชื่อว่า ขั้นตอนวิธีของครุสกอล (Kruskal’s Algorithm) และขั้นตอนวิธีของพริม (Prim’s Algorithm) มีขั้นตอนวิธีดังนี้

2.2 ขั้นตอนวิธีของครุสกอล (Kruskal’s Algorithm) [1956]

ขั้นที่ 1 กำหนดส่วนของผลเฉลย $T^* = \varnothing$ **,** $k = 1$ และเรียงน้ำหนักของ k โดย

$$c(e_1) \le c(e_2) \le \ldots \le c(e_q)$$

ขั้นที่ 2 ถ้า T^* เป็นต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดแล้ว หยุด

ขั้นที่ 3 ถ้า $T^* + e_k$ ไม่มีวง แล้ว $T^* = T^* + e_k$ กำหนด $k = k+1$ และย้อนกลับไปขั้นที่ 2

ตัวอย่างที่1 การใช้แบบคำนวณการหาต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดของครุสกอล ในรูป 1 โดยมีจุดยอดเรียงกันดังนี้ *a, b, c, d, e, f*

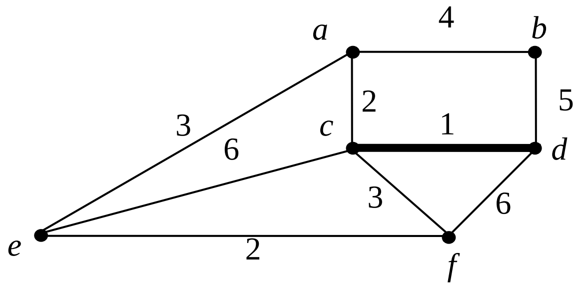
วิธีทำ

ขั้นที่ 1 $T^* = \varnothing$ จัดลำดับของเส้นโดยเรียงน้ำหนักจากน้อยไปมาก

1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 6

ขั้นที่ 2 T^* ยังไม่เป็นต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดแล้ว

ขั้นที่ 3 $T^* + e(cd)$ ไม่มีวง จะได้ว่า $T^* = T^* + e(cd)$



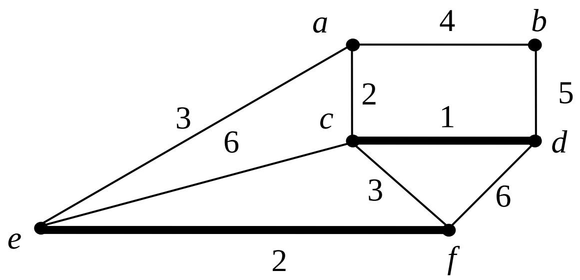
ภาพที่ 2.7 ผลที่ได้จากการทำซ้ำรอบที่ 1 ด้วยวิธีของครุสกอล

ขั้นที่ 1 $T^* = \{e(cd)\}$ จัดลำดับของเส้นโดยเรียงน้ำหนักจากน้อยไปมาก

2, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 6

ขั้นที่ 2 T^* ยังไม่เป็นต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดแล้ว

ขั้นที่ 3 $T^* + e(ef)$ ไม่มีวง จะได้ว่า $T^* = T^* + e(ef)$



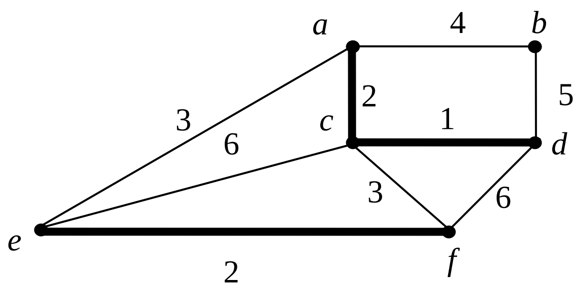
ภาพที่ 2.8 ผลที่ได้จากการทำซ้ำรอบที่ 2 ด้วยวิธีของครุสกอล

ขั้นที่ 1 $T^* = \{e(cd), e(ef)\}$ จัดลำดับของเส้นโดยเรียงน้ำหนักจากน้อยไปมาก

2, 3, 3, 4, 5, 6, 6

ขั้นที่ 2 T^* ยังไม่เป็นต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดแล้ว

ขั้นที่ 3 $T^* + e(ac)$ ไม่มีวง จะได้ว่า $T^* = T^* + e(ac)$



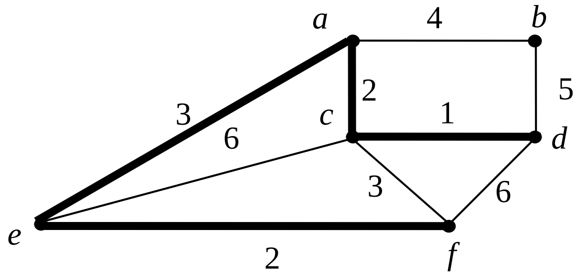
ภาพที่ 2.9 ผลที่ได้จากการทำซ้ำรอบที่ 3 ด้วยวิธีของครุสกอล

ขั้นที่ 1 $T^{*}=\{e(cd),e(ef),e(ac)\}$ จัดลำดับของเส้นโดยเรียงน้ำหนักจากน้อยไปมาก

3, 3, 4, 5, 6, 6

ขั้นที่ 2 T^{*} ยังไม่เป็นต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดแล้ว

ขั้นที่ 3 $T^{*}+e(ae)$ ไม่มีวง จะได้ว่า $T^{*}=T^{*}+e(ae)$

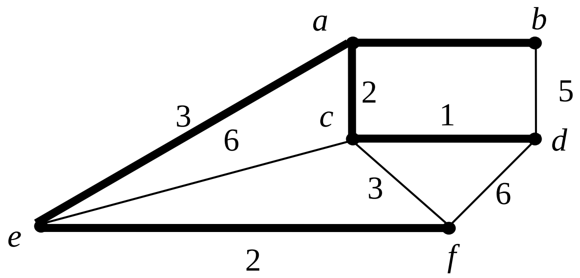


ภาพที่ 2.10 ผลที่ได้จากการทำซ้ำรอบที่ 4 ด้วยวิธีของครุสกอล

ขั้นที่ 1 $T^{*}=\{e(cd),e(ef),e(ac),e(ae)\}$ จัดลำดับของเส้นโดยเรียงน้ำหนักจากน้อยไปมาก 3, 4, 5, 6, 6

ขั้นที่ 2 T^{*} ยังไม่เป็นต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดแล้ว

ขั้นที่ 3 $T^{*}+e(cf)$ มีวง เพราะฉะนั้น $T^{*}+e(ab)$ จะได้ว่า $T^{*}=T^{*}+e(ab)$



ภาพที่ 2.11 ผลที่ได้จากการทำซ้ำรอบที่ 5 ด้วยวิธีของครุสกอล

ขั้นที่ 1 $T^{*}=\{e(cd),e(ef),e(ac),e(ae),e(ab)\}$

ขั้นที่ 2 T^{*} เป็นต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดแล้ว หยุด

คำตอบคือ เลือกเส้นเชื่อมที่เชื่อมเมืองที่ c และเมืองที่ d โดยเสียค่าใช้จ่าย 1
เลือกเส้นเชื่อมที่เชื่อมเมืองที่ a และเมืองที่ c โดยเสียค่าใช้จ่าย 2
เลือกเส้นเชื่อมที่เชื่อมเมืองที่ e และเมืองที่ f โดยเสียค่าใช้จ่าย 2
เลือกเส้นเชื่อมที่เชื่อมเมืองที่ a และเมืองที่ e โดยเสียค่าใช้จ่าย 3
เลือกเส้นเชื่อมที่เชื่อมเมืองที่ a และเมืองที่ b โดยเสียค่าใช้จ่าย 4

โดยน้ำหนักของต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดคือ 12

นั่นคือ สามารถเลือกวางสายไฟฟ้าให้กับ 6 เมืองนี้ ได้โดยเสียค่าใช้จ่ายทั้งหมดที่น้อยที่สุดคือ 12

2.3 ขั้นตอนวิธีของพริม (Prim's Algorithm) [1957]

ขั้นที่ 1 ให้ T^* เป็นต้นไม้ที่ประกอบด้วยจุดยอดหนึ่งจุด $T^* = \{1\}, B = \{2, ..., n\}$

ขั้นที่ 2 ถ้า $B = \varnothing$, แล้วให้หยุด

ขั้นที่ 3 หาจุด $u^* \in T^*$ และ $v^* \in B$ ซึ่ง $c(u^*v^*) = \min\{c(uv) : u \in T^* \text{ } and \text{ } v \in B\}$

จัด $T^* = T^* + u^*v^*$ และ $B = B - \{v^*\}$ แล้วย้อนกลับไปทำขั้นที่ 2

จากตัวอย่างที่ 1 การใช้แบบคำนวณการหาต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดของพริม ในรูป 1 โดยมีจุดยอดเรียงกันดังนี้ *a, b, c, d, e, f*

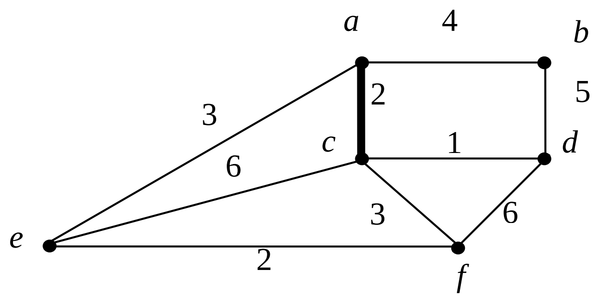
วิธีทำ

ขั้นที่ 1 $T^* = \{a\}, \qquad B = \{b, c, d, e, f\}$

ขั้นที่ 2 $B \neq \varnothing$

ขั้นที่ 3 $c(u^*v^*) = c(ac) = 2$

จัด $T^* = T^* + ac$ และ $B = B - \{c\}$



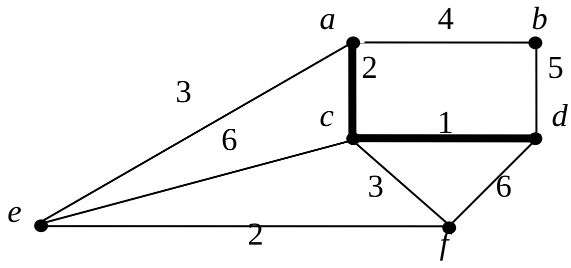
ภาพที่ 2.12 ผลที่ได้จากการทำซ้ำรอบที่ 1 ด้วยวิธีของพริม

ขั้นที่ 1 $T^* = \{a, c\}, \qquad B = \{b, d, e, f\}$

ขั้นที่ 2 $B \neq \varnothing$

ขั้นที่ 3 $c(u^*v^*) = c(cd) = 1$

จัด $T^* = T^* + cd$ และ $B = B - \{d\}$



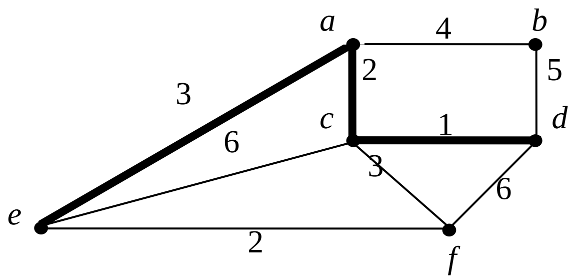
ภาพที่ 2.13 ผลที่ได้จากการทำซ้ำรอบที่ 2 ด้วยวิธีของพริม

ขั้นที่ 1 $T^* = \{a, c, d\}, \qquad B = \{b, e, f\}$

ขั้นที่ 2 $B \neq \varnothing$

ขั้นที่ 3 $c\left(u^* v^*\right) = c\left(ae\right) = 3$

จัด $T^* = T^* + ae$ และ $B = B - \{e\}$



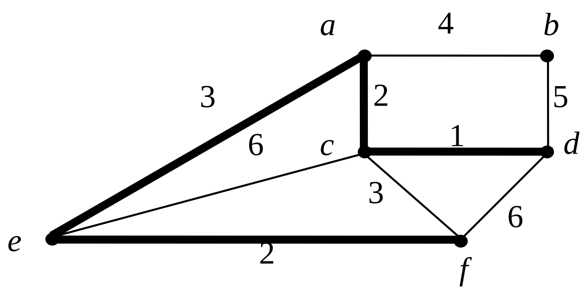
ภาพที่ 2.14 ผลที่ได้จากการทำซ้ำรอบที่ 3 ด้วยวิธีของพริม

ขั้นที่ 1 $T^* = \{a, c, d, e\}, \qquad B = \{b, f\}$

ขั้นที่ 2 $B \neq \varnothing$

ขั้นที่ 3 $c\left(u^* v^*\right) = c\left(ef\right) = 2$

จัด $T^* = T^* + ef$ และ $B = B - \{f\}$



ภาพที่ 2.15 ผลที่ได้จากการทำซ้ำรอบที่ 4 ด้วยวิธีของพริม

ขั้นที่ 1 $T^* = \{a, c, d, e, f\}, \qquad B = \{b\}$

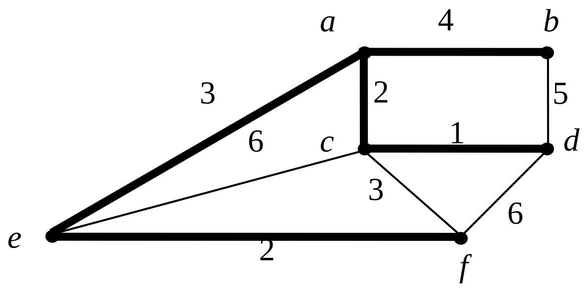
ขั้นที่ 2 $B \neq \varnothing$

ขั้นที่ 3 $c(u^*v^*) = c(ab) = 4$

จัด $T^* = T^* + ab$ และ $B = B - \{b\}$

ขั้นที่ 2 $B = \varnothing$ แล้วจึงหยุด

จบการทำงานตามขั้นตอนวิธีของพริม คำตอบที่ได้ คือ $T^* = \{e(cd), e(ef), e(ac), e(ae), e(ab)\}$



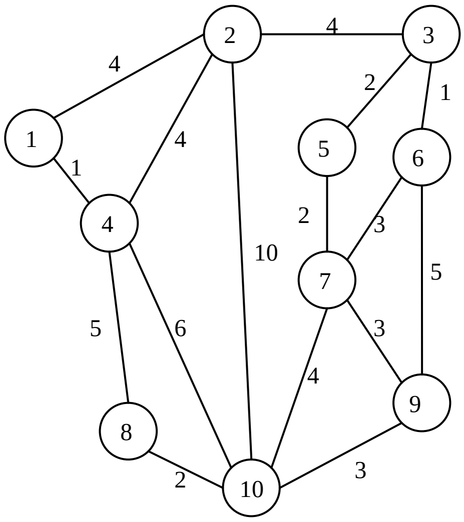
ภาพที่ 2.16 ผลที่ได้จากการทำซ้ำรอบที่ 5 ด้วยวิธีของพริม

คำตอบคือ เลือกเส้นเชื่อมที่เชื่อมเมืองที่ c และเมืองที่ d โดยเสียค่าใช้จ่าย 1
เลือกเส้นเชื่อมที่เชื่อมเมืองที่ a และเมืองที่ c โดยเสียค่าใช้จ่าย 2
เลือกเส้นเชื่อมที่เชื่อมเมืองที่ e และเมืองที่ f โดยเสียค่าใช้จ่าย 2
เลือกเส้นเชื่อมที่เชื่อมเมืองที่ a และเมืองที่ e โดยเสียค่าใช้จ่าย 3
เลือกเส้นเชื่อมที่เชื่อมเมืองที่ a และเมืองที่ b โดยเสียค่าใช้จ่าย 4

โดยน้ำหนักของต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดคือ 12

นั่นคือ สามารถเลือกวางสายไฟฟ้าให้กับ 6 เมืองนี้ ได้โดยเสียค่าใช้จ่ายทั้งหมดที่น้อยที่สุดคือ 12

ตัวอย่างที่ 2 หมู่บ้านโครงการหนึ่งมีบ้าน 10 หลัง ต้องการวางสายเคเบิ้ลโดยผ่านบ้านทุกหลัง จะต้องวางสายอย่างไร เพื่อให้เกิดต้นทุนรวมน้อยที่สุด จากรูปแสดงเส้นทางที่สามารถวางสายเคเบิ้ลได้ ค่าน้ำหนักบนเส้นเชื่อมแสดงถึงค่าต้นทุนในการวางสายจากจุดปลายบ้านทั้งสอง

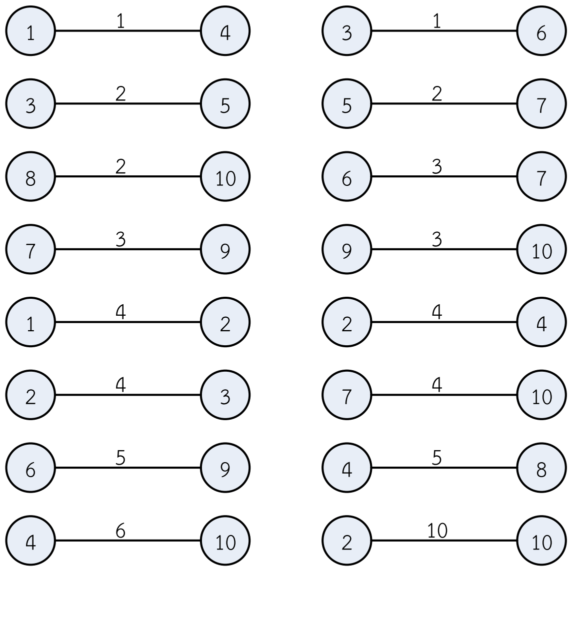


ภาพที่ 2.17 แสดงเส้นทางที่สามารถวางสายเคเบิ้ลได้ โดยค่าน้ำหนักบนเส้นคือค่าต้นทุนในการวางสาย

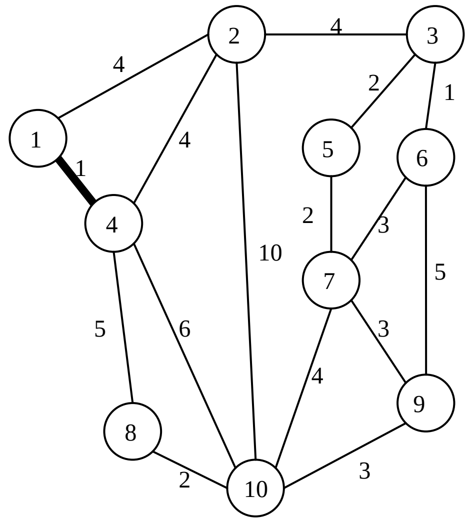
ขั้นตอนการคำนวณด้วยวิธีครุสกอล

ขั้นที่ 1 $T^* = \varnothing$ จัดลำดับของเส้นโดยเรียงน้ำหนักจากน้อยไปมาก

1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 10



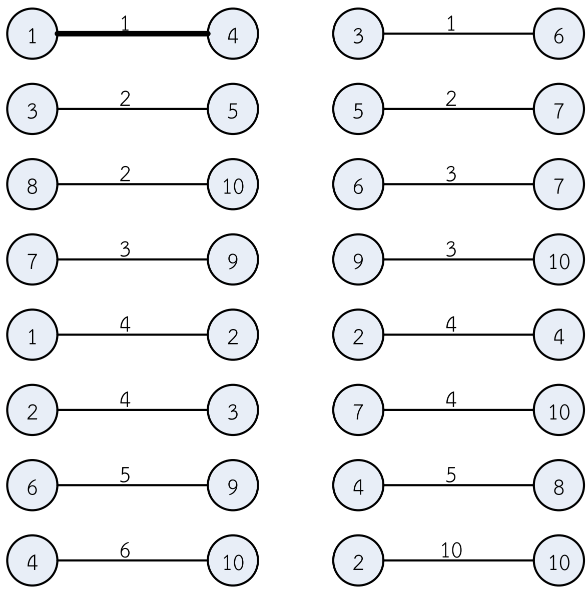
ขั้นที่ 2 T^* ยังไม่เป็นต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดแล้ว
ขั้นที่ 3 $T^* + e(14)$ ไม่มีวง จะได้ว่า $T^* = T^* + e(14)$



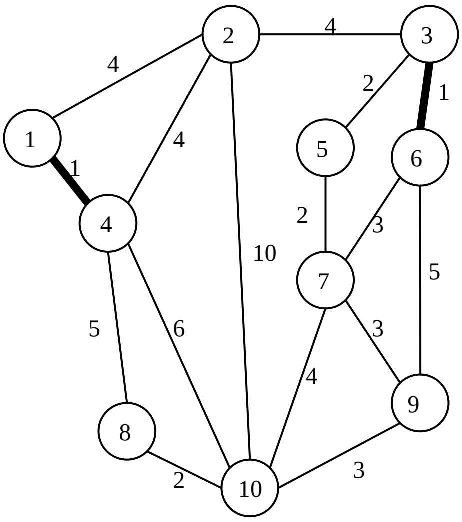
ภาพที่ 2.18 ผลจากการทำซ้ำรอบที่ 1 วิธีครุสกอล ในการวางสายเคเบิ้ล

ขั้นที่ 1 $T^* = \{e(14)\}$ จัดลำดับของเส้นโดยเรียงน้ำหนักจากน้อยไปมาก

1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 10



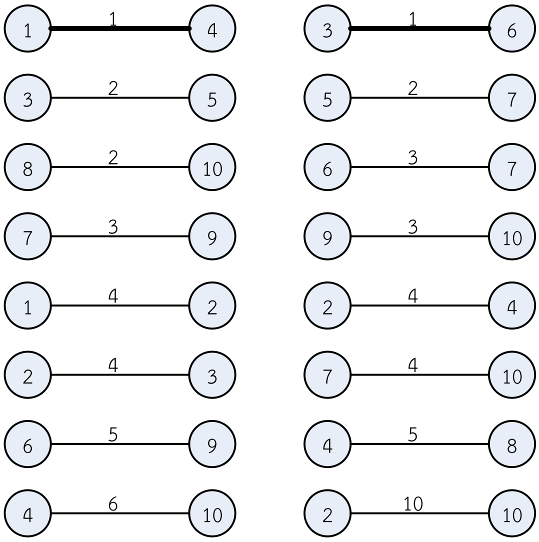
ขั้นที่ 2 T^* ยังไม่เป็นต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดแล้ว
ขั้นที่ 3 $T^* + e(36)$ ไม่มีวง จะได้ว่า $T^* = T^* + e(36)$



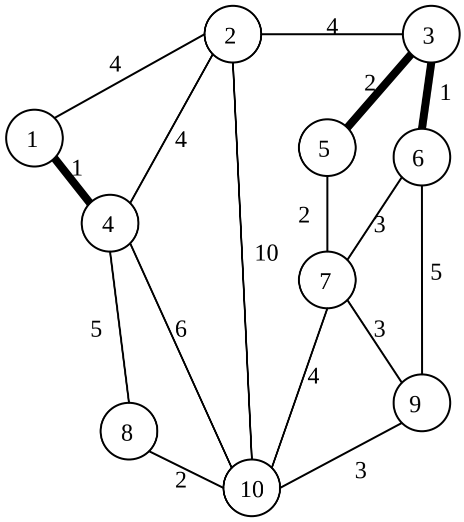
ภาพที่ 2.19 ผลจากการทำซ้ำรอบที่ 2 วิธีครุสกอล ในการวางสายเคเบิ้ล

ขั้นที่ 1 $T^{*}=\{e(14),e(36)\}$ จัดลำดับของเส้นโดยเรียงน้ำหนักจากน้อยไปมาก

2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 10



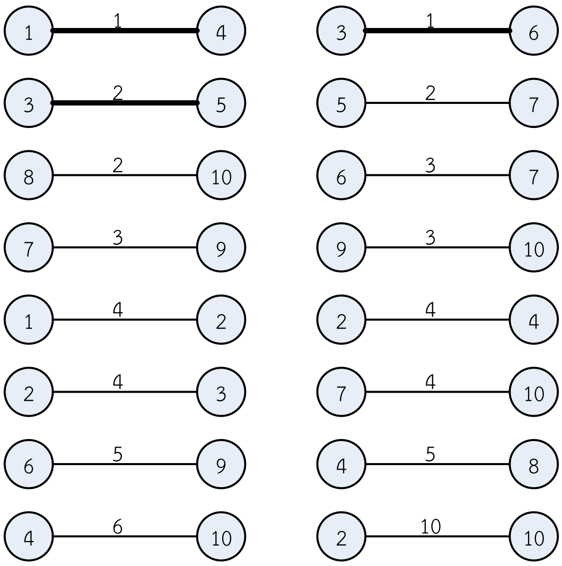
ขั้นที่ 2 T^{*} ยังไม่เป็นต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดแล้ว
ขั้นที่ 3 $T^{*}+e(35)$ ไม่มีวง จะได้ว่า $T^{*}=T^{*}+e(35)$



ภาพที่ 2.20 ผลจากการทำซ้ำรอบที่ 3 วิธีครุสกอล ในการวางสายเคเบิ้ล

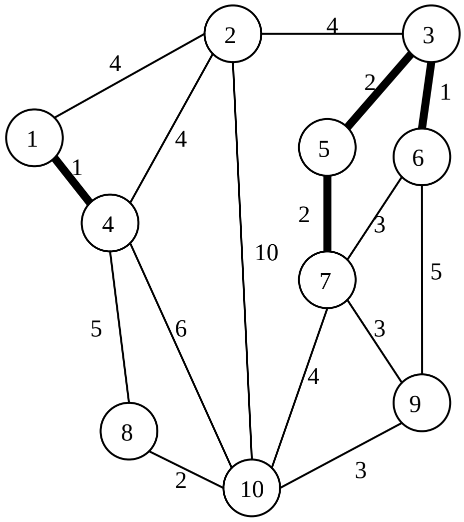
ขั้นที่ 1 $T^* = \{e(14), e(36), e(35)\}$ จัดลำดับของเส้นโดยเรียงน้ำหนักจากน้อยไปมาก

2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 10



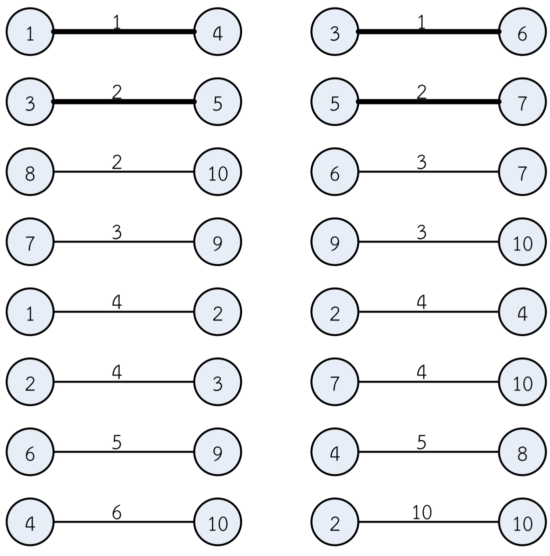
ขั้นที่ 2 T^* ยังไม่เป็นต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดแล้ว

ขั้นที่ 3 $T^* + e(57)$ ไม่มีวง จะได้ว่า $T^* = T^* + e(57)$



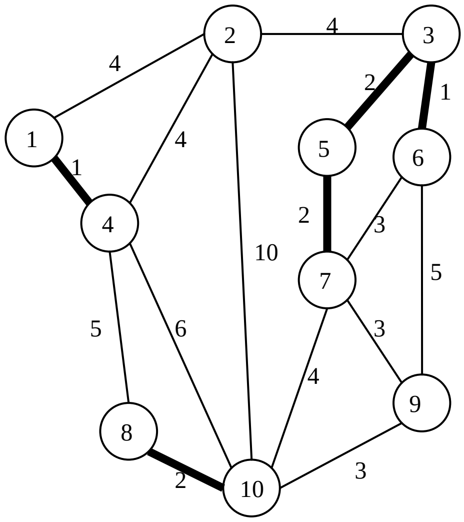
ภาพที่ 2.21 ผลจากการทำซ้ำรอบที่ 4 วิธีครุสกอล ในการวางสายเคเบิ้ล

ขั้นที่ 1 $T^* = \{e(14), e(36), e(35), e(57)\}$ จัดลำดับของเส้นโดยเรียงน้ำหนักจากน้อยไปมาก 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 10



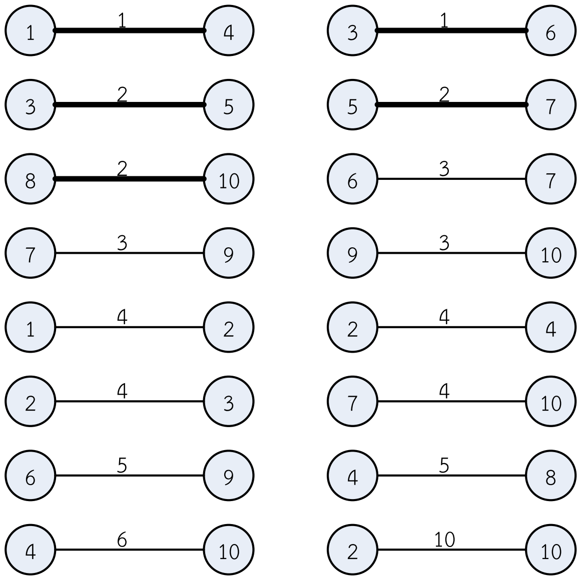
ขั้นที่ 2 T^* ยังไม่เป็นต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดแล้ว

ขั้นที่ 3 $T^* + e(810)$ ไม่มีวง จะได้ว่า $T^* = T^* + e(810)$



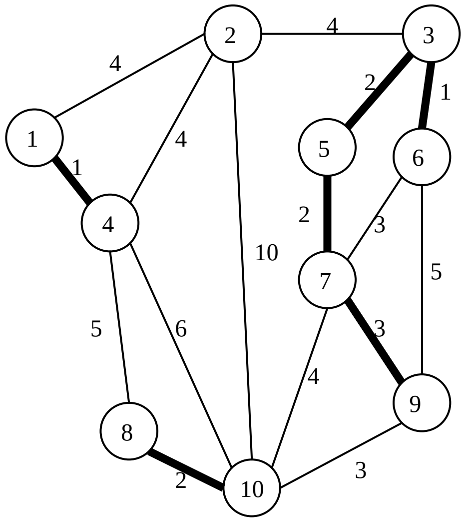
ภาพที่ 2.22 ผลจากการทำซ้ำรอบที่ 5 วิธีครุสกอล ในการวางสายเคเบิ้ล

ขั้นที่ 1 $T^* = \{e(14), e(36), e(35), e(57), e(810)\}$ จัดลำดับของเส้นโดยเรียงน้ำหนักจากน้อยไปมาก 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 10



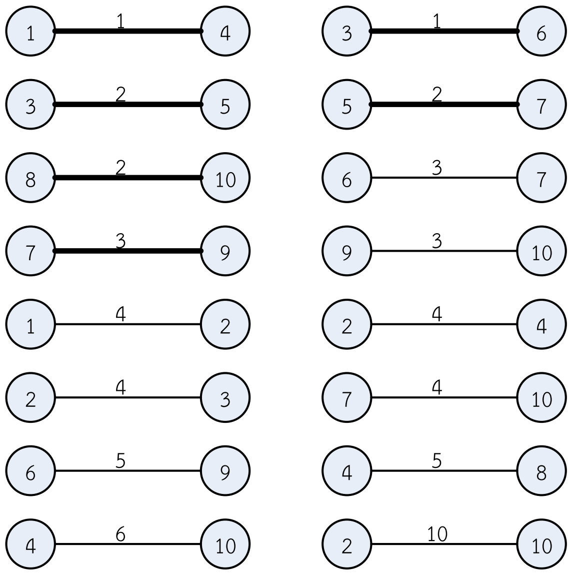
ขั้นที่ 2 T^* ยังไม่เป็นต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดแล้ว

ขั้นที่ 3 $T^* + e(67)$ มีวง แต่ $T^* + e(79)$ ไม่มีวง จะได้ว่า $T^* = T^* + e(79)$



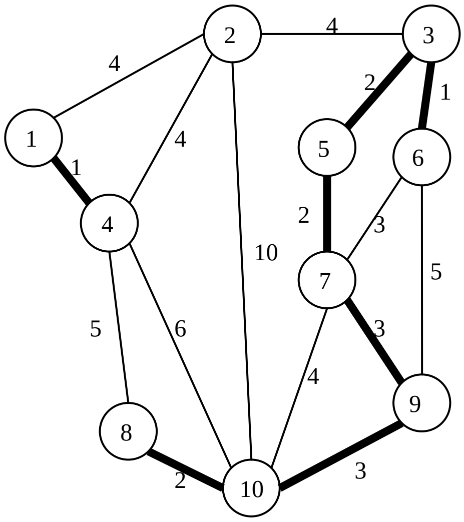
ภาพที่ 2.23 ผลจากการทำซ้ำรอบที่ 6 วิธีครุสกอล ในการวางสายเคเบิ้ล

ขั้นที่ 1 $T^{*}=\{e(14),e(36),e(35),e(57),e(810),e(79)\}$ จัดลำดับของเส้นโดยเรียงน้ำหนักจากน้อยไปมาก 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 10



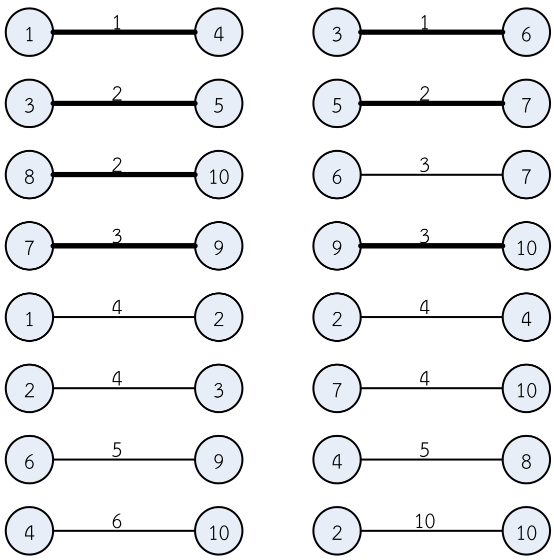
ขั้นที่ 2 T^{*} ยังไม่เป็นต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดแล้ว

ขั้นที่ 3 $T^{*}+e(910)$ ไม่มีวง จะได้ว่า $T^{*}=T^{*}+e(910)$

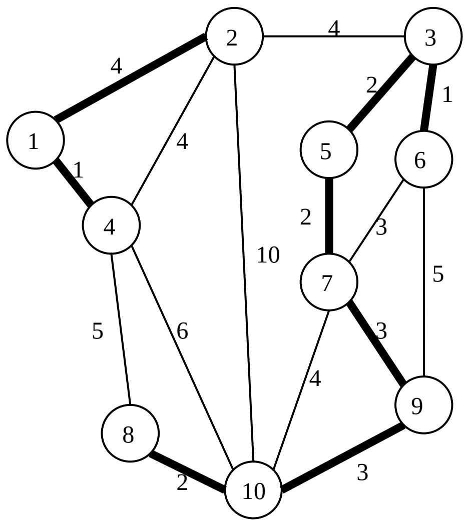


ภาพที่ 2.24 ผลจากการทำซ้ำรอบที่ 7 วิธีครุสกอล ในการวางสายเคเบิ้ล

ขั้นที่ 1 $T^* = \{e(14), e(36), e(35), e(57), e(810), e(79), e(910)\}$ จัดลำดับของเส้นโดยเรียงน้ำหนักจากน้อยไปมาก 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 10

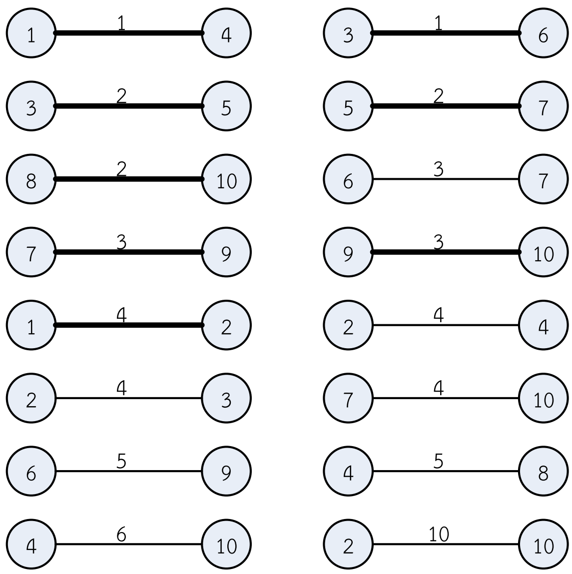


ขั้นที่ 2 T^* ยังไม่เป็นต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดแล้ว
ขั้นที่ 3 $T^* + e(12)$ ไม่มีวง จะได้ว่า $T^* = T^* + e(12)$

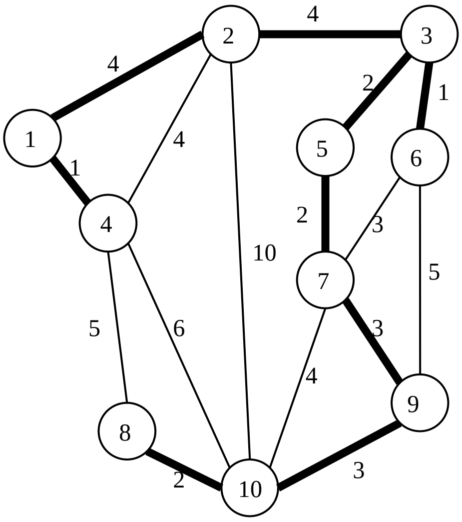


ภาพที่ 2.25 ผลจากการทำซ้ำรอบที่ 8 วิธีครุสกอล ในการวางสายเคเบิ้ล

ขั้นที่ 1 $T^* = \{e(14), e(36), e(35), e(57), e(810), e(79), e(910), e(12)\}$ จัดลำดับของเส้นโดยเรียงน้ำหนักจากน้อยไปมาก 4, 4, 4, 5, 5, 6, 10

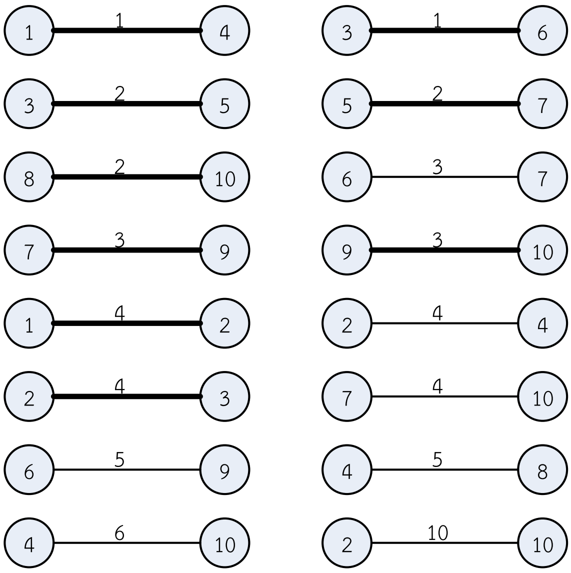


ขั้นที่ 2 T^* ยังไม่เป็นต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดแล้ว
ขั้นที่ 3 $T^* + e(23)$ ไม่มีวง จะได้ว่า $T^* = T^* + e(23)$



ภาพที่ 2.26 ผลจากการทำซ้ำรอบที่ 9 วิธีครุสกอล ในการวางสายเคเบิ้ล

ขั้นที่ 1 $T^{*}=\{e(14),e(36),e(35),e(57),e(810),e(79),e(910),e(12),e(23)\}$



ขั้นที่ 2 T^{*} เป็นต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดแล้ว หยุด

คำตอบของปัญหานี้คือ เลือกเส้นเชื่อมที่เชื่อมบ้านหลังที่ 1 และหลังที่ 4 โดยเสียค่าใช้จ่าย 1
เลือกเส้นเชื่อมที่เชื่อมบ้านหลังที่ 3 และหลังที่ 6 โดยเสียค่าใช้จ่าย 1
เลือกเส้นเชื่อมที่เชื่อมบ้านหลังที่ 3 และหลังที่ 5 โดยเสียค่าใช้จ่าย 2
เลือกเส้นเชื่อมที่เชื่อมบ้านหลังที่ 5 และหลังที่ 7 โดยเสียค่าใช้จ่าย 2
เลือกเส้นเชื่อมที่เชื่อมบ้านหลังที่ 8 และหลังที่ 10 โดยเสียค่าใช้จ่าย 2

เลือกเส้นเชื่อมที่เชื่อมบ้านหลังที่ 7 และหลังที่ 9 โดยเสียค่าใช้จ่าย 3
เลือกเส้นเชื่อมที่เชื่อมบ้านหลังที่ 9 และหลังที่ 10 โดยเสียค่าใช้จ่าย 3
เลือกเส้นเชื่อมที่เชื่อมบ้านหลังที่ 1 และหลังที่ 2 โดยเสียค่าใช้จ่าย 4
เลือกเส้นเชื่อมที่เชื่อมบ้านหลังที่ 2 และหลังที่ 3 โดยเสียค่าใช้จ่าย 4

โดยน้ำหนักของต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดคือ 22

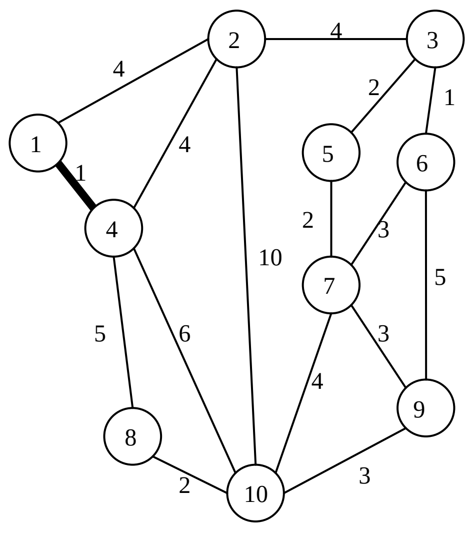
ขั้นตอนการคำนวณด้วยวิธีพริม

ขั้นที่ 1 $T^* = \{1\}, \qquad B = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

ขั้นที่ 2 $B \neq \varnothing$

ขั้นที่ 3 $c(u^* v^*) = c(14) = 1$

จัด $T^* = T^* + 14$ และ $B = B - \{4\}$



รูปที่13

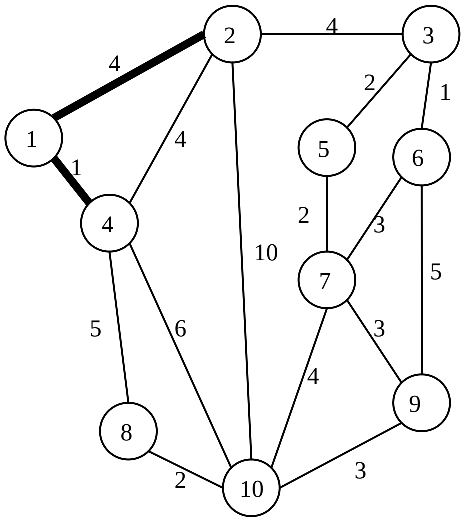
ภาพที่ 2.27 ผลจากการทำซ้ำรอบที่ 1 วิธีพริมในการวางสายเคเบิ้ล

ขั้นที่ 1 $T^* = \{1,4\}, \qquad B = \{2,3,5,6,7,8,9,10\}$

ขั้นที่ 2 $B \neq \varnothing$

ขั้นที่ 3 $c(u^* v^*) = c(12) = 4$

จัด $T^* = T^* + 12$ และ $B = B - \{2\}$



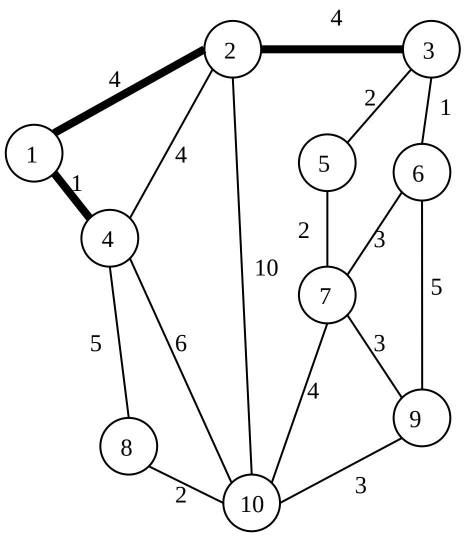
ภาพที่ 2.28 ผลจากการทำซ้ำรอบที่ 2 วิธีพริมในการวางสายเคเบิ้ล

ขั้นที่ 1 $T^* = \{1, 4, 2\}, \qquad B = \{3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

ขั้นที่ 2 $B \neq \varnothing$

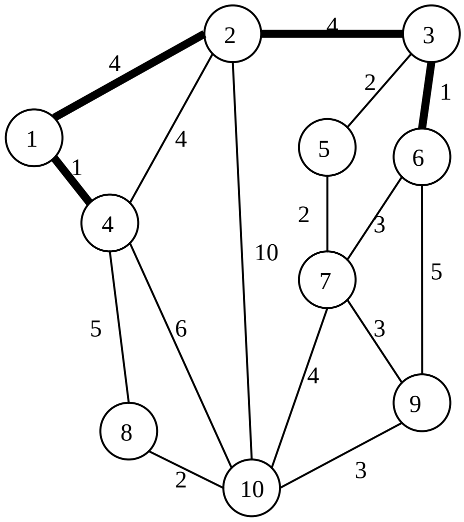
ขั้นที่ 3 $c\left(u^* v^*\right) = c(23) = 4$

จัด $T^* = T^* + 23$ และ $B = B - \{3\}$



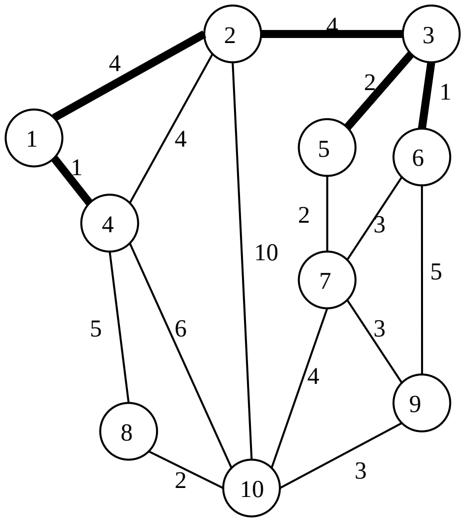
ภาพที่ 2.29 ผลจากการทำซ้ำรอบที่ 3 วิธีพริมในการวางสายเคเบิ้ล

ขั้นที่ 1 $T^* = \{1,4,2,3\}$, $\qquad B = \{5,6,7,8,9,10\}$
ขั้นที่ 2 $B \neq \varnothing$
ขั้นที่ 3 $c(u^*v^*) = c(36) = 1$
จัด $T^* = T^* + 36$ และ $B = B - \{6\}$



ภาพที่ 2.30 ผลจากการทำซ้ำรอบที่ 4 วิธีพริมในการวางสายเคเบิ้ล

ขั้นที่ 1 $T^* = \{1,4,2,3,6\}$, $\qquad B = \{5,7,8,9,10\}$
ขั้นที่ 2 $B \neq \varnothing$
ขั้นที่ 3 $c(u^*v^*) = c(35) = 2$
จัด $T^* = T^* + 35$ และ $B = B - \{5\}$



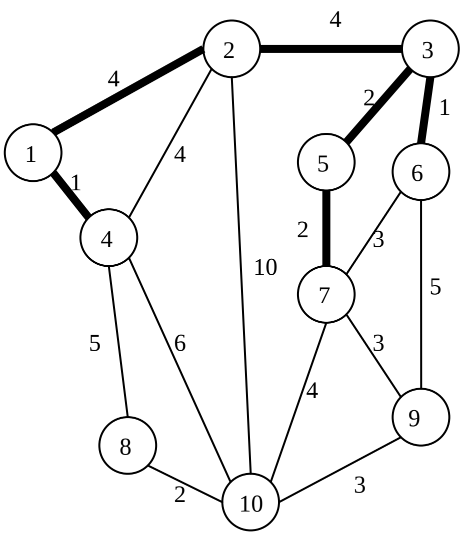
ภาพที่ 2.31 ผลจากการทำซ้ำรอบที่ 5 วิธีพริมในการวางสายเคเบิ้ล

ขั้นที่ 1 $T^* = \{1,4,2,3,6,5\}, \qquad B = \{7,8,9,10\}$

ขั้นที่ 2 $B \neq \varnothing$

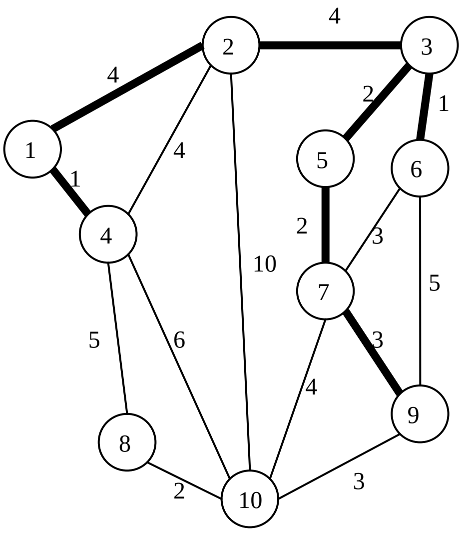
ขั้นที่ 3 $c(u^*v^*) = c(57) = 2$

จัด $T^* = T^* + 57$ และ $B = B - \{7\}$



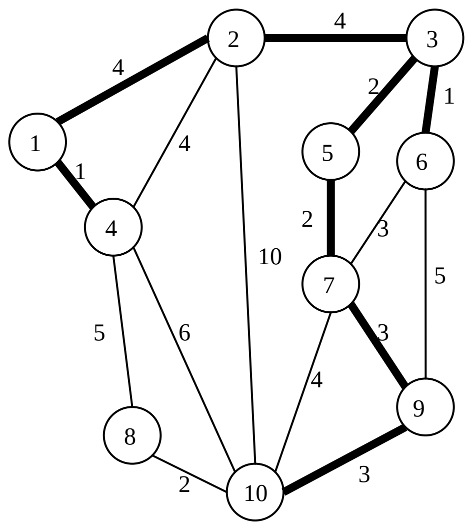
ภาพที่ 2.32 ผลจากการทำซ้ำรอบที่ 6 วิธีพริมในการวางสายเคเบิ้ล

ขั้นที่ 1 $T^* = \{1,4,2,3,6,5,7\}, \qquad B = \{8,9,10\}$
ขั้นที่ 2 $B \neq \varnothing$
ขั้นที่ 3 $c(u^* v^*) = c(79) = 3$
จัด $T^* = T^* + 79$ และ $B = B - \{9\}$



ภาพที่ 2.33 ผลจากการทำซ้ำรอบที่ 7 วิธีพริมในการวางสายเคเบิ้ล

ขั้นที่ 1 $T^* = \{1,4,2,3,6,5,7,9\}, \qquad B = \{8,10\}$
ขั้นที่ 2 $B \neq \varnothing$
ขั้นที่ 3 $c(u^* v^*) = c(910) = 3$
จัด $T^* = T^* + 910$ และ $B = B - \{10\}$



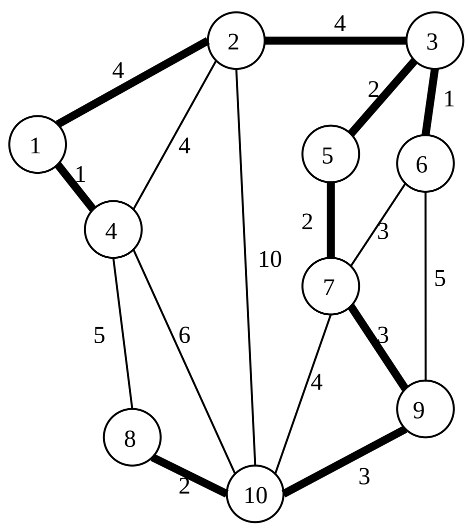
ภาพที่ 2.34 ผลจากการทำซ้ำรอบที่ 8 วิธีพริมในการวางสายเคเบิ้ล

ขั้นที่ 1 $T^* = \{1,4,2,3,6,5,7,9,10\}, \qquad B = \{8\}$

ขั้นที่ 2 $B \neq \varnothing$

ขั้นที่ 3 $c(u^* v^*) = c(810) = 2$

จัด $T^* = T^* + 810$ และ $B = B - \{8\}$



ภาพที่ 2.35 ผลจากการทำซ้ำรอบที่ 9 วิธีพริมในการวางสายเคเบิ้ล

ขั้นที่ 1 $T^* = \{1, 4, 2, 3, 6, 5, 7, 9, 10, 8\}, \qquad B = \phi$

ขั้นที่ 2 $B = \varnothing$ หยุด

คำตอบของปัญหานี้คือ เลือกเส้นเชื่อมที่เชื่อมบ้านหลังที่ 1 และหลังที่ 4 โดยเสียค่าใช้จ่าย 1
เลือกเส้นเชื่อมที่เชื่อมบ้านหลังที่ 1 และหลังที่ 2 โดยเสียค่าใช้จ่าย 4
เลือกเส้นเชื่อมที่เชื่อมบ้านหลังที่ 2 และหลังที่ 3 โดยเสียค่าใช้จ่าย 4
เลือกเส้นเชื่อมที่เชื่อมบ้านหลังที่ 3 และหลังที่ 6 โดยเสียค่าใช้จ่าย 1
เลือกเส้นเชื่อมที่เชื่อมบ้านหลังที่ 3 และหลังที่ 5 โดยเสียค่าใช้จ่าย 2
เลือกเส้นเชื่อมที่เชื่อมบ้านหลังที่ 5 และหลังที่ 7 โดยเสียค่าใช้จ่าย 2
เลือกเส้นเชื่อมที่เชื่อมบ้านหลังที่ 7 และหลังที่ 9 โดยเสียค่าใช้จ่าย 3
เลือกเส้นเชื่อมที่เชื่อมบ้านหลังที่ 9 และหลังที่ 10 โดยเสียค่าใช้จ่าย 3
เลือกเส้นเชื่อมที่เชื่อมบ้านหลังที่ 8 และหลังที่ 10 โดยเสียค่าใช้จ่าย 2

โดยน้ำหนักของต้นไม้แผ่ทั่วที่น้อยที่สุดคือ 22