

ภาคผนวก ค

การหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์กรณีที่เกิดการแพร่

การหาค่า  $\tau_{res,nondelta}$  ของสำหรับกรณีที่อัตราการไหลขาเข้าไม่ใช่ฟังก์ชันเดลตา

สำหรับกรณีที่อัตราการไหลขาเข้าเป็นฟังก์ชันเดลตา การหาค่า  $\tau_{res,delta}$  สามารถทำได้โดยการหาผลเฉลยของอัตราการไหลขาออกของก๊าซในโดเมนของลาปลาซ ( $F_{A,delta}^*(s)$ ) ซึ่งในกรณีที่มีการะบวนการแพร่อย่างเดียว  $F_{A,delta}^*(s)$  มีค่าดังนี้ (Gleaves *et al.*, 1997)

$$F_{A,delta}^*(s) = \frac{1}{\cosh \sqrt{s}} \quad (\text{ก-1})$$

โมเมนต์อันดับศูนย์ ( $M_0^*$ ) และโมเมนต์อันดับหนึ่ง ( $M_1^*$ ) ของอัตราการไหลขาออกสามารถหาได้โดยใช้ (Anderssen *et al.*, 1971)

$$M_0^* = F_{A,delta}^*(s) \Big|_{s=0} \quad (\text{ก-2})$$

$$M_1^* = - \frac{dF_{A,delta}^*(s)}{ds} \Big|_{s=0} \quad (\text{ก-3})$$

หลังจากนั้น  $\tau_{res,delta}$  หาได้โดยใช้สมการที่ (ก-4)

$$\tau_{res} = \frac{M_1^*}{M_0^*} = \frac{\int_0^\infty F_A^* \tau \, d\tau}{\int_0^\infty F_A^* \, d\tau} \quad (\text{ก-4})$$

และผลลัพธ์แสดงดังสมการที่ (ก-5)

$$\tau_{res,delta} = 0.5 \quad (\text{ก-5})$$

สำหรับกรณีที่อัตราการไหลขาเข้าไม่ใช่ฟังก์ชันเดลตา  $\tau_{res,nondelta}$  สามารถหาได้จากระอัตราการไหลขาออกของก๊าซในโดเมนของลาปลาซ ( $F_{A,nondelta}^*(s)$ ) ซึ่งสามารถคำนวณหาได้โดยใช้ความสัมพันธ์

$$F_{A,nondelta}^* = X(s).F_{A,delta}^* \quad (ค-6)$$

โดยที่  $X(s)$  คือ ฟังก์ชันขาเข้าที่ไม่ใช่เดลตาในโดเมนของลาปลาซ ซึ่งหาได้จาก

$$X(s) = \int_0^{\tau_{open}} X(\tau) \cdot e^{-s\tau} d\tau \quad (ค-7)$$

ซึ่ง  $X(s)$  ของฟังก์ชันขาเข้าที่ไม่ใช่เดลตาแบบฟังก์ชันสามเหลี่ยมแสดงดังสมการที่ (ค-8)

$$\text{ฟังก์ชันแบบสามเหลี่ยม; } X(s) = 1 - \frac{\tau_{open} \cdot s}{3} \quad (ค-8)$$

ต่อไปจะแสดงการคำนวณหา  $\tau_{res,nondelta}$  ของฟังก์ชันสามเหลี่ยม

แทนสมการที่ (ค-1) และสมการที่ (ค-8) ลงในสมการที่ (ค-6) ได้

$$F_{A,nondelta}^* = \left(1 - \frac{\tau_{open} \cdot s}{3}\right) \cdot \frac{1}{\cosh \sqrt{s}} \quad (ค-9)$$

สามารถหาโมเมนต์อันดับศูนย์ ( $M_0^*$ ) ได้โดยใช้สมการที่ (ค-2)

$$M_0^* = 1 \quad (ค-10)$$

สำหรับการหาโมเมนต์อันดับศูนย์ ( $M_1^*$ ) นั้นทำโดยใช้นิยามในสมการที่ (ค-6) และสมการที่ (ค-3)

$$\begin{aligned} \left. \frac{-dF_{A,nondelta}^*}{ds} \right|_{s=0} &= \left. \frac{-d X(s) \cdot F_{A,delta}^*(s)}{ds} \right|_{s=0} \\ &= - \left[ X(s) \cdot \frac{dF_{A,delta}^*}{ds} + F_{A,delta}^* \cdot \frac{dX(s)}{ds} \right] \Big|_{s=0} \end{aligned} \quad (ค-11)$$

จากความสัมพันธ์ในสมการที่ (ค-11) แทนค่า  $F_{A,delta}^*$  จากสมการที่ (ค-1) และอนุพันธ์อันดับหนึ่งของ  $F_{A,delta}^*$  และ  $X(s)$  จากสมการที่ (ค-8) ได้

$$= \left[ \left( 1 - \frac{\tau_{open} \cdot s}{3} \right) \cdot \frac{\sec h \sqrt{s} \cdot \tanh \sqrt{s}}{2\sqrt{s}} + \frac{\tau_{open}}{3 \cdot \cosh \sqrt{s}} \right] \Big|_{s=0}$$

$$= \left[ 0.5 + \frac{\tau_{open}}{3} \right]$$

ดังนั้นจึงสามารถหาโมเมนต์อันดับศูนย์ ( $M_1^*$ ) ได้

$$M_1^* = 0.5 + \frac{\tau_{open}}{3} \quad (\text{ค-12})$$

จากสมการที่ (ค-4), (ค-10) และ (ค-12) ทำให้หา  $\tau_{res,nondelta}$  ได้

$$\tau_{res,nondelta} = 0.5 + \frac{\tau_{open}}{3} \quad (\text{ค-13})$$

เนื่องจาก  $X(s)$  ของฟังก์ชันขาเข้าดังที่แสดงในสมการที่ (ค-8) เป็นฟังก์ชันของช่วงเวลาเปิดของวาล์วพัลส์  $\tau_{res,nondelta}$  ซึ่งแสดงในสมการที่ (ค-13) จึงเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับช่วงเวลาเปิดของวาล์วพัลส์

ดังนั้นผลเฉลยของ  $\tau_{res,nondelta}$  ในกรณีที่แทนฟังก์ชันขาเข้าด้วยฟังก์ชันขาเข้าที่ไม่ใช่เดลตาแบบฟังก์ชันสามเหลี่ยม แสดงดังสมการที่ (ค-14)

$$\tau_{res,nondelta} = 0.5 + \frac{\tau_{open}}{3} \quad (\text{ค-14})$$

การหาค่า  $\Delta D_{eA}$  สำหรับกรณีที่อัตราการไหลขาเข้าไม่ใช่ฟังก์ชันเดลตาแบ่งออกเป็น 2 วิธี

คือ

## การวิเคราะห์โมเมนต์และการเทียบโค้ง

### การวิเคราะห์โมเมนต์

ในที่นี้จะสมมติว่าโค้งอัตราการไหลที่ทางออกที่ได้จากการคำนวณเมื่ออัตราการไหลขาเข้าไม่เป็นฟังก์ชันเดลตา ( $t_{res,nondelta}$ ) เป็นโค้งอัตราการไหลขาออกที่ได้จากการทดลอง และในงานวิจัยนี้การหา  $D_{eA,est}$  ใช้วิธีหาจาก  $\tau_{res}$  โดยที่  $\tau_{res} = \frac{t_{res} D_{eA}}{\varepsilon_b L^2}$

สำหรับกรณีที่อัตราการไหลขาเข้าเป็นฟังก์ชันเดลตา

$$\tau_{res,delta} = \frac{t_{res,nondelta} \cdot D_{eA,est}}{\varepsilon_b L^2} \quad (ค-15)$$

และสำหรับกรณีที่อัตราการไหลขาเข้าไม่เป็นฟังก์ชันเดลตา

$$\tau_{res,nondelta} = \frac{t_{res,nondelta} \cdot D_{eA,real}}{\varepsilon_b L^2} \quad (ค-16)$$

สมการที่ (ค-17) คือ อัตราส่วนของสมการที่ (ค-15) และ (ค-16)

$$\frac{\tau_{res,delta}}{\tau_{res,nondelta}} = \frac{D_{eA,est}}{D_{eA,real}} \quad (ค-17)$$

แทนสมการที่ (ค-5) ลงในสมการ (ค-17) ได้

$$\frac{0.5}{\tau_{res,nondelta}} = \frac{D_{eA,est}}{D_{eA,real}} \quad (ค-18)$$

จากนิยามที่ว่า

$$\Delta D_{eA} = \frac{D_{eA,est} - D_{eA,real}}{D_{eA,real}}$$

$$\Delta D_{eA} = \frac{D_{eA,est}}{D_{eA,real}} - 1 \quad (ค-19)$$

และแทนสมการที่ (ค-18) ลงในสมการที่ (ค-19) ได้

$$\Delta D_{eA} = \frac{0.5}{\tau_{res,nondelta}} - 1$$

$$\Delta D_{eA} = \frac{0.5 - (\tau_{res,nondelta})}{\tau_{res,nondelta}} \quad (\text{ค-20})$$

แทนค่าผลเฉลยของ  $\tau_{res,nondelta}$  ในกรณีที่แทนฟังก์ชันขาเข้าด้วยฟังก์ชันขาเข้าที่ไม่ใช่เคลตาแบบฟังก์ชันสามเหลี่ยม ดังที่แสดงในสมการที่ (ค-14) ลงในสมการที่ (ค-20)

ผลเฉลยของ  $\Delta D_{eA}$  สำหรับฟังก์ชันขาเข้าแบบฟังก์ชันสามเหลี่ยมจึงเป็นดังนี้

$$\Delta D_{eA} = -\frac{1}{3} \left( \frac{t_{open}}{\tau_{res,nondelta}} \right) \quad (\text{ค-21})$$

สมการที่ (ค-21) แสดงให้เห็นอย่างชัดเจนว่าค่า  $\Delta D_{eA}$  ขึ้นกับอัตราส่วนของช่วงเวลาเปิดของวาล์วพัลส์และเวลาเฉลี่ยที่ก๊าซอยู่ในปฏิกรณ์

### การเทียบเคียง

#### **แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับกระบวนการแพร่**

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการแพร่แบบนุกเซนในเบคของปฏิกรณ์แทป สามารถแสดงโดยสมการอนุพันธ์มวลในวัฏภาคในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation, PDE) ดังนี้

$$\varepsilon_b \frac{\partial C_A}{\partial t} = D_{eA} \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} \quad (\text{ค-22})$$

เมื่อ  $C_A$  = ความเข้มข้นของก๊าซ A (โมล/ลูกบาศก์เซนติเมตร)  
 $D_{eA}$  = สัมประสิทธิ์การแพร่แบบนุกเซนของก๊าซ A (ตารางเซนติเมตร/วินาที)

$$\begin{aligned}
 t &= \text{เวลา (วินาที)} \\
 z &= \text{พิกัดตามแนวความยาวของปฏิกรณ์ (เซนติเมตร)} \\
 \varepsilon_b &= \text{เศษส่วนช่องว่าง (fractional voidage) ของเบด}
 \end{aligned}$$

การหาผลเฉลยของแบบจำลองนี้ทำได้โดยวิธีแยกตัวแปร (separation of variables) ซึ่งผลเฉลยที่ได้แสดงโดยสมการที่ (ก-23)

$$F^*_{\text{A}} = \pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \exp\left(-(n+0.5)^2 \pi^2 \tau\right) \quad (\text{ก-23})$$

$$\text{หรือ} \quad \frac{F_{\text{A}}}{N_{\text{pA}}} = \frac{D_{\text{eA}} \pi}{\varepsilon_b L^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (-1)^n (2n+1) \exp\left[-(n+0.5)^2 \pi^2 \frac{t D_{\text{eA}}}{\varepsilon_b L^2}\right] \right\} \quad (\text{ก-24})$$

การศึกษาผลกระทบของอัตราการไหลขาเข้าที่ไม่ใช่ฟังก์ชันเดลตาแบบฟังก์ชันสามเหลี่ยมสามารถทำได้โดยใช้แบบจำลองไร้มิติ

โดยมีหลักการดังนี้ ระบบจริงที่ทำการทดลองเป็นระบบที่มีอัตราการไหลขาเข้าฟังก์ชันที่ไม่ใช่เดลตาแบบฟังก์ชันสามเหลี่ยม เมื่อนำข้อมูลดิบที่ได้จากการทดลองมาแปลผลแปลผลเพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์การแพร่โดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบที่มีอัตราการไหลขาเข้าเป็นฟังก์ชันเดลตา เพราะเชื่อว่าระบบที่ทำการทดลองเป็นระบบที่มีอัตราการไหลขาเข้าเป็นฟังก์ชันเดลตา ดังนั้นจึงส่งผลกระทบทำให้ค่าสัมประสิทธิ์การแพร่ที่คำนวณได้เกิดความเบี่ยงเบน ในที่นี้กำหนดให้  $d_1$  คือ แฟกเตอร์ความเบี่ยงเบน (deviation factor) ซึ่งนิยามโดยสมการที่ (ก-25)

$$D_{\text{eA}, \text{est}} = d_1 D_{\text{eA}, \text{real}} \quad (\text{ก-25})$$

ดังนั้นจากสมการที่ (ก-25) จะได้

$$\Delta_{D_{\text{eA}}} = d_1 - 1 \quad (\text{ก-26})$$

และสมการที่ใช้ในการหาค่าสัมประสิทธิ์การแพร่ของก๊าซโดยวิธีเทียบโค้งแสดงดังสมการที่ (ก-27)

$$\frac{F_A}{N_{pA}} = \frac{D_{est}\pi}{\varepsilon_b L^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (-1)^n (2n+1) \exp\left(- (n+0.5)^2 \pi^2 \frac{tD_{est}}{\varepsilon_b L^2}\right) \right\} \quad (ค-27)$$

เนื่องจากงานวิจัยนี้ได้ทำการจำลองสถานะที่อัตราการไหลขาเข้าฟังก์ชันที่ไม่ใช่เดลตาแบบฟังก์ชันสามเหลี่ยมโดยใช้แบบจำลองไร้มิติ ดังนั้นสมการที่ใช้ในการเทียบเคียงในการหาค่าสัมประสิทธิ์การแพร่ของก๊าซสามารถเขียนในรูปตัวแปรไร้มิติได้ดังสมการที่ (ค-28) (โดยอาศัยสมการที่ (ค-25) และสมการที่ (ค-26))

$$F^*_{\text{A}} = d_1 \pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \exp\left(- (n+0.5)^2 \pi^2 d_1 \tau\right) \quad (ค-28)$$