DOI: 10.14456/mj-math.201x.x

วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh 63(694) Jan–Apr, 2018
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
http://MathThai.Org MathThaiOrg@gmail.com

สามเหลี่ยมแนบในใหญ่ที่สุดและสามเหลี่ยมปิดทับเล็กที่สุด เมื่อกำหนดวงกลม

Largest inscribed and Smallest Cover triangles for Fix circle

อรรณพ แก้วขาว และ กาญจนา เจริญสิทธิชัย
Annop Kaewkhao [1] and Karnchana Charoensitthichai [2]

[1-2]Department of Mathematics,
Faculty of Science, Burapha University, Chon Buri 20131

Email: [1]tor_idin@buu.ac.th

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้ศึกษาเกี่ยวกับรูปแบบของรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีพื้นที่มากสุดเมื่อแนบในวงกลมและรูปแบบของรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีพื้นที่น้อยสุดที่ปิดทับวงกลมตามกำหนด

คำสำคัญ: สามเหลี่ยมแนบในวงกลม สามเหลี่ยมซึ่งด้านทั้งสามสัมผัสวงกลม

ABSTRACT

This research study about finding the largest inscribed triangle and the smallest cover triangle of a circle.

Keywords: Inscribed triangle, Cover triangle

1. บทนำ

เนื่องจากในสถานการณ์ปัจจุบันทรัพยากรถูกจำกัด ปัญหาการหาค่ามากสุดหรือน้อยสุดจึงมีบทบาทสำคัญ ในการควบคุมการใช้ทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัดให้คุ้มค่ามากที่สุด ดังนั้นผู้วิจัยจึงสนใจที่จะค้นหารูปแบบของรูปสามเหลี่ยมซึ่งจะให้พื้นที่มากสุดเมื่อแนบอยู่ในวงกลมตามกำหนดและค้นหารูปแบบของรูปสามเหลี่ยมซึ่งจะให้พื้นที่น้อยสุดเมื่อด้านทั้งสามสัมผัสวงกลมตามกำหนด (รูปสามเหลี่ยมซึ่งมีวงกลมตามกำหนดแนบใน) ทั้งสองปัญหานี้ เป็นปัญหาประเภทเดียวกับปัญหาเรขาคณิตของฟองสบู่ (Soap bubble problem) และปัญหาการปิดทับเส้นโค้งของโมเซอร์ (Moser's worm problem) ซึ่งเป็นปัญหาประเภทที่คาดการณ์คำตอบได้ง่าย แต่ยากที่จะยืนยันคำตอบ งานวิจัยนี้ต้องการยืนยันคำตอบของปัญหาทั้งสอง การประยุกต์อนุพันธ์จากฟังก์ชันของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมสามารถนำมาใช้ในหาค่าพื้นที่มากสุดและน้อยสุดได้ แต่การหาฟังก์ชันของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมใดๆ ในกรณีที่ไม่มีสองด้านใดๆ ยาวเท่ากันเลยนั้นทำได้ยาก จึงจำเป็นต้องแบ่งขั้นตอนในการหาคำตอบออกเป็น 2 ขั้นตอน โดยจะนำความรู้ทางเรขาคณิตแบบฉบับ (Classical geometry) และการประยุกต์อนุพันธ์ของฟังก์ชันมาใช้ในการพิสูจน์เป็นหลัก ในงานวิจัยนี้จะกำหนดให้ $[ABC]$ แทนพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC

2. วิธีการ

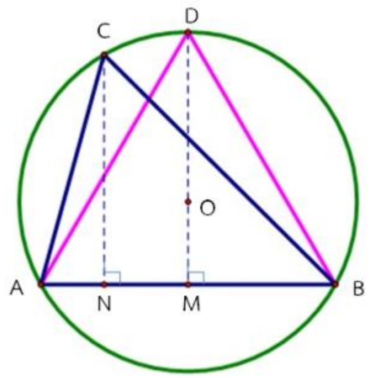
การหารูปแบบของรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีพื้นที่มากสุดเมื่อแนบในวงกลมตามกำหนดสามารถอธิบายได้ด้วยการแสดงให้เห็นว่า เมื่อกำหนดรูปสามเหลี่ยมใดๆ ซึ่งแนบในวงกลมตามที่กำหนดมา จะมีรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วซึ่งมีฐานเป็นด้านของสามเหลี่ยมนั้นและมีพื้นที่มากกว่ารูปสามเหลี่ยมที่กำหนดเสมอ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ ซึ่งแนบในวงกลมตามกำหนด จะได้ว่ามีรูปสามเหลี่ยม ABD แนบในวงกลมนั้น ซึ่ง $DA = DB$ และ $[ABC] \le [ABD]$

พิสูจน์ ให้ O เป็นจุดศูนย์กลางวงกลม และ M เป็นจุดกึ่งกลางบนด้าน AB
ลาก OM พบวงกลมที่จุด D (บนด้านเดียวกันกับ C) จะได้ $DM \perp AB$
ให้ N เป็นจุดบน AB ที่ทำให้ $CN \perp AB$ ดังรูปที่ 1 จะได้ CN ขนานกับ DM
เนื่องจาก O อยู่บน DM จะได้ $CN \le DM$
นั่นคือ

$$[ABC] = \frac{1}{2} AB \cdot CN \le \frac{1}{2} AB \cdot DM = [ABD]$$

โดยทฤษฎีบท 1 พบว่า ในบรรดารูปสามเหลี่ยมแนบในวงกลม รูปสามเหลี่ยมซึ่งมี



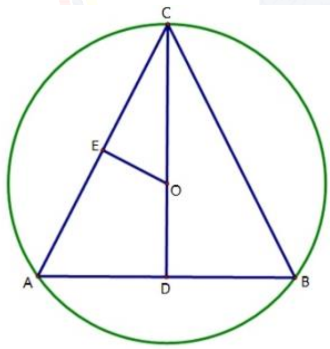
รูปที่ 1 ประกอบการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 1

DOI: 10.14456/mj-math.201x.x

พื้นที่มากสุดจะต้องเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ซึ่งในขั้นตอนต่อไปจะแสดงให้เห็นว่า รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วซึ่งมีพื้นที่มากสุดนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

ทฤษฎีบท 2 ในบรรดารูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วซึ่งแนบในวงกลมรัศมี r หน่วย จะได้ว่า รูปสามเหลี่ยมด้านเท่ามีพื้นที่มากสุดซึ่งเท่ากับ $\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$ ตารางหน่วย

พิสูจน์ ให้รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี $CA=CB$ แนบในวงกลมจุดศูนย์กลาง O รัศมี r หน่วย และ D เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AB จะได้ว่า O อยู่บน CD และ $CD \perp AB$ และ $CO=r$ ให้จุด E อยู่บน AC ที่ทำให้ $OE \perp AC$ ดังรูปที่ 2 จะได้ว่า $CE=\frac{CA}{2}$



รูปที่ 2 ประกอบการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 2

ให้ $CD=x$ โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัสจะได้ว่า $AD=\sqrt{2rx-x^2}$

กำหนดให้ $f(x)$ แทน $[ABC]$ นั่นคือ $f(x)=x\sqrt{2rx-x^2}$

หาค่า x ที่ทำให้ $f'(x)=0$ จะได้ว่า f มีค่าสูงสุดที่ $x=\frac{3r}{2}$ ดังนั้น ΔABC จะมีพื้นที่มากสุด เมื่อ $CD=\frac{3r}{2}$

เมื่อแทนค่า $CD=\frac{3r}{2}$ โดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสจะได้ $AB=BC=AC=r\sqrt{3}$ นั่นคือ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

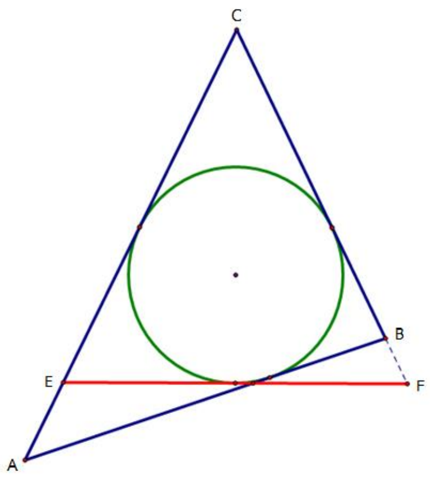
ในทำนองเดียวกัน การหารูปแบบของรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีพื้นที่น้อยสุดที่ปิดทับวงกลม จะพิจารณาการหารูปแบบของรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีพื้นที่น้อยสุดเมื่อด้านทั้งสามสัมผัสวงกลมรัศมี r หน่วย โดยการแสดงให้เห็นก่อนว่า เมื่อกำหนดรูปสามเหลี่ยมใดๆ ซึ่งด้านทั้งสามสัมผัสวงกลมตามกำหนด จะมีรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ซึ่งมีจุดยอดเป็นจุดใดๆของรูปสามเหลี่ยมนั้น และมีพื้นที่น้อยกว่าหรือเท่ากับรูปสามเหลี่ยมตามที่กำหนดเสมอ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3 ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ ซึ่งมีด้าน CA, CB และ AB สัมผัสวงกลมตามกำหนด จะได้ว่า มีรูปสามเหลี่ยม CEF ซึ่งมีด้าน CE, CF และ EF สัมผัสวงกลม ซึ่ง $CE=CF$ และ $[ABC]\geq[CEF]$

พิสูจน์ กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางวงกลม และ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ ซึ่งมีด้าน CA, CB และ AB สัมผัสวงกลมที่จุด X, Y และ Z ตามลำดับ

ให้ E และ F เป็นจุดบน CA และ CB ตามลำดับ ที่ทำให้ $CE=CF$ และ EF สัมผัสวงกลม

นั่นคือ ΔCEF เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ดังรูปที่ 3



รูปที่ 3 ประกอบการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 3

ให้ EF สัมผัสวงกลมที่จุด I จะได้ว่า I เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน EF

ถ้า E เป็นจุดเดียวกันกับ A จะได้ I เป็นจุดเดียวกับ Z ซึ่งส่งผลให้ F เป็นจุดเดียวกับ B นั่นคือ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และ $[ABC]=[CEF]$

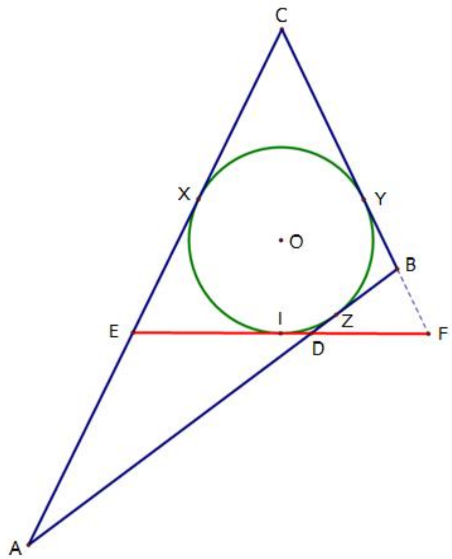
ถ้า E ไม่เป็นจุดเดียวกันกับ A จะได้ I ไม่เป็นจุดเดียวกับ Z

ให้ D เป็นจุดตัดของ AB และ EF จะได้ว่า $ID = DZ$

โดยไม่เสียนัยทั่วไป ให้ D อยู่บนด้าน IF จะได้ $CA > CE$ และ $CB < CF$ นั่นคือ $CA > CB$

พิจารณา ΔCEF จะได้ $C\hat{E}F < 90^o$ นั่นคือ $D\hat{E}A > 90^o$

เนื่องจากรูปสามเหลี่ยมใด ๆมีมุมแหลมอย่างน้อย 2 มุม จะได้ว่า $E\hat{A}D < 90^o$ นั่นคือ $D\hat{E}A > E\hat{A}D$ ดังนั้น $DA > ED$ ดังรูปที่ 4



รูปที่ 4 ประกอบการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 3

พิจารณา
$$\begin{aligned} ED &= EI + ID \\ &= EI + DZ \\ &= EI + (DB - ZB) \\ &= IF + (DB - YB) \\ &= YF + (DB - YB) \\ &= (YF - YB) + DB \\ &= BF + DB \\ &> DF \end{aligned}$$

DOI: 10.14456/mj-math.201x.x

พิจารณา $DB = DZ + ZB$

$$
\begin{aligned}
&= DI + BY \\
&= DI + (FY - FB) \\
&= DI + (IF - FB) \\
&= DI + (EI - FB) \\
&= (DI + EI) - FB \\
&= ED - FB \\
&< ED \\
&< DA
\end{aligned}
$$

นั่นคือ $ED > DF$

และ $DB < AD$

เนื่องจาก

$$[AED] = \frac{1}{2} \cdot ED \cdot AD \cdot \sin(E\hat{D}A),$$

$$[BFD] = \frac{1}{2} \cdot DF \cdot DB \cdot \sin(B\hat{D}F)$$

และ

$$\frac{1}{2} \cdot ED \cdot AD \cdot \sin(E\hat{D}A) > \frac{1}{2} \cdot DF \cdot DB \cdot \sin(B\hat{D}F)$$

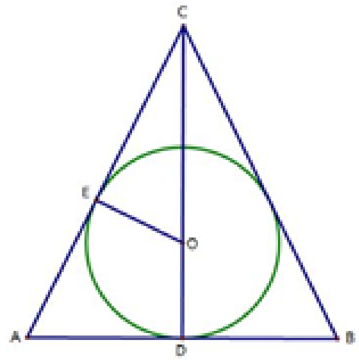
นั่นคือ $[AED] > [BFD]$

ดังนั้น $[ABC] > [CEF]$

โดยทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า ในบรรดารูปสามเหลี่ยมซึ่งด้านทั้งสามสัมผัสวงกลมตามกำหนด รูปสามเหลี่ยมซึ่งมีพื้นที่น้อยสุดจะต้องเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ซึ่งในขั้นต่อไปเราจะแสดงให้เห็นว่า รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

ทฤษฎีบท 4 ในบรรดารูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วซึ่งด้านทั้งสามสัมผัสวงกลมรัศมี r หน่วย จะได้ว่า รูปสามเหลี่ยมด้านเท่ามีพื้นที่น้อยสุดซึ่งเท่ากับ $3\sqrt{3}r^2$ ตารางหน่วย

พิสูจน์ ให้รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี $CA = CB$ สัมผัสวงกลม



รูปที่ 5 ประกอบการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 4

จุดศูนย์กลาง O รัศมี r หน่วย D เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AB จะได้ว่า O อยู่บน CD และ $CD \perp AB$ ให้จุด E อยู่บน AC ที่ทำให้ $OE \perp AC$ ดังรูปที่ 5 จะได้ว่า $OE = r$

ให้ $CD = x$ โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่า $AD = \dfrac{r\sqrt{x}}{\sqrt{x-2r}}$

กำหนดให้ $f(x)$ แทน $[ABC]$ นั่นคือ

$$f(x) = \frac{rx^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x-2r}}$$

หาค่า x ที่ทำให้ $f'(x) = 0$ จะได้ว่า f มีค่าต่ำสุดที่ $x = 3r$ ดังนั้น ΔABC จะมีพื้นที่น้อยสุด เมื่อ $CD = 3r$ เมื่อแทนค่าโดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสจะได้ $AB = BC = AC = 2r\sqrt{3}$ นั่นคือ ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

3. ผลและอภิปรายผล

กำหนดวงกลมที่มีรัศมี r หน่วย การหารูปแบบของรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีพื้นที่มากสุดเมื่อแนบในวงกลม สามารถอธิบายได้โดยอาศัยทฤษฎีบท 1 และ 2 ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ ซึ่งแนบในวงกลมตามกำหนด จะได้ว่ามีรูปสามเหลี่ยม ABD แนบในวงกลมนั้น ซึ่ง

$$DA = DB \text{ และ } [ABC] \le [ABD]$$

ทฤษฎีบท 2 ในบรรดารูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วซึ่งแนบในวงกลมตามกำหนด จะได้ว่า รูปสามเหลี่ยมด้านเท่ามีพื้นที่มากสุด โดยรูปสามเหลี่ยมด้านเท่านี้มีพื้นที่มากสุดเท่ากับ $\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$ ตารางหน่วย

ในทำนองเดียวกันการหารูปแบบของรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีพื้นที่น้อยสุดเมื่อด้านทั้งสามสัมผัสวงกลม สามารถอธิบายได้โดยอาศัยทฤษฎีบท 3 และ 4 ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3 ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ ซึ่งมีด้าน CA, CB และ AB สัมผัสวงกลมตามกำหนด จะได้ว่า มีรูปสามเหลี่ยม CEF ซึ่งมีด้าน CE, CF และ EF สัมผัสวงกลม ซึ่ง

$$CE = CF \text{ และ } [ABC] \ge [CEF]$$

ทฤษฎีบท 4 ในบรรดารูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วซึ่งด้านทั้งสามสัมผัสวงกลมตามกำหนด จะได้ว่า รูปสามเหลี่ยมด้านเท่ามีพื้นที่น้อยสุด โดยรูปสามเหลี่ยมด้านเท่านี้มีพื้นที่น้อยสุดเท่ากับ $3\sqrt{3}r^2$ ตารางหน่วย

ประโยชน์ที่ได้จากการศึกษาปัญหาการหารูปแบบของรูปสามเหลี่ยม จะเห็นได้ว่าข้อดีของปัญหาการหารูปสามเหลี่ยมซึ่งมีพื้นที่น้อยสุดเมื่อด้านทั้งสามสัมผัสวงกลมตามกำหนดจะสอดคล้องกับปัญหาการปิดทับของโมเซอร์ ในลักษณะของการปิดทับวงกลมด้วยรูปสามเหลี่ยม นั่นคือ หากต้องการแผ่นปิดทับที่เป็นรูปสามเหลี่ยม เพื่อปิดทับพื้นผิววงกลม จะต้องสร้างแผ่นปิดทับเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า จึงจะประหยัดทรัพยากรในการสร้างแผ่นปิดทับได้ดีที่สุด

เอกสารอ้างอิง

[1] R.Norwood, G. Poole and M.Laidacker, “The Worm Problem of Leo Moser” , *Discrete Comput. Geom,* Vol.7, pp.153-162, 1992.