

วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATH 63(694) Jan–Apr, 2018

โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
<http://MathThai.Org> MathThaiOrg@gmail.com



สมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของภาคตัดกรวย Optical Properties of Conic Sections

รตาวรรณ อรัญไสว
Ratawan Arunsawai

Department of Mathematics and Statistics
Prince of Songkla University, Hatyai Campus, Songkla, 91000

Email: ratawan.arunsawai@gmail.com

บทคัดย่อ

เราพิสูจน์สมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของภาคตัดกรวยซึ่งเกี่ยวข้องกับทางเดินของแสงที่ผ่านจุดโฟกัสของภาคตัดกรวยและสะท้อนที่ภาคตัดกรวยนั้นตามกฎหมายการสะท้อนของแสง โดยใช้เทคนิคการพิสูจน์แบบไม่อิงระบบพิกัดและการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้งซึ่งนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายสามารถเข้าใจได้ไม่ยาก

คำสำคัญ: ภาคตัดกรวย จุดโฟกัส สมบัติเชิงทัศนศาสตร์ เทคนิคการพิสูจน์

ABSTRACT

We prove optical properties of conic sections involving trajectories of light passing through foci of the conic sections and reflecting at the conic sections according to the law of reflection. Proof techniques employed include coordinate-free proof and proof by contradiction, which are accessible to high-school students.

Keywords: conic sections, focus, optical properties, proof techniques





1. บทนำ

ภาคตัดกรวยคือเส้นโค้งที่เกิดจากการตัดกรวยกลมด้วยระนาบ ได้แก่ วงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา นักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายศึกษาสมบัติต่างๆ ของภาคตัดกรวยเหล่านี้ [1] โดยสมบัติที่สำคัญประการหนึ่งคือจุดโฟกัสของภาคตัดกรวย การใช้คำว่า “จุดโฟกัส” ในความหมายทั่วไปนั้นมักจะใช้ในความหมายของการเป็นจุดรวมแสงในอุปกรณ์ทัศนศาสตร์ เช่น กล้องจุลทรรศน์ หรือกล้องโทรทรรศน์ นักเรียนจึงอาจมีคำถามว่าจุดโฟกัสของภาคตัดกรวยนั้นมีสมบัติของการเป็นจุดรวมแสงในเชิงทัศนศาสตร์หรือไม่

บทความนี้จะนำเสนอสมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของภาคตัดกรวย และถึงแม้ว่าเราจะสามารถพิสูจน์สมบัติเหล่านี้โดยใช้เรขาคณิตวิเคราะห์ และแคลคูลัส [2, 3, 4] แต่เราจะใช้การพิสูจน์แบบไม่อิงระบบพิกัด (coordinate-free proof) ด้วยการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง (proof by contradiction) ซึ่งจะทำให้ได้บทพิสูจน์ที่กระชับ และนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายสามารถเข้าใจได้ไม่ยาก โดยผู้เขียนได้ศึกษาแนวคิดในการพิสูจน์ลักษณะนี้จาก [5, 6]

2. สมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของภาคตัดกรวย

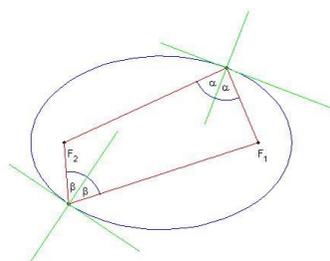
สมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของภาคตัดกรวยใด ๆ นั้นสรุปเป็นประโยคเพียงประโยคเดียวได้ดังนี้ [2, 3, 4]

“ถ้าแสงเดินทางออกจากจุดโฟกัสจุดหนึ่งของภาคตัดกรวยและตกกระทบที่ภาคตัดกรวยนั้น แล้วแสงจะสะท้อนตามแนวเส้นตรงซึ่งผ่านจุดโฟกัสอีกจุดหนึ่งของภาคตัดกรวยนั้น”

เราสมมติว่าแสงสะท้อนตามกฎการสะท้อนของแสง กล่าวคือ “มุมตกกระทบเท่ากับมุมสะท้อน” โดยที่มุมทั้งสองคือมุมที่

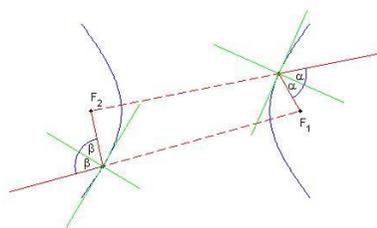
ลำแสงตกกระทบและลำแสงสะท้อนทำกับเส้นตั้งฉากของภาคตัดกรวย ณ จุดที่พิจารณา

รูปที่ 1 แสดงสมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของวงรี โดยเมื่อแสงที่เดินทางออกจากจุดโฟกัสจุดหนึ่งของวงรีตกกระทบวงรี แล้วจะสะท้อนตามกฎการสะท้อนของแสง และเดินทางผ่านจุดโฟกัสอีกจุดหนึ่งของวงรี

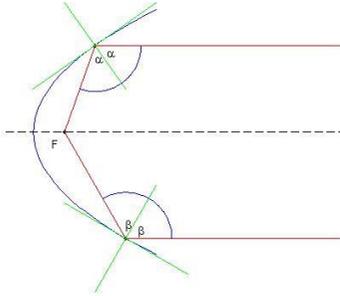


รูปที่ 1 สมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของวงรี

รูปที่ 2 แสดงสมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของไฮเพอร์โบลา โดยเมื่อแสงที่เดินทางออกจากจุดโฟกัสจุดหนึ่งของไฮเพอร์โบลามากกว่าไฮเพอร์โบลา แล้วจะสะท้อนตามกฎการสะท้อนของแสง และถึงแม้ว่าแสงสะท้อนจะไม่ผ่านจุดโฟกัสอีกจุดหนึ่งของไฮเพอร์โบลา แต่ก็เดินทางตามแนวเส้นตรง (เส้นประ) ซึ่งผ่านจุดโฟกัสอีกจุดหนึ่งของไฮเพอร์โบลา



รูปที่ 2 สมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของไฮเพอร์โบลา



รูปที่ 3 สมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของพาราโบลา

รูปที่ 3 แสดงสมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของพาราโบลา ถึงแม้ว่าพาราโบลามีจุดโฟกัสเพียงจุดเดียว แต่เราอาจสมมติว่าจุดโฟกัสอีกจุดหนึ่งของพาราโบลายู่ที่อนันต์บนแกนสมมาตรทางด้านเปิดของพาราโบลา โดยเมื่อแสงที่เดินทางออกจากจุดโฟกัสของพาราโบลาดตกกระทบพาราโบลา แล้วจะสะท้อนตามกฎการสะท้อนของแสง และเดินทางไปยังจุดโฟกัสที่อนันต์ ซึ่งหมายความว่าแสงสะท้อนต้องขนานกับแกนสมมาตรของพาราโบลา ในทางกลับกัน เมื่อแสงที่ขนานกับแกนสมมาตรของพาราโบลาดตกกระทบพาราโบลา แล้วจะสะท้อนตามกฎการสะท้อนของแสง และเดินทางผ่านจุดโฟกัสของพาราโบลา

ในกรณีของวงกลมนั้น เราอาจพิจารณาว่าจุดโฟกัสทั้งสองอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงกลม แสงที่เดินทางออกจากจุดศูนย์กลางของวงกลมจะเดินทางตามแนวรัศมีของวงกลม และตกกระทบตั้งฉากกับเส้นรอบวงของวงกลม ดังนั้นแสงจะสะท้อนกลับตามแนวเดิมและเดินทางผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมอีกครั้ง

เราสามารถแปลงสมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของภาคตัดกรวยให้เป็นสมบัติเชิงคณิตศาสตร์เพื่อให้เอื้อต่อการพิสูจน์ได้ดังนี้

“ถ้า P เป็นจุดใด ๆ บนภาคตัดกรวยที่มีจุดโฟกัสที่ F_1 และ F_2 แล้วเส้นตั้งฉากของภาคตัด

กรวยที่จุด P จะแบ่งครึ่งมุมตรงข้ามคู่หนึ่งที่เกิดจากการตัดกันของเส้นตรง $\overline{PF_1}$ และ $\overline{PF_2}$ (และเส้นสัมผัสของภาคตัดกรวยที่จุด P จะแบ่งครึ่งมุมตรงข้ามอีกคู่หนึ่ง)”

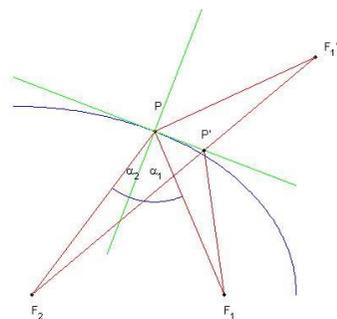
3. พิสูจน์สมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของภาคตัดกรวย

เราเห็นได้ง่ายแล้วว่าสมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของวงกลมเป็นจริง เราจึงพิสูจน์เฉพาะสมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของวงรี ไฮเพอร์โบลา และพาราโบลา ดังนี้

3.1 วงรี

ก่อนที่จะพิสูจน์สมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของวงรีนั้น เราอ้างอิงถึงนิยามของวงรีว่า วงรีที่มีจุดโฟกัสที่ F_1 และ F_2 คือเซตของจุด P โดยที่ $F_1P + F_2P$ เป็นค่าคงตัวซึ่งมากกว่า F_1F_2 และค่าคงตัวนี้เรียกว่า ผลรวมคงตัว ให้สังเกตว่าถ้าวงรีสองวงมีจุดโฟกัสรวมกัน แล้ววงรีที่มีผลรวมคงตัวน้อยกว่าต้องอยู่ใกล้จุดโฟกัสมากกว่า กล่าวคือ วงรีที่มีผลรวมคงตัวน้อยกว่าต้องอยู่ภายในวงรีที่มีผลรวมคงตัวมากกว่า

ในการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้งนั้น เราจะสมมติว่าเส้นตั้งฉากของวงรีที่จุด P ไม่แบ่งครึ่งมุม $\angle F_1PF_2$ กล่าวคือ $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ดังรูปที่ 4



รูปที่ 4 พิสูจน์สมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของวงรีโดยใช้ข้อขัดแย้ง



กำหนดให้ F_1' เป็นจุดที่ได้จากการสะท้อนจุด F_1 ข้ามเส้นสัมผัสของวงรีที่จุด P จะได้ว่า $F_1P = F_1'P$ และมุมระหว่างเส้นตั้งฉากของวงรีที่จุด P และส่วนของเส้นตรง $F_1'P$ ต้องเท่ากับ α_1 เมื่อเป็นเช่นนี้จุด F_1', P, F_2 จึงไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

กำหนดให้ P' เป็นจุดตัดของเส้นตรง $F_1'F_2$ และเส้นสัมผัสของวงรีที่จุด P การที่จุด F_1', P, F_2 ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหมายความว่า P และ P' ไม่ใช่จุดเดียวกัน นอกจากนั้นแล้ว $F_1P' = F_1'P'$ จะได้ว่า

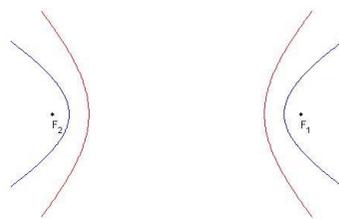
$$\begin{aligned} F_1P' + F_2P' &= F_1'P' + F_2P' = F_1'F_2 \\ &< F_1'P + F_2P \\ &= F_1P + F_2P \end{aligned}$$

โดยอสมการที่เกิดขึ้นคืออสมการสามเหลี่ยม (triangle inequality) ดังนั้น $F_1P' + F_2P' < F_1P + F_2P$ ซึ่งหมายความว่าถ้าจุด P' อยู่บนวงรีที่มีจุดโฟกัสที่ F_1 และ F_2 แล้ววงรีดังกล่าวจะต้องอยู่ภายในวงรีที่ผ่านจุด P และมีจุดโฟกัสที่ F_1 และ F_2 แต่ข้อสรุปนี้ขัดแย้งกับการที่จุด P' อยู่บนเส้นสัมผัสของวงรีที่ผ่านจุด P จึงต้องอยู่ภายนอกวงรีดังกล่าว

เนื่องจากข้อสมมติที่ว่าเส้นตั้งฉากของวงรีที่จุด P ไม่แบ่งครึ่งมุม $\angle F_1PF_2$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง เราจึงสรุปได้ว่าเส้นตั้งฉากของวงรีที่จุด P ต้องแบ่งครึ่งมุม $\angle F_1PF_2$ ตามที่ต้องการ

3.2 ไฮเพอร์โบล่า

ก่อนที่จะพิสูจน์สมบัติเชิงทศนศาสตร์ของไฮเพอร์โบล่านั้น เราอ้างอิงถึงนิยามของไฮเพอร์โบล่าว่า ไฮเพอร์โบล่าที่มีจุดโฟกัสที่ F_1 และ F_2 คือเซตของจุด P โดยที่ $|F_1P - F_2P|$ เป็นค่าคงตัวซึ่งน้อยกว่า F_1F_2 และค่าคงตัวนี้เรียกว่า ผลต่างคงตัว ให้สังเกตว่าถ้าไฮเพอร์โบล่าสองรูปมีจุดโฟกัสรวมกัน แล้ว



รูปที่ 5 ไฮเพอร์โบล่าสองรูปที่มีจุดโฟกัสรวมกัน

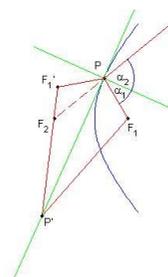
ไฮเพอร์โบล่าที่มีผลต่างคงตัวมากกว่าต้องอยู่ใกล้จุดโฟกัสมากกว่า ดังรูปที่ 5 ซึ่ง

ไฮเพอร์โบล่าสีน้ำเงินมีผลต่างคงตัวมากกว่าไฮเพอร์โบล่าสีแดง

ในการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้งนั้น เราจะสมมติว่าเส้นตั้งฉากของไฮเพอร์โบล่าที่จุด P ไม่แบ่งครึ่งมุม $\angle F_1PF_2$ กล่าวคือ $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ดังรูปที่ 6

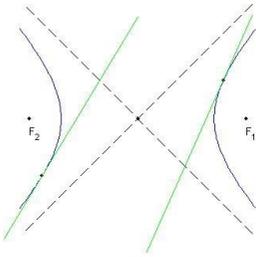
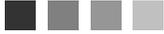
กำหนดให้ F_1' เป็นจุดที่ได้จากการสะท้อนจุด F_1 ข้ามเส้นสัมผัสของวงรีที่จุด P จะได้ว่า $F_1P = F_1'P$ และมุมระหว่างเส้นตั้งฉากของวงรีที่จุด P และส่วนของเส้นตรง $F_1'P$ ต้องเท่ากับ α_1 เมื่อเป็นเช่นนี้จุด F_1', P, F_2 จึงไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

กำหนดให้ P' เป็นจุดตัดของเส้นตรง $F_1'F_2$ และเส้นสัมผัสของวงรีที่จุด P การที่จุด F_1', P, F_2 ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหมายความว่า



รูปที่ 6 พิสูจน์สมบัติเชิงทศนศาสตร์ของไฮเพอร์โบล่าโดยใช้ข้อขัดแย้ง





รูปที่ 7 เส้นสัมผัสของไฮเพอร์โบลามีไม่สามารถผ่านจุดอื่นของไฮเพอร์โบลาคได้

P และ P' ไม่ใช่จุดเดียวกัน นอกจากนั้นแล้ว $F_1P' = F_1'P'$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} F_1P' - F_2P' &= F_1'P' - F_2P' = F_1'F_2 \\ &> F_2P - F_1'P \\ &= F_2P - F_1P \end{aligned}$$

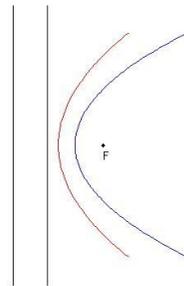
ดังนั้น $|F_1P' - F_2P'| > |F_1P - F_2P|$ ซึ่งหมายความว่าถ้าจุด P' อยู่บนไฮเพอร์โบลามีจุดโฟกัสที่ F_1 และ F_2 แล้วไฮเพอร์โบลาดังกล่าวจะต้องอยู่ใกล้จุดโฟกัสมากกว่าไฮเพอร์โบลาคี่ผ่านจุด P และมีจุดโฟกัสที่ F_1 และ F_2 แต่ข้อสรุปนี้ขัดแย้งกับการที่จุด P' อยู่บนเส้นสัมผัสของไฮเพอร์โบลาคี่ผ่านจุด P จึงต้องอยู่บนไฮเพอร์โบลาคี่มีผลต่างคงตัวน้อยกว่าไฮเพอร์โบลาคี่ผ่านจุด P (รูปที่ 7 แสดงให้เห็นว่าเส้นสัมผัสของไฮเพอร์โบลารูปหนึ่งไม่สามารถผ่านจุดอื่นของไฮเพอร์โบลารูปนั้นได้ จึงไม่สามารถตัดไฮเพอร์โบลาคี่รูปหนึ่งที่มีจุดโฟกัสร่วมกันและอยู่ใกล้จุดโฟกัสมากกว่าได้ เส้นประในรูปนี้คือเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลาค)

เนื่องจากข้อสมมติที่ว่าเส้นตั้งฉากของไฮเพอร์โบลาคี่จุด P ไม่แบ่งครึ่งมุม $\angle F_1PF_2$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง เราจึงสรุปได้ว่าเส้นตั้งฉากของไฮเพอร์โบลาคี่จุด P ต้องแบ่งครึ่งมุม $\angle F_1PF_2$ ตามที่ต้องการ

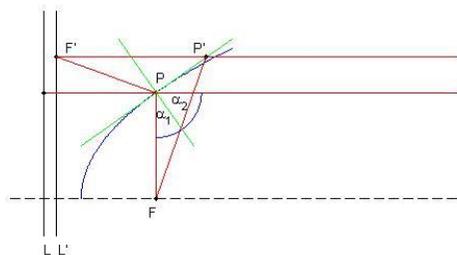
3.3 พาราโบลาค

ก่อนที่จะพิสูจน์สมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของพาราโบลาคนั้น เราอ้างอิงถึงนิยามของพาราโบลาคว่า พาราโบลาคที่มีจุดโฟกัสที่ F และเส้นไดเรกทริกซ์ L คือเซตของจุด P โดยที่ FP เท่ากับระยะตั้งฉากจากจุด P ถึงเส้นตรง L ให้สังเกตว่าถ้าพาราโบลาคสองรูปมีจุดโฟกัสร่วมกัน และมีเส้นไดเรกทริกซ์ขนานกัน แล้วพาราโบลาคที่อยู่ใกล้จุดโฟกัสมากกว่าก็จะมีเส้นไดเรกทริกซ์ที่อยู่ใกล้จุดโฟกัสมากกว่าด้วย ดังรูปที่ 8 ซึ่งเส้นไดเรกทริกซ์ของพาราโบลาคสีน้ำเงินอยู่ใกล้จุดโฟกัสมากกว่าเส้นไดเรกทริกซ์ของพาราโบลาคสีแดง

ในการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้งนั้น เราจะสมมติว่าเส้นตั้งฉากของพาราโบลาคี่จุด P ไม่แบ่งครึ่งมุมที่ส่วนของเส้นตรง FP ทำกับเส้นตรงที่ผ่านจุด P และขนานกับแกนสมมาตรของพาราโบลาค กล่าวคือ $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ดังรูปที่ 9



รูปที่ 8 พาราโบลาคที่มีจุดโฟกัสร่วมกันและเส้นไดเรกทริกซ์ขนานกัน



รูปที่ 9 พิสูจน์สมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของพาราโบลาคโดยใช้ข้อขัดแย้ง





กำหนดให้ F' เป็นจุดที่ได้จากการสะท้อนจุด F ข้ามเส้นสัมผัสของพาราโบลาที่จุด P จะได้ว่า $FP = F'P$ และมุมระหว่างเส้นตั้งฉากของพาราโบลาที่จุด P และส่วนของเส้นตรง $\overline{F'P}$ ต้องเท่ากับ α_1 เมื่อเป็นเช่นนี้ส่วนของเส้นตรง $\overline{F'P}$ จึงไม่ขนานกับแกนสมมาตรของพาราโบลา

กำหนดให้ P' เป็นจุดตัดของเส้นสัมผัสของวงรีที่จุด P และเส้นตรงที่ผ่านจุด F' และขนานกับแกนสมมาตรของพาราโบลา การที่ส่วนของเส้นตรง $\overline{F'P}$ ไม่ขนานกับแกนสมมาตรของพาราโบลาหมายความว่า P และ P' ไม่ใช่จุดเดียวกัน นอกจากนั้นแล้ว $FP' = F'P'$

พิจารณาเส้นตรง L ซึ่งตั้งฉากกับแกนสมมาตรของพาราโบลา เส้นตรงดังกล่าวถูกสร้างขึ้นตรงข้ามกับด้านเปิดของพาราโบลาให้มีระยะตั้งฉากจากจุด P เท่ากับ FP ดังนั้นเส้นตรง L จึงต้องเป็นเส้นไคเรกตริกซ์ของพาราโบลา และเส้นตรง L' ซึ่งผ่านจุด F' และตั้งฉากกับแกนสมมาตรของพาราโบลาต้องอยู่ใกล้จุดโฟกัสมากกว่าเส้นตรง L เพราะ $F'P$ เท่ากับระยะตั้งฉากจากจุด P ถึงเส้นตรง L แต่ส่วนของเส้นตรง $\overline{F'P}$ ไม่ตั้งฉากกับเส้นตรง L' จะได้ว่าถ้า P' เป็นจุดบนพาราโบลาที่มีจุดโฟกัสที่ F และมีเส้นไคเรกตริกซ์ L' แล้วพาราโบลาดังกล่าวจะต้องอยู่ใกล้จุดโฟกัสมากกว่าพาราโบลาที่ผ่านจุด P (ซึ่งมีจุดโฟกัสรวมกันและมีเส้นไคเรกตริกซ์ L) แต่ข้อสรุปนี้ขัดแย้งกับการที่จุด P' อยู่บนเส้นสัมผัสของพาราโบลาที่ผ่านจุด P จึงต้องอยู่บนพาราโบลาที่อยู่ไกลจากจุดโฟกัสมากกว่าพาราโบลาที่ผ่านจุด P

เนื่องจากข้อสมมติที่ว่าเส้นตั้งฉากของพาราโบลาที่จุด P ไม่แบ่งครึ่งมุมที่ส่วนของเส้นตรง \overline{FP} ทำกับเส้นตรงที่ผ่านจุด P และ

ขนานกับแกนสมมาตรของพาราโบลาทำให้เกิดข้อขัดแย้ง เราจึงสรุปได้ว่าเส้นตั้งฉากของพาราโบลาที่จุด P ต้องแบ่งครึ่งมุมดังกล่าวตามที่ต้องการ

4. สรุป

เราได้พิสูจน์สมบัติเชิงทัศนศาสตร์ที่เกี่ยวกับจุดโฟกัสของภาคตัดกรวยซึ่งเป็นเส้นโค้งระนาบ ในอุปกรณ์ทัศนศาสตร์นั้น ผิวสะท้อนมักจะเป็นผิวที่ได้จากการหมุน (surface of revolution) ภาคตัดกรวยรอบแกนสมมาตร เช่น ทรงรี (ellipsoid) พาราโบลอยด์ (paraboloid) หรือ ไฮเพอร์โบลอยด์ (hyperboloid) อย่างไรก็ตาม ถ้าแสงเดินทางบนระนาบที่ผ่านแกนสมมาตรของผิวสะท้อนเหล่านี้ แล้วสมบัติเชิงทัศนศาสตร์ที่เราได้พิสูจน์ก็ยังคงเป็นจริงอยู่

ผู้อ่านที่มีความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ (เกี่ยวกับความชันของเส้นแบ่งครึ่งมุมระหว่างเส้นตรง) และแคลคูลัส (เกี่ยวกับความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง) สามารถพิสูจน์สมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของภาคตัดกรวยได้เช่นเดียวกัน โดยผู้อ่านจะพบว่าสามารถใช้เทคนิคการพิสูจน์โดยตรง (direct proof) ได้ แต่ก็ต้องจัดรูปพจน์เชิงพีชคณิตค่อนข้างมาก

5. กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนได้รับคำชี้แนะในการศึกษาสมบัติเชิงทัศนศาสตร์ของภาคตัดกรวยจาก ผศ.ดร.บุญญาธิสา แซ่หล่อ และ ดร.อเนกวิทย์ บุญเกษม ในระหว่างการฝึกงานภาคฤดูร้อน ณ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตสุราษฎร์ธานี นอกจากนั้น ผู้เขียนยังได้ใช้ประโยชน์ในการศึกษาค้นคว้าจากหอบรรณสารสนเทศ และห้องวิจัยสาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์และสารสนเทศ ณ





มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์
วิทยาเขตสุราษฎร์ธานี ด้วย

เอกสารอ้างอิง

- [1] ภัทรา เตชาภิวาทย์, *เรขาคณิตวิเคราะห์*, กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2540.
- [2] Algebra.com.2016. *Lesson Optical property of a parabola*. Retrieved 25 November 2016 from <https://www.algebra.com/algebra/homework/Quadratic-relations-and-conic-sections/Optical-property-of-a-parabola.lesson>
- [3] Algebra.com.2016. *Lesson Optical property of a hyperbola*. Retrieved 25 November 2016 from <https://www.algebra.com/algebra/homework/Quadratic-relations-and-conic-sections/Optical-property-of-a-hyperbola.lesson>
- [4] Algebra.com.2016. *Lesson Optical property of an ellipse*. Retrieved 25 November 2016 from <https://www.algebra.com/algebra/homework/Quadratic-relations-and-conic-sections/Optical-property-of-an-ellipse.lesson>
- [5] D. Hilbert and S. Cohn-Vossen, *Geometry and the Imagination*, New York, USA: Chelsea Publishing Company, 1952.
- [6] Apollonius of Perga, *Conics*, New Mexico, USA: Green Lion Press, 1997.

