DOI: 10.14456/mj-math.201x.x

วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh 63(694) Jan–Apr, 2018
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
http://MathThai.Org MathThaiOrg@gmail.com

วิธีจาโคบี วิธีเกาส์-ไซเดล และวิธีผ่อนปรนเกินสืบเนื่อง สำหรับหาผลเฉลยของระบบเชิงเส้น

Jacobi Method, Gauss-Siedel Method, and Successive Over-Relaxation Method for Solving Linear Systems

อดิศร กิตติโสภาภรณ์ สิรีธร วินทะไชย ปรีชา สาระผล และ ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม

Adisorn Kittisopaporn[1] Sireeton Wintachai[2] Preecha Saraphol[3] and Pattrawut Chansangiam[4]

[1,2,3,4] Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Ladkrabang, Bangkok, 10520, Thailand

Email: [1]56050168@kmitl.ac.th [2]nany_sireeton@gmail.com [3]cbrcrv_0045@hotmail.com [4]pattrawut.ch@kmitl.ac.th

บทคัดย่อ

บทความวิชาการนี้อภิปรายวิธีทำซ้ำสำหรับระบบเชิงเส้น เรากล่าวถึงแนวคิดทั่วไปของวิธีทำซ้ำและเน้นไปที่วิธีทำซ้ำที่สำคัญสามวิธี ได้แก่ วิธีจาโคบี วิธีเกาส์-ไซเดล และวิธีผ่อนปรนเกินสืบเนื่อง เรานำเสนอที่มาของสูตรที่ใช้ในการทำซ้ำ วิเคราะห์การลู่เข้าของการทำซ้ำ ยกตัวอย่างการคำนวณ รวมทั้งอภิปรายวิธีทำซ้ำที่สัมพันธ์กับวิธีข้างต้น กล่าวโดยสรุปได้ว่า วิธีจาโคบีและวิธีเกาส์-ไซเดลจะการันตีการลู่เข้าเมื่อเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบเชิงเส้นเป็นเมทริกซ์แนวทแยงมุมข่มแท้ ส่วนวิธีผ่อนปรนเกิน สืบเนื่องจะลู่เข้าถ้าใช้กับเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอนโดยต้องเลือกตัวประกอบถ่วงน้ำหนัก ที่เหมาะสม

คำสำคัญ: ระบบเชิงเส้น วิธีทำซ้ำ รัศมีสเปกตรัม วิธีจาโคบี วิธีเกาส์-ไซเดล วิธีผ่อนปรนเกินสืบเนื่อง

ABSTRACT

This review article discusses iterative methods for linear systems. We explain general ideas of iterations and focus on three famous iterative methods, namely, Jacobi method, Gauss-Siedel method, and successive over-relaxation (SOR) method. We present ideas behind the formulas of iterations, make convergence analysis, illustrate examples, and discuss related iterative methods. In conclusion, Jacobi and Gauss-Siedel methods guarantee convergences when the matrix coefficients of the linear system are strictly diagonally dominant. The SOR method is convergent if we apply it to positive definite matrices and choose an appropriate value of weighted factor.

Keywords: Linear System, Iterative Method, Spectral Radius, Jacobi Method, Gauss-Siedel Method, Successive Over-Relaxation Method

1. บทนำ

พิจารณาระบบเชิงเส้น $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$ ในเวกเตอร์ตัวแปร **u** เมื่อกำหนดเมทริกซ์จัตุรัส A และเวกเตอร์ **b** มาให้ เป็นที่ทราบกันดีว่าระบบดังกล่าวจะมีผลเฉลยเดียวก็ต่อเมื่อเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ A หาผกผันได้ การหาผลเฉลยของระบบดังกล่าวแบ่งได้เป็นสามวิธีใหญ่ ๆ คือ วิธีตรง วิธีทำซ้ำ และวิธีกึ่งตรง

วิธีตรงเป็นการหาผลเฉลยจริงของระบบเชิงเส้นโดยไม่คำนวณผลเฉลยค่าประมาณ วิธีตรงซึ่งเป็นที่รู้จักแพร่หลายในตำราพีชคณิตเชิงเส้นทั่วไป ได้แก่ การลดรูปแบบเกาส์ (Gaussian Elimination) การใช้เมทริกซ์ผกผัน กฎของคราเมอร์ และการแยกเมทริกซ์แบบต่าง ๆ วิธีดังกล่าวมีข้อดีในแง่ที่ว่าสามารถใช้กับทุกเมทริกซ์ที่หาผกผันได้ ยกเว้นการแยกเมทริกซ์ที่ต้องพิจารณาเป็นรายกรณีไป การแยกเมทริกซ์แบบ *LUP* (*LUP* Decomposition) ใช้ได้กับทุกเมทริกซ์ ส่วนการแยกแบบอื่นใช้ได้กับเมทริกซ์บางรูปแบบซึ่งหาผกผันได้ เช่น

-การแยกแบบ *LU* (*LU* Decomposition) และการแยกแบบ *LDU* (*LDU* Decomposition) ใช้ได้เฉพาะกับเมทริกซ์ที่มีแต่ละไมเนอร์สำคัญแบบเรียง (Leading Principal Minors) ไม่เป็น 0

-การแยกแบบ LDL^T (LDL^T Decomposition) ใช้ได้เฉพาะกับเมทริกซ์สมมาตรที่แยกแบบ *LU* ได้ การแยกแบบ LL^T (LL^T Decomposition) ใช้ได้เฉพาะกับเมทริกซ์สมมาตรที่เป็นบวกแน่นอน (Positive Definite Symmetric Matrix)

ศึกษาข้อมูลเพิ่มเติมเกี่ยวกับการแยกเมทริกซ์ได้จาก [1]

วิธีตรงมีข้อด้อยในแง่ที่ว่าผลเฉลยจะปรากฏในขั้นตอนสุดท้ายของการคำนวณ (จำนวนจำกัดครั้ง) ดังนั้นจำเป็นต้องคำนวณไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะเสร็จสิ้นกระบวนการจึงจะได้ผลเฉลยจริง การหยุดคำนวณกลางคันส่งผลให้ไม่ได้แม้กระทั่งค่าประมาณที่สมเหตุสมผลของผลเฉลย การคำนวณบางขั้นตอนผิดพลาดจะทำให้ตัวเลขที่ได้ในขั้นตอนถัดไปนั้นผิดพลาดตามไปด้วยและผลเฉลยที่ได้ในขั้นตอนสุดท้ายอาจแตกต่างจากผลเฉลยจริงโดยสิ้นเชิง นอกจากนี้สำหรับระบบเชิงเส้นที่เมทริกซ์สัมประสิทธิ์มีขนาดใหญ่ เมื่อทำการลดรูปแบบเกาส์จะต้องเก็บข้อมูลสมาชิกทุกตำแหน่งของเมทริกซ์ในทุกขั้นตอน ซึ่งสิ้นเปลืองหน่วยความจำมาก สำหรับการใช้เมทริกซ์ผกผันและกฎของคราเมอร์จะอิงการลดรูปแบบเกาส์หรือคำนวณโดยใช้สูตรสำเร็จ ซึ่งสิ้นเปลืองหน่วยความจำเช่นกัน ดังนั้นวิธีตรงจึงเหมาะกับระบบขนาดเล็กแต่ไม่เหมาะกับระบบขนาดใหญ่

วิธีทำซ้ำเป็นวิธีเชิงเลขโดยจะสร้างลำดับของผลเฉลยค่าประมาณที่ลู่เข้าสู่ผลเฉลยจริง ซึ่งต้องใช้ความรู้พีชคณิตเชิงเส้นร่วมกับการวิเคราะห์ ได้แก่ ความรู้เกี่ยวกับนอร์มของเวกเตอร์/เมทริกซ์ การลู่เข้าของลำดับของเวกเตอร์/เมทริกซ์ ข้อดีของวิธีทำซ้ำคือ การคำนวณเพียงไม่กี่ขั้นตอนจะทำให้ได้ผลเฉลยที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยจริง และสามารถกำหนดได้ว่าต้องทำซ้ำกี่รอบจึงจะได้ผลเฉลยที่ใกล้เคียงผลเฉลยจริงตามค่าคลาดเคลื่อนที่กำหนด วิธีทำซ้ำจึงไม่เหมาะกับระบบขนาดเล็กแต่เหมาะกับระบบขนาดใหญ่ ข้อจำกัดของวิธีทำซ้ำคือ วิธีแต่ละวิธีจะการันตีการลู่เข้าสำหรับเมทริกซ์ที่มีรูปแบบค่อนข้างเฉพาะ เช่น

- วิธีจาโคบี (Jacobi Method) และวิธีเกาส์-ไซเดล (Gauss-Siedel Method) จะการันตีการลู่เข้าถ้าเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบเชิงเส้นเป็นเมทริกซ์แนวทแยงมุมข่มแท้ (Strictly Diagonally Dominant Matrix)

- วิธีผ่อนปรนเกินสืบเนื่อง (Successive Over-Relaxation Method) จะลู่เข้าถ้าใช้กับเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอนโดยต้องเลือกตัวประกอบถ่วงน้ำหนักที่เหมาะสม

ถ้าใช้วิธีดังกล่าวกับเมทริกซ์ชนิดอื่นการทำซ้ำอาจไม่ลู่เข้า วิธีทำซ้ำดังกล่าวมีการนำไปใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ศึกษาเพิ่มเติมได้จาก [2, 3]

วิธีกึ่งตรงเป็นวิธีหาผลเฉลยจริงจากการประมาณค่าผลเฉลยจำนวนจำกัดครั้ง เมื่อประมาณค่าผลเฉลยไปในแต่ละขั้นตอน ค่าประมาณที่ได้จะยิ่งเข้าใกล้ผลเฉลยจริงมากขึ้นเรื่อย ๆ และเมื่อการคำนวณสิ้นสุดลงจะได้ผลเฉลยจริง วิธีกึ่งตรงที่สำคัญ ได้แก่ วิธีคอนจูเกตเกรเดียนท์ (Conjugate Gradient Method) ซึ่งใช้ความรู้พีชคณิตเชิงเส้นร่วมกับเกรเดียนท์ของฟังก์ชันค่าจริงที่มีตัวแปรต้นเป็นเวกเตอร์หรือเมทริกซ์

ในบทความนี้ เราจะอภิปรายวิธีทำซ้ำต่างๆ ที่สำคัญซึ่งปรากฏอยู่ในงานวิจัยหรือตำราภาษาต่างประเทศที่ยังไม่แพร่หลายนัก โดยในหัวข้อที่ 2 จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานในการวิเคราะห์เมทริกซ์ที่จำเป็นต่อการศึกษาวิธีทำซ้ำ หัวข้อที่ 3 กล่าวถึงแนวคิดทั่วไปของการทำซ้ำสำหรับระบบเชิงเส้น หัวข้อที่ 4-6 กล่าวถึงวิธีทำซ้ำที่สำคัญ ได้แก่ วิธีจาโคบี วิธีเกาส์-ไซเดล และวิธีผ่อนปรนเกินสืบเนื่อง โดยอภิปรายสูตรที่ใช้ในการทำซ้ำ วิเคราะห์การลู่เข้าของการทำซ้ำ ยกตัวอย่างการคำนวณ รวมทั้งอภิปรายวิธีทำซ้ำ

ที่คล้ายคลึงหรือได้รับการพัฒนาจากวิธีข้างต้นซึ่งอยู่ในงานวิจัยต่าง ๆ ในหัวข้อที่ 7 จะเป็นสรุป

2. ความรู้พื้นฐานในการวิเคราะห์เมทริกซ์

เราทราบกันดีว่าปริภูมิของเมทริกซ์เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีมิติจำกัด ดังนั้นทุกนอร์มบนปริภูมินี้จะสมมูลกัน เราใช้นอร์มต่อไปนี้ในการพิจารณาการลู่เข้าของการทำซ้ำเนื่องจากง่ายต่อการคำนวณและพิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ

บทนิยามที่ 2.1 ให้ $v = (v_1, \ldots, v_n)$ เป็นเวกเตอร์เชิงซ้อน เรานิยาม

$$\|v\|_\infty = \max\{|v_1|,\ldots,|v_n|\}$$

บทนิยามที่ 2.2 ให้ $A = [a_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์เชิงซ้อนขนาด $n \times n$ ผลบวกค่าสัมบูรณ์ตามแถว (Absolute Row Sum) ของแถวที่ i ของ A คือผลบวกของค่าสัมบูรณ์ของทุกสมาชิกในแถวที่ i นั่นคือ

$$u_i^{(k+1)} = -\frac{\omega}{a_{ii}}\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}u_j^{(k+1)} + (1-\omega)u_i^{(k)} - \frac{\omega}{a_{ii}}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}u_j^{(k)} + \frac{\omega b_i}{a_{ii}} \qquad (14)$$

เรานิยาม $\|A\|_\infty = \max\{s_1,\ldots,s_n\}$

เราสามารถแสดงได้ว่าฟังก์ชัน $\|\bullet\|_\infty$ สำหรับเมทริกซ์เป็นนอร์มที่สร้างจากนอร์ม $\|\bullet\|_\infty$ สำหรับเวกเตอร์โดยสอดคล้องกับความสัมพันธ์

$\|Av\|_\infty \le \|A\|_\infty \|v\|_\infty$

บทนิยามที่ 2.3 ลำดับ $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ ของเมทริกซ์เชิงซ้อนขนาด $n \times n$ จะกล่าวว่าลู่เข้า (Converges) สู่เมทริกซ์เชิงซ้อน A ขนาด $n \times n$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนนับ N ซึ่งทำให้ $\|A_k - A\|_\infty < \varepsilon$ สำหรับทุก $k \ge N$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A_k \to A$ เมื่อ $k \to \infty$ โดยอาจละข้อความ “เมื่อ $k \to \infty$” ไว้ในฐานที่เข้าใจ

เราสามารถแสดงได้ว่า $A_k \to A$ ก็ต่อเมื่อ $a_{ij}^{(k)} \to a_{ij}$ สำหรับทุก i, j เมื่อ $a_{ij}^{(k)}$ คือสมาชิกตำแหน่งที่ (i, j) ของ A_k และ a_{ij} คือสมาชิกตำแหน่งที่ (i, j) ของ

บทนิยามที่ 2.4 เมทริกซ์จัตุรัสเชิงซ้อน T จะกล่าวว่าลู่เข้า ก็ต่อเมื่อลำดับของกำลังต่าง ๆ ของ T ลู่เข้าสู่เมทริกซ์ศูนย์ นั่นคือ $T^k \to \mathbf{0}$ เมื่อ $k \to \infty$

บทนิยามที่ 2.5 รัศมีสเปกตรัม (Spectral Radius) ของเมทริกซ์จัตุรัสเชิงซ้อน T คือค่าสูงสุดของค่าสัมบูรณ์ของค่าลักษณะเฉพาะของ T เขียนแทนด้วย $\rho(T)$

ทฤษฎีบทที่ 2.6 เมทริกซ์ T จะลู่เข้าก็ต่อเมื่อ $\rho(T) < 1$

พิสูจน์ ดูได้จาก [2]

บทนิยามที่ 2.7 ให้ A เป็นเมทริกซ์เชิงซ้อนขนาด $n \times n$ เรากล่าวว่า

- A เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน (Hermitian Matrix) ก็ต่อเมื่อ $\overline{A}^T = A$ เมื่อสัญลักษณ์ $\overline{A}$ หมายถึงสังยุค (Conjugate) ของ A
- A เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน (Positive Definite Matrix) ก็ต่อเมื่อ $\overline{x}^T Ax > 0$ สำหรับทุกเวกเตอร์เชิงซ้อน x ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์

บทนิยามที่ 2.8 เมทริกซ์จัตุรัส A จะเรียกว่าเมทริกซ์แนวทแยงมุมข่มแท้ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $i=1,\ldots,n$

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

เมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอนจะเป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียนที่หาผกผันได้ และเมทริกซ์แนวทแยงมุมข่มแท้จะหาผกผันได้

3. แนวคิดทั่วไปของวิธีทำซ้ำสำหรับระบบสมการเชิงเส้น

พิจารณาระบบสมการเชิงเส้นที่มี n สมการและ n ตัวแปรในรูปแบบ

$$A\mathbf{u} = \mathbf{b} \qquad (1)$$

เราสมมติให้เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ A เป็นเมทริกซ์ที่หาผกผันได้ จะได้ว่าผลเฉลยของระบบดังกล่าวมีผลเฉลยเดียว

วิธีทำซ้ำเพื่อหาผลเฉลยของระบบเชิงเส้น (1) จะเริ่มจากการเลือกเวกเตอร์ค่าเริ่มต้น $\mathbf{u}^{(0)}$ และเพื่อหาผลเฉลยจริง $\mathbf{u}^*$ เราจะสร้างลำดับของเวกเตอร์ $\{\mathbf{u}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ โดยลำดับนี้ลู่เข้าสู่ $\mathbf{u}^*$

วิธีหนึ่งที่ง่ายต่อการเปลี่ยนระบบสมการเชิงเส้นเป็นรูปแบบของจุดตรึง คือการให้

$$\mathbf{u} = I\mathbf{u} - A\mathbf{u} + A\mathbf{u} = (I-A)\mathbf{u} + \mathbf{b}$$
$$= T\mathbf{u} + \mathbf{c}$$

เมื่อ $T = I - A$ และ $\mathbf{c} = \mathbf{b}$ จะได้ว่า

$$T = I - A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{c} = \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

อีกหนึ่งวิธีในการหาผลเฉลยของระบบสมการที่ (4) คือการเขียนระบบสมการให้อยู่ในอีกรูปแบบ ดังนี้

และเราจะแทนสมการที่ (1) ด้วยรูปแบบของระบบทำซ้ำ

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = T\mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{c}, \quad \mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{u}_0 \qquad (2)$$

เมื่อ T เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ และ $\mathbf{c}$ เป็นเวกเตอร์ที่มี n พิกัด สมมติว่าผลเฉลยของระบบทำซ้ำนี้ลู่เข้า นั่นคือ $\mathbf{u}^{(k)} \to \mathbf{u}^*$ เมื่อ $k \to \infty$ จะได้ว่า $\mathbf{u}^*$ เป็นจุดตรึง (Fixed Point) ของสมการที่ (2) ซึ่งสอดคล้องกับ

$$\mathbf{u}^* = T\mathbf{u}^* + \mathbf{c} \qquad (3)$$

ฉะนั้น ระบบทำซ้ำจึงต้องมีสมบัติดังนี้

1. ผลเฉลย $\mathbf{u}^*$ ซึ่งเป็นจุดตรึงของสมการที่ (3) ต้องเป็นผลเฉลยของสมการที่ (1)
2. ระบบทำซ้ำที่นิยามขึ้นโดยสมการที่ (2) จะต้องลู่เข้าสู่จุดตรึง

พิจารณาระบบเชิงเส้นต่อไปนี้

$$-4x + y + 2z = -1, \ 2x - 5y + z = -2,$$
$$x - y - 3z = -3 \qquad (4)$$

ซึ่งสามารถทำให้อยู่ในรูปแบบของเวกเตอร์ $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$ ได้ดังนี้

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$x = \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{4}, \ y = \tfrac{2}{5}x + \tfrac{1}{5}z + \tfrac{2}{5},$$
$$z = \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{3}y + 1$$

และจัดให้อยู่ในรูปแบบของจุดตรึง $\mathbf{u}^* = T\mathbf{u}^* + \hat{\mathbf{c}}$ โดย

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

เราจะทดสอบว่าระบบทำซ้ำทั้งสองนั้นลู่เข้าสู่ผลเฉลย $x = y = z = 1$ หรือไม่ เมื่อกำหนดเวกเตอร์เริ่มต้นเป็น $\mathbf{u}^{(0)} = (0, 0, 0)$ โดยการใช้โปรแกรม MatLab จะได้ผลลัพธ์การทำซ้ำดังนี้

ตารางที่ 1

k	$\mathbf{u}^{(k+1)} = T\,\mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{c}$			$\mathbf{u}^{(k+1)} = T\mathbf{u}^{(k)} + \hat{\mathbf{c}}$		
0	0	0	0	0	0	0
1	–1	–2	–3	0.25	0.4	1
2	2	–9	–16	0.85	0.7	0.95
3	50	–44	–78	0.9	0.93	1.05
4	449	–288	–409	1.0075	0.97	0.99
5	3350	–2219	–2376	0.9875	1.001	1.0125
6	23720	–17640	–15076	1.0065	0.9975	0.9955
7	166391	–138206	–101667	0.997125	1.0017	1.003
8	1173494	–1060353	–711268	1.001925	0.99945	0.998475
9	8350358	–7997840	5078922	1.00001	1.000465	1.000825

จะเห็นว่าวิธีที่ 1 ให้ผลเฉลยที่ห่างออกไปจากผลเฉลยจริงมากขึ้นเรื่อยๆ ซึ่งปัญหานี้สามารถเกิดขึ้นได้ไม่ว่าจะเลือกเวกเตอร์เริ่มต้นให้ใกล้กับผลเฉลยจริงแค่ไหนก็ตาม แต่ในวิธีที่ 2 ในแต่ละรอบของการทำซ้ำ ผลเฉลยที่ได้จะเข้าใกล้ผลเฉลยจริงมากขึ้นเรื่อยๆ และใช้รอบการทำซ้ำไม่มากแม้จะเลือกเวกเตอร์เริ่มต้นไม่ดีก็ตาม

ทฤษฎีบทที่ 3.1 ระบบทำซ้ำ (2) จะลู่เข้าสู่ผลเฉลยจริงซึ่งเป็นจุดตรึงของสมการที่ (3) ก็ต่อเมื่อ T เป็นเมทริกซ์ลู่เข้า นั่นคือ $\rho(T) < 1$

พิสูจน์ การลู่เข้าของผลเฉลยสู่จุดตรึงของสมการที่ (2) นั้นขึ้นอยู่กับพฤติกรรมของเวกเตอร์ค่าคลาดเคลื่อน $\mathbf{e}^{(k)}$ เมื่อ

$\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}^{*}$

ซึ่งวัดระยะห่างระหว่างผลเฉลยจากการทำซ้ำกับผลเฉลยจริง พิจารณาความ สัมพันธ์ของเวกเตอร์ค่าคลาดเคลื่อนกับระบบทำซ้ำ ดังนี้

$$\mathbf{e}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}^* = (T\ \mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{c}) - (T\ \mathbf{u}^* + \mathbf{c})$$
$$= T(\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}^*) = T\ \mathbf{e}^{(k)}$$

จะเห็นว่าเวกเตอร์ค่าคลาดเคลื่อนสอดคล้องกับระบบทำซ้ำเชิงเส้นด้วยเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ T ตัวเดียวกัน โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า

$$\mathbf{e}^{(k)} = T^k \mathbf{e}^{(0)}$$

เนื่องจากผลเฉลยของระบบทำซ้ำนี้ลู่เข้าสู่จุดตรึง $\mathbf{u}^{(k)} \to \mathbf{u}^*$ ก็ต่อเมื่อเวกเตอร์ค่าคลาดเคลื่อนลู่เข้าสู่เวกเตอร์ศูนย์ นั่นคือ $\mathbf{e}^{(k)} \to \mathbf{0}$ จึงสรุปได้ว่า $T^k \to \mathbf{0}$ ซึ่งหมายความว่า T เป็นเมทริกซ์ลู่เข้า ซึ่งเงื่อนไขดังกล่าวสมมูลกับ $\rho(T) < 1$ โดยทฤษฎีบทที่ 2.6

จากตัวอย่างข้างต้น จะเห็นว่า

$\rho(T) = 7.03278$ และ $\rho(T) = 0.304067$

นั่นคือ T ไม่เป็นเมทริกซ์ลู่เข้า จึงทำให้ผลเฉลยค่าประมาณ $\mathbf{u}^{(k)}$ ไม่ลู่เข้าสู่ผลเฉลยจริง ส่วนวิธีที่ 2 นั้น T เป็นเมทริกซ์ลู่เข้า จึงทำให้ $\mathbf{u}^{(k)}$ ลู่เข้าสู่ผลเฉลยจริง ยิ่งไปกว่านั้นค่ารัศมีสเปกตรัมจะเป็นตัวกำหนดความเร็วในการลู่เข้า โดยค่ารัศมีสเปกตรัมยิ่งน้อยความเร็วในการลู่เข้าก็จะยิ่งมาก ดังนั้นเป้าหมายของระบบทำซ้ำจึงต้องทำให้ค่ารัศมีสเปกตรัมมีค่าน้อยที่สุดเท่าที่จะทำได้ โดยอย่างน้อยที่สุดค่ารัศมีสเปกตรัมต้องมีค่าน้อยกว่า 1

4. วิธีจาโคบี

วิธีจาโคบี คิดค้นโดยคาร์ล จาโคบี (Carl Jacobi) [4] เป็นวิธีทำซ้ำเพื่อหาผลเฉลยของระบบเชิงเส้น $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$ โดยในแต่ละสมการที่ i จะเขียนอยู่ในรูป

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j = b_i$$

โดยมีเงื่อนไขว่าสมาชิกในแนวทแยงมุมหลักของเมทริกซ์ A จะต้องไม่เป็นศูนย์ นั่นคือ $a_{ii} \neq 0$ และสำหรับแต่ละตัวแปร u_i ในสมการที่ i จะได้ว่า

$$u_i = -\frac{1}{a_{ii}} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} u_j + \frac{b_i}{a_{ii}} \qquad (5)$$

ผลเฉลยที่ได้เป็นจุดตรึงที่สอดคล้องกับระบบทำซ้ำ $\mathbf{u}^{(k+1)} = T\mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{c}$ ดังนั้นรูปแบบชัดแจ้งของวิธีจาโคบี คือ

$$u_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} u_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}} \qquad (6)$$

การแปลงวิธีจาโคบีให้อยู่ในรูปแบบของเมทริกซ์ได้จากการจัดรูปเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ A ใหม่โดยแยกเป็นผลบวกของเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่าง L เมทริกซ์ทแยงมุม D และเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน U นั่นคือ

$$A = L + D + U \qquad (7)$$

ต่อมาเราจัดรูปสมการใหม่ จะได้ว่า

$$A\mathbf{u} = (L + D + U)\mathbf{u} = \mathbf{b}$$

$$D\mathbf{u} = -(L + U)\mathbf{u} + \mathbf{b}$$

ดังนั้นสมการการทำซ้ำของวิธีจาโคบี คือ

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = T_j\mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{c}_j \qquad (8)$$

โดยที่ $T_j = -D^{-1}(L + U)$ และ $\mathbf{c}_j = D^{-1}\mathbf{b}$

ตัวอย่างที่ 4.1 พิจารณาการใช้วิธีจาโคบีกับ

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 \\ -2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

ทำการแยก $A = L+D+U$ เมื่อ

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

จากสมการที่ (8) เราสามารถหาเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบทำซ้ำได้ดังนี้

$$T_j = -D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}$$

วิธีจาโคบีสามารถรับประกันการลู่เข้าของการทำซ้ำได้เมื่อเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ A มีสมบัติที่ดีบางประการซึ่งจะกล่าวต่อไป

บทตั้งที่ 4.2 ถ้าผลบวกค่าสัมบูรณ์ตามแถวของทุกแถวของ A มีค่าน้อยกว่า 1 แล้ว $\|A\|_\infty < 1$ ยิ่งไปกว่านั้น A จะเป็นเมทริกซ์ลู่เข้า

พิสูจน์ บทพิสูจน์สามารถหาได้จาก [2]

ทฤษฎีบทที่ 4.3 ถ้า A เป็นเมทริกซ์แนวทแยงมุมข่มแท้ แล้วระบบจาโคบีที่สอดคล้องจะลู่เข้า

พิสูจน์ เราจะพิสูจน์ว่า $\|T_j\|_\infty < 1$ โดยจากสมการที่ (5) จะได้ว่าผลบวกค่าสัมบูรณ์ตามแถวของเมทริกซ์ $T_j = -D^{-1}(L+U)$ คือ

$$s_i = \frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < 1$$

เนื่องจาก A เป็นเมทริกซ์แนวทแยงมุมข่มแท้ ดังนั้น

$$\|T_j\|_\infty = \max\{s_1, \ldots, s_n\} < 1$$

โดยบทตั้งที่ 4.2 จะได้ว่าระบบจาโคบีที่สอดคล้องนั้นลู่เข้า

ตัวอย่างที่ 4.4 พิจารณาระบบเชิงเส้นต่อไปนี้

$$5x - 2y + 3z = -1, \quad -3x + 9y + z = 2, \quad 2x - y - 7z = 3 \qquad (9)$$

ซึ่งสามารถทำให้อยู่ในรูปแบบของเวกเตอร์ $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$ ได้ดังนี้

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -3 & 9 & 1 \\ 2 & -1 & -7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ทำการเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของระบบทำซ้ำจาโคบี โดยการหาเมทริกซ์ T_j และ $\mathbf{c}_j$ ที่สอดคล้องจะได้

$$T_j = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_j = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{9} \\ -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

เนื่องจาก $\rho(T_j) \approx 0.2674 < 1$ ดังนั้นระบบทำซ้ำนี้ลู่เข้า เมื่อกำหนดเวกเตอร์เริ่มต้นเป็น $\mathbf{u}^{(0)} = (0, 0, 0)$ จะได้ผลลัพธ์การทำซ้ำโดยใช้โปรแกรม MatLab ดังนี้

ตารางที่ 2

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	$z^{(k)}$
0	0	0	0
1	–0.2000	0.2222	–0.4286
2	0.1460	0.2032	–0.5175
3	0.1918	0.3284	–0.4159
4	0.1809	0.3324	–0.4207
5	0.1854	0.3293	–0.4244
6	0.1864	0.3312	–0.4226
7	0.1860	0.3313	–0.4227
8	0.1861	0.3312	–0.4227

จะเห็นว่า วิธีจาโคบีลู่เข้าสู่ผลเฉลยจริงซึ่งมีความถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 4 โดยใช้รอบการทำซ้ำทั้งหมด 8 รอบ

ความเร็วในการทำซ้ำของวิธีจาโคบีขึ้นกับค่ารัศมีสเปกตรัมของเมทริกซ์ทำซ้ำ สมมติว่าต้องการความถูกต้องถึงทศนิยมที่ n จะหาจำนวนรอบ k ของการทำซ้ำที่ทำให้

$\rho(T)^k \le 0.5\times 10^{-n}$

เราสามารถหา k ได้โดยการใช้ลอการิทึม ในตัวอย่างข้างต้นจะได้ว่า

$$k \le \frac{\log(0.5\times 10^{-4})}{\log 0.2674} \approx 8$$

ดังนั้นต้องทำซ้ำไม่เกิน 8 รอบ ซึ่งตรงกับการคำนวณโดยใช้ MatLab

วิธีทำซ้ำที่มีรูปแบบแปรเปลี่ยนจากวิธีจาโคบี ได้แก่ วิธีจาโคบีแบบถ่วงน้ำหนัก (Weighted Jacobi Method) ซึ่งใช้ตัวแปรเสริม $\omega \in (0,1]$ ในการคำนวณการทำซ้ำดังนี้

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \omega D^{-1}\left\{b-(L+U)\mathbf{u}^{(k)}\right\}+(1-\omega)\mathbf{u}^{(k)}$$

เมื่อ $\omega = 1$ จะเป็นวิธีจาโคบีแบบดั้งเดิม ศึกษาข้อมูลเพิ่มเติมได้จาก [5]

ในปี 2014 วิธีจาโคบีได้รับการปรับปรุงเป็นวิธีจาโคบีผ่อนปรนตามกำหนด (Scheduled Relaxation Jacobi Method) หรือวิธี SRJ ในงานวิจัย [6] ซึ่งเป็นวิธีทำซ้ำที่ลู่เข้าเร็วกว่าวิธีจาโคบีดั้งเดิมอยู่มาก ยิ่งกว่านั้นในปี 2015 วิธีดังกล่าวได้รับพัฒนาในงานวิจัย [7] ซึ่งวิธี SRJ สามารถนำไปใช้ในสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงวงรี (Elliptic Partial Differential Equations)

5. วิธีเกาส์-ไซเดล

วิธีเกาส์-ไซเดล เรียกอีกอย่างหนึ่งว่าวิธีเลียบมันน์ (Liebmann Method) หรือวิธีแทนที่สืบเนื่อง (Method of Successive Replacement) เป็นวิธีทำซ้ำที่คล้ายกับวิธีจาโคบี คิดค้นเป็นครั้งแรกโดยคาร์ล เฟรดเดอริก เกาส์ (Carl Friedrich Gauss) [8] แต่ไม่ได้ตีพิมพ์เผยแพร่ ต่อมาฟิลิปป์ ลุดวิก ฟอนไซเดล (Phillip Ludvig von Siedel) ได้คิดค้นและตีพิมพ์วิธีทำซ้ำนี้ในปี ค.ศ. 1874 ภายหลังในปี ค.ศ. 1918 เลียบมันน์ (Liebmann) [9] ได้คิดค้นและตีพิมพ์วิธีทำซ้ำนี้อีกครั้งโดยไม่ทราบว่ามีผู้คิดค้นได้ก่อนแล้ว

วิธีเกาส์-ไซเดลมีความเร็วในการลู่เข้ามากกว่าวิธีจาโคบี เนื่องจากวิธีนี้จะใช้ค่า u_i ตัวใหม่ที่คำนวณได้แทนค่าในสมการต่อไปทันที ดังนั้น สำหรับระบบทำซ้ำ

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = T_S\mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{c}_S$$

จะได้รูปแบบชัดแจ้งของวิธีเกาส์-ไซเดลดังนี้

$$u_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}}\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}u_j^{(k+1)} - \frac{1}{a_{ii}}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}u_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}} \qquad (10)$$

การแปลงวิธีเกาส์-ไซเดลให้อยู่ในรูปแบบของเมทริกซ์ได้จากการจัดรูปเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ A ใหม่โดยแยกเป็นผลบวกของสามเมทริกซ์ ดังนี้

$$A = L + D + U$$

จัดรูปสมการใหม่โดย

$$A\mathbf{u} = (L + D + U)\mathbf{u} = \mathbf{b}$$

$$(L + D)\mathbf{u} = -U\mathbf{u} + \mathbf{b}$$

ดังนั้นสมการการทำซ้ำของวิธีเกาส์-ไซเดล คือ

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = T_s\mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{c}_s \qquad (11)$$

โดยที่ $T_s = -(L + D)^{-1}U$

และ $\mathbf{c}_s = (L + D)^{-1}\mathbf{b}$

จากตัวอย่างที่ 4.1 และสมการที่ (11) เราสามารถหาเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบทำซ้ำเกาส์-ไซเดลได้ดังนี้

$$T_s = -\left(L + D\right)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{12} & \frac{7}{12} \\ 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

พิจารณาค่ารัศมีสเปกตรัมของ T_s ซึ่งได้ว่า $\rho(T_s) \approx 0.2886$ ถ้าเทียบกับค่ารัศมีสเปกตรัมของ T_j ที่ได้จากวิธีจาโคบี ซึ่งได้ว่า $\rho(T_j) \approx 0.476007$ จะเห็นว่าค่ารัศมีสเปกตรัมของวิธีเกาส์-ไซเดลมีค่าน้อยกว่าวิธีจาโคบีประมาณ 2 เท่า ดังนั้นวิธีเกาส์-ไซเดลมีความเร็วในการลู่เข้าเป็น 2 เท่าของวิธีจาโคบีโดยประมาณ

เงื่อนไขที่เพียงพอทำให้วิธีเกาส์-ไซเดลลู่เข้าเป็นดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 5.1 ถ้า A เป็นเมทริกซ์แนวทแยงมุมข่มแท้ แล้ววิธีเกาส์-ไซเดลจะลู่เข้าสำหรับเวกเตอร์เริ่มต้นใด ๆ

พิสูจน์ ดูได้จาก [2]

ตัวอย่างที่ 5.2 พิจารณาระบบเชิงเส้นต่อไปนี้

$$3x + y - z = 3,\quad x - 4y + 2z = -1,$$
$$-2x - y + 5z = 2 \qquad (12)$$

ซึ่งสามารถทำให้อยู่ในรูปแบบเวกเตอร์ $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$ ได้ดังนี้

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix},\ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ทำการเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของระบบทำซ้ำเกาส์-ไซเดล โดยการหาเมทริกซ์ T_s และ $\mathbf{c}_s$ ที่สอดคล้อง จะได้

$$T_s = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{12} & \frac{7}{12} \\ 0 & -\frac{3}{20} & \frac{1}{4} \end{pmatrix},\ \mathbf{c}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

จะได้ว่า T_s เป็นเมทริกซ์แนวทแยงมุมข่มแท้ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 5.1 จะได้ว่าระบบทำซ้ำนี้ลู่เข้า หรือพิจารณาจาก $\rho(T_s) \approx 0.2582 < 1$ จะได้ข้อสรุปเดียวกัน เมื่อกำหนดเวกเตอร์เริ่มต้น $\mathbf{u}^{(0)} = (0, 0, 0)$ ผลลัพธ์การทำซ้ำที่ได้เป็นดังนี้

ตารางที่ 3

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	$z^{(k)}$
0	0	0	0
1	1	0.5	0.9
2	1.1333	0.9833	1.05
3	1.0222	1.0306	1.015
4	0.9948	1.0062	0.992
5	0.9977	0.999	0.9989
6	1	0.9994	0.9999
7	1.0001	1	1.0001
8	1	1	1

6. วิธีผ่อนปรนเกินสืบเนื่อง

วิธีผ่อนปรนเกินสืบเนื่อง เรียกสั้นๆ ว่าวิธี SOR ซึ่งเป็นวิธีทำซ้ำสำหรับระบบเชิงเส้นที่ทันสมัยและนิยมใช้กันอย่างแพร่หลายในปัจจุบัน วิธีนี้คิดค้นในปี ค.ศ. 1950 โดยนักคณิตศาสตร์สองท่านซึ่งต่างคนต่างคิด คือ เดวิด ยัง จูเนียร์ (David Young Jr.) ในวิทยานิพนธ์ [10] และแสตนลีย์ แฟรงเคิล (Stanley Frankle)

วิธี SOR เป็นวิธีทำซ้ำที่ปรับปรุงจากวิธีจาโคบีและวิธีเกาส์-ไซเดลโดยต้องการเร่งความเร็วของการลู่เข้า ซึ่งใช้เทคนิคที่เรียกว่าการผ่อนปรน (Relaxation) ซึ่งใช้กับวิธีเกาส์-ไซเดล โดยมีแนวคิดว่าการทำซ้ำโดยใช้ค่า u_i ใหม่ทั้งหมดอาจไม่ใช่ทางเลือกที่ทำให้ลู่เข้าเร็วที่สุด จึงมีการปรับเปลี่ยนเป็นการถ่วงน้ำหนักระหว่างค่า u_i เก่าจากรอบที่แล้วกับค่า u_i ใหม่ในรอบปัจจุบัน ดังนี้

$$u_i^{new} = \omega u_i^{new} + (1-\omega)u_i^{old} \qquad (13)$$

เมื่อ ω คือ ตัวประกอบถ่วงน้ำหนัก (weighted factor) จากสมการที่ (13) จะได้รูปแบบชัดแจ้งของวิธีผ่อนปรนเกินสืบเนื่องดังนี้

$$u_i^{(k+1)} = -\frac{\omega}{a_{ii}}\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}u_j^{(k+1)} + (1-\omega)u_i^{(k)} - \frac{\omega}{a_{ii}}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}u_j^{(k)} + \frac{\omega b_i}{a_{ii}} \qquad (14)$$

สังเกตว่ารูปแบบชัดแจ้งด้านบนเป็นการคูณสมการที่ (10) ทางด้านขวามือด้วยตัวประกอบถ่วงน้ำหนัก ω และเพิ่มพจน์ $(1-\omega)u_i^{(k)}$ เข้าไปนั่นเอง

ในการแปลงวิธีผ่อนปรนเกินสืบเนื่องให้อยู่ในรูปแบบเมทริกซ์ จะได้จากการจัดรูปเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ A ใหม่โดยแยกเป็นผลบวกของสามเมทริกซ์คือ $L + D + U$ เช่นเดียวกับวิธีจาโคบี จากนั้นให้ α เป็นค่าคงที่ใดๆ ที่ไม่เท่ากับ 0 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A &= L + \alpha D - \alpha D + D + U \\ &= (L+\alpha D) - [(\alpha-1)D - U] \end{aligned}$$

แทน A ที่ได้ลงในสมการ $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$ จะได้

$$\big[(L+\alpha D) - [(\alpha-1)D-U]\big]\mathbf{u} = \mathbf{b}$$

$$\left(\frac{1}{\alpha}L + D\right)\mathbf{u} = \left[\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)D - \frac{1}{\alpha}U\right]\mathbf{u} + \frac{1}{\alpha}\mathbf{b}$$

ให้ $\omega = \dfrac{1}{\alpha}$ จะได้

$$(\omega L + D)\mathbf{u} = [(1-\omega)D - \omega U]\mathbf{u} + \omega\mathbf{b}$$

ดังนั้นสมการการทำซ้ำของวิธีผ่อนปรนเกินสืบเนื่อง คือ

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = T_\omega \mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{c}_\omega \qquad (15)$$

เมื่อ $T_\omega = (\omega L + D)^{-1}[(1-\omega)D - \omega U]$

และ $\mathbf{c}_\omega = (\omega L + D)^{-1}\omega\mathbf{b}$

วิธี SOR จะลู่เข้าหรือไม่พิจารณาได้จากทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 6.1 (Kahan [11]) ถ้า ω มีค่าอยู่ในช่วง $(0,2)$ แล้ววิธีผ่อนปรนเกินสืบเนื่องจะลู่เข้าสำหรับทุกเวกเตอร์เริ่มต้น $\mathbf{u}^{(0)}$

ทฤษฎีบทที่ 6.2 (Ostrowski-Reich [12,13]) ให้ A เป็นเมทริกซ์เฮอร์มิเชียนที่หาผกผันได้ ซึ่งทุกสมาชิกในแนวทแยงมุมเป็นจำนวนจริงบวก จะได้ว่าวิธีผ่อนปรนเกินสืบเนื่องจะลู่เข้าสำหรับเวกเตอร์เริ่มต้น $\mathbf{u}^{(0)}$ ใด ๆ และ $0<\omega<2$ ก็ต่อเมื่อ A เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

ยิ่งไปกว่านั้น ถ้า A เป็นเมทริกซ์สามแนวเฉียงด้วย แล้ว

$$\omega=\frac{2}{1+\sqrt{1-[\rho(T_j)]^2}}$$

และ $\rho(T_\omega)=\omega-1$

ดังนั้นวิธี SOR จะลู่เข้าสำหรับเวกเตอร์เริ่มต้นใด ๆ ถ้าเราใช้กับเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอนโดยเลือก ω ให้อยู่ในช่วง (0,2)

ตัวอย่างที่ 6.3 พิจารณาระบบเชิงเส้นต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 5x+3y \qquad &=11\\ 3x+5y-2z&=7 \qquad (16)\\ -5y+5z&=5 \end{aligned}$$

ซึ่งสามารถทำให้อยู่ในรูปแบบเวกเตอร์ $A\mathbf{u}=\mathbf{b}$ ได้ดังนี้

$$A=\begin{pmatrix}5&3&0\\3&5&-2\\0&-5&5\end{pmatrix},\ \mathbf{u}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{pmatrix}11\\7\\5\end{pmatrix}$$

จะเห็นว่า A เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอนและเมทริกซ์สามแนวเฉียง เมทริกซ์สัมประสิทธิ์จาโคบีกำหนดโดย

$$T_j=\begin{pmatrix}0&-0.6&0\\-0.6&0&0.4\\0&1&0\end{pmatrix}$$

ดังนั้น $\rho(T_j)\approx 0.8718$ และโดยทฤษฎีบทที่ 6.2 จะได้ว่า

$$\omega=\frac{2}{1+\sqrt{1-\left[\rho(T_j)\right]^2}}=\frac{2}{1+\sqrt{1-0.76}}\approx 1.3424$$

จากสมการที่ (15) เราสามารถหา T_ω และ $\mathbf{c}_\omega$ ที่สอดคล้องได้ว่า

$$T_\omega=\begin{pmatrix}-0.3424&-0.8054&0\\0.2758&0.3063&0.5369\\0.3702&0.4112&0.3784\end{pmatrix},\ c_\omega=\begin{pmatrix}2.9533\\-0.4993\\0.6721\end{pmatrix}$$

เนื่องจาก $\rho(T_\omega)\approx 0.3424<1$ ดังนั้นระบบทำซ้ำนี้ลู่เข้า เมื่อกำหนดเวกเตอร์เริ่มต้นเป็น $\mathbf{u}^{(0)}=(0,0,0)$ จะได้ผลลัพธ์การทำซ้ำเป็นดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 4

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	$z^{(k)}$
0	0	0	0
1	2.9533	–0.4993	06721
2	2.3442	0.5231	1.8144
3	1.7293	1.2816	2.4416
4	1.3290	1.6811	2.7632
5	1.1443	1.8657	2.9010
6	1.0588	1.9453	2.9606
7	1.0240	1.9781	2.9843
8	1.0095	1.9913	2.9939
9	1.0039	1.9964	2.9975
0	1.0016	1.9984	2.9989

สำหรับปัญหาระบบเชิงเส้นนี้ หากใช้วิธีเกาส์-ไซเดลจะใช้รอบการทำซ้ำทั้งสิ้น 25 รอบ

ซึ่งหมายถึง 50 รอบสำหรับวิธีจาโคบี ดังนั้นจะเห็นได้ว่าวิธีผ่อนปรนเกินสืบเนื่องเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพและให้ผลลัพธ์ที่น่าพอใจจนเป็นที่นิยมใช้กันอย่างมากในปัจจุบัน

วิธี SOR ได้รับการพัฒนาต่อยอดเป็นวิธีทำซ้ำใหม่ ๆ เช่น วิธี ESOR [14] วิธี SSOR [15] วิธี AOR [16] วิธี GAOR [17] และวิธี SAOR [18]

7. สรุป

วิธีทำซ้ำสามารถใช้หาผลเฉลยของระบบเชิงเส้น โดยสร้างลำดับของผลเฉลยค่าประมาณที่ลู่เข้าสู่ผลเฉลยจริง วิธีทำซ้ำจะลู่เข้าสำหรับเวกเตอร์เริ่มต้นใด ๆ ก็ต่อเมื่อเมริกซ์ทำซ้ำที่สอดคล้องกับวิธีดังกล่าวเป็นเมทริกซ์ลู่เข้า นั่นคือมีรัศมีสเปกตรัมน้อยกว่า 1 ดังนั้นวิธีทำซ้ำแบบต่าง ๆ จะการันตีการลู่เข้าสำหรับเมทริกซ์ที่มีสมบัติเหมาะสม โดยวิธีจาโคบีและวิธีเกาส์-ไซเดลจะการันตีการลู่เข้าเมื่อเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบเชิงเส้นเป็นเมทริกซ์แนวทแยงมุมข่มแท้ ส่วนวิธีผ่อนปรนเกินสืบเนื่องจะลู่เข้าถ้าใช้กับเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอนโดยต้องเลือกตัวประกอบถ่วงน้ำหนักที่เหมาะสม

เอกสารอ้างอิง

[1] G. Strang, *Linear Algebra and Its Applications*, 4th ed. USA: Brooks Cole, 2006.

[2] P. J. Olver and C. Shakiban, *Applied Linear Algebra*, Upper Saddle River, USA: Pearson Education, 2006.

[3] B. N. Datta, *Numerical Linear Algebra and Applications*, 2nd ed. Philadelphia, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010.

[4] C. G. J. Jacobi, “Ueber eine neue Auflsungsart der bei der Methode der kleinsten Quadrate vorkommenden lineren Gleichungen,” *Astronomische Nachrichten*, vol. 22, no. 20, pp. 297-306, 1845.

[5] S. Yousef, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, 2nd ed. USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.

[6] Y. Xiang and M. Rajat, “Acceleration of the Jacobi iterative method by factors exceeding 100 using scheduled relaxation,” *Journal of Computational Physics*, vol. 274, pp. 695-708, 2014.

[7] J. E. Adsuara, I. Cordero-Carrión, P. Cerdá-Durán, and A. M. Aloy, “Scheduled Relaxation Jacobi method: improvements and applications,” *Journal of Computational Physics*, vol. 321, pp. 369-413, 2015.

[8] C. F. Gauss, “Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium,” *Perthes and Besser*, 1809.

[9] H. Liebmann, “ Die angen aherte Ermittlung harmonischer Funktionenund conformer

Abbildungen, Sitzgsber, bayer, Akad, Wiss," *Mathematisch-Physikalische Klasse*, pp. 385-416, 1918.

[10] D. M. Young. "Iterative Methods for Solving Partial Difference Equations of Elliptical Type," Ph. D. thesis, Harvard University, Cambridge, Massachusetts, 1950.

[11] W. Kahan, "Gauss-Seidel Methods of Solving Large Systems of Linear Equations," Ph.D. thesis, University of Toronto, Toronto, Canada, 1958.

[12] A. M. Ostrowski, " On the linear iteration procedures for symmetric matrices," *Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni*, vol. 14, pp. 140-163, 1954.

[13] E. Reich, "On the convergence of the classical iterative procedures for symmetric matrices," *The Annual of Mathematical Statistics*, vol. 20, pp. 448-451, 1949.

[14] P. Albrechtt and M. P. Klein, " extrapolated iterative methods for linear systems," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 21, no. 1, pp. 192-201, 1984.

[15] L. B. Krishna, " On the convergence of the symmetric successive overrelaxation method," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 58, pp. 185-194, 1984.

[16] A. J. H. Hallett, "The convergence of accelerated overrelaxation iterations," *mathematics of computation*, vol. 47, no. 175, pp. 219-223, 1986.

[17] A. Hadjidimos, A. Psimami, and A. Yeyios, "On the convergence of some generalized iterative methods," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 75, pp. 117-132, 1986.

[18] D. J. Evans and C. Li, "On the convergence of the SAOR method and the error bounds for its acceleration," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 23, pp. 297-279, 1988.