บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์การถดถอยพหุนาม เมื่อมีความคลาดเคลื่อนในตัวแปรอิสระ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด วิธีกำลังสองน้อยสุดถ่วงน้ำหนัก และวิธีกำลังสองน้อยสุดทางโครงสร้าง โดยมีทฤษฎีและเอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังนี้

1. การวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นพหุนาม
2. การประมาณค่าพารามิเตอร์วิธีกำลังสองน้อยที่สุด
3. การประมาณค่าพารามิเตอร์วิธีกำลังสองน้อยสุดถ่วงน้ำหนัก
4. การประมาณค่าพารามิเตอร์วิธีกำลังสองน้อยสุดทางโครงสร้าง
5. ผลวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นพหุนาม

รูปแบบการถดถอยเชิงเส้นพหุนาม (Polynomial regression model) เป็นรูปแบบหนึ่งของการถดถอยที่ใช้กับกรณีที่มีความสัมพันธ์แบบเส้นโค้ง ซึ่งเป็นรูปแบบของการถดถอยเชิงเส้นในเทอมของ β ที่สามารถเขียนความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างตัวแปรตาม y และตัวแปรอิสระ x ได้ดังนี้

$$y_i \;=\; \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \ldots + \beta_k x_i^k + \varepsilon_i \qquad ; \; i \;=\; 1,2,\ldots,n$$

หรือสามารถเขียนรูปแบบการถดถอยแบบเมทริกซ์ (Matrix form) ที่มีตัวแปรอิสระ k ตัวแปร ดังนี้

$$\underset{\sim}{Y} \;=\; \underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$$

เมื่อกำหนดให้

$$\underset{\sim}{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & \cdots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

โดยที่ $\underset{\sim}{Y}$ แทน เวกเตอร์ของตัวแปรตาม ขนาด $n \times 1$

$\underset{\sim}{X}$ แทน เมทริกซ์ของตัวแปรอิสระ ขนาด $n \times (k+1)$

$\underset{\sim}{\beta}$ แทน เวกเตอร์ของค่าพารามิเตอร์ในสมการ ขนาด $(k+1) \times 1$

$\underset{\sim}{\varepsilon}$ แทน เวกเตอร์ของความคลาดเคลื่อน ขนาด $n \times 1$

k แทน จำนวนตัวแปรอิสระที่ใช้ในการศึกษา และ

n แทน ขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษา

ซึ่งมีข้อตกลงเบื้องต้นเกี่ยวกับความคลาดเคลื่อน โดยความคลาดเคลื่อนเป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติ มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 หรือ $E(\varepsilon_i) = 0$ และมีความแปรปรวนเท่ากัน หรือ $V(\varepsilon_i) = \sigma^2$ และความคลาดเคลื่อนเป็นอิสระกัน หรือ $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ เมื่อ $i \neq j$ โดยที่ $i, j = 1, 2, ..., n$ ซึ่งสามารถเขียนโดยรวมได้ดังนี้ $\varepsilon_i \sim NID(0, \sigma^2)$, $i = 1, 2, .., n$ โดยทั่วไปมักพบว่าตัวแปรอิสระจะมีค่าคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นซึ่งเป็นเหตุการณ์ที่ขัดแย้งกับข้อตกลงสมการถดถอย และส่งผลให้ตัวประมาณที่ได้จากวิธีกำลังสองน้อยที่สุดมีประสิทธิภาพต่ำจึงต้องประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีอื่นที่มีประสิทธิภาพมากกว่า เช่น วิธีกำลังสองน้อยสุดถ่วงน้ำหนัก และวิธีกำลังสองน้อยสุดทางโครงสร้าง

การวิจัยนี้จึงสนใจศึกษาการถดถอยพหุนามเมื่อมีความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นในตัวแปรอิสระด้วยวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์วิธีกำลังสองน้อยที่สุด วิธีกำลังสองน้อยสุดถ่วงน้ำหนัก และวิธีกำลังสองน้อยสุดทางโครงสร้าง โดยตัวแบบที่ศึกษาจะประกอบด้วยตัวแปรอิสระที่มีความคลาดเคลื่อน ดังนี้

$$x_i^* = x_i + u_i$$

โดยที่ x_i^* แทน ตัวแปรแฝงในตัวแปรอิสระ (ตัวแปรที่มีความคลาดเคลื่อน)

u_i แทน ความคลาดเคลื่อนในตัวแปรอิสระ

ดังนั้นตัวแบบที่ศึกษาสามารถเขียนอยู่ในรูปของตัวแปรแฝง x_i^* ดังนี้

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i^* + \beta_2 x_i^{*2} + \ldots + \beta_k x_i^{*k} + \varepsilon_i \quad ; \quad i = 1,2,\ldots,n$$

จากตัวแบบดังกล่าวสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ $\underset{\sim}{Y}$ และ $\underset{\sim}{X}$ ซึ่งใช้ในการหาค่าประมาณพารามิเตอร์ได้ดังนี้

$$\underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$$

โดยที่ $\underset{\sim}{X}$ ประกอบด้วย $\underset{\sim}{x}_i' = \left(1, x_i, \cdots, x_i^k\right)$ เมื่อ $x_i = x_i^* - u_i$ หรือ $x_i^* = x_i + u_i$ และสามารถเขียนตัวแบบพหุนามอันดับ 2 พหุนามอันดับ 3 และพหุนามอันดับ 4 ที่อยู่ในรูปของตัวแปรแฝงได้ดังนี้

1. ตัวแบบพหุนามอันดับ 2

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i^* + \beta_2 x_i^{*2} + \varepsilon_i$$

หรือ $$y_i = \beta_0 + \beta_1\left(x_i + u_i\right) + \beta_2\left(x_i + u_i\right)^2 + \varepsilon_i \; ; \quad i = 1,\ldots,n$$

ดังนั้น $$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_1 u_i + \beta_2 x_i^2 + 2\beta_2 x_i u_i + \beta_2 u_i^2 + \varepsilon_i$$

จากการจัดรูปแบบของสมการใหม่ให้อยู่ในรูป $\underset{\sim}{Y}$ และ $\underset{\sim}{X}$ จะได้ตัวแบบใหม่ ดังนี้

$$y_i = \beta_{0_n} + \beta_{1_n} x_i + \beta_{2_n} x_i^2 + e_i$$

เมื่อ
$$\beta_{0_n} = \beta_0 + \beta_1 u_i + \beta_2 u_i^2$$
$$\beta_{1_n} = \beta_1 + 2\beta_2 u_i$$
$$\beta_{2_n} = \beta_2$$
$$e_i = \varepsilon_i$$

2. ตัวแบบพหุนามอันดับ 3

$$y_i \quad = \quad \beta_0 + \beta_1 x_i^* + \beta_2 x_i^{*2} + \beta_3 x_i^{*3} + \varepsilon_i$$

หรือ $$y_i \quad = \quad \beta_0 + \beta_1 (x_i + u_i) + \beta_2 (x_i + u_i)^2 + \beta_3 (x_i + u_i)^3 + \varepsilon_i \; ; \quad i \;=\; 1,\ldots,n$$

ดังนั้น $$y_i \quad = \quad \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_1 u_i + \beta_2 x_i^2 + 2\beta_2 x_i u_i + \beta_2 u_i^2 + \beta_3 x_i^3 + 3\beta_3 x_i^2 u_i$$
$$+3\beta_3 x_i u_i^2 + \beta_3 u_i^3 + \varepsilon_i$$

จากการจัดรูปแบบของสมการใหม่ให้อยู่ในรูป $\underset{\sim}{Y}$ และ $\underset{\sim}{X}$ จะได้ตัวแบบใหม่ ดังนี้

$$y_i \quad = \quad \beta_{0_n} + \beta_{1_n} x_i + \beta_{2_n} x_i^2 + \beta_{3_n} x_i^3 + e_i$$

เมื่อ $$\beta_{0_n} \quad = \quad \beta_0 + \beta_1 u_i + \beta_2 u_i^2 + \beta_3 u_i^3$$
$$\beta_{1_n} \quad = \quad \beta_1 + 2\beta_2 u_i + 3\beta_3 u_i^2$$
$$\beta_{2_n} \quad = \quad \beta_2 + 3\beta_3 u_i$$
$$\beta_{3_n} \quad = \quad \beta_3$$
$$e_i \quad = \quad \varepsilon_i$$

3. ตัวแบบพหุนามอันดับ 4

$$y_i \quad = \quad \beta_0 + \beta_1 x_i^* + \beta_2 x_i^{*2} + \beta_3 x_i^{*3} + \beta_3 x_i^{*4} + \varepsilon_i$$

หรือ

$$y_i \; = \; \beta_0 + \beta_1 (x_i + u_i) + \beta_2 (x_i + u_i)^2 + \beta_3 (x_i + u_i)^3 + \beta_4 (x_i + u_i)^4 + \varepsilon_i \; ; \quad i \;=\; 1,\ldots,n$$

ดังนั้น $$y_i \quad = \quad \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_1 u_i + \beta_2 x_i^2 + 2\beta_2 x_i u_i + \beta_2 u_i^2 + \beta_3 x_i^3 + 3\beta_3 x_i^2 u_i$$
$$+3\beta_3 x_i u_i^2 + \beta_3 u_i^3 + \beta_4 x_i^4 + 4\beta_4 x_i^3 u_i + 6\beta_4 x_i^2 u_i^2 + 4\beta_4 x_i u_i^3 + \beta_4 u_i^4 + \varepsilon_i$$

จากการจัดรูปแบบของสมการใหม่ให้อยู่ในรูป $\underset{\sim}{Y}$ และ $\underset{\sim}{X}$ จะได้ตัวแบบใหม่ ดังนี้

$$y_i \quad = \quad \beta_{0_n} + \beta_{1_n} x_i + \beta_{2_n} x_i^2 + \beta_{3_n} x_i^3 + \beta_{4_n} x_i^4 + e_i$$

เมื่อ
$$
\begin{aligned}
\beta_{0_n} &= \beta_0 + \beta_1 u_i + \beta_2 u_i^2 + \beta_3 u_i^3 + \beta_4 u_i^4 \\
\beta_{1_n} &= \beta_1 + 2\beta_2 u_i + 3\beta_3 u_i^2 + 4\beta_4 u_i^3 \\
\beta_{2_n} &= \beta_2 + 3\beta_3 u_i + 6\beta_4 u_i^2 \\
\beta_{3_n} &= \beta_3 + 4\beta_4 u_i \\
\beta_{4_n} &= \beta_4 \\
e_i &= \varepsilon_i
\end{aligned}
$$

และวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์การถดถอยพหุนามเมื่อมีความคลาดเคลื่อนในตัวแปรอิสระที่ผู้วิจัยสนใจศึกษามี 3 วิธี ได้แก่ วิธีกำลังสองน้อยที่สุด วิธีกำลังสองน้อยสุดถ่วงน้ำหนัก และวิธีกำลังสองน้อยสุดทางโครงสร้าง โดยมีรายละเอียดดังนี้

การประมาณค่าพารามิเตอร์วิธีกำลังสองน้อยที่สุด

วิธีการประมาณค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยพหุนามนี้มีรากฐานมาจากทฤษฎีการประมาณเชิงเส้นที่คิดขึ้นโดย คาร์ล เฟรดริก เกาส์ (Carl Friendrich Gauss) ในปี ค.ศ. 1777-1855 และอังเดร แอนดรีวิช มาร์คอฟ (Andrei Andreevich Markov) ในปี ค.ศ. 1855-1922 โดยมีหลักในการประมาณค่าสัมประสิทธิ์คือ ทำให้ผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อน (Sum of squares error: SSE) มีค่าน้อยที่สุด โดยรายละเอียดดังนี้

จากสมการ $\underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$ เราสามารถเขียนสมการถดถอยพหุนามดังกล่าวได้ใหม่เป็น $\underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\beta}_n + \underset{\sim}{e}$ และกำหนดให้ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_n = \left(\hat{\beta}_{0_n}, \hat{\beta}_{1_n}, \ldots, \hat{\beta}_{k_n}\right)'$ จะได้สมการการประมาณค่าของ $\underset{\sim}{Y}$ คือ $\hat{\underset{\sim}{Y}} = \underset{\sim}{X}\hat{\underset{\sim}{\beta}}_n$ โดยที่ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_n$ เป็นตัวประมาณกำลังสองของความคลาดเคลื่อนมีค่าน้อยที่สุด ดังนั้น $\underset{\sim}{e}$ เป็นเวกเตอร์ของความคลาดเคลื่อน ซึ่งผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อน คือ

$$
\begin{aligned}
SSE &= (\hat{\underset{\sim}{e}}'\hat{\underset{\sim}{e}}) \\
&= \left(\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{X}\hat{\underset{\sim}{\beta}}_n\right)'\left(\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{X}\hat{\underset{\sim}{\beta}}_n\right) \\
&= \left(\underset{\sim}{Y}' - \hat{\underset{\sim}{\beta}}_n'\underset{\sim}{X}'\right)\left(\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{X}\hat{\underset{\sim}{\beta}}_n\right) \\
&= \underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{X}\hat{\underset{\sim}{\beta}}_n - \hat{\underset{\sim}{\beta}}_n'\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{Y} + \hat{\underset{\sim}{\beta}}_n'\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}\hat{\underset{\sim}{\beta}}_n \\
&= \underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} - 2\hat{\underset{\sim}{\beta}}_n'\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{Y} + \hat{\underset{\sim}{\beta}}_n'\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}\hat{\underset{\sim}{\beta}}_n
\end{aligned}
$$

การหาค่าน้อยที่สุดของผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อนทำได้โดยการหาอนุพันธ์เทียบกับ $\underset{\sim}{\beta}_n$ แล้วกำหนดให้เท่ากับ $\underset{\sim}{0}$

$$\frac{\partial(\underset{\sim}{e}'\underset{\sim}{e})}{\partial\underset{\sim}{\beta}_n} = \frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{\beta}_n}\left(\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} - 2\hat{\underset{\sim}{\beta}}_n'\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{Y} + \hat{\underset{\sim}{\beta}}_n'\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}\hat{\underset{\sim}{\beta}}_n'\right) = \underset{\sim}{0}$$

จะได้ว่า

$$-2\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{Y} + 2\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}\hat{\underset{\sim}{\beta}}_n' = \underset{\sim}{0}$$

$$(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X})\hat{\underset{\sim}{\beta}}_n' = \underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{Y}$$

ดังนั้น

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{n_{OLS}} = (\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X})^{-1}(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{Y})$$

ตัวอย่างการประมาณค่าวิธีกำลังสองน้อยที่สุด

สถานการณ์ที่กำหนดกรณีพหุนามอันดับ 2

1. ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5

2. ตัวแปรอิสระมีการแจกแจงแบบปกติ (x) มีค่าเฉลี่ย $\mu = 10$ และความแปรปรวน $\sigma^2 = 1$

3. ความคลาดเคลื่อนในตัวแปรอิสระ (u) มีการแจกแจงแบบปกติ มีค่าเฉลี่ย $\mu = 0$ และความแปรปรวน $\sigma^2 = 0.5$

4. ความคลาดเคลื่อนในตัวแปรสุ่ม (ε) มีการแจกแจงแบบปกติ มีค่าเฉลี่ย $\mu = 0$ และความแปรปรวน $\sigma^2 = 0.1$

จากสถานการณ์ที่กำหนดเมทริกซ์ $\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} 1 & 11.1498 & 124.3181 \\ 1 & 9.1983 & 84.6078 \\ 1 & 9.7650 & 95.3560 \\ 1 & 10.7747 & 116.0949 \\ 1 & 10.0353 & 100.7074 \end{bmatrix}$ และ

เวกเตอร์ $\underset{\sim}{Y} = \begin{bmatrix} 8.5592 \\ 10.2251 \\ 9.7277 \\ 9.7176 \\ 9.4049 \end{bmatrix}$

จาก $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{n_{OLS}} = (\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X})^{-1}(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{Y})$

เมื่อแทนค่าเมทริกซ์ $\underset{\sim}{X}$ และเวกเตอร์ $\underset{\sim}{Y}$ จะได้ว่า

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{n_{OLS}} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 11.1498 & 124.3181 \\ 1 & 9.1983 & 84.6078 \\ 1 & 9.7650 & 95.3560 \\ 1 & 10.7747 & 116.0949 \\ 1 & 10.0353 & 100.7074 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 1 & 11.1498 & 124.3181 \\ 1 & 9.1983 & 84.6078 \\ 1 & 9.7650 & 95.3560 \\ 1 & 10.7747 & 116.0949 \\ 1 & 10.0353 & 100.7074 \end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$\times \left(\begin{bmatrix} 1 & 11.1498 & 124.3181 \\ 1 & 9.1983 & 84.6078 \\ 1 & 9.7650 & 95.3560 \\ 1 & 10.7747 & 116.0949 \\ 1 & 10.0353 & 100.7074 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 8.5592 \\ 10.2251 \\ 9.7277 \\ 9.7176 \\ 9.4049 \end{bmatrix}\right)$$

เนื่องจาก x และ x^2 มีความสัมพันธ์กันค่อนข้างสูง จึงเกิดความยุ่งยากในการคำนวณเมทริกซ์ $(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X})^{-1}$ ดังนั้นจึงปรับตัวแปรอิสระให้เป็นศูนย์กลาง (Center) ก่อนที่จะประมาณสัมประสิทธิ์การถดถอยเพื่อลดปัญหาความสัมพันธ์

โดยที่ $\bar{x} = 10.1846$ และ $\bar{x}^2 = 104.2168$

$$\text{จะได้ว่า} \quad \underset{\sim}{X}_{adjust} = \begin{bmatrix} 1 & 11.1498-10.1846 & 124.3181-104.2168 \\ 1 & 9.1983-10.1846 & 84.6078-104.2168 \\ 1 & 9.7650-10.1846 & 95.3560-104.2168 \\ 1 & 10.7747-10.1846 & 116.0949-104.2168 \\ 1 & 10.0353-10.1846 & 100.7074-104.2168 \end{bmatrix}$$

$$\text{ดังนั้นเมทริกซ์} \quad \underset{\sim}{X}_{adjust} = \begin{bmatrix} 1 & 0.9652 & 20.1013 \\ 1 & -0.9863 & -19.6090 \\ 1 & -0.4196 & -8.8608 \\ 1 & 0.5901 & 11.8781 \\ 1 & -0.1493 & -3.5094 \end{bmatrix}$$

จะได้ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{n_{OLS}} = \left(\underset{\sim}{X}'_{adjust}\underset{\sim}{X}_{adjust}\right)^{-1}\left(\underset{\sim}{X}'_{adjust}\underset{\sim}{Y}\right)$

$$= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0.5611 & 11.2548 \\ 1 & -1.1681 & -22.9198 \\ 1 & -0.4110 & -8.6931 \\ 1 & -0.0051 & -0.5939 \\ 1 & 0.2200 & 4.0392 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 1 & 0.5611 & 11.2548 \\ 1 & -1.1681 & -22.9198 \\ 1 & -0.4110 & -8.6931 \\ 1 & -0.0051 & -0.5939 \\ 1 & 0.2200 & 4.0392 \end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$\times \left(\begin{bmatrix} 1 & 0.5611 & 11.2548 \\ 1 & -1.1681 & -22.9198 \\ 1 & -0.4110 & -8.6931 \\ 1 & -0.0051 & -0.5939 \\ 1 & 0.2200 & 4.0392 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 8.5592 \\ 10.2251 \\ 9.7277 \\ 9.7176 \\ 9.4049 \end{bmatrix}\right)$$

ดังนั้น $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{n_{OLS}} = \left(5.2937 \quad 1.4815 \quad -0.1042\right)'$

การประมาณค่าพารามิเตอร์วิธีกำลังสองน้อยสุดถ่วงน้ำหนัก

การประมาณค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยพหุนามวิธีกำลังสองน้อยสุดถ่วงน้ำหนักเป็นวิธีที่พัฒนาขึ้นโดย ฮวง และฮูวาง ในปี ค.ศ. 2001 ซึ่งได้พิจารณาถึงความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในตัวแปรอิสระ และนำความรู้เกี่ยวกับความแปรปรวนมาใช้ในการถ่วงน้ำหนักกับสัมประสิทธิ์การถดถอย จากสมการ $\underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon}$ ดังนั้นเมื่อมีความคลาดเคลื่อนในตัวแปรอิสระ $x_i^* = x_i + u_i$ สามารถเขียนสมการการถดถอยพหุนามดังกล่าวได้ใหม่เป็น $\underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{X}^*\underset{\sim}{\beta}_n + \underset{\sim}{\varepsilon}$ และกำหนดให้ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_n = \left(\hat{\beta}_{0_n} \;\; \hat{\beta}_{1_n} \;\; \cdots \;\; \hat{\beta}_{k_n}\right)'$ จะได้สมการการประมาณค่าของ $\underset{\sim}{Y}$ คือ $\hat{\underset{\sim}{Y}} = \underset{\sim}{X}^*\hat{\underset{\sim}{\beta}}_n$ โดยที่ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_n$ เป็นตัวประมาณกำลังสองน้อยสุดที่ไม่มีการถ่วงน้ำหนักของ $\underset{\sim}{\beta}_n$ ที่จะทำให้ผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อนมีค่าน้อยที่สุด ดังนั้นหากต้องการหาค่า $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{n_{WLS}}$ ที่เป็นตัวประมาณกำลังสองน้อยที่สุดถ่วงน้ำหนักจะหาได้จากฟังก์ชันการถ่วงน้ำหนักดังนี้

$$S = \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1}\left(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i^* - \ldots - \beta_k x_i^{*k}\right)^2$$

โดยหลักการเดียวกับวิธีกำลังสองน้อยที่สุด จะทำให้ได้สมการปกติ (Normal equations) จำนวน $k+1$ สมการเป็นดังนี้

$$\hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1} + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1} x_i^* + \ldots + \hat{\beta}_k \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1} x_i^{*k} = \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1} y_i$$

$$\hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1} x_i^* + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1} x_i^{*2} + \ldots + \hat{\beta}_k \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1} x_i^{*(k+1)} = \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1} x_i^* y_i$$

$$\vdots$$

$$\hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1} x_i^{*k} + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1} x_i^{*(k+1)} + \ldots + \hat{\beta}_k \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1} x_i^{*(2k)} = \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1} x_i^{*k} y_i$$

จากสมการปกติทั้ง $k+1$ สมการ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์และเวกเตอร์ของค่าประมาณสำหรับ $\underset{\sim}{\beta}$ ได้เป็น

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}}_n = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1} & \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1}x_i^{*} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1}x_i^{*k} \\ \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1}x_i^{*} & \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1}x_i^{*2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1}x_i^{*(k+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1}x_i^{*k} & \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1}x_i^{*(k+1)} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1}x_i^{*(2k)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1}y_i \\ \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1}x_i^{*}y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} w_i^{-1}x_i^{*k}y_i \end{bmatrix}$$

หรือ $$\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{n_{WLS}} = \left(\underset{\sim}{X}^{*\prime}\underset{\sim}{W}^{-1}\underset{\sim}{X}^{*}\right)^{-1}\left(\underset{\sim}{X}^{*\prime}\underset{\sim}{W}^{-1}\underset{\sim}{Y}\right)$$

โดยที่ $\underset{\sim}{W}^{-1}$ เป็นเมทริกซ์ของความแปรปรวนซึ่ง ฮวง และฮูวาง (Huang and Huwang, 2001) ได้เสนอขั้นตอนในการหาความแปรปรวนมีรายละเอียดดังนี้

ในงานวิจัยครั้งนี้ค่าที่ใช้ในการถ่วงน้ำหนักคือ $V\left(y_i \mid x_i^{*}\right)$ หรือ

$$V\left(y_i \mid x_i^{*}\right) = E\left(y_i^2 \mid x_i^{*}\right) - \left[E\left(y_i \mid x_i^{*}\right)\right]^2$$

เมื่อ $$E\left(y_i \mid x_i^{*}\right) = \beta_0^{*} + \beta_1^{*}x_i^{*} + \ldots + \beta_k^{*}x_i^{*k}$$

และ $$E\left(y_i^2 \mid x_i^{*}\right) = \beta_0^{**} + \beta_1^{**}x_i^{*} + \beta_2^{**}x_i^{*2} + \ldots + \beta_{2k}^{**}x_i^{*2k}$$

โดยรายละเอียดสำหรับการกำหนดค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยในค่าคาดหวังของ y_i และ y_i^2 เมื่อกำหนดค่า x_i^{*} มีดังนี้

1. กำหนด $\underset{\sim}{\beta}^{*\prime} = \left(\beta_0^{*}, \beta_1^{*}, \ldots, \beta_k^{*}\right)$ ซึ่ง $\underset{\sim}{\beta}^{*}$ สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\underset{\sim}{\beta}^{*'} = \left(\beta_0^*, \beta_1^*, \ldots, \beta_k^*\right)$$

$$= \left(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11}\sigma & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{22}\sigma^2 & c_{21}\sigma & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k\,k}\sigma^k & c_{k\,k-1}\sigma^{k-1} & c_{k\,k-2}\sigma^{k-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} R_k\left(r_{x^*}\right)$$

เมื่อ $$c_{ij} = \binom{i}{j} a_j ; \quad 1 \le i \le 2k, 1 \le j \le i$$

โดยที่ $$a_j = \begin{cases} \dfrac{j!}{\left(2^{j/2}\,(j/2)!\right)} & ; \ j \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกคู่} \\ 0 & ; \ j \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกคี่} \end{cases}$$

$$\sigma = \sqrt{r_{x^*}\left(1 - r_{x^*}\right)\sigma_x^2}$$

โดยที่ r_{x^*} เป็นอัตราส่วนความน่าเชื่อถือของตัวแปร x^* หรือ $r_{x^*} = \left[\dfrac{\sigma_x^2}{\left(\sigma_x^2 + \sigma_u^2\right)}\right]$

เมื่อ σ_x^2 เป็นค่าความแปรปรวนของตัวแปร x ที่แท้จริง และ

σ_u^2 เป็นค่าความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนในตัวแปร x ซึ่งในงานวิจัยนี้กำหนดให้เป็นค่าพารามิเตอร์ที่ทราบค่า

และ $$R_k\left(r_{x^*}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{x^*} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{x^*}^2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_{x^*}^k \end{bmatrix}$$

โดยที่ $$r_{x^*}^j = \left[\frac{\sigma_x^2}{\left(\sigma_x^2 + \sigma_u^2\right)}\right]^j ; \quad j = 1, 2, \ldots, k$$

ในทางปฏิบัติเนื่องจากไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ดังนั้นจะต้องประมาณค่าดังกล่าวจากข้อมูลตัวอย่างดังนี้

ประมาณค่า $\underset{\sim}{\beta}$ ด้วย $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ ซึ่งในงานวิจัยนี้กำหนดให้ $\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \hat{\underset{\sim}{\beta}}_{n_{OLS}}$

ประมาณค่า σ ด้วย $\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{r}_{x^*}(1-\hat{r}_{x^*})S_x^2}$ โดยที่ $S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ และ $\hat{r}_{x^*} = \left[\frac{S_x^2}{(S_x^2+\sigma_u^2)}\right]$

และประมาณค่า $R_k(r_{x^*})$ ด้วย $\hat{R}_k(r_{x^*}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{r}_{x^*} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{r}_{x^*}^2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \hat{r}_{x^*}^k \end{bmatrix}$

โดยที่ $\hat{r}_{x^*}^j = \left[\frac{S_x^2}{(S_x^2+\sigma_u^2)}\right]^j \quad ; \; j = 1,2,\dots,k$

2. กำหนด $\underset{\sim}{\beta}^{**'} = (\beta_0^{**} - \sigma_{\varepsilon^*}^2, \beta_1^{**}, \dots, \beta_{2k}^{**})$ ซึ่ง $\underset{\sim}{\beta}^{**}$ สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{\beta}^{**'} &= (\beta_0^{**} - \sigma_{e^*}^2, \beta_1^{**}, \dots, \beta_{2k}^{**}) \\
&= (\alpha_0, \dots, \alpha_{2k}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11}\sigma & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{22}\sigma^2 & c_{21}\sigma & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{2k\,2k}\sigma^{2k} & c_{2k\,2k-1}\sigma^{2k-1} & c_{2k\,2k-2}\sigma^{2k-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} R_{2k}(r_{x^*})
\end{aligned}$$

เมื่อ $$\alpha_m = \sum_{\{0\le i,j\le k, i+j=m\}} \beta_i \beta_j, \quad 0 \le m \le 2k$$

$$c_{ij} = \binom{i}{j} a_j; \quad 1 \le i \le 2k, 1 \le j \le i$$

โดยที่ $$a_j = \begin{cases} \dfrac{j!}{\left(2^{j/2}(j/2)!\right)} & ; \ j \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกคู่} \\ 0 & ; \ j \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกคี่} \end{cases}$$

$$\sigma = \sqrt{r_{x^*}(1-r_{x^*})\sigma_x^2}$$

โดยที่ r_{x^*} เป็นอัตราส่วนความน่าเชื่อถือของตัวแปร x^* หรือ $r_{x^*} = \left[\dfrac{\sigma_x^2}{\left(\sigma_x^2+\sigma_u^2\right)}\right]$

เมื่อ σ_x^2 เป็นค่าความแปรปรวนของตัวแปร x ที่แท้จริง และ

σ_u^2 เป็นค่าความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนในตัวแปร x ซึ่งในงานวิจัยนี้กำหนดให้เป็นค่าพารามิเตอร์ที่ทราบค่า

และ $$R_{2k}(r_{x^*}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{x^*} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{x^*}^2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_{x^*}^{2k} \end{bmatrix}$$

โดยที่ $$r_{x^*}^j = \left[\frac{\sigma_x^2}{\left(\sigma_x^2+\sigma_u^2\right)}\right]^j; \ j = 1, 2, \ldots, 2k$$

ในทางปฏิบัติเนื่องจากไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ดังนั้นจะต้องประมาณค่าดังกล่าวจากข้อมูลตัวอย่างดังนี้

ประมาณค่า α_m ด้วย $\hat{\alpha}_m = \sum_{\{0\le i,j\le k, i+j=m\}} \hat{\beta}_i \hat{\beta}_j, \quad 0 \le m \le 2k$

โดยที่ $\hat{\beta}_i$ และ $\hat{\beta}_j$ เป็นสมาชิกของเมทริกซ์ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ ซึ่งในที่นี้กำหนดให้ $\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \hat{\underset{\sim}{\beta}}_{n_{OLS}}$

ประมาณค่า σ ด้วย $\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{r}_{x^*}(1-\hat{r}_{x^*})S_x^2}$ โดยที่ $S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ และ $\hat{r}_{x^*} = \left[\frac{S_x^2}{(S_x^2+\sigma_u^2)}\right]$

และประมาณค่า $R_{2k}(r_{x^*})$ ด้วย $\hat{R}_{2k}(r_{x^*}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{r}_{x^*} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{r}_{x^*}^2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \hat{r}_{x^*}^{2k} \end{bmatrix}$

โดยที่ $\hat{r}_{x^*}^j = \left[\frac{S_x^2}{(S_x^2+\sigma_u^2)}\right]^j \quad ; \; j = 1,2,\dots,2k$

นำค่าที่คำนวณได้ไปหาค่า $E(y_i \mid x_i^*)$ และ $E(y_i^2 \mid x_i^*)$ แล้วแทนค่าลงใน

$$V(y_i \mid x_i^*) = E(y_i^2 \mid x_i^*) - \left[E(y_i \mid x_i^*)\right]^2$$

จะได้ค่า $\hat{w}_i = V(y_i \mid x_i^*)$ ซึ่งเป็นค่าถ่วงน้ำหนักของค่าสังเกตตัวที่ i จากนั้นนำค่าเมทริกซ์ $\underset{\sim}{W}$ ที่คำนวณได้แทนค่าลงใน $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{n_{WLS}} = \left(\underset{\sim}{X}^{*\prime}\underset{\sim}{W}^{-1}\underset{\sim}{X}^{*}\right)^{-1}\left(\underset{\sim}{X}^{*\prime}\underset{\sim}{W}^{-1}\underset{\sim}{Y}\right)$ แล้วจะได้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์การถดถอยพหุนามวิธีกำลังสองน้อยสุดถ่วงน้ำหนัก

ตัวอย่างการประมาณค่าวิธีกำลังสองน้อยสุดถ่วงน้ำหนัก

สถานการณ์ที่กำหนดกรณีพหุนามอันดับ 2

1. ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5

2. ตัวแปรอิสระมีการแจกแจงแบบปกติ (x) มีค่าเฉลี่ย $\mu = 10$ และความแปรปรวน $\sigma^2 = 1$

3. ความคลาดเคลื่อนในตัวแปรอิสระ (u) มีการแจกแจงแบบปกติ มีค่าเฉลี่ย $\mu = 0$ และความแปรปรวน $\sigma^2 = 0.5$

4. ความคลาดเคลื่อนในตัวแปรสุ่ม (ε) มีการแจกแจงแบบปกติ มีค่าเฉลี่ย $\mu = 0$ และความแปรปรวน $\sigma^2 = 0.1$

จากสถานการณ์ที่กำหนดจะได้ว่า

เมทริกซ์ $\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} 1 & 11.1498 & 124.3181 \\ 1 & 9.1983 & 84.6078 \\ 1 & 9.7650 & 95.3560 \\ 1 & 10.7747 & 116.0949 \\ 1 & 10.0353 & 100.7074 \end{bmatrix}$, เมทริกซ์ $\underset{\sim}{X}^{*} = \begin{bmatrix} 1 & 10.7458 & 115.4717 \\ 1 & 9.0165 & 81.2970 \\ 1 & 9.7736 & 95.5237 \\ 1 & 10.1795 & 103.6229 \\ 1 & 10.4046 & 108.2561 \end{bmatrix}$

เมทริกซ์ $\underset{\sim}{X}^{*2k} = \begin{bmatrix} 1 & 10.7458 & 115.4717 & 1,240.8328 & 13,333.7109 \\ 1 & 9.0165 & 81.2970 & 733.0132 & 6,609.2026 \\ 1 & 9.7736 & 95.5237 & 933.6130 & 9,124.7822 \\ 1 & 10.1795 & 103.6229 & 1,054.8330 & 10,737.7086 \\ 1 & 10.4046 & 108.2561 & 1,126.3629 & 11,719.3755 \end{bmatrix}$,

เวกเตอร์ $\underset{\sim}{Y} = \begin{bmatrix} 8.5592 \\ 10.2251 \\ 9.7277 \\ 9.7176 \\ 9.4049 \end{bmatrix}$, $\sigma_x^2 = 0.6128$ และ $\sigma_u^2 = 0.5$

การคำนวณค่า $V\left(y_i \mid x_i^*\right)$ หรือ $V\left(y_i \mid x_i^*\right) \;=\; E\left(y_i^2 \mid x_i^*\right)-\left[E\left(y_i \mid x_i^*\right)\right]^2$ มีขั้นตอนดังนี้

1. คำนวณค่า $E\left(y_i \mid x_i^*\right) \;=\; \beta_0^* + \beta_1^* x_i^* + \beta_2^* x_i^{*2}$

เมื่อ $\underset{\sim}{\beta}^{*'} \;=\; \left(\beta_0^*, \beta_1^*, \beta_2^*\right)$

$$= \left(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_{11}\sigma & 1 & 0 \\ c_{22}\sigma^2 & c_{21}\sigma & 1 \end{bmatrix} R_2\left(r_{x^*}\right)$$

โดยที่ $\left(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2\right)$ เป็นสมาชิกของเมทริกซ์ $\underset{\sim}{\hat{\beta}}$ ซึ่งในที่นี้กำหนดให้

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}} = \underset{\sim}{\hat{\beta}}_{n_{OLS}} = \left(5.2937 \;\; 1.4815 \;\; -0.1042\right)'$$

ประมาณค่า $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_{11}\sigma & 1 & 0 \\ c_{22}\sigma^2 & c_{21}\sigma & 1 \end{bmatrix}$

เมื่อ $c_{ij} \;=\; \binom{i}{j} a_j; \;\; 1 \le i \le 2k, 1 \le j \le i$

โดยที่ $a_j \;=\; \begin{cases} \dfrac{j!}{\left(2^{j/2}\,(j/2)!\right)} & ; \; j \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกคู่} \\ 0 & ; \; j \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกคี่} \end{cases}$

พิจารณา ค่า a_j

เมื่อ $j=1$ ค่า $a_1 = 0$

เมื่อ $j=2$ ค่า $a_2 = 1$

ค่า c_{ij}

เมื่อ $i=1, j=1$ ค่า $c_{11}=\binom{1}{1}a_1=0$

เมื่อ $i=2, j=1$ ค่า $c_{21}=\binom{2}{1}a_1=0$

เมื่อ $i=2, j=2$ ค่า $c_{22}=\binom{2}{2}a_2=1$

ค่า σ^k

เมื่อ $k=0$ ค่า $\sigma=1$

เมื่อ $k=1$ ค่า $\sigma=\sqrt{(0.5507)(1-0.5507)(0.6128)}$

$=0.3894$

เมื่อ $k=2$ ค่า $\sigma^2=0.1516$

ดังนั้น $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_{11}\sigma & 1 & 0 \\ c_{22}\sigma^2 & c_{21}\sigma & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.1516 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ประมาณค่า $r_{x*}^k \;=\; \left[\dfrac{\sigma_x^2}{\left(\sigma_x^2+\sigma_u^2\right)}\right]$

พิจารณา ค่า r_{x*}^k

เมื่อ $k=0$ ค่า $r_{x*}=1$

เมื่อ $k=1$ ค่า $r_{x*}=\dfrac{0.6128}{0.6128+0.5}=0.5507$

เมื่อ $k=2$ ค่า $r_{x*}^2=\left(0.5507\right)^2=0.3032$

ดังนั้น $R_2\left(r_{x*}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5507 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3032 \end{bmatrix}$

เมื่อแทนค่าที่คำนวณลงใน $\underset{\sim}{\beta}^{*'}$ จะได้ว่า

$$\underset{\sim}{\beta}^{*'} = \left(5.2937 \;\; 1.4815 \;\; -0.1042\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.1516 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5507 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3032 \end{bmatrix}$$

$$= \left(5.2779 \;\; 0.8158 \;\; -0.0316\right)$$

ดังนั้น $E\left(y_i \mid x_i^*\right) = \beta_0^* + \beta_1^* x_i^* + \beta_2^* x_i^{*2}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 10.7458 & 115.4717 \\ 1 & 9.0165 & 81.2970 \\ 1 & 9.7736 & 95.5237 \\ 1 & 10.1795 & 103.6229 \\ 1 & 10.4046 & 108.2561 \end{bmatrix}\left(5.2779 \;\; 0.8158 \;\; -0.0316\right)'$$

$$= \begin{bmatrix} 10.3972 \\ 10.0658 \\ 10.2341 \\ 10.3095 \\ 10.3468 \end{bmatrix}$$

2. คำนวณค่า $E\left(y_i^2 \mid x_i^*\right) = \beta_0^{**} + \beta_1^{**} x_i^* + \beta_2^{**} x_i^{*2} + \beta_3^{**} x_i^{*3} + \beta_4^{**} x_i^{*4}$

โดยที่ $\underset{\sim}{\beta}^{**'} = \left(\beta_0^{**} - \sigma_{e^*}^2, \beta_1^{**}, \beta_2^{**}, \beta_3^{**}, \beta_4^{**}\right)$

$$= \left(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{11}\sigma & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_{22}\sigma^2 & c_{21}\sigma & 1 & 0 & 0 \\ c_{33}\sigma^3 & c_{32}\sigma^2 & c_{31}\sigma & 1 & 0 \\ c_{44}\sigma^4 & c_{43}\sigma^3 & c_{42}\sigma^2 & c_{41}\sigma & 1 \end{bmatrix} R_4\left(r_{x^*}\right)$$

ประมาณค่า $\left(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\right)$

เมื่อ $$\hat{\alpha}_m = \sum_{\{0 \le i, j \le k, i+j=m\}} \hat{\beta}_i \hat{\beta}_j, \quad 0 \le m \le 2k$$

โดยที่ $\hat{\beta}_i$ และ $\hat{\beta}_j$ เป็นสมาชิกของเมทริกซ์ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ ซึ่งในที่นี้กำหนดให้

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \hat{\underset{\sim}{\beta}}_{n_{OLS}} = (5.2937 \;\; 1.4815 \;\; -0.1042)'$$

พิจารณาค่า $\left(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\right)$

เมื่อ $k=0$	ค่า $\alpha_0 = 2\hat{\beta}_0\hat{\beta}_0 = 56.0456$
เมื่อ $k=1$	ค่า $\alpha_1 = \hat{\beta}_1\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_0\hat{\beta}_1 = 15.6848$
เมื่อ $k=2$	ค่า $\alpha_2 = \hat{\beta}_0\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_2\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1\hat{\beta}_1 = 1.0920$
เมื่อ $k=3$	ค่า $\alpha_3 = \hat{\beta}_1\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_2\hat{\beta}_1 = -0.3086$
เมื่อ $k=4$	ค่า $\alpha_4 = 2\hat{\beta}_2\hat{\beta}_2 = 0.0217$

ดังนั้น $\left(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\right) = (56.0456 \;\; 15.6848 \;\; 1.0920 \;\; -0.3086 \;\; 0.0217)$

$$\text{ประมาณค่า} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{11}\sigma & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_{22}\sigma^2 & c_{21}\sigma & 1 & 0 & 0 \\ c_{33}\sigma^3 & c_{32}\sigma^2 & c_{31}\sigma & 1 & 0 \\ c_{44}\sigma^4 & c_{43}\sigma^3 & c_{42}\sigma^2 & c_{41}\sigma & 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $c_{ij} = \binom{i}{j} a_j; \quad 1 \le i \le 2k, 1 \le j \le i$

โดยที่ $a_j = \begin{cases} \dfrac{j!}{\left(2^{j/2}(j/2)!\right)} & ; \; j \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกคู่} \\ 0 & ; \; j \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกคี่} \end{cases}$

พิจารณา ค่า a_j

เมื่อ $j=1$ ค่า $a_1 = 0$

เมื่อ $j=2$ ค่า $a_2 = 1$

เมื่อ $j=3$ ค่า $a_3 = 0$

เมื่อ $j=4$ ค่า $a_4 = 3$

ค่า c_{ij}

เมื่อ $i=1, j=1$ ค่า $c_{11} = \binom{1}{1} a_1 = 0$

เมื่อ $i=2, j=1$ ค่า $c_{21} = \binom{2}{1} a_1 = 0$

เมื่อ $i=2, j=2$ ค่า $c_{22} = \binom{2}{2} a_2 = 1$

เมื่อ $i=3, j=1$ ค่า $c_{31}=\binom{3}{1}a_1=0$

เมื่อ $i=3, j=2$ ค่า $c_{32}=\binom{3}{2}a_2=3$

เมื่อ $i=3, j=3$ ค่า $c_{33}=\binom{3}{3}a_3=0$

เมื่อ $i=4, j=1$ ค่า $c_{41}=\binom{4}{1}a_1=0$

เมื่อ $i=4, j=2$ ค่า $c_{42}=\binom{4}{2}a_2=6$

เมื่อ $i=4, j=3$ ค่า $c_{43}=\binom{4}{3}a_3=0$

เมื่อ $i=4, j=4$ ค่า $c_{44}=\binom{4}{4}a_4=3$

ค่า σ^k

เมื่อ $k=0$ ค่า $\sigma=1$

เมื่อ $k=1$ ค่า $\sigma=\sqrt{(0.5507)(1-0.5507)(0.6128)}$

$=0.3894$

เมื่อ $k=2$ ค่า $\sigma^2=0.1516$

เมื่อ $k=3$ ค่า $\sigma^3=0.0590$

เมื่อ $k=4$ ค่า $\sigma^4=0.0230$

ดังนั้น
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{11}\sigma & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_{22}\sigma^2 & c_{21}\sigma & 1 & 0 & 0 \\ c_{33}\sigma^3 & c_{32}\sigma^2 & c_{31}\sigma & 1 & 0 \\ c_{44}\sigma^4 & c_{43}\sigma^3 & c_{42}\sigma^2 & c_{41}\sigma & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1516 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4549 & 0 & 1 & 0 \\ 0.0690 & 0 & 0.9097 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ประมาณค่า $r_{x*}^k = \left[\dfrac{\sigma_x^2}{\left(\sigma_x^2+\sigma_u^2\right)}\right]$

พิจารณา ค่า r_{x*}^k

เมื่อ $k=0$ ค่า $r_{x*}=1$

เมื่อ $k=1$ ค่า $r_{x*}=\dfrac{0.6128}{0.6128+0.5}=0.5507$

เมื่อ $k=2$ ค่า $r_{x*}^2=(0.5507)^2=0.3032$

เมื่อ $k=3$ ค่า $r_{x*}^3=0.1670$

เมื่อ $k=4$ ค่า $r_{x*}^4=0.0920$

ดังนั้น
$$R_4\left(r_{x*}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5507 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3032 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1670 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0920 \end{bmatrix}$$

เมื่อแทนค่าที่คำนวณลงใน $\underset{\sim}{\beta}^{**'}$ จะได้ว่า

$$\underset{\sim}{\beta}^{**'}=(56.0456\ \ 15.6848\ \ 1.0920\ \ -0.3086\ \ 0.0217)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0.1516 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0.4549 & 0 & 1 & 0\\ 0.0690 & 0 & 0.9097 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.5507 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.3032 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.1670 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0920\end{bmatrix}$$

$$=(56.2126\ \ 8.5599\ \ 0.3371\ \ -0.0515\ \ 0.0020)$$

ดังนั้น $E\left(y_i^2 \mid x_i^*\right)=\beta_0^{**}+\beta_1^{**}x_i^*+\beta_2^{**}x_i^{*2}+\beta_3^{**}x_i^{*3}+\beta_4^{**}x_i^{*4}$

$$=\begin{bmatrix}1 & 10.7458 & 115.4717 & 1,240.8328 & 13,333.7109\\ 1 & 9.0165 & 81.2970 & 733.0132 & 6,609.2026\\ 1 & 9.7736 & 95.5237 & 933.6130 & 9,124.7822\\ 1 & 10.1795 & 103.6229 & 1,054.8330 & 10,737.7086\\ 1 & 10.4046 & 108.2561 & 1,126.3629 & 11,719.3755\end{bmatrix}(56.2126\ \ 8.5599\ \ 0.3371\ \ -0.0515\ \ 0.0020)'$$

$$=\begin{bmatrix}149.7816\\ 136.2113\\ 142.1698\\ 145.3460\\ 147.1070\end{bmatrix}$$

ดังนั้น ค่า $V\left(y_i \mid x_i^*\right)=E\left(y_i^2 \mid x_i^*\right)-\left[E\left(y_i \mid x_i^*\right)\right]^2$

$$=\begin{bmatrix}149.7816\\136.2113\\142.1698\\145.3460\\147.1070\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}10.3972\\10.0658\\10.2341\\10.3095\\10.3468\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}41.6805\\34.8909\\37.4323\\39.0608\\40.0517\end{bmatrix}$$

ค่า $\underset{\sim}{W}^{-1}$ ที่ใช้ในการถ่วงน้ำหนักมีค่าเท่ากับ

$$W^{-1}=1/V\left(y_i \mid x_i^*\right)=\begin{bmatrix}0.0240&0&0&0&0\\0&0.0287&0&0&0\\0&0&0.0267&0&0\\0&0&0&0.0256&0\\0&0&0&0&0.0250\end{bmatrix}$$

จาก $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{n_{WLS}} = \left(\underset{\sim}{X}^{*\prime}\underset{\sim}{W}^{-1}\underset{\sim}{X}^{*}\right)^{-1}\left(\underset{\sim}{X}^{*\prime}\underset{\sim}{W}^{-1}\underset{\sim}{Y}\right)$

เมื่อแทนค่าเมทริกซ์ $\underset{\sim}{X}^{*\prime}$, $\underset{\sim}{W}^{-1}$ และเวกเตอร์ $\underset{\sim}{Y}$ จะได้ว่า

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{n_{WLS}} = \left(\begin{bmatrix}1&10.7458&115.4717\\1&9.0165&81.2970\\1&9.7736&95.5237\\1&10.1795&103.6229\\1&10.4046&108.2561\end{bmatrix}^{\prime}\begin{bmatrix}0.0240&0&0&0&0\\0&0.0287&0&0&0\\0&0&0.0267&0&0\\0&0&0&0.0256&0\\0&0&0&0&0.0250\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&10.7458&115.4717\\1&9.0165&81.2970\\1&9.7736&95.5237\\1&10.1795&103.6229\\1&10.4046&108.2561\end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$\times\left(\begin{bmatrix}1&10.7458&115.4717\\1&9.0165&81.2970\\1&9.7736&95.5237\\1&10.1795&103.6229\\1&10.4046&108.2561\end{bmatrix}^{\prime}\begin{bmatrix}0.0240&0&0&0&0\\0&0.0287&0&0&0\\0&0&0.0267&0&0\\0&0&0&0.0256&0\\0&0&0&0&0.0250\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8.5592\\10.2251\\9.7277\\9.7176\\9.4049\end{bmatrix}\right)$$

เนื่องจาก x^* และ x^{*2} มีความสัมพันธ์กันค่อนข้างสูง จึงเกิดความยุ่งยากในการคำนวณเมทริกซ์ $\left(\underset{\sim}{X}^{*\prime}\underset{\sim}{W}^{-1}\underset{\sim}{X}^*\right)^{-1}$ ดังนั้นจึงปรับตัวแปรอิสระให้เป็นศูนย์กลาง (Center) ก่อนที่จะประมาณสัมประสิทธิ์การถดถอยเพื่อลดปัญหาความสัมพันธ์

โดยที่ $\bar{x} = 10.1846$ และ $\bar{x}^2 = 104.2168$

จะได้ว่า $$\underset{\sim}{X}^*_{adjust} = \begin{bmatrix} 1 & 10.7458-10.1846 & 115.4717-104.2168 \\ 1 & 9.0165-10.1846 & 81.2970-104.2168 \\ 1 & 9.7736-10.1846 & 95.5237-104.2168 \\ 1 & 10.1795-10.1846 & 103.6229-104.2168 \\ 1 & 10.4046-10.1846 & 108.2561-104.2168 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นเมทริกซ์ $$\underset{\sim}{X}^*_{adjust} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5612 & 11.2549 \\ 1 & -1.1681 & -22.0198 \\ 1 & -0.4110 & -8.6931 \\ 1 & 0.0051 & -0.5939 \\ 1 & 0.2200 & 4.0393 \end{bmatrix}$$

จะได้ $$\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{n_{WLS}} = \left(\underset{\sim}{X}^{*\prime}_{adjust}\underset{\sim}{W}^{-1}\underset{\sim}{X}^*_{adjust}\right)^{-1}\left(\underset{\sim}{X}^{*\prime}_{adjust}\underset{\sim}{W}^{-1}\underset{\sim}{Y}\right)$$

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{n_{WLS}} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0.5612 & 11.2549 \\ 1 & -1.1681 & -22.0198 \\ 1 & -0.4110 & -8.6931 \\ 1 & 0.0051 & -0.5939 \\ 1 & 0.2200 & 4.0393 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0.0240 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0287 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0267 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0256 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.5612 & 11.2549 \\ 1 & -1.1681 & -22.0198 \\ 1 & -0.4110 & -8.6931 \\ 1 & 0.0051 & -0.5939 \\ 1 & 0.2200 & 4.0393 \end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$\times\left(\begin{bmatrix} 1 & 0.5612 & 11.2549 \\ 1 & -1.1681 & -22.0198 \\ 1 & -0.4110 & -8.6931 \\ 1 & 0.0051 & -0.5939 \\ 1 & 0.2200 & 4.0393 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0.0240 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0287 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0267 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0256 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8.5592 \\ 10.2251 \\ 9.7277 \\ 9.7176 \\ 9.4049 \end{bmatrix}\right)$$

ดังนั้น $$\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{n_{WLS}} = (9.2674 \ \ 10.6170 \ \ -0.5809)'$$

การประมาณค่าพารามิเตอร์วิธีกำลังสองน้อยสุดทางโครงสร้าง

การประมาณค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยพหุนามวิธีกำลังสองน้อยสุดทางโครงสร้างเป็นวิธีที่พัฒนาขึ้นโดย ทาเมอร์รัส (Thamerus) ในปี ค.ศ. 1997 ที่ใช้หลักการเดียวกันกับวิธีกำลังสองน้อยที่สุด แต่จะใช้การปรับตัวแปรอิสระด้วยอัตราส่วนความน่าเชื่อถือของตัวแปรอิสระ (Reliability ratio of $x^* : r_{x^*}$) เพื่อให้ได้ค่าของตัวแปรอิสระที่ใกล้เคียงกับค่าจริงมากที่สุดด้วยการกำหนดเมทริกซ์ M แทนเมทริกซ์ค่าประมาณของ $\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}$ มีขนาด $(k+1)\times(k+1)$ ที่มีคุณสมบัติไม่เอนเอียงสำหรับ $\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}$ และกำหนดเวกเตอร์ m แทนเวกเตอร์ค่าประมาณของ $\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{Y}$ มีขนาด $(k+1)\times 1$ ที่มีคุณสมบัติไม่เอนเอียงสำหรับ $\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{Y}$

แต่กระบวนการคำนวณเพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยมีขั้นตอนที่ซับซ้อน ดังนั้นในปี ค.ศ. 2000 คูคลัสและชิไนวิส (Kukush and Schneeweiss, 2000) ได้มีการนำเสนอขั้นตอนในการประมาณค่าเมทริกซ์ M และเวกเตอร์ m ที่มีขั้นตอนที่ซับซ้อนน้อยลงโดยมีรายละเอียดในการประมาณค่าดังนี้

1. การประมาณค่า M

กำหนดให้ $\mu_k\left(x_i^* \mid x_i\right)$ หรือ $\mu_k\left(x_i^*\right)$ เป็นพหุนามระดับ k ของ x_i เมื่อกำหนด x_i^* โดยที่ $k = 0,1,2,\ldots$ และ $i = 1,2,\ldots,n$ ซึ่งเป็นสมาชิกในเมทริกซ์การประมาณค่า $\underset{\sim}{X}$ และมีคุณสมบัติดังนี้

$$\mu_k\left(x_i^* \mid x\right) = \mu_k\left(x_i^*\right) = E\left(x_i^k \mid x_i^*\right) = x_i^k = \mu_k\left(x_i\right)$$

และกำหนดฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นของ x_i เมื่อกำหนด x_i^* มีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ $\mu_k\left(x_i^*\right)$ และความแปรปรวน τ^2 เมื่อ

$$\mu_1\left(x_i^*\right) = r_{x^*}x_i^* + \left(1 - r_{x^*}\right)\mu_{x^*}$$

โดยที่ r_{x^*} คือ อัตราความน่าเชื่อถือของตัวแปรอิสระที่มีค่าเท่ากับ

$$r_{x^*} = \left[\frac{\sigma_x^2}{\left(\sigma_x^2 + \sigma_u^2\right)}\right]$$

เมื่อ σ_x^2 เป็นค่าความแปรปรวนของตัวแปร x ที่แท้จริง และ

σ_u^2 เป็นค่าความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนในตัวแปร x ซึ่งในงานวิจัยครั้งนี้กำหนดให้เป็น<u>**ค่าพารามิเตอร์ที่ทราบค่า**</u>

คูคลัส และชิไนวิส (2000) ได้เสนอโมเมนต์แบบมีเงื่อนไขของ $\mu_k\left(x_i^*\right)$ มีค่าเท่ากับ

$$\mu_k\left(x_i^* \mid x_i\right) = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(\mu_j^*\right)\left(\mu_1\left(x_i^*\right)\right)^{k-j}$$

โดยที่ μ_j^* คือ ค่าประมาณของค่าคลาดเคลื่อนยกกำลัง j โดยที่ $j=1,2,\ldots,k$ ซึ่ง μ_j^* มีค่าตามเงื่อนไขดังนี้

$$\mu_j^* = E\left[\left\{x-\mu_1\left(x^*\right)\right\}^j \mid x^*\right] = \begin{cases} 0 & ;\ j \text{ มีค่าเป็นจำนวนเต็มคี่} \\ 1.3\ldots(j-1)\tau^j & ;\ j \text{ มีค่าเป็นจำนวนเต็มคู่} \\ 1 & ;\ j \text{ มีค่าเท่ากับ } 0 \end{cases}$$

เมื่อ τ^2 คือ ค่าของความแปรปรวนของค่าความคลาดเคลื่อนที่ได้รับการปรับแล้ว มีค่าเท่ากับ

$$\tau^2 = \sigma_u^2\left(1-\frac{\sigma_u^2}{\sigma_{x^*}^2}\right) = r_{x^*}\sigma_u^2$$

ดังนั้น

$$\tau^k = \left(\sqrt{\sigma_u^2\left(1-\frac{\sigma_u^2}{\sigma_{x^*}^2}\right)}\right)^k = \left(\sqrt{r_{x^*}\sigma_u^2}\right)^k$$

โดยที่ $\sigma_{x^*}^2$ เป็นค่าความแปรปรวนของตัวแปร x ที่มีความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้น

ในทางปฏิบัติเนื่องจากไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ดังนั้นจะต้องประมาณค่าดังกล่าวจากข้อมูลตัวอย่างดังนี้

พารามิเตอร์รบกวน (Nuisance parameters) μ_{x*} และ σ^2_{x*} จะประมาณด้วย

$$\hat{\mu}_{x*} = \bar{x}^* \text{ และ } \hat{\sigma}^2_{x*} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^* - \bar{x}^*\right)^2$$

ประมาณค่า $\mu_k\left(x_i^*\right)$ ด้วย $\hat{\mu}_k\left(x_i^*\right) = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}.\hat{\mu}_j^*.\left(\hat{\mu}_1\left(x_i^*\right)\right)^{r-j}$

โดยที่ $$\hat{\mu}_1\left(x_i^*\right) = \hat{r}_{x*}x_i^* + \left(1-\hat{r}_{x*}\right)\hat{\mu}_{x*}$$

เมื่อ $\hat{r}_{x*} = \left[\frac{\hat{\sigma}^2_x}{\left(\hat{\sigma}^2_x + \sigma^2_u\right)}\right]$; σ^2_u เป็นพารามิเตอร์ที่ทราบค่า

ประมาณค่า μ_j^* ด้วย $\hat{\mu}_j^*$ ซึ่ง

$$\hat{\mu}_j^* = \begin{cases} 0 & ;\ j \text{ มีค่าเป็นจำนวนเต็มคี่} \\ 1.3\ldots(j-1)\tau^j & ;\ j \text{ มีค่าเป็นจำนวนเต็มคู่} \\ 1 & ;\ j \text{ มีค่าเท่ากับ } 0 \end{cases}$$

และประมาณค่า τ^2 ด้วย $\hat{\tau}^2 = \sigma^2_u.\hat{r}_{x*}$

จากนั้นแทนค่าที่คำนวณได้ทั้งหมดลงใน $\mu_k\left(x_i^* \mid x_i\right) = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(\mu_j^*\right)\left(\mu_1\left(x_i^*\right)\right)^{k-j}$ และเมทริกซ์ของ $\underset{\sim}{X}$ ที่ได้จะมีค่าประมาณดังนี้

$$\hat{\underset{\sim}{X}}_{SLS} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{\mu}_1\left(x_1^*\right) & \hat{\mu}_2\left(x_1^*\right) & \cdots & \hat{\mu}_k\left(x_1^*\right) \\ 1 & \hat{\mu}_1\left(x_2^*\right) & \hat{\mu}_2\left(x_2^*\right) & \cdots & \hat{\mu}_k\left(x_2^*\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \hat{\mu}_1\left(x_n^*\right) & \hat{\mu}_2\left(x_n^*\right) & \cdots & \hat{\mu}_k\left(x_n^*\right) \end{bmatrix}_{n\times(k+1)}$$

และเมทริกซ์ M ซึ่งเป็นเมทริกซ์ค่าประมาณของ $\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}$ หรือ $M=\hat{\underset{\sim}{X}}'_{SLS}\hat{\underset{\sim}{X}}_{SLS}$ มีค่าเท่ากับ

$$
\mathrm{M}=\begin{bmatrix}
n & \sum_{1}^{n}\left(\hat{\mu}_1\left(x_1^*\right)\right) & \sum_{1}^{n}\left(\hat{\mu}_2\left(x_1^*\right)\right) & \cdots & \sum_{1}^{n}\left(\hat{\mu}_k\left(x_i^*\right)\right) \\
\sum_{1}^{n}\left(\hat{\mu}_1\left(x_1^*\right)\right) & \sum_{1}^{n}\left(\hat{\mu}_1\left(x_i^*\right)\right)^2 & \sum_{1}^{n}\left(\hat{\mu}_1\left(x_i^*\right)\right)\left(\hat{\mu}_2\left(x_1^*\right)\right) & \cdots & \sum_{1}^{n}\left(\hat{\mu}_1\left(x_i^*\right)\right)\left(\hat{\mu}_k\left(x_1^*\right)\right) \\
\sum_{1}^{n}\left(\hat{\mu}_2\left(x_1^*\right)\right) & \sum_{1}^{n}\left(\hat{\mu}_1\left(x_i^*\right)\right)\left(\hat{\mu}_2\left(x_1^*\right)\right) & \sum_{1}^{n}\left(\hat{\mu}_2\left(x_i^*\right)\right)^2 & \cdots & \sum_{1}^{n}\left(\hat{\mu}_2\left(x_i^*\right)\right)\left(\hat{\mu}_k\left(x_1^*\right)\right) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\sum_{1}^{n}\left(\hat{\mu}_k\left(x_i^*\right)\right) & \sum_{1}^{n}\left(\hat{\mu}_1\left(x_i^*\right)\right)\left(\hat{\mu}_k\left(x_1^*\right)\right) & \sum_{1}^{n}\left(\hat{\mu}_2\left(x_i^*\right)\right)\left(\hat{\mu}_k\left(x_i^*\right)\right) & \cdots & \sum_{1}^{n}\left(\hat{\mu}_k\left(x_1^*\right)\right)^2
\end{bmatrix}_{(k+1)\times(k+1)}
$$

2. การประมาณค่า m

กำหนด m เป็นเวกเตอร์ประมาณค่าของ $\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{Y}$ ที่มีขนาดที่ $(k+1)\times 1$ โดยที่ $\underset{\sim}{X}$ เป็น เมทริกซ์ที่มีสมาชิกประกอบด้วย $\underset{\sim}{x}_i'=\left(1,x_i^*,\ldots,x_i^{*k}\right)$ เมื่อ x_i^* เป็นค่าของตัวแปร x ที่มีความคลาดเคลื่อนสำหรับ $i=1,2,\ldots,n$

เนื่องจาก $\quad y_i=\beta_0+\beta_1x_i^*+\beta_2x_i^{*2}+\ldots+\beta_kx_i^{*k}+\varepsilon_i \;=\eta_i+\varepsilon_i$

โดยที่ $\quad \eta_i=\beta_0+\beta_1x_i^*+\beta_2x_i^{*2}+\ldots+\beta_kx_i^{*k}$

ดังนั้นเวกเตอร์ค่าประมาณของ $\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{Y}$ สามารถประมาณค่าได้ดังนี้

$$\mathrm{m}=\hat{\underset{\sim}{X}}'\underset{\sim}{Y}$$

ซึ่งมีคุณสมบัติ
$$
\begin{aligned}
E(\mathrm{m}) &= E\left(\hat{\underset{\sim}{X}}'\underset{\sim}{Y}\right) \\
&= E\left(\hat{\underset{\sim}{X}}'\right)E\left(\underset{\sim}{Y}\right) \\
&= \underset{\sim}{X}'E\left(\underset{\sim}{\eta}+\underset{\sim}{\varepsilon}\right) \\
&= \underset{\sim}{X}'E\left(\underset{\sim}{\eta}\right)+\underset{\sim}{X}'E\left(\underset{\sim}{\varepsilon}\right)
\end{aligned}
$$

จากคุณสมบัติการเป็นอิสระซึ่งกันและกันของ u และ ε ทำให้ $E\left(\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\varepsilon}\right)=0$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
E(\mathrm{m}) &= \underset{\sim}{X}'E\left(\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\beta}\right) \quad ;\eta = \underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\beta} \\
&= \underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}E\left(\underset{\sim}{\beta}\right) \\
&= \left(\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}\right)\underset{\sim}{\beta} \\
&= (\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{X})(\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{X})^{-1}(\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{Y}) \\
&= \underset{\sim}{X}\underset{\sim}{Y}
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $I = (\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{X})(\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{X})^{-1}$

ดังนั้น $$\mathrm{m} = \hat{\underset{\sim}{X}}'\underset{\sim}{Y}$$

และ m เป็นเวกเตอร์ค่าประมาณของ $\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{Y}$

จากเมทริกซ์ $$\hat{\underset{\sim}{X}}_{SLS} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{\mu}_1(x_1^*) & \hat{\mu}_2(x_1^*) & \cdots & \hat{\mu}_k(x_1^*) \\ 1 & \hat{\mu}_1(x_2^*) & \hat{\mu}_2(x_2^*) & \cdots & \hat{\mu}_k(x_2^*) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \hat{\mu}_1(x_n^*) & \hat{\mu}_2(x_n^*) & \cdots & \hat{\mu}_k(x_n^*) \end{bmatrix}_{n\times(k+1)}$$

และ $$\underset{\sim}{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

ดังนั้น $$\mathrm{m} = \hat{\underset{\sim}{X}}_{SLS}'\underset{\sim}{Y}$$

มีค่าเท่ากับ

$$\mathrm{m} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\mu}_1\left(x_i^*\right)\right)y_i \\ \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\mu}_2\left(x_i^*\right)\right)y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\mu}_k\left(x_i^*\right)\right)y_i \end{bmatrix}_{(k+1)\times 1}$$

การประยุกต์ใช้การประมาณค่าวิธีกำลังสองน้อยสุดทางโครงสร้างได้จากการแทนค่า $\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{X}$ และ $\underset{\sim}{X}'\underset{\sim}{Y}$ ด้วยค่าประมาณของเมทริกซ์ M และเวกเตอร์ m ได้เป็น

$$\mathrm{M}\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{n_{SLS}} = \mathrm{m}$$

และตัวประมาณ $\underset{\sim}{\beta}$ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุดทางโครงสร้างคือ

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{n_{SLS}} = \mathrm{M}^{-1}\mathrm{m}$$

ตัวอย่างการประมาณค่าวิธีกำลังสองน้อยสุดทางโครงสร้าง

สถานการณ์ที่กำหนดกรณีพหุนามอันดับ 2

1. ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5

2. ตัวแปรอิสระมีการแจกแจงแบบปกติ (x) มีค่าเฉลี่ย $\mu = 10$ และความแปรปรวน $\sigma^2 = 1$

3. ความคลาดเคลื่อนในตัวแปรอิสระ (u) มีการแจกแจงแบบปกติ มีค่าเฉลี่ย $\mu = 0$ และความแปรปรวน $\sigma^2 = 0.5$

4. ความคลาดเคลื่อนในตัวแปรสุ่ม (ε) มีการแจกแจงแบบปกติ มีค่าเฉลี่ย $\mu = 0$ และความแปรปรวน $\sigma^2 = 0.1$

จากสถานการณ์ที่กำหนดจะได้ว่า

เมทริกซ์ $\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} 1 & 11.1498 & 124.3181 \\ 1 & 9.1983 & 84.6078 \\ 1 & 9.7650 & 95.3560 \\ 1 & 10.7747 & 116.0949 \\ 1 & 10.0353 & 100.7074 \end{bmatrix}$, เมทริกซ์ $\underset{\sim}{X}^* = \begin{bmatrix} 1 & 10.7458 & 115.4717 \\ 1 & 9.0165 & 81.2970 \\ 1 & 9.7736 & 95.5237 \\ 1 & 10.1795 & 103.6229 \\ 1 & 10.4046 & 108.2561 \end{bmatrix}$

เวกเตอร์ $\underset{\sim}{Y} = \begin{bmatrix} 8.5592 \\ 10.2251 \\ 9.7277 \\ 9.7176 \\ 9.4049 \end{bmatrix}$, $\sigma_x^2 = 0.6128$ และ $\sigma_u^2 = 0.5$

การคำนวณเมทริกซ์ M และเวกเตอร์ m มีขั้นตอนดังนี้

1. คำนวณเมทริกซ์ $\mathrm{M} = \underset{\sim}{X}'_{SLS}\underset{\sim}{X}_{SLS}$

จาก $$\mu_k\left(x_i^* \mid x_i\right) = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(\mu_j^*\right)\left(\mu_1\left(x_i^*\right)\right)^{k-j}$$

เมื่อ $$\mu_1\left(x_i^*\right) = r_{x*}x_i^* + \left(1-r_{x*}\right)\mu_{x*}$$

โดยที่ $$r_{x*} = \left[\frac{\hat{\sigma}_x^2}{\left(\hat{\sigma}_x^2+\sigma_u^2\right)}\right]$$

และ $$\mu_j^* = \begin{cases} 0 & ; j \text{ มีค่าเป็นจำนวนเต็มคี่} \\ 1.3\ldots(j-1)\tau^j & ; j \text{ มีค่าเป็นจำนวนเต็มคู่} \\ 1 & ; j \text{ มีค่าเท่ากับ } 0 \end{cases}$$

โดยที่ $$\tau^2 = \sigma_u^2\left(1-\frac{\sigma_u^2}{\sigma_{x*}^2}\right) = r_{x*}\sigma_u^2$$

พิจารณา ค่า $$r_{x*} = \left[\frac{\sigma_x^2}{\left(\sigma_x^2+\sigma_u^2\right)}\right] = \frac{0.6128}{0.6128+0.5} = 0.5507$$

ดังนั้น $r_{x*} = 0.5507$

ค่า $$\mu_1\left(x_i^*\right) = r_{x*}x_i^* + \left(1-r_{x*}\right)\mu_{x*}$$

$$= (0.5507)\begin{bmatrix} 10.7458 \\ 9.0165 \\ 9.7736 \\ 10.1795 \\ 10.4046 \end{bmatrix} + (1-0.5507)(10.1846)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5.9177 \\ 4.9653 \\ 5.3823 \\ 5.6058 \\ 5.7298 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4.5759 \\ 4.5759 \\ 4.5759 \\ 4.5759 \\ 4.5759 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.4936 \\ 9.5414 \\ 9.9583 \\ 10.1818 \\ 10.3058 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $\mu_1(x_i^*) = \begin{bmatrix} 10.4936 \\ 9.5414 \\ 9.9583 \\ 10.1818 \\ 10.3058 \end{bmatrix}$

พิจารณา ค่า $\tau^2 = \sigma_u^2\left(1 - \frac{\sigma_u^2}{\sigma_{x^*}^2}\right) = r_{x^*}\sigma_u^2$

$$\tau = \sqrt{r_{x^*}\sigma_u^2}$$

$$= \sqrt{(0.5507)(0.5)} = 0.5247$$

ดังนั้น $\tau = 0.5247$

ค่า $\mu_j^* = \begin{cases} 0 & ;\ j \text{ มีค่าเป็นจำนวนเต็มคี่} \\ 1.3...(j-1)\tau^j & ;\ j \text{ มีค่าเป็นจำนวนเต็มคู่} \\ 1 & ;\ j \text{ มีค่าเท่ากับ } 0 \end{cases}$

เมื่อ $j = 0$ ค่า $\mu_0^* = 1$

$j = 1$ ค่า $\mu_1^* = 0$

$j = 2$ ค่า $\mu_2^* = (2-1)(0.5247)^2 = 0.2753$

พิจารณา $\mu_k(x_i^* \mid x_i) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\mu_j^*) (\mu_1(x_i^*))^{k-j}$ เมื่อ $k = 0,1$ และ 2

เมื่อ $k = 0$

$$\mu_0(x^*) = \binom{0}{0}(\mu_0^*)(\mu_1(x^*)^0) = \begin{bmatrix} 10.4936 \\ 9.5414 \\ 9.9583 \\ 10.1818 \\ 10.3058 \end{bmatrix}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $k = 1$

$$\mu_1(x^*) = \binom{1}{0}(\mu_0^*)(\mu_1(x^*)) + \binom{1}{1}(\mu_1^*)(\mu_1(x^*)^0)$$

$$= \mu_1(x^*) = \begin{bmatrix} 10.4936 \\ 9.5414 \\ 9.9583 \\ 10.1818 \\ 10.3058 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $k = 2$

$$\mu_2(x^*) = \binom{2}{0}(\mu_0^*)(\mu_1(x^*)^2) + \binom{2}{1}(\mu_1^*)(\mu_1(x^*)) + \binom{2}{2}(\mu_2^*)(\mu_1(x^*)^0)$$

$$= (\mu_1(x^*)^2) + 0 + (0.2753)$$

$$= \begin{bmatrix} 10.4936 \\ 9.5414 \\ 9.9583 \\ 10.1818 \\ 10.3058 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 0.2753 \\ 0.2753 \\ 0.2753 \\ 0.2753 \\ 0.2753 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110.3917 \\ 91.3130 \\ 99.4431 \\ 103.9448 \\ 106.4842 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นเมทริกซ์ของ $\underset{\sim}{X}_{SLS}$ ที่ได้มีค่าเท่ากับ

$$\underset{\sim}{X}_{SLS} = \begin{bmatrix} 1 & 10.4936 & 110.3917 \\ 1 & 9.5414 & 91.3130 \\ 1 & 9.9583 & 99.4431 \\ 1 & 10.1818 & 103.9448 \\ 1 & 10.3058 & 106.4842 \end{bmatrix}$$

2. คำนวณเวกเตอร์ $\mathrm{m} = \underset{\sim}{X}'_{SLS}\underset{\sim}{Y}$

จากเมทริกซ์ $\underset{\sim}{X}_{SLS} = \begin{bmatrix} 1 & 10.4936 & 110.3917 \\ 1 & 9.5414 & 91.3130 \\ 1 & 9.9583 & 99.4431 \\ 1 & 10.1818 & 103.9448 \\ 1 & 10.3058 & 106.4842 \end{bmatrix}$ และเวกเตอร์ $\underset{\sim}{Y} = \begin{bmatrix} 8.5592 \\ 10.2251 \\ 9.7277 \\ 9.7176 \\ 9.4049 \end{bmatrix}$

ดังนั้นเวกเตอร์ $\mathrm{m} = \begin{bmatrix} 1 & 10.4936 & 110.3917 \\ 1 & 9.5414 & 91.3130 \\ 1 & 9.9583 & 99.4431 \\ 1 & 10.1818 & 103.9448 \\ 1 & 10.3058 & 106.4842 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 8.5592 \\ 10.2251 \\ 9.7277 \\ 9.7176 \\ 9.4049 \end{bmatrix}$

จาก $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{n_{SLS}} = \mathrm{M}^{-1}\mathrm{m} = \left(\underset{\sim}{X}'_{SLS}\underset{\sim}{X}_{SLS}\right)^{-1}\left(\underset{\sim}{X}'_{SLS}\underset{\sim}{Y}\right)$

เมื่อแทนค่าเมทริกซ์ $\underset{\sim}{X}_{SLS}$ และเวกเตอร์ $\underset{\sim}{Y}$ จะได้ว่า

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{n_{SLS}} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 10.4936 & 110.3917 \\ 1 & 9.5414 & 91.3130 \\ 1 & 9.9583 & 99.4431 \\ 1 & 10.1818 & 103.9448 \\ 1 & 10.3058 & 106.4842 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 1 & 10.4936 & 110.3917 \\ 1 & 9.5414 & 91.3130 \\ 1 & 9.9583 & 99.4431 \\ 1 & 10.1818 & 103.9448 \\ 1 & 10.3058 & 106.4842 \end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$\times \left(\begin{bmatrix} 1 & 10.4936 & 110.3917 \\ 1 & 9.5414 & 91.3130 \\ 1 & 9.9583 & 99.4431 \\ 1 & 10.1818 & 103.9448 \\ 1 & 10.3058 & 106.4842 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 8.5592 \\ 10.2251 \\ 9.7277 \\ 9.7176 \\ 9.4049 \end{bmatrix}\right)$$

เนื่องจาก x_{SLS} และ x^2_{SLS} มีความสัมพันธ์กันค่อนข้างสูง จึงเกิดความยุ่งยากในการคำนวณเมทริกซ์ $\left(\underset{\sim}{X}'_{SLS}\underset{\sim}{X}_{SLS}\right)^{-1}$ ดังนั้นจึงปรับตัวแปรอิสระให้เป็นศูนย์กลาง (Center) ก่อนที่จะประมาณสัมประสิทธิ์การถดถอยเพื่อลดปัญหาความสัมพันธ์

โดยที่ $\bar{x} = 10.1846$ และ $\bar{x}^2 = 104.2168$

จะได้ว่า $$\underset{\sim}{X}_{SLSadjust} = \begin{bmatrix} 1 & 10.4936-10.1846 & 110.3917-104.2168 \\ 1 & 9.5414-10.1846 & 91.3130-104.2168 \\ 1 & 9.9583-10.1846 & 99.4431-104.2168 \\ 1 & 10.1818-10.1846 & 103.9448-104.2168 \\ 1 & 10.3058-10.1846 & 106.4842-104.2168 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นเมทริกซ์ $$\underset{\sim}{X}_{SLSadjust} = \begin{bmatrix} 1 & 0.3090 & 6.1749 \\ 1 & -0.6432 & -12.9038 \\ 1 & -0.2263 & -4.7737 \\ 1 & 0.0028 & -0.2720 \\ 1 & 0.1212 & 2.2674 \end{bmatrix}$$

จะได้ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{n_{SLS}} = \left(\underset{\sim}{X}'_{SLSadjust}\underset{\sim}{X}_{SLSadjust}\right)^{-1}\left(\underset{\sim}{X}'_{SLSadjust}\underset{\sim}{Y}\right)$

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{n_{SLS}} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0.3090 & 6.1749 \\ 1 & -0.6432 & -12.9038 \\ 1 & -0.2263 & -4.7737 \\ 1 & 0.0028 & -0.2720 \\ 1 & 0.1212 & 2.2674 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 1 & 0.4696 & 9.5575 \\ 1 & -0.4826 & -9.5212 \\ 1 & -0.0657 & -1.3911 \\ 1 & 0.1578 & 3.1106 \\ 1 & 0.2818 & 5.6500 \end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$\times \left(\begin{bmatrix} 1 & 0.3090 & 6.1749 \\ 1 & -0.6432 & -12.9038 \\ 1 & -0.2263 & -4.7737 \\ 1 & 0.0028 & -0.2720 \\ 1 & 0.1212 & 2.2674 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 8.5592 \\ 10.2251 \\ 9.7277 \\ 9.7176 \\ 9.4049 \end{bmatrix}\right)$$

ดังนั้น $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{n_{SLS}} = (9.1324 \;\; 38.0171 \;\; -1.9759)'$

ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ผู้วิจัยได้ศึกษาผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง มีรายละเอียดดังนี้

ธิฏิรัตน์ เมฆบัณฑิตกุล (2546) ศึกษาเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบการถดถอยพหุนามอันดับ 2, 3, 4, 5 และ 6 เมื่อมีความคลาดเคลื่อนในตัวแปรอิสระภายใต้ข้อมูลมีการแจกแจงแบบปกติ ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 15, 30, 50, 100, และ 200 ความคลาดเคลื่อนสุ่มในตัวแปรตามเป็นการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 และ 1 การแจกแจงของความคลาดเคลื่อนในตัวแปรอิสระเป็นการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 0.1, 0.3, 0.5 และ 0.7 โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (OLS) วิธีกำลังสองน้อยสุดปรับปรุง (ALS) และวิธีกำลังสองน้อยสุดถ่วงน้ำหนัก (WLS) เกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบ คือ ค่าเฉลี่ยรากที่สองของค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยสัมพัทธ์ (ARSE) จากผลการศึกษา พบว่า เมื่อขนาดตัวอย่างมากกว่า 15 วิธีประมาณค่าพารามิเตอร์วิธีกำลังสองน้อยสุดถ่วงน้ำหนัก (WLS) ให้ค่าเฉลี่ยรากที่สองของค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยสัมพัทธ์ (ARSE) น้อยกว่าวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (OLS) และวิธีกำลังสองน้อยสุดปรับปรุง (ALS) แต่ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 15 วิธี WLS จะ

ประมาณค่าพารามิเตอร์ได้ดีที่สุดเมื่อส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของความคลาดเคลื่อนสุ่มในตัวแปรตามและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของความคลาดเคลื่อนในตัวแปรอิสระมีค่ามากกว่า 0.5

ณหทัย สระกบแก้ว (2549) ศึกษาเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบการถดถอยพหุนามอันดับ 2, 3, 4, 5 และ 6 เมื่อมีความคลาดเคลื่อนในตัวแปรอิสระ ภายใต้ข้อมูลมีการแจกแจงแบบปกติ และการแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20, 50, 100 และ 200 ความคลาดเคลื่อนสุ่มมีการแจกแจงแบบปกติมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ 0.01, 0.09, 0.5 และ 1 ความคลาดเคลื่อนในตัวแปรอิสระมีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย 0 และความแปรปรวนเท่ากับ 0.01, 0.09, 0.5 และ 1 โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (OLS) วิธีกำลังสองน้อยสุดปรับปรุง (ALS) และวิธีกำลังสองน้อยสุดทางโครงสร้าง (SLS) เกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบ คือ ค่าเฉลี่ยรากที่สองของค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยสัมพัทธ์ (ARSE) จากผลการศึกษา พบว่า วิธีประมาณค่าพารามิเตอร์วิธีกำลังสองน้อยสุดทางโครงสร้าง (SLS) ให้ค่าเฉลี่ยรากที่สองของค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยสัมพัทธ์ (ARSE) น้อยกว่าวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (OLS) และวิธีกำลังสองน้อยสุดปรับปรุง (ALS) ยกเว้นเมื่อค่า σ_u^2 และค่า σ_ε^2 มีค่าเข้าใกล้ 1 พหุนามอันดับของตัวแบบการถดถอยเท่ากับ 6 ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20, 50 และ 100 วิธี ALS จะมีประสิทธิภาพมากที่สุด และเมื่อค่า σ_u^2 มีค่าไม่เกิน 0.01 และพหุนามอันดับของตัวแบบการถดถอยเท่ากับ 2 และ 3 วิธี SLS และวิธี ALS จะมีประสิทธิภาพใกล้เคียงกัน

Kukush, Schneeweiss and Wolf (2000) ศึกษาเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบการถดถอยพหุนามอันดับ 2 และพหุนามอันดับ 4 เมื่อมีความคลาดเคลื่อนในตัวแปรอิสระ ภายใต้ข้อมูลมีการแจกแจงแบบปกติ กำหนด $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = 2$ และ $\beta_2 = 3$ ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 900 ค่า σ_u^2 เท่ากับ 0.01 และ 0.05 และค่า σ_ε^2 เท่ากับ 0.002 และ 20 โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (OLS) วิธีกำลังสองน้อยสุดปรับปรุง (ALS) และวิธีกำลังสองน้อยสุดทางโครงสร้าง (SLS) เกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบ คือ ค่าความเอนเอียง (Bias) และค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (SD) จากผลการศึกษา พบว่า วิธีประมาณค่าพารามิเตอร์วิธีกำลังสองน้อยสุดทางโครงสร้าง (SLS) ให้ค่าความเอนเอียง (Bias) และค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (SD) น้อยกว่าวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (OLS) และวิธีกำลังสองน้อยสุดปรับปรุง (ALS)

Kukush, Schneeweiss and Wolf (2001) ศึกษาเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบการถดถอยพหุนามอันดับ 2 และพหุนามอันดับ 3 เมื่อมีความคลาดเคลื่อนในตัวแปรอิสระ ภายใต้ข้อมูลมีการแจกแจงแบบปกติ กำหนด $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = 1$ และ $\beta_2 = 0.5$ ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 200 และ 900 ค่า σ_u^2 เท่ากับ 0.01 และ 0.05 และค่า σ_ε^2 เท่ากับ 0.002 และ 20 โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (OLS) วิธีกำลังสองน้อยสุดปรับปรุง (ALS) และวิธีกำลังสองน้อยสุดทางโครงสร้าง (SLS) เกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบ คือ ค่าความเอนเอียง (Bias) และค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (SD) จากผลการศึกษา พบว่า วิธีประมาณค่าพารามิเตอร์วิธีกำลังสองน้อยสุดทางโครงสร้าง (SLS) ให้ค่าความเอนเอียง (Bias) และค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (SD) น้อยกว่าวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (OLS) และวิธีกำลังสองน้อยสุดปรับปรุง (ALS)

Huang and Huwang (2001) ศึกษาเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบการถดถอยพหุนามอันดับ 2 เมื่อมีความคลาดเคลื่อนในตัวแปรอิสระภายใต้ข้อมูลมีการแจกแจงแบบปกติ โดยแบ่งการศึกษาออกเป็น 2 กรณี ในกรณีที่ 1 กำหนด $\beta_0 = 5$, $\beta_1 = 2$ และ $\beta_2 = 3$ ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 100, 200, 400 และ 1,000 ค่า σ_u^2 มีค่าเท่ากับ 0.5 ค่า σ_ε^2 มีค่าเท่ากับ 0.5 และ 1 โดยวิธีประมาณค่า BGLS และวิธีกำลังสองน้อยสุดถ่วงน้ำหนัก ในกรณีที่ 2 กำหนด $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 1$ และ $\beta_2 = 0.1$, 0.8 และ 0.5 ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20, 50, 100 และ 500 ค่า σ_u^2 มีค่าเท่ากับ 1 ค่า σ_ε^2 มีค่าเท่ากับ 0.3 โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (OLS) วิธีกำลังสองน้อยสุดปรับปรุง (ALS) และวิธีกำลังสองน้อยสุดถ่วงน้ำหนัก (WLS) โดยทั้ง 2 กรณี ใช้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังเฉลี่ย (MSE) เป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบ จากผลการศึกษาทั้ง 2 กรณี พบว่า วิธีประมาณค่าพารามิเตอร์วิธีกำลังสองน้อยสุดถ่วงน้ำหนัก (WLS) ให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังเฉลี่ย (MSE) น้อยกว่าวิธี BGLS วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (OLS) และวิธีกำลังสองน้อยสุดปรับปรุง (ALS)