

บทที่ 1

บทนำ

1. ความสำคัญ ที่มาของปัญหาที่ทำการวิจัย และการทบทวนเอกสารที่เกี่ยวข้อง (reviewed literature)

1.1 ความสำคัญ ที่มาของปัญหาที่ทำการวิจัย

กระบวนการผลิตอาหารด้วยวิธี extrusion จัดว่าเป็นกระบวนการการผลิตที่ให้กำลังการผลิตและประสิทธิภาพสูงจึงได้รับความนิยมใช้กันแพร่หลายมากในภาคอุตสาหกรรมอาหาร กระบวนการ extrusion เป็นทั้งตัวผสมและตัวทำให้อาหารสุกไปพร้อมกัน วัตถุประสงค์หลักที่เข้าสู่กระบวนการผลิตในรูปของของแข็งปนของเหลวจะผ่านกระบวนการแปรรูปเป็นของไหลและเกิดการเปลี่ยนแปลงทางเคมีกายภาพเมื่อได้รับความร้อนจากกระบวนการจนกระทั่งแปรรูปกลับเป็นของแข็งอีกครั้งหลังจากออกจากหัวคายขึ้นรูปที่ปลายทางออกของเครื่องเอกซ์ทรูชันนี้ เป็นที่ทราบกันดีในกลุ่มของวิศวกรผู้ควบคุมระบบผลิตทางนี้ว่า การผลิตให้ได้ผลิตภัณฑ์ในรูปทรงที่ต้องการและการรักษาคุณภาพของผลิตภัณฑ์ให้มีความเหมือนกันนั้นถือว่าเป็นเรื่องค่อนข้างซับซ้อนซึ่งการผลิตโดยทั่วไปจะต้องอาศัยประสบการณ์ของผู้ควบคุมระบบในการปรับแต่งตัวแปรที่มีผลต่อกระบวนการผลิตนับตั้งแต่ การกำหนดแบบการจัดเรียงตัวของสกรู การออกแบบหัวคายในกรณีของการผลิตผลิตภัณฑ์ใหม่ การควบคุมปริมาณความร้อนหรืออุณหภูมิแต่ละย่านของเครื่องเอกซ์ทรูชัน และการปรับความเร็วรอบของการหมุนสกรู เป็นต้น สาเหตุของความซับซ้อนในการปรับค่าตัวแปรของเครื่องเอกซ์ทรูชันนี้เป็นเพราะว่าการเปลี่ยนแปลงทางเคมีและกายภาพของวัตถุดิบอาหารที่กลายสภาพเป็นสารประเภทกึ่งแข็งกึ่งเหลว (viscoelastic material) เมื่อได้รับความร้อนและพลังงานจากแรงเฉือนภายใต้กระบวนการ extrusion ส่งผลกระทบโดยตรงต่อคุณสมบัติทางการไหลและการเปลี่ยนแปลงรูปทรงเมื่อถูกแรงภายนอกกระทำ (rheology properties) (Darby,1976) แต่ข้อมูลการศึกษาเรื่องคุณสมบัติทาง rheology ของวัตถุดิบอาหารที่จำเป็นต่อการควบคุมเครื่องเอกซ์ทรูชันเพื่อให้ได้ผลิตภัณฑ์ในรูปที่ต้องการยังมีไม่มากพอเนื่องจากข้อจำกัดหลายอย่างอันได้แก่ ข้อจำกัดด้านข้อมูลในเรื่องคุณสมบัติทางกายภาพของวัตถุดิบอาหารซึ่งจะเป็นค่าที่ต้องก็ต่อเมื่อเป็นการติดตามบันทึกค่าจากเครื่องมือวัดระหว่างกระบวนการผลิตจริง ข้อจำกัดเรื่องของเทคนิคการทำขยายส่วนข้อมูลการผลิตที่ได้จากเครื่องเอกซ์ทรูชันขนาดย่อมส่วนมาใช้กับกับเครื่องที่ใช้ในอุตสาหกรรมและที่สำคัญก็คือข้อจำกัดเรื่องความหลากหลายของส่วนประกอบที่ใช้เป็นวัตถุดิบอาหารนั่นเอง ด้วยเหตุนี้ทำให้อุตสาหกรรมการผลิตอาหารด้วยเครื่องเอกซ์ทรูชันนั้นต้องสิ้นเปลืองงบประมาณจำนวนมากสำหรับการทดสอบการผลิตอย่างสุ่มจนกว่าจะได้ผลิตภัณฑ์ที่ต้องการ ทั้งนี้วิธีการลดต้นทุนการผลิตในส่วนนี้สามารถทำได้โดยการลดจำนวนการทดลองสุ่มด้วยการตั้งค่าตัวแปรควบคุม

การผลิตเริ่มต้น โดยอาศัยผลการวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้จากแบบคำนวณทางคณิตศาสตร์ที่ใช้จำลองพฤติกรรมการไหลของของไหลที่เกิดขึ้นในเครื่องเอกซ์ทรูชันบนพื้นฐานความรู้ในเรื่อง computational fluid dynamics และ food rheology การใช้เทคนิคเรื่องระเบียบวิธีเชิงตัวเลขมาทำนายพฤติกรรมของไหลที่เกิดขึ้นนี้กำลังเป็นที่ยอมรับกันอย่างกว้างขวางว่าสามารถใช้ช่วยลดต้นทุนการผลิตลงได้อย่างมากและช่วยให้การผลิตทำได้เร็วและมีประสิทธิภาพสูงขึ้น ถึงแม้ว่าเทคนิคดังกล่าวนี้จะมีการวิจัยใช้ในอุตสาหกรรมหนักอื่นๆ มาพอสมควรแต่เพิ่งจะเข้ามามีบทบาทในแวดวงอุตสาหกรรมอาหารได้ไม่นาน ดังนั้นงานวิจัยนี้จะมีส่วนช่วยเสริมสร้างความเข้มแข็งให้กับอุตสาหกรรมอาหารในบ้านเราได้โดยลดการพึ่งพาเทคโนโลยีด้านนี้จากต่างประเทศลงและเพิ่มศักยภาพของอุตสาหกรรมอาหารในเมืองไทยให้เกิดเทคโนโลยีที่สามารถสร้างวิธีการควบคุมกระบวนการผลิตผลิตภัณฑ์ที่มีคุณภาพ ทัดเทียมกับต่างประเทศ โครงการนี้จะช่วยวางรากฐานงานวิจัยให้สอดคล้องกับความต้องการของภาคอุตสาหกรรมโดยตรงและช่วยพัฒนาการเรียนการสอนขอบเขตความรู้ด้านวิศวกรรมอาหาร

1.2 รายงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

เทคนิคการใช้วิธีระเบียบวิธีเชิงตัวเลขมาศึกษาเกี่ยวกับพฤติกรรมการไหลของวัตถุดิบจำพวกวัสดุธรรมชาติในกรรมวิธีการผลิต โดยเครื่องเอกซ์ทรูชันทำโดยการวิเคราะห์ระบบสมการที่ใช้อธิบายปรากฏการณ์การไหลที่เกิดขึ้นในกระบวนการผลิตที่เขียนบนพื้นฐานของกฎทางฟิสิกส์เรื่องหลักการอนุรักษ์มวล กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตันหรือการถ่ายโอนโมเมนตัม และหลักการอนุรักษ์พลังงานร่วมกับการใช้สมการตัวประกอบอื่นๆ เพื่อเพิ่มความสัมพันธ์ให้เท่ากับจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าและเพื่อทราบฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงค่าของตัวแปรอันเนื่องมาจากปัจจัยควบคุมการผลิต สมการตัวประกอบที่เกี่ยวข้องกัน ได้แก่ สมการความสัมพันธ์ระหว่างอิทธิพลของอุณหภูมิและเวลาที่มีต่อการถ่ายโอนความร้อน สมการความสัมพันธ์ระหว่างอิทธิพลของความเค้นที่มีต่อการเปลี่ยนรูปและอัตราการเปลี่ยนรูปของวัตถุดิบอาหาร (rheological constitutive equations) เป็นต้น (Kamal and Ryan, 1989) ความถูกต้องของการจำลองพฤติกรรมการไหลด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขนี้จะมีผลต่อการนำไปใช้ในการตั้งค่าตัวแปรควบคุมระบบผลิตให้มีประสิทธิภาพได้นั้นขึ้นกับตัวแปรสองเรื่องคือ หนึ่งเรื่องความถูกต้องของแบบสมการตัวประกอบ และเรื่องเทคนิคระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่เลือกมาประยุกต์ใช้ในงานคำนวณนั่นเอง

ความถูกต้องของแบบสมการตัวประกอบ โดยเฉพาะในเรื่องของอัตราการเปลี่ยนรูปของวัตถุดิบอาหารภายใต้อิทธิพลของความเค้นจัดว่าเป็นประเด็นสำคัญของงานคำนวณก็ด้วยว่ารูปแบบสมการตัวประกอบที่พัฒนามันมีขีดจำกัดของการนำไปใช้ ทั้งนี้เป็นเพราะว่าสมการตัวประกอบที่ใช้อธิบายคุณสมบัติเรื่องการไหลและการเปลี่ยนรูปของวัตถุดิบอาหารขึ้นกับคุณสมบัติ

พื้นฐานของวัตถุดิบ เช่น ความหนืด ความหนาแน่น คุณสมบัติทางความร้อน ซึ่งค่าของคุณสมบัติเหล่านี้จะแปรตามปัจจัยเรื่อง ความร้อน ความดัน แรงกระทำ การได้มาซึ่งค่าคุณสมบัติพื้นฐานที่ถูกต้องของวัตถุดิบอาหารเหล่านี้จัดได้ว่าเป็นส่วนสำคัญมากของงานคำนวณที่จำเป็นต้องได้ค่าจากการทดลองจริงสำหรับส่วนผสมของวัตถุดิบที่ไม่เหมือนกันขึ้นกับชนิดของผลิตภัณฑ์ นอกจากนี้ค่าคุณสมบัติพื้นฐานของวัตถุดิบอาหารเป็นที่ทราบกันว่ายังไม่มีการเก็บบันทึกรวบรวมเป็นข้อมูลที่มีความเชื่อถืออย่างเป็นระบบระเบียบ งานวิจัยเรื่องการพัฒนาแบบสมการตัวประกอบเกี่ยวกับพฤติกรรมเรื่อง rheology ของวัตถุดิบอาหารทำบนพื้นฐานทฤษฎีควอนตัมและทฤษฎีทางโมเลกุลคล้ายกับแบบสมการที่ใช้สำหรับอธิบายการไหลของพอลิเมอร์เหล่านั้นเอง (Maddock 1974, Pearson 1976, Bird et al. 1987) หากแต่ว่าการประยุกต์วิธีนี้มาใช้กับวัตถุดิบอาหารที่นอกจากจะจัดเป็นของไหลประเภทนอนนิว โทเนียนแล้วยังมีส่วนประกอบของวัตถุดิบหลากหลายตัวที่มีความแตกต่างกันในด้าน โมเลกุลและซับซ้อนมากกว่าในกรณีของส่วนประกอบของพอลิเมอร์ผสมเสียอีกสาเหตุนี้ทำให้การนำแบบสมการตัวประกอบที่มีการคิดกันขึ้นมาบ้างแล้วนั้น ไปใช้ได้ค่อนข้างจำกัดในย่านแรงเฉือนที่แบบสมการจะสามารถบรรยายการเปลี่ยนรูปของวัตถุดิบอาหารได้อยู่ในช่วงที่เชื่อถือได้ แม้ว่าการวิจัยพัฒนาแบบสมการตัวประกอบสำหรับการไหลของวัตถุดิบอาหารจะเริ่มพัฒนากันมาตั้งแต่ช่วงปลายคริสต์ศตวรรษที่ 70 (Remsen et al.1978, Cervone and Harper 1978, Harper 1981) ผลงานวิจัยมีไม่มากนักด้วยข้อจำกัดเรื่องเครื่องมือวัดการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติทางกายภาพพื้นฐานที่เปลี่ยนแปลงค่าได้ทำให้การตรวจ สอบความถูกต้องของแบบสมการทางการทดลองจริงไม่สามารถทำได้คืบคาน งานวิจัยและพัฒนาแบบสมการเรื่อง rheology นี้มาได้รับความสนใจกันอีกครั้งตั้งแต่ต้นคริสต์ศตวรรษที่ 90 เรื่อยมาเพราะเทคนิคงานวิจัยเรื่องระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่สามารถจำลองพฤติกรรมการไหลของของไหลให้เห็นแนวโน้มการเปลี่ยนแปลงของวัตถุดิบที่เกิดขึ้นในกระบวนการผลิตจริงและเริ่มเป็นที่ยอมรับใช้กันอย่างแพร่หลายทำให้การวิจัยตรวจสอบความถูกต้องของแบบสมการตัวประกอบทางอ้อมกระทำได้โดยการเปรียบเทียบความถูกต้องของพารามิเตอร์วัดพฤติกรรมการไหลที่ได้จากผลการคำนวณที่ต้องอาศัยแบบสมการตัวประกอบกับค่าจากมาตรวัดจริง เช่น อัตราการไหล ความเร็ว ความดัน เป็นต้น ประกอบกับความเร็วเรื่องการคำนวณของเครื่องคอมพิวเตอร์ทำให้การจำลองการไหลทำได้รวดเร็วจนขึ้นมากด้วย (Bhattacharya and Hanna 1986, Morgan et al.1989, Mackey et al. 1990, Karwe and Jaluria 1990, Gopalakrishna and Jaluria 1992)

การจำลองพฤติกรรมการไหลด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแรกเริ่มนั้นถูกนำไปใช้เป็นเครื่องมือเพื่อทำความเข้าใจกระบวนการผลิตด้วยวิธี extrusion เทคนิคการคำนวณด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขระยะแรกๆ นั้นยังมีขีดจำกัดด้านความเร็วในการคำนวณของเครื่องคอมพิวเตอร์และทฤษฎีเทคนิคระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเองทำให้การคำนวณต้องทำโดยการลดรูปความซับซ้อนของปัญหาลง เช่น การ

สมมติให้การไหลเป็นแบบสองมิติและให้การไหลเป็นแบบการไหลเต็มรูปแบบผ่านช่องการไหลแบบช่องสี่เหลี่ยมซึ่งเป็นรูปเรขาคณิตของตัวสกรูที่คลายตัวออก (Fenner, 1977) การพัฒนาแบบคำนวณได้ทำกันต่อเนื่องเพื่อหาคำตอบเรื่องการไหลของของไหลชนิดนอนนิวโทเนียนภายใต้อิทธิพลทางความร้อน (Elbirli and Lindt 1984, Lindt 1989, Karwe and Jaluria 1990) ตั้งแต่ช่วงคริสต์ศตวรรษที่ 90 ที่คอมพิวเตอร์มีความเร็วด้านคำนวณเพิ่มขึ้นมากก็มีผลงานวิจัยที่น่าเทคนิคระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเรื่อง finite difference หรือ finite element หรือ finite volume มาเขียนโปรแกรมคำนวณแบบจำลองพฤติกรรมการไหลของของไหลในกระบวนการ extrusion กันมากขึ้น อาทิ งานจำลองการหลอมของพลาสติก LDPE และ PVC ในส่วนหลอมละลายของเครื่องเอกซ์ทรูดชันด้วยวิธีทาง finite element (Thibault and Tanguy, 1994, Chang and Lin, 1995) งานพัฒนาแบบจำลองพฤติกรรมการไหลนี้ขยายผลต่อเนื่องไปอย่างรวดเร็วตามการพัฒนาด้านเครื่องคอมพิวเตอร์และซอฟต์แวร์ด้านการเขียนแบบทางวิศวกรรมที่มีศักยภาพสูงในการเขียนรูปชิ้นงานได้ตามแบบจริงอย่างถูกต้องซึ่งเคยถือเป็นอุปสรรคสำคัญต่อการคำนวณของไหลผ่านสิ่งกีดขวางที่มีรูปทรงซับซ้อน เช่นในกรณีของตัวสกรุนั่นเอง ทำให้การพัฒนาซอฟต์แวร์การคำนวณเรื่อง fluid dynamics พัฒนาไปได้โดยไม่มีข้อจำกัดเรื่องการขึ้นรูปเครื่องมือจนกระทั่งซอฟต์แวร์แบบการจำลองการไหลปัจจุบันนี้สามารถทำการทำนายและจำลองการไหลของของไหลในรูปสามมิติผ่านตัวสกรูที่เป็นรูปทรงจริงไม่จำเป็นต้องใช้เทคนิคการปรับรูปสิ่งกีดขวางหรือตัวพาการไหลให้ง่ายต่อการการคำนวณ ส่งผลให้การจำลองพฤติกรรมการไหลกระทำได้รวดเร็วขึ้นกว่าในอดีตมาก อาทิ งานวิจัยของ Syrjala (1999) ที่เสนอการจำลองการไหลของของไหลผ่านตัวสกรูแบบสามมิติและเสนอแบบคำนวณการถ่ายโอนความร้อนที่เกิดขึ้นไปพร้อมกันด้วย งานวิจัยโดย Dhanasekharan and Kokini (2003) เรื่องการทำขยายส่วนเครื่อง single screw extruder ขนาดห้องปฏิบัติการที่ใช้สำหรับผลิตอาหารที่มีวัตถุดิบเป็นแป้งข้าวสาลีไปเป็นเครื่องขนาดจริงโดยอาศัยผลการจำลองพฤติกรรมการไหลและการถ่ายโอนความร้อนที่เกิดขึ้น โดยใช้โปรแกรมคำนวณทางของไหลที่ชื่อ Polyflow[®] งานวิจัยของผู้วิจัยทีมนี้เน้นในเรื่องของรูปทรงและขนาดของตัวสกรูและ screw barrel ว่ามีผลอย่างไรต่อค่า specific mechanical energy และ residence time distribution สำหรับกรณีของเครื่องมือที่ออกแบบโดยทำการขยายส่วนบนพื้นฐานของผลการคำนวณที่ได้จากเครื่องขนาดที่ใช้ในห้องปฏิบัติการซึ่งมีการเปรียบเทียบกับข้อมูลการทดลองจริงว่าถูกต้องแล้ว ผลที่ได้นี้เป็นการทำนายการไหลแบบสามมิติโดยไม่มีการใช้เทคนิคการคลายตัวสกรู การจำลองพฤติกรรมการไหลและการเปลี่ยนรูปของวัตถุดิบอาหาร ณ ขณะนี้มีการพัฒนางานวิจัยกันมากในเรื่องเทคนิคการคำนวณให้ได้ผลลัพธ์เร็วและมีความถูกต้องสูง กลุ่มผู้วิจัยพัฒนาเทคนิคระเบียบวิธีเชิงตัวเลขกับงานประยุกต์ด้านนี้ เช่น กลุ่มของ Dr. Tanguy ที่ใช้เทคนิคที่เรียกว่า fictitious domain method ร่วมกับ adaptive mesh refinement มาติดตามการเคลื่อนที่ของของไหลผ่านช่องว่างระหว่างตัวสกรูกับตัวครอบสกรูที่มีขนาดช่องว่างเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา

ขณะสกรูหมุนอันเนื่องมาจากอิทธิพลด้านรูปทรงของตัวสกรูนั่นเอง เทคนิคดังกล่าวนี้ช่วยย่นระยะเวลาการคำนวณพร้อมๆกันกับเพิ่มความแม่นยำของการคำนวณพฤติกรรมการไหลขึ้น (Bertrand et al., 1997 and Bertrand et al., 2002) วิธี adaptive mesh refinement ถือได้ว่าเป็นเทคนิคที่ได้รับการยอมรับกันสูงในแวดวงผู้วิจัยเรื่องระเบียบวิธีเชิงตัวเลขอยู่ขณะนี้

งานวิจัยเพื่อจำลองพฤติกรรมผสม การไหล และการเปลี่ยนรูปของวัตถุดิบอาหารในกระบวนการผลิตอาหารในเมืองไทยนั้นถือได้ว่ายังค่อนข้างใหม่ และกำลังได้รับการพัฒนาวิจัยเพื่อตอบสนองความต้องการของภาคอุตสาหกรรม ผู้วิจัยจึงมีความเชื่อมั่นว่าการพัฒนางานวิจัยเรื่องการจำลองพฤติกรรมการไหลของวัตถุดิบจำพวกแป้งในกระบวนการผลิตแบบ extrusion จะช่วยเพิ่มขีดความสามารถด้านการผลิต และเป็นการช่วยส่งเสริมให้สามารถพัฒนางานวิจัยต่อเนื่องในศาสตร์ด้านนี้ส่งผลให้เรามีงานวิจัยให้เกื้อหนุนความรู้ด้านการจำลองพฤติกรรมเปลี่ยนแปลงของของไหลซึ่งสามารถนำไปประยุกต์เพื่อตอบสนองความต้องการให้กับภาคอุตสาหกรรมผลิตอาหารบ้านเรา

2. วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย

วัตถุประสงค์ของโครงการ คือ การใช้แบบทำนายทางคณิตศาสตร์สำหรับหาค่าการเปลี่ยนแปลงค่าคุณสมบัติทางกายภาพของวัตถุดิบอาหารจำพวกแป้งร่วมกับ โปรแกรมคำนวณทาง Computational Fluid Dynamics มาสร้างแบบจำลองพฤติกรรมการไหลของแป้งที่จัดเป็นของไหลประเภท Non-Newtonian ที่เกิดในเครื่องเอกซ์ทรูชัน เพื่อให้เข้าใจและสามารถประมาณการการเปลี่ยนแปลงของพฤติกรรมการไหลอันเป็นผลมาจากการเปลี่ยนค่าของตัวแปรควบคุมกระบวนการทำงานของเครื่องเอกซ์ทรูชัน ได้แก่ ความชื้นของวัตถุดิบ ปริมาณสัดส่วนของวัตถุดิบ ความร้อน หรือ อุณหภูมิที่ตำแหน่งต่างๆของเครื่อง อัตราการป้อนวัตถุดิบ ความเร็วรอบของเพลาสกรู ขนาดของหัวคาย และตัวแปรด้านรูปทรงทางเรขาคณิตของตัวสกรู การตรวจสอบความถูกต้องของผลการจำลองพฤติกรรมการไหลที่ได้นี้ยืนยันโดยการเปรียบเทียบค่าทำนายกับค่าจากผลการผลิตจริง

3. ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ และหน่วยงานที่นำผลการวิจัยไปใช้ประโยชน์

3.1 ทางด้านเศรษฐกิจ

ผลงานวิจัยนี้ช่วยลดค่าใช้จ่ายของการผลิตอาหารด้วยเครื่องเอกซ์ทรูชัน การนำผลการทำนายพฤติกรรมการไหลไปใช้ปรับค่าตัวแปรควบคุมการผลิตให้มีความแม่นยำขึ้นจะลดค่าใช้จ่ายที่เกิดจากการทดลองผลิตให้ได้ผลิตภัณฑ์ในรูปทรงที่ต้องการแบบลองผิดลองถูกลงได้มากเมื่อเทียบกับ การทดลองจริง ทั้งนี้เพราะการผลิตด้วยเครื่องเอกซ์ทรูชันในอุตสาหกรรมนั้นมีกำลังการผลิตที่สูงมากจึงทำให้เกิดการสูญเสียวัตถุดิบอาหารจำนวนมากถ้าเกิดความผิดพลาดขณะผลิต

3.2 ทางด้านวิชาการ

เนื่องจากงานวิจัยในเรื่องนี้จะเกี่ยวข้องกับการนำความรู้ในหลายสาขาวิชา ได้แก่ ความรู้ทางด้านวิศวกรรมเครื่องกล วิศวกรรมอาหาร วิศวกรรมคอมพิวเตอร์ วิศวกรรมเคมี และเทคโนโลยีพอลิเมอร์ มาสังเคราะห์ให้ร่วมกันส่งผลให้เกิดองค์ความรู้ใหม่ให้แก่แวดวงวิชาการ ที่สำคัญคืองานวิจัยนี้สอดคล้องกับความต้องการของภาคอุตสาหกรรมการผลิตอาหารของบ้านเราซึ่งถือได้ว่าเป็นผู้ผลิตอาหารเลี้ยงประชากรโลกในอันดับต้นๆ งานวิจัยนี้ยังจะช่วยกระตุ้นความสนใจของนักวิจัยบ้านเราต่อการทำงานวิจัยเพื่อพัฒนาอุตสาหกรรมอาหารมากขึ้น อันจะก่อให้เกิดระบบการทำงานเป็นทีมที่เข้มแข็ง สรรค์สร้างให้เกิดการพัฒนาเทคโนโลยีที่สามารถแข่งขันกับต่างประเทศได้อย่างรวดเร็ว

4. หน่วยงานที่น่าผลการวิจัยไปใช้ประโยชน์

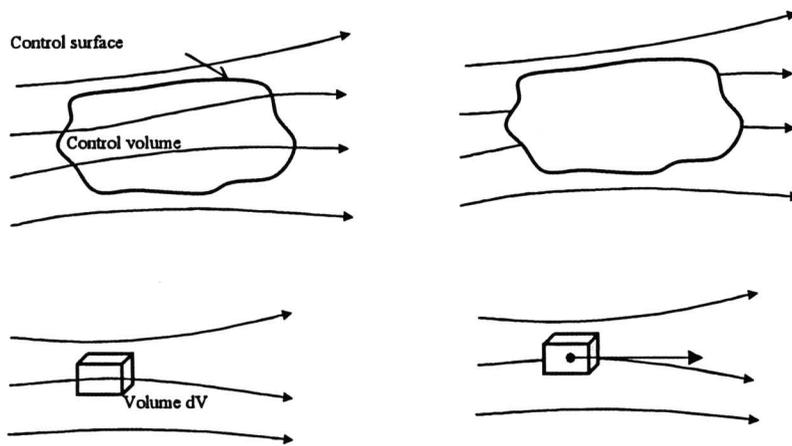
แนวทางในการศึกษาเกี่ยวกับเครื่องสกรูเอกซ์ทราซันสำหรับงานทางการผลิตอาหารนี้เป็นเรื่องใหม่สำหรับเมืองไทย ประกอบกับนโยบายของรัฐบาลที่ส่งเสริมให้เมืองไทยเป็นครัวของโลก ทางผู้ผลิตอาหารส่วนใหญ่จึงสรรหาเครื่องมือที่ช่วยเพิ่มประสิทธิภาพในการผลิต ทำให้ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะศึกษาทางด้านนี้อย่างจริงจัง เพื่อต้องการนำประโยชน์จากงานวิจัยไปช่วยพัฒนาอุตสาหกรรมทางการผลิตอาหารให้มีศักยภาพสูงมากขึ้น ซึ่งส่วนใหญ่ที่มีใช้ในโรงงานอุตสาหกรรมจะต้องพึ่งพาความรู้จากบริษัทที่นำเข้าเครื่องมือส่งผลให้ประเทศสูญเสียเงินตราไปเป็นจำนวนไม่น้อยในแต่ละปี

5. ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

5.1 สมการควบคุมการไหล

5.1.1 การวิเคราะห์การไหล

สมการควบคุมของการไหลมักถูกสร้างบนมูลฐานของ (1) *กฎอนุรักษ์มวล* ที่กล่าวว่ามวลย่อมไม่เพิ่มขึ้นหรือสูญหายไปจากระบบ (2) *กฎอนุรักษ์โมเมนตัม* ที่กล่าวว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมย่อมเท่ากับผลรวมของแรงทั้งหมดที่กระทำต่อปริมาตรควบคุมของการไหล ตามกฎข้อที่สองของนิวตัน และ (3) *กฎอนุรักษ์พลังงาน* ที่กล่าวว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานย่อมเท่ากับผลรวมของอัตราความร้อนกับอัตราของงานที่กระทำกับปริมาตรควบคุมของการไหล ตามกฎข้อที่หนึ่งของเทอร์โมไดนามิกส์ การวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงของการไหล ซึ่งนำไปสู่กฎมูลฐานต่าง ๆ นั้น กระทำได้ 2 แบบ คือ แบบปริมาตรควบคุม (Control volume) และแบบเอลิเมนต์ขนาดเล็ก (Infinitesimal fluid element)



รูปที่ 1.1 การวิเคราะห์ระบบการไหล แบบปริมาตรควบคุม (รูปบน) แบบเอลิเมนต์ขนาดเล็ก (รูปล่าง) (Versteeg and Malalasekera., 1995)

การวิเคราะห์แบบปริมาตรควบคุม เป็นการพิจารณาให้ของไหลมีลักษณะเป็นก้อนหรือปริมาตรปิดที่เรียกว่าปริมาตรควบคุม (Control volume) ที่ถูกล้อมรอบด้วยผิวควบคุม (Control surface) ระบบปริมาตรควบคุมแบ่งย่อยตามลักษณะของการสังเกตการณ์ได้ 2 แบบ คือ แบบปริมาตรควบคุมหยุดนิ่ง โดยอนุภาคของไหลสามารถไหลผ่านเข้าออกผิวควบคุมได้ ดังแสดงในรูปที่ 1.1(ซ้ายบน) และแบบปริมาตรควบคุมเคลื่อนที่ไปพร้อมกับสนามการไหล ดังแสดงในรูปที่ 1.1 (ขวาบน) สมการการไหลที่วิเคราะห์ได้ด้วยวิธีปริมาตรควบคุมนี้จะอยู่ในรูปอินทิกรัล (Integral form) หากวิเคราะห์แบบปริมาตรควบคุมหยุดนิ่งจะได้ “สมการรูปแบบอนุรักษ์ (Conservation form)” แต่หากวิเคราะห์แบบปริมาตรควบคุมเคลื่อนที่จะได้ “สมการรูปแบบไม่อนุรักษ์ (Non-conservation form)”

แบบเอลิเมนต์ขนาดเล็กมาก เป็นการพิจารณาให้ของไหลมีลักษณะเป็นก้อนเอลิเมนต์ขนาดเล็กมากในระดับอนุพันธ์ ขนาดที่เล็กมากของเอลิเมนต์ดังกล่าวไม่ได้หมายความว่ามีความละเอียดโมเลกุลของของไหล แต่เป็นขนาดที่ประกอบด้วยจำนวนโมเลกุลของของไหลมากพอ อีกทั้งยังต้องคงคุณสมบัติความต่อเนื่องของเนื้อสารไว้ด้วย นอกจากนี้หลักฟิสิกส์มูลฐานที่ประยุกต์เข้ากับเอลิเมนต์ก็ใช้ได้กับเอลิเมนต์นั้นๆ เท่านั้น ไม่สามารถใช้เป็นตัวแทนของสนามการไหลได้ การวิเคราะห์แบบเอลิเมนต์ขนาดเล็กแบ่งได้ 2 แบบเช่นเดียวกับการวิเคราะห์แบบปริมาตรควบคุม คือ แบบเอลิเมนต์หยุดนิ่ง โดยให้อนุภาคของของไหลผ่านเข้าออกเอลิเมนต์ได้ รูปที่ 1.1 (ซ้ายล่าง) และแบบเอลิเมนต์เคลื่อนที่ไปพร้อมกับสนามการไหล รูปที่ 1.1 (ขวาล่าง) การวิเคราะห์แบบเอลิเมนต์ขนาดเล็กจะได้สมการการไหลในรูปอนุพันธ์ (Differential form) ซึ่งหากวิเคราะห์แบบเอลิเมนต์หยุดนิ่งก็จะ

ได้รูปสมการแบบอนุพันธ์ แต่หากวิเคราะห์แบบเอลิเมนต์เคลื่อนที่ก็จะได้รูปสมการแบบไม่อนุพันธ์ เช่นเดียวกับวิธีปริมาตรควบคุม

นอกจากการวิเคราะห์การไหลทั้ง 2 แบบดังที่กล่าวแล้วข้างต้นการวิเคราะห์การไหลยังต้องพิจารณาให้ของไหลเป็นสารต่อเนื่อง กล่าวคือ การไหลระดับมหภาค (Macroscopic scale) หรือระดับสัดส่วนที่ใหญ่กว่า $1\mu\text{m}$ ขึ้นไป ของไหลมักถูกกำหนดให้มีคุณสมบัติเป็นสารเนื้อต่อเนื่อง (Continuum) โดยจะไม่พิจารณาโครงสร้างและการเคลื่อนตัวของอนุภาคในระดับโมเลกุล เพราะถือว่าอนุภาคที่อยู่ภายในเอลิเมนต์มีขนาดเล็กมาก การเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติของอนุภาคใดอนุภาคหนึ่ง จะไม่มีผลกระทบหรือมีผลกระทบน้อยมากต่อคุณสมบัติระดับมหภาค ดังนั้น การพิจารณาจึงให้ความสนใจพฤติกรรมและคุณสมบัติระดับมหภาคแทน เช่น ความเร็ว ความหนาแน่น อุณหภูมิ เป็นต้น

5.1.2 สมการอนุพันธ์มวล

หากนำหลักการสังเกตแบบเอลิเมนต์หุ้มนิ่งไปวิเคราะห์การไหลของมวล พบว่าการไหลของมวลสุทธิเข้าสู่เอลิเมนต์ มีค่าเท่ากับอัตราการเพิ่มขึ้นของมวลภายในเอลิเมนต์ ข้อกล่าวนี้เป็นหลักการที่นำไปสู่กฎการอนุพันธ์มวลหรือสมการของมวล ดังนี้

อัตราการเพิ่มของมวลในเอลิเมนต์ของของไหล = อัตราของมวลสุทธิที่ไหลเข้าสู่เอลิเมนต์

โดยมีสมการดังนี้

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (1-1)$$

สมการที่(1.1) เรียกว่าสมการอนุพันธ์มวลหรือสมการความต่อเนื่อง (Continuity equation) ใน 3 มิติ สำหรับการไหลที่ขึ้นกับเวลา

โดย ρ = ความหนาแน่น, \vec{u} = ความเร็ว

5.1.3 สมการอนุพันธ์โมเมนตัม

สมการอนุพันธ์โมเมนตัมตั้งอยู่บนพื้นฐานของกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน ที่กล่าวว่า “อัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเท่ากับผลรวมของแรงที่กระทำกับอนุภาคนั้นๆ”

อัตราการเปลี่ยนแปลง โมเมนตัม = ผลรวมของแรงที่กระทำต่ออนุภาค

โดยมีสมการดังนี้คือ

$$-\nabla P + \nabla \cdot \tau = 0 \quad (1-2)$$

$$\tau = \eta \cdot (\nabla V + \nabla V^T) \quad (1-3)$$

โดย P = ความดัน, V = ความเร็ว, τ = stress, η = ความหนืดที่ปรากฏ

5.1.4 สมการอนุรักษ์พลังงาน

สมการพลังงานวิเคราะห์ที่ได้จากกฎข้อที่หนึ่งของเทอร์โมไดนามิกส์ กล่าวว่า “อัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานเท่ากับผลรวมของอัตราความร้อนกับอัตราของงานสุทธิต่กระทำต่ออนุภาค”

$$\begin{aligned} \text{อัตราการเพิ่มขึ้นของพลังงาน} &= \text{อัตราความร้อนสุทธิต่ให้กับอนุภาค} \\ &+ \text{อัตรางานสุทธิต่กระทำต่ออนุภาค} \end{aligned}$$

โดยมีสมการดังนี้คือ

$$\rho C_p (V \cdot \nabla T) - \tau : \nabla V + \nabla \cdot q = 0 \quad (1-4)$$

โดย q = กระแสความร้อน, C_p = ค่าความจุความร้อนจำเพาะ

5.2 วิชยากระแสของแข็ง

การจำลองพฤติกรรมการอัดตัวของแข็งโดยใช้ซอฟต์แวร์ด้านพลศาสตร์ของไหลจำเป็นต้องอาศัยค่าความหนืดของวัสดุ โดยแข็งเมื่อได้รับความร้อนขึ้นในปริมาณมากพอแข็งจะมีลักษณะกึ่งเหลว กึ่งแข็งหรือลักษณะคล้ายของไหลมากขึ้นซึ่งเรียกว่า “โด้” ดังนั้นเทคนิคการจำลองด้วยซอฟต์แวร์จะสมมติให้แข็งที่มีลักษณะที่เรียกว่า “โด้” มีการไหลขณะถูกอัดตัวผ่านเครื่องเอกซ์ทรูชัน

นิยามค่าความหนืดของของไหลได้ถูกกำหนดไว้ว่าเป็นค่าความสามารถในการต้านทานการไหลของของไหล อันเกิดเนื่องมาจากการยึดเหนี่ยวระหว่างอนุภาคของของไหล ซึ่งหาได้จากความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นเฉือนและอัตราเฉือน โดยมีความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ของค่าความหนืดของแข็งในรูปแบบ “power law fluid model” ซึ่งมีสมการในรูป

$$\tau = k \dot{\gamma}^n \quad (1-5)$$

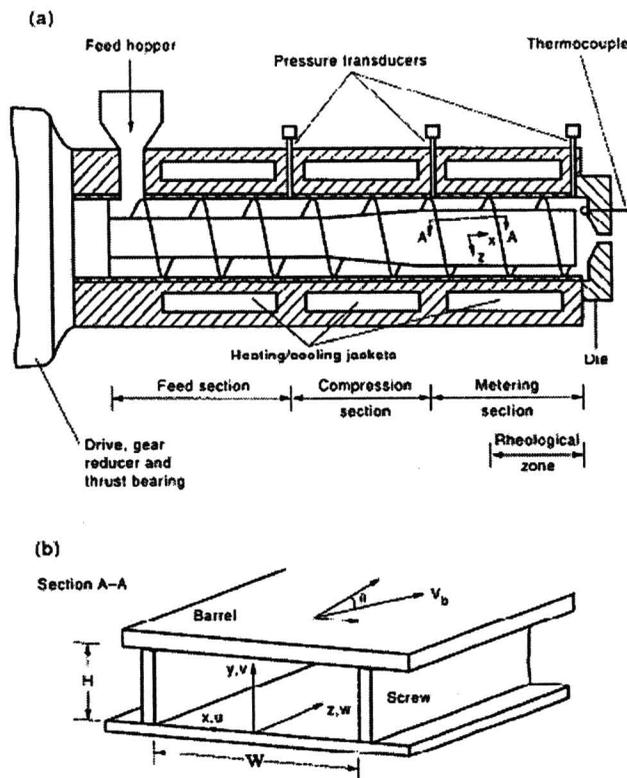
โดยที่ τ = ความเค้นเฉือน (shear stress) ในหน่วย Pa, $\dot{\gamma}$ = อัตราเฉือน (shear rate) ในหน่วย 1/s,

k = คชนี้บ่งบอกค่าแรงยึดเหนี่ยวระหว่างอนุภาค, n = คชนี้บ่งบอกพฤติกรรมของการไหล

5.3 สมการผลเฉลยเชิงวิเคราะห์สำหรับเครื่องเอกซทรูชันชนิดสกรูเดี่ยว

5.3.1 สมการสำหรับของไหลแบบนิวโทเนียน

การสร้างสมการผลเฉลยเชิงวิเคราะห์เพื่อวิเคราะห์พฤติกรรมการไหลภายในเครื่องเอกซทรูชันชนิดสกรูเดี่ยว ตั้งอยู่บนพื้นฐานของการคลี่ช่องทางการไหลภายในเครื่องเอกซทรูชันให้อยู่ในระบบพิกัดฉากดังรูปที่ 1.2



รูปที่ 1.2 (a) แสดงลักษณะของสกรูและ barrel, (b) แสดงลักษณะของช่องทางการไหลที่ถูกคลี่ออก และกำหนดให้อยู่ในระบบพิกัดฉาก (Karwe et.al.,1996)

โดยตั้งสมมติฐานให้ของไหลมีลักษณะคือ 1. การไหลเป็นแบบราบเรียบ 2. การไหลแบบอุณหภูมิคงที่ 3. ของไหลเป็นของไหลแบบนิวโทเนียนและอัดตัวไม่ได้ 4. ไม่คิดแรงเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก 5. การไหลเป็นแบบคงรูป 6. ไม่มีการลื่นไถลที่ผิวของสกรู จากเงื่อนไขดังกล่าว ทำให้ได้สมการการเคลื่อนที่ในระบบพิกัดฉากดังนี้

$$\text{ทิศทาง } z \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \quad (1-6)$$

$$\text{ทิศทาง } y \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \quad (1-7)$$

$$\text{ทิศทาง } x \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \quad (1-8)$$

โดยที่ x, y และ z คือระบบพิกัดของ channel width, channel depth และ down channel ตามลำดับ เนื่องจากอัตราส่วน H/W มีค่าน้อยมากทำให้สามารถตั้งสมมติฐานได้ว่า $v_y \approx 0$ จากสมมติฐานดังกล่าวทำให้ $\partial v_y / \partial x \approx 0, \partial v_x / \partial x \approx 0$ และ $\partial v_y / \partial y \approx 0$ ดังนั้นทำให้สามารถลดรูปสมการ (1-6) – (1-8) ได้คือ

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right) \quad (1-9)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} \approx 0 \quad (1-10)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} \approx \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (1-11)$$

การหาผลเฉลยให้กับสมการ (1-9) จะกำหนดให้ barrel เป็นชิ้นส่วนหมุนและกำหนดให้สกรูหยุดนิ่ง (Rowell and Finlayson, 1928; Mckelvey, 1953; Middleman, 1977; Giffith, 1962; Choo et al., 1980; Campbell et al., 1992) โดยมีเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

Barrel:	$v_z(x, H) = R_s \omega \cos \phi_b,$
Screw root:	$v_z(x, 0) = 0$
Screw flights:	$v_z(0, y) = 0,$
	$v_z(W, y) = 0$

จากเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดให้ barrel หมุนและให้สกรูหยุดนิ่งนั้นเป็นเงื่อนไขขอบเขตที่ไม่ถูกต้องตามลักษณะการทำงานจริงของเครื่องเอกซ์ทรูชัน ซึ่งลักษณะจริงนั้นชิ้นส่วนที่หมุนคือสกรูและชิ้นส่วนที่หยุดนิ่งคือ barrel โดยความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยที่กำหนดให้ barrel หมุนและสกรูหยุดนิ่งถูกนำเสนอโดย Li and Hsieh (1994) นอกจากนั้น Li and Hsieh (1994) ได้นำเสนอสมการผลเฉลยที่กำหนดให้สกรูเป็นชิ้นส่วนหมุนและ barrel เป็นชิ้นส่วนหยุดนิ่ง เงื่อนไขขอบเขตดังกล่าวถูกต้องสอดคล้องตามลักษณะการทำงานจริงของเครื่องเอกซ์ทรูชันทำให้ผลเฉลยที่ได้มีความถูกต้องแม่นยำมากขึ้น โดยมีเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

$$\begin{aligned}
\text{Barrel:} & \quad v_z(x, H) = 0, \\
\text{Screw root:} & \quad v_z(x, 0) = R_s \omega \cos \phi_b, \\
\text{Screw flights:} & \quad v_z(0, y) = (R_s + y) \omega \cos \phi_b, \\
& \quad v_z(W, y) = (R_s + y) \omega \cos \phi_b
\end{aligned}$$

เงื่อนไขขอบเขตดังกล่าวถูกใช้สำหรับหาผลเฉลยให้กับความเร็วของ down channel flow ซึ่งมีผลเฉลยดังสมการที่ (1-12)

$$v_z = R_s \omega \cos \phi_b f_{v1} + (2R_b - H) \omega \cos \phi_b f_{v2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \cdot (aW^2 f_{v3} + bH^2 f_{v4}) \quad (1-12)$$

โดยที่

$$f_{v1} = \frac{4}{\pi} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{W} \sinh \frac{i\pi(H-y)}{W}}{i \sinh \frac{i\pi H}{W}} \quad (1-13)$$

$$f_{v2} = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi y}{H} \sinh \frac{i\pi(W-x)}{H} + \sinh \frac{i\pi x}{H}}{i \sinh \frac{i\pi W}{H}} \quad (1-14)$$

$$f_{v3} = \frac{4}{\pi^3} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{W}}{i^3} \left[\frac{\sinh \frac{i\pi(H-y)}{W} + \sinh \frac{i\pi y}{W}}{\sinh \frac{i\pi H}{W}} - 1 \right] \quad (1-15)$$

$$f_{v4} = \frac{4}{\pi^3} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi y}{H}}{i^3} \left[\frac{\sinh \frac{i\pi(W-x)}{H} + \sinh \frac{i\pi x}{H}}{\sinh \frac{i\pi W}{H}} - 1 \right] \quad (1-16)$$

ค่าคงที่ a และ b ในสมการที่ (1-12) มีค่าขึ้นกับอัตราส่วน H/W ถ้าอัตราส่วน H/W มีค่าน้อยจะทำให้ได้ค่า $a=0$ และ $b=1$ แต่ถ้าค่าอัตราส่วน H/W มีค่ามากจะทำให้ได้ค่า $a=1$ และ $b=0$ ตามลำดับ

สำหรับการคำนวณความเร็วให้กับ cross channel flow, v_x สามารถทำได้โดยหาปริพันธ์สองชั้นของสมการที่ (1-11) โดยได้ผลเฉลยดังนี้

$$v_x = \frac{\partial P}{\partial x} \frac{y^2}{2\mu} + c_1 y + c_2 \quad (1-17)$$



ค่าคงที่ c_1 และ c_2 สามารถหาได้โดยใช้เงื่อนไขขอบเขต $v_x(H) = 0$ และ $v_x(0) = -R_s \omega \sin \phi_b$ แทนค่าเงื่อนไขขอบเขตดังกล่าวลงในสมการที่ (1-17) ทำให้ได้สมการเพื่อหาค่า v_x ดังแสดงในสมการที่ (1-18)

$$v_x = \frac{\partial P}{\partial x} \frac{(y^2 - Hy)}{2\mu} - R_s \omega \sin \phi_b \frac{H - y}{H} \quad (1-18)$$

ในสมการ (1-18) ปกติแล้วค่า $\partial P / \partial x$ มักเป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า ดังนั้นการประมาณค่าดังกล่าวสามารถทำได้โดยการหาปริพันธ์ของค่า v_x ตลอดทั่วทั้ง channel depth ดังนี้

$$\int_0^H v_x dy = -\frac{H^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{R_s \omega \sin \phi_b H}{2} = Q_{leakage} \quad (1-19)$$

ทำให้ได้สมการเพื่อประมาณค่า $\partial P / \partial x$ ดังสมการ (1-20)

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{12\mu}{H^3} \left[Q_{leakage} + \frac{R_s \omega \sin \phi_b H}{2} \right] \quad (1-20)$$

แทนค่า $\partial P / \partial x$ ลงในสมการ (1-18) ทำให้ได้สมการเพื่อหาค่า v_x ดังนี้

$$v_x = \frac{R_s \omega \sin \phi_b (H - y)}{H} \left[3 \frac{y}{H} - 1 \right] + \frac{6Q_{leakage} [Hy - y^2]}{H^3} \quad (1-21)$$

จากสมการ (1-21) หากทราบมิติของสกรูและค่า $Q_{leakage}$ ก็สามารถคำนวณหาค่าความเร็ว v_x ได้ โดยสามารถคำนวณค่า $Q_{leakage}$ ได้จาก Rauwendaal(1986, 1988) โดยมีสมการคือ

$$Q_{leakage} = \frac{\delta}{H} R_s \omega \sin \phi_b W_s H \quad (1-22)$$

ทำการรวมค่าความเร็วใน down channel flow, v_z และความเร็วใน cross channel flow, v_x จะทำได้ความเร็วในแนว axial, v_a และความเร็วในแนว tangential ซึ่งหาได้จากสมการ

$$v_a = v_z \sin \phi_b + v_x \cos \phi_b \quad (1-23)$$

$$v_t = v_z \cos \phi_b - v_x \sin \phi_b \quad (1-24)$$

นอกจากความสัมพันธ์ระหว่างความดันและความเร็วในทิศทางต่างๆแล้วความสัมพันธ์ระหว่างความดันกับอัตราการไหลก็เป็นปัจจัยที่มีความสำคัญมากอีกปัจจัยหนึ่งสำหรับการออกแบบเครื่องเอกซ์ทอร์ชัน Li และ Hsieh (1994) ได้เสนอสมการสำหรับคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างอัตรา

สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ	
ห้องสมุดงานวิจัย	
วันที่.....	13 ต.ย. 2555
เลขทะเบียน.....	246729
เลขเรียกหนังสือ.....	

การไหลและความดัน สมการดังกล่าวถูกสร้างบนสมมติฐานที่ให้สกรูหมุนและ barrel หยุดนิ่ง โดยมีสมการดังนี้

$$Q_z = R_b \omega \cos \varphi_b W^2 f_{Q1} + (2R_b - H) \omega \cos \varphi_b H^2 f_{Q2} + \frac{a}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \left(W^4 f_{Q3} - \frac{W^3 H}{12} \right) + \frac{b}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \left(H^4 f_{Q4} - \frac{H^3 W}{12} \right) \quad (1-25)$$

โดยที่

$$f_{Q1} = \frac{8}{\pi^3} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{i^3} \left[\frac{\cosh \frac{i\pi H}{W} - 1}{\sinh \frac{i\pi H}{W}} \right] \quad (1-26)$$

$$f_{Q2} = \frac{8}{\pi^3} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{i^3} \left[\frac{\cosh \frac{i\pi W}{H} - 1}{\sinh \frac{i\pi W}{H}} \right] \quad (1-27)$$

$$f_{Q3} = \frac{16}{\pi^5} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{i^5} \left[\frac{\cosh \frac{i\pi H}{W} - 1}{\sinh \frac{i\pi H}{W}} \right] \quad (1-28)$$

$$f_{Q4} = \frac{16}{\pi^5} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{i^5} \left[\frac{\cosh \frac{i\pi W}{H} - 1}{\sinh \frac{i\pi W}{H}} \right] \quad (1-29)$$

5.3.2 สมการสำหรับของไหลแบบอนินวิโทเนียน

สมการที่ (1-25) สามารถคำนวณอัตราการไหลได้เฉพาะของไหลแบบนิวโทเนียนเท่านั้น สำหรับงานวิจัยนี้ได้ใช้แปงโคซัวเจ้าเป็นของไหลตัวอย่างซึ่งมีลักษณะการไหลแบบ power law fluid model ดังนั้นสมการที่ (1-25) จึงไม่สามารถใช้คำนวณอัตราการไหลได้ หากต้องการคำนวณอัตราการไหลจำเป็นต้องใช้สมการสำหรับของไหลแบบ power law fluid model โดยสมการดังกล่าวได้ถูกนำเสนอโดย Rauwendaal (2001) โดยมีสมการคือ

$$Q_z = \left(\frac{4+n}{10}\right) pWHv_{bz} - \left(\frac{1}{1+2n}\right) \frac{pWH^3(\partial P/\partial z)}{4\eta} \quad (1-30)$$

โดยที่

$$\eta = k \left(\frac{v_{bz}}{H}\right)^{n-1} \quad (1-31)$$

โดยค่า $\partial P/\partial Z$ ที่ใช้สำหรับการคำนวณในสมการที่ (1-12), (1-25) และ (1-30) ได้นำค่าจากผลการจำลองมาคำนวณและค่า $\partial P/\partial x$ ที่ใช้คำนวณในสมการที่ (1-18) ได้ใช้ค่าจากผลการจำลองมาคำนวณด้วยเช่นเดียวกัน

5.3.3 สมการคำนวณตัวแปรไร้มิติผลต่างความดัน และตัวแปรไร้มิติอัตราการไหลเชิงมวลของผลิตภัณฑ์

การคำนวณตัวแปรไร้มิติความดันและตัวแปรไร้มิติอัตราการไหลสามารถคำนวณได้จากสมการที่ (1-32) และสมการ (1-33) ตามลำดับ สมการดังกล่าวถูกนำเสนอใน Li and Hsieh(1995) โดยมีสมการดังต่อไปนี้

$$Q_z^* = F_d^* - F_p^* P_z \quad (1-32)$$

และ

$$P_z = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial Z} \frac{H^2}{R_b \omega \cos \phi_b} \quad (1-33)$$

โดยที่

$$F_d^* = \frac{1-H/R_b}{H/R_b} \left[\frac{2\pi \tan \phi_b}{n_t} - \frac{e}{R_b} \right] f_{Q1} + \frac{0.271377272H/R_b(2-H/R_b)}{\left(\frac{2\pi \tan \phi_b}{n_t} - \frac{e}{R_b} \right) \cos \phi_b} \quad (1-34)$$

$$F_p^* = \frac{1}{12} - \frac{0.05252075H/R_b}{\left(\frac{2\pi \tan \phi_b}{n_t} - \frac{e}{R_b} \right) \cos \phi_b} \quad (1-35)$$

5.4 สมการคำนวณวิธีเชิงตัวเลขเพื่อการจำลองการไหล

การจำลองพฤติกรรมกรไหลของแป็ง โคนเครื่องเอ็กซ์ทูลชันของงานวิจัยนี้ทำโดยการประยุกต์ใช้ซอฟต์แวร์คำนวณทางพลศาสตร์ของไหล Fluent 6.3.26 ซึ่งรายละเอียดพอสังเขปของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่เลือกใช้ในการหาผลเฉลยของชุดสมการควบคุมการไหลของระบบดังกล่าวในหัวข้อก่อนหน้าสรุปหลักการได้ดังนี้

โปรแกรม Fluent ใช้เทคนิค control-volume หรือ finite-volume ในการแปลงชุดสมการควบคุมการไหลในรูปของสมการอินทิเกรตรอบปริมาตรปิดของระบบที่ต้องการวิเคราะห์พฤติกรรมกรไหล ได้แก่ สมการอนุกรมมวล โมเมนตัม และพลังงาน เป็นระบบสมการพีชคณิตเพื่อให้สามารถแก้ระบบสมการหาผลเฉลยได้โดยการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

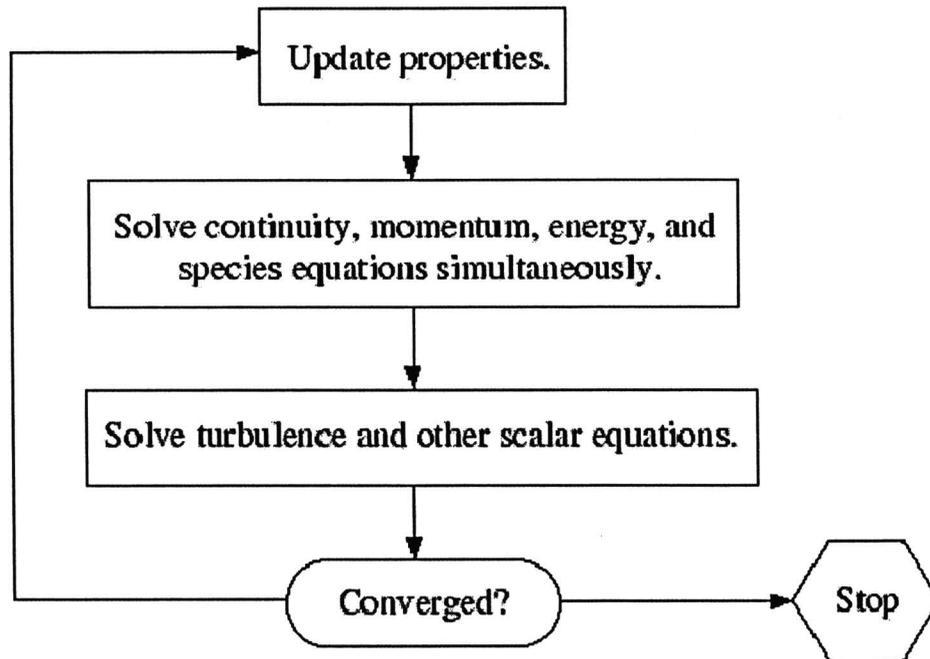
เทคนิค control-volume ประกอบด้วยการแบ่งปริมาตรรวมของระบบออกเป็นปริมาตรย่อยๆ จากนั้นใช้การอินทิเกรตสมการควบคุมระบบของแต่ละปริมาตรควบคุมย่อยหรือเป็นเทคนิครวมระบบสมการย่อยของแต่ละปริมาตรปิดที่ยังคงหลักการอนุรักษ์ปริมาณควบคุมระบบ การแบ่งปริมาตรควบคุมระบบออกเป็นปริมาตรย่อยเรียกว่าการทำ Discretization เพื่อให้สามารถใช้ชุดสมการควบคุมระบบของปริมาตรย่อยในการหาผลเฉลยของค่า ความเร็ว ความดัน อุณหภูมิ และคุณสมบัติทางกายภาพให้กับสนามกรไหล ณ ตำแหน่งต่างๆ โดยเทคนิคการแก้สมการเชิงตัวเลข

กรรมวิธีที่เลือกใช้ในโปรแกรม Fluent เพื่อหาผลเฉลยให้กับชุดสมการควบคุมระบบของงานวิจัยนี้คือ coupled solution method ซึ่งมีขั้นตอนสรุปดังปรากฏในรูปที่ 1.3 โดยมีรายละเอียดดังนี้

1. คำนวณค่าคุณสมบัติทางกายภาพของกรไหลขึ้นกับผลเฉลยปัจจุบัน ในกรณีขั้นเริ่มต้นจะใช้ค่าผลเฉลยที่กำหนดไว้เพื่อการเริ่มคำนวณ

2. แก้ชุดสมการอนุกรมมวล โมเมนตัม และหรือพลังงานขึ้นกับสภาวะที่ต้องใช้ และการถ่ายโอนอนุภาคไปพร้อมกัน โดยที่การคำนวณปริมาตรเซลล์ตามสมการควบคุมค่าดังกล่าวทำเป็นลำดับแต่แยกออกจากชุดสมการควบคุมระบบที่ต้องใช้หาผลเฉลยไปพร้อมกัน เนื่องด้วยชุดสมการควบคุมระบบเป็นสมการแบบไม่เชิงเส้น และเป็นหลายสมการที่เกี่ยวข้องกันการแก้สมการหาผลเฉลยโดยใช้เทคนิคระเบียบวิธีเชิงตัวเลขจึงต้องใช้ขั้นตอนคำนวณซ้ำหลายรอบจนกว่าจะได้ผลเฉลยที่เข้าสู่เกณฑ์วัดความถูกต้องของผลเฉลยที่กำหนดไว้เบื้องต้น

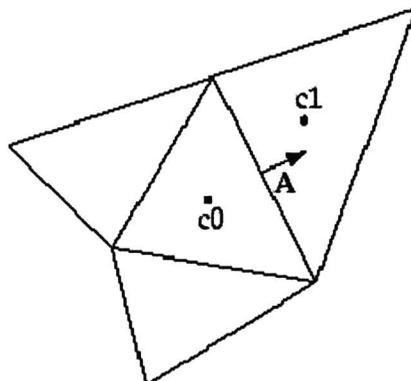
3. ตรวจสอบค่าผลเฉลยว่าเข้าสู่เกณฑ์ที่ระบุไว้หรือไม่ หากไม่เริ่มกระบวนการคำนวณต่อจนได้ตามเกณฑ์



รูปที่ 1.3 ขั้นตอนการคำนวณแบบ coupled solution method ของ Fluent

การทำ Discretization ให้ง่ายกับการถ่ายโอนปริมาณสเกลาร์ ϕ ซึ่งเป็นไปตามหลักการอนุรักษ์ ณ สถานะคงตัว ได้ดังนี้

ภาพตัวอย่างการแบ่งโดเมนทั้งหมดของระบบที่ต้องการคำนวณพฤติกรรมการไหลออกเป็นปริมาตรควบคุมย่อยแบบสามเหลี่ยมหรือ cell ภายในโดเมนแสดงดังรูปที่ 1.4



รูปที่ 1.4 ตัวอย่างภาพปริมาตรควบคุมย่อยแบบสามเหลี่ยมที่ปรากฏใน Fluent

สมการอินทิเกรตการถ่ายโอนปริมาณสเกลาร์ ϕ ของแต่ละปริมาตรควบคุมย่อยหรือ cell ภายในโดเมนที่ต้องการคำนวณของระบบทั้งหมด คือ

$$\oint \rho \phi \vec{v} \cdot d\vec{A} = \oint \Gamma_{\phi} \nabla \phi \cdot d\vec{A} + \int_V S_{\phi} dV \quad (1-36)$$

เมื่อให้ ϕ คือความหนาแน่น, \vec{v} คือเวกเตอร์ความเร็ว, \vec{A} คือเวกเตอร์พื้นผิว, Γ_{ϕ} คือสัมประสิทธิ์การแพร่ของ ϕ , $\nabla \phi$ คือเกรเดียนของ ϕ , S_{ϕ} คือ แหล่งของ ϕ ต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร

การทำ discretization สมการ (1-33) ของแต่ละ cell ในโดเมน เช่นในกรณีของ 2 มิติโดยใช้เซลล์สามเหลี่ยมสมการ (1-33) จะเปลี่ยนรูปเป็นสมการ

$$\sum_f^{N_{faces}} \rho_f \vec{v}_f \phi_f \cdot \vec{A}_f = \sum_f^{N_{faces}} \Gamma_{\phi} (\nabla \phi)_n \cdot \vec{A}_f + S_{\phi} V \quad (1-37)$$

เมื่อให้ N_{faces} คือจำนวนหน้า (faces) ภายใน cell, ϕ_f คือค่า ϕ ที่แพร่ผ่าน cell, $\rho_f \vec{v}_f \cdot \vec{A}_f$ คือฟลักซ์ของมวลที่ไหลผ่านหน้า, \vec{A}_f คือพื้นที่ของหน้า f (สำหรับ 2D $|A| = |A_x \hat{i} + A_y \hat{j}|$), $(\nabla \phi)_n$ คือขนาดของเกรเดียนของ ϕ ตั้งฉากกับหน้า f , V คือ ปริมาตรของ cell

ระเบียบวิธีที่ใช้ในการแก้สมการ (1-37) จำเป็นต้องทราบค่า ϕ_f ซึ่งประมาณได้จากปริมาณที่ปรากฏอยู่ใน upstream cell หรือ upwind โดยมองสัมพันธ์กับทิศ v_n ในสมการ วิธีที่ใช้ได้ Fluent มีไว้ให้เลือกหลายสกริม ได้แก่ first-order upwind, second-order upwind, power law, และ QUICK

การทำ Discretization ให้กับสมการการถ่ายโอนโมเมนตัม

การทำ discretization ให้กับสมการโมเมนตัมทำเหมือนกับการถ่ายโอนปริมาณสเกลาร์ที่กล่าวในย่อหน้าก่อนหน้า เช่น สมการ x-momentum ทำโดยให้ตัวแปร $\phi = u$

$$apu = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + \sum p_f A \cdot \hat{i} + S \quad (1-38)$$

ในกรณีที่ทราบค่า pressure field และ face mass flux สมการ (1-38) สามารถใช้หาค่า velocity field ได้เหมือนวิธีการแก้สมการ 1-2 ที่กล่าวไว้ก่อนหน้า อย่างไรก็ตามค่า pressure field และ face mass flux เป็นค่าที่ไม่ทราบมาก่อนหน้าและต้องได้ค่ามาเป็นส่วนหนึ่งของผลเฉลยเทคนิคที่ Fluent ใช้ในการหาผลเฉลยเรียกว่า co-located scheme ในการเก็บค่าความดันและความเร็วไว้ที่จุดศูนย์กลางของเซลล์ แต่สมการ (1-38) ต้องการค่าความดันที่แบ่งหน้า C0 และ C1 ดังรูปที่ 1.4

ดังนั้นวิธีการเทียบหาค่าความดันจึงจำเป็นต้องใช้เพื่อหาค่าความดันที่หน้าทั้งสองจากค่าความดันของเซลล์

ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ Fluent มีให้ใช้เป็นวิธีการเทียบหาค่าความดันเป็นวิธีมาตรฐานคือการเทียบหาค่าจากสัมประสิทธิ์ของสมการ โมเมนตัม ซึ่งใช้ได้กรณีที่ค่าความดันที่ face ไม่เปลี่ยนแปลงแบบฉับพลันจากที่จุดศูนย์กลางเซลล์อันเป็นผลมาจากแหล่งกำเนิด โมเมนตัม ข้อสังเกตในกรณีที่มีปัญหาคือจะพบว่าค่าความเร็วที่เซลล์มีค่าทำนายที่แตกต่างกันรุนแรง (overshoot หรือ undershoot) นอกจากนี้วิธีมาตรฐานที่ใช้ประมาณค่าความดันยังไม่เหมาะกับกรณีของการไหลที่เกิดจากแรงปริมาณสูงเนื่องจากการไหลวน (swirling flow) หรือกรณีของค่า Re สูง แต่อาจแก้ไขได้โดยใช้การสร้าง mesh ให้ละเอียดที่บริเวณดังกล่าว ตัวเลือกสกรีมอื่นที่ Fluent มีให้ใช้ในการประมาณค่าความดันคือ linear scheme, second-order scheme, body-force-weight scheme, PRESTO scheme

สำหรับงานวิจัยนี้พบว่าการแก้สมการ โมเมนตัม โดยวิธี first-order upwind ร่วมกับการใช้วิธีการประมาณค่าความดันแบบวิธีมาตรฐานให้ความถูกต้องของผลเฉลย

First-Order Upwind Scheme

หากเลือกใช้ First-Order Upwind Scheme ปริมาณของผิวเซลล์จะถูกพิจารณาโดยกำหนดให้ใช้ค่าเฉลี่ยที่จุดศูนย์กลางเซลล์และใช้ค่าดังกล่าวตลอดทั่วทั้งเซลล์ ดังนั้นปริมาณผิวเซลล์จึงมีจำนวนเท่ากับปริมาณเซลล์ เมื่อเลือกใช้ First-Order Upwind Scheme ค่า ϕ_f จะถูกกำหนดให้มีค่าเท่ากับค่าที่จุดศูนย์กลางเซลล์ ϕ

การทำ Discretization ให้กับสมการการอนุรักษ์มวล

การการทำ Discretization ให้กับสมการการอนุรักษ์มวลเป็นการสร้างแปลงสมการอนุรักษ์มวลที่อยู่ในรูปสมการอนุพันธ์ให้อยู่ในรูปสมการพีชคณิต ซึ่งมีขั้นตอนทั่วไปดังนี้

1. การแบ่งโดเมนของระบบออกเป็นปริมาตรควบคุมย่อยโดยอาศัยการสร้าง grid
2. การอินทิเกรตชุดสมการควบคุมระบบของแต่ละปริมาตรควบคุมย่อยเพื่อสร้างชุดสมการพีชคณิตสำหรับหาค่าตัวแปรตามไม่ทราบค่าแบบแยกส่วน ได้แก่ ความเร็ว ความดัน อุณหภูมิ และ ตัวแปรสเกลาร์ โดยผลลัพธ์ที่ได้เป็นไปตามสมการที่ (1-36)

$$\sum_f^{N_{faces}} J_f A_f \quad (1-39)$$

โดย J_f คือ mass flux ที่ไหลผ่านผิว f

3. การเปลี่ยนชุดสมการพีชคณิตจากข้อสองเป็นระบบสมการพีชคณิตเชิงเส้นแบบแยกส่วนเพื่อหาผลเฉลยให้กับตัวแปรตามที่ไม่ทราบค่า

รูปแบบสมการเชิงเส้นของสมการไม่ต่อเนื่อง

ค่าสเกลาร์ที่ถูก discretized จากสมการการส่งถ่ายประกอบไปด้วยตัวแปรสเกลาร์ที่ไม่ทราบค่าที่ตำแหน่งจุดศูนย์กลางเซลล์และค่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของเซลล์ที่อยู่รอบๆ โดยทั่วไปสมการที่ได้จะอยู่ในรูปที่ไม่เป็นเชิงเส้น การทำให้สมการที่ไม่เป็นเชิงเส้นให้เป็นสมการที่มีรูปเป็นเชิงเส้นสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (1-40)

$$a_p \phi = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b \quad (1-40)$$

เมื่อ ตัวห้อย nb อ้างอิงถึงเซลล์ที่อยู่ข้างๆ ค่า a_p และ a_{nb} คือสัมประสิทธิ์ความเป็นเชิงเส้นของค่า ϕ และค่า ϕ_{nb} ตามลำดับ

Under Relaxation

เนื่องจากความไม่เป็นเชิงเส้นของชุดสมการที่ถูกแก้โดยโปรแกรม Fluent ซึ่งส่งผลต่อการควบคุมการเปลี่ยนแปลงค่า ϕ การแก้ปัญหาดังกล่าวโดยทั่วไปจะใช้ค่า Under Relaxation โดยที่ Under Relaxation จะช่วยลดอัตราการเปลี่ยนแปลงของค่า ϕ ในระหว่างรอบการคำนวณซ้ำใดๆ โดยการเปลี่ยนแปลงของค่า ϕ มีสมการดังนี้

$$\phi = \phi_{old} + \alpha \Delta \phi \quad (1-41)$$

โดยที่ ϕ คือผลการคำนวณในรอบปัจจุบันของตัวแปรใดๆ, ϕ_{old} คือค่าของตัวแปรของรอบการคำนวณที่ผ่านมา, $\Delta \phi$ คือ ผลต่างของการคำนวณ และ α คือ Under Relaxation

การประมาณค่าของอนุพันธ์

ค่าอนุพันธ์ $\nabla \phi$ ของตัวแปร ϕ ถูก discretize เข้าสู่เทอมการพาและการแพร่ของสมการการเคลื่อนที่ ค่าดังกล่าวถูกคำนวณโดยใช้ทฤษฎีของ Green-Gauss โดยมีสมการดังนี้คือ

$$(\nabla\phi)_{c_0} = \frac{1}{V} \sum_f \bar{\phi}_f \bar{A}_f \quad (1-42)$$

โดยที่ ϕ_f คือค่าของ ϕ ที่ตำแหน่ง cell face centroid โดยมีวิธีการประมาณค่าดังต่อไปนี้

Cell-Based Derivative Evaluation

โดยปกติค่า $\bar{\phi}_f$ ในสมการที่ (1-42) จะใช้ค่าเฉลี่ยของค่าจุดศูนย์กลางของเซลล์ที่อยู่ข้างๆ ดังสมการ

$$\bar{\phi}_f = \frac{\phi_{c_0} + \phi_{c_1}}{2} \quad (1-43)$$

Node-Based Derivative Evaluation

อีกทางเลือกสำหรับการคำนวณค่า $\bar{\phi}_f$ คือเลือกใช้วิธี Node-Based Derivative Evaluation โดยวิธีนี้จะใช้ค่าเฉลี่ยของ node บน face ใด โดยมีสมการดังนี้

$$\bar{\phi}_f = \frac{1}{N_f} \sum_n^{N_f} \phi_n \quad (1-44)$$

โดยที่ N_f คือจำนวนของ nodes บน face เป็นที่ทราบกันดีว่าวิธี Node-Based จะให้ความถูกต้องสูงกว่าวิธีการ Cell-Based สำหรับ mesh แบบไร้โครงสร้าง การใช้งานตัวเลือกนี้ทำได้โดยเลือก Node-Based ภายใต้ Gradient Option ใน Solver panel ของ Fluent

ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วและความดัน

การสร้างความสัมพันธ์ระหว่างความดันกับความเร็ว สามารถทำได้โดยสร้างสมการให้กับสมการความดัน โดย Fluent ได้เตรียมอัลกอริทึมสำหรับหาความสัมพันธ์ระหว่างความดันกับความเร็ว จำนวน 4 อัลกอริทึมประกอบไปด้วย อัลกอริทึม SIMPLE, SIMPLEC, PISO และ Coupled โดยงานวิจัยนี้เลือกใช้ SIMPLE อัลกอริทึมเพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างความดันกับความเร็ว SIMPLE อัลกอริทึมจะถูกใช้เพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วและความดัน โดยหลักการของขั้นตอนวิธีนี้อาศัยการสมมุติค่าเริ่มต้นให้กับตัวแปรต่างๆ ในสนามการไหล จากนั้นค่าที่สมมุติจะได้รับการปรับแก้ไขค่าให้ความถูกต้องขึ้นในระหว่างรอบการคำนวณซ้ำ

The Coupled Solver

สมการควบคุมในรูปเวกเตอร์

ระบบสมการควบคุมสำหรับส่วนประกอบของไหลเดี่ยว เขียนเพื่ออธิบายคุณสมบัติการไหลเฉลี่ยในกรณีรวมรูป สำหรับระบบปิดฉากของปริมาตรควบคุม V ใดๆต่ออนุพันธ์ของพื้นผิว dA สามารถเขียนสมการได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{W} dV + \oint [\mathbf{F} - \mathbf{G}] \cdot d\mathbf{A} = \int_V \mathbf{H} dV \quad (1-45)$$

เมื่อเวกเตอร์ \mathbf{W}, \mathbf{F} และ \mathbf{G} คือ

$$\mathbf{W} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{Bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho v u + p \hat{i} \\ \rho v v + p \hat{j} \\ \rho v w + p \hat{k} \\ \rho v E + p v \end{Bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \tau_{xi} \\ \tau_{yi} \\ \tau_{zi} \\ \tau_{y_j} v_j + q \end{Bmatrix} \quad (1-46)$$

และ \mathbf{H} คือ source terms เช่น แรงเนื่องจากน้ำหนักและพลังงาน

ρ, v, E และ p คือความหนาแน่น, ความเร็ว, พลังงานรวมต่อหนึ่งหน่วยมวลและความดันของของไหลตามลำดับ, τ คือ viscous stress tensor และ q คือ ฟลักซ์ความร้อน พลังงานรวม E มีความสัมพันธ์กับค่าเอนทัลปี H คือ

$$E = H - p / \rho \quad (1-47)$$

โดย

$$H = h + |\mathbf{v}|^2 / 2 \quad (1-48)$$

สมการนาเวียร์-สโตก ที่ปรากฏในสมการที่ (1-45) มีค่าตัวเลขที่มั่นคงมากเมื่อค่าตัวเลขมีค่าๆซึ่งเป็นผลเนื่องมาจากผลต่างระหว่างความเร็วของของไหล \mathbf{v} และความเร็วเสียง ผลดังกล่าวมีผลกระทบต่อของไหลแบบอัดตัวไม่ได้เพราะไม่ได้คำนึงถึงความเร็วของของไหลเนื่องจากความเร็ว

เสียงนั้นมีค่าไม่จำกัด ผลจากความคงตัวของตัวเลขในสมการดังกล่าวทำให้การลู่เข้าหาผลเฉลยเกิดความล่าช้า โปรแกรม Fluent ได้ทำการแก้ไขความยุ่งยากดังกล่าวด้วยการแก้สมการแบบคู่ (coupled solver) โดยวิธีการดังกล่าวถูกเรียกว่า time-derivative preconditioning

Preconditioning

Time-derivative preconditioning จะทำการปรับแก้เทอมอนุพันธ์เวลาในสมการ (1-45) โดยคุณตัวเองด้วย preconditioning matrix ซึ่งทำให้เกิดการลดขนาดของความเร็วเสียงของระบบสมการที่สร้างขึ้นเพื่อบรรเทาความคงตัวของตัวเลขที่ปรากฏในระบบที่มีตัวเลขมดดำและของไหลแบบอัดตัวไม่ได้

การ preconditioning เริ่มต้นโดยเริ่ม โดยการเปลี่ยนตัวแปรในสมการ (1-45) จากปริมาณอนุพันธ์ w เป็นตัวแปรดั้งเดิม Q โดยใช้กฎลูกโซ่ดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial W}{\partial Q} \frac{\partial}{\partial t} \int_V Q dV + \oint [F - G] \cdot dA = \int_V H dV \quad (1-49)$$

เมื่อ Q คือ เวกเตอร์ $\{p, u, v, w, T\}^T$ และ Jacobian $\partial W / \partial Q$ คือ

$$\frac{\partial W}{\partial Q} = \begin{bmatrix} \rho_p & 0 & 0 & 0 & \rho_T \\ \rho_p u & \rho & 0 & 0 & \rho_T u \\ \rho_p v & 0 & \rho & 0 & \rho_T v \\ \rho_p w & 0 & 0 & \rho & \rho_T w \\ \rho_T H - \delta & \rho u & \rho v & \rho w & \rho_T H + \rho C_p \end{bmatrix} \quad (1-50)$$

โดยที่

$$\rho_p = \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_T, \rho_T = \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_p \quad (1-51)$$

โดย $\delta = 1$ ถูกใช้สำหรับก๊าซอุดมคติ และ $\delta = 0$ ใช้สำหรับของไหลที่อัดตัวไม่ได้

ทำการ precondition ระบบ โดยทำการเปลี่ยน Jacobian matrix $\partial W / \partial Q$ ด้วย preconditioning matrix Γ เพื่อให้ระบบอยู่ในรูปอยู่ในรูปแบบอนุพันธ์ ซึ่งมีสมการคือ

$$\Gamma \frac{\partial}{\partial t} \int_V Q dV + \oint [F - G] \cdot dA = \int_V H dV \quad (1-52)$$

โดยที่

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Theta & 0 & 0 & 0 & \rho_T \\ \Theta u & \rho & 0 & 0 & \rho_T u \\ \Theta v & 0 & \rho & 0 & \rho_T v \\ \Theta w & 0 & 0 & \rho & \rho_T w \\ \Theta H - \delta & \rho u & \rho v & \rho w & \rho_T H + \rho C_p \end{bmatrix} \quad (1-53)$$

เมื่อ
$$\Theta = \left(\frac{1}{U_r^2} - \frac{\rho_T}{\rho C_p} \right) \quad (1-51)$$

ผลลัพธ์ค่าเจาะจงของระบบที่ถูก precondition กำหนดมีค่าดังนี้

$$u, u, u, u' + c', u' - c' \quad (1-54)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} u &= \mathbf{v} \cdot \hat{n} \\ u' &= u(1 - \alpha) \\ c' &= \sqrt{\alpha^2 u^2 + U_r^2} \\ \alpha &= (1 - \beta U_r^2) / 2 \\ \beta &= \left(\rho_p + \frac{\rho_T}{\rho C_p} \right) \end{aligned}$$

สำหรับก๊าซอุดมคติ $\beta = (\gamma RT)^{-1} = 1/c^2$ เมื่อค่า $U_r = c$ ที่ความเร็วเสียงระดับ sonic หรือสูงกว่า, $\alpha = 0$ และค่าเจาะจงของระบบ precondition จะอยู่ในรูป $u \pm c$ แต่ที่ความเร็วเสียงต่ำจะทำให้ค่า U_r เข้าใกล้ 0 และค่า α เข้าใกล้ $1/2$ และค่าเจาะจงของระบบ precondition จะมีค่าเหมือนกันกับค่า u สำหรับของไหลที่มีความหนาแน่นคงตัวหรือของไหลที่อัดตัวไม่ได้ค่า $\beta = 0, \alpha = 1/2$ และไม่คำนึงถึงค่า U_r

Time Marching for Steady-State Flows

ชุด coupled ของสมการควบคุมใน โปรแกรม Fluent ถูกแสดงทั้งในระบบคงตัวและไม่คงตัว ในกรณีที่เป็นระบบคงตัว ถูกตั้งสมมติฐานว่า Time Marching ดำเนินการจนกระทั่งเข้าใกล้ผลเฉลย

ที่สภาวะคงตัว การแปลงชุดสมการ coupled สามารถทำได้โดยใช้ระเบียบวิธี implicit หรือวิธี explicit โดยงานวิจัยนี้เลือกใช้ระเบียบวิธี implicit โดยมีรายละเอียดดังนี้

Implicit Scheme

ในระเบียบวิธี Implicit การแปลง Euler implicit ของสมการควบคุมจะถูกรวมเข้ากับ Newton-type linearization โดยทำให้เกิดระบบสมการเส้นตรงที่อยู่ในรูปแบบ delta ดังนี้

$$\left[D + \sum_j^{N_{faces}} S_{j,k} \right] \Delta \mathbf{Q}^{n+1} = -\mathbf{R}^n \quad (1-55)$$

เมื่อ

$$D = \frac{V}{\Delta t} \Gamma + \sum_j^{N_{face}} S_{j,i} \quad (1-56)$$

$$S_{j,k} = \left(\frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial \mathbf{Q}_k} - \frac{\partial \mathbf{G}_j}{\partial \mathbf{Q}_k} \right) \quad (1-57)$$

สมการที่ (1-55) สามารถแก้ได้โดยใช้ระเบียบวิธี AMG