ภาคผนวก ก.[1]

แนวคิดการเลือกฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงในแบบจำลอง STAR

จัดรูปสมการ STAR ใหม่เป็นสมการที่ *(1)*

$$Y_T = \mu_0 + \sum_{j=1}^{p}\phi_{0,j}Y_{T-j} + \sum_{j=1}^{p}\phi_{1,j}Y_{T-j}s_t + \sum_{j=1}^{p}\phi_{2,j}Y_{T-j}s^2_t + \sum_{j=1}^{p}\phi_{3,j}Y_{T-j}s_t^3 + \varepsilon_T$$

$$y\_i_t = (\mu_1+\phi_{1,j}W_{t-j})(1-G(S_t)) + (\mu_2+\phi_{2,j}W_{t-j})G(S_t) + \varepsilon_t$$

$$Y_T = \mu_0 + \sum_{j=1}^{p}\phi_{0,j}Y_{T-j} + \sum_{j=1}^{p}\phi_{1,j}Y_{T-j}s_t + \sum_{j=1}^{p}\phi_{2,j}Y_{T-j}s^2_t + \sum_{j=1}^{p}\phi_{3,j}Y_{T-j}s_t^3 + \varepsilon_T$$

$$= (\mu_1+\phi_{1,j}W_{t-j}) + \left\{ (\mu_2-\mu_1)(\phi_{2,j}-\phi_{1,j})\right\} G(S_t) + \varepsilon_t \qquad (1)$$

ประมาณค่าฟังก์ชัน $G(s_t)$ ด้วย Third-order Taylor Approximation รอบๆค่า $\gamma = 0$ *เมื่อ* $G(s_t)$ *เป็น Logistic Function*

[1] หลักเกณฑ์การเลือก Transition Function เป็นหลักเกณฑ์เดียวกับหลักเกณฑ์ที่ Granger, C. W. J., and T. Teräsvirta, 1993 หน้า 114 ใช้

$$G(s_t) = \frac{1}{1 + \exp\left\{\dfrac{-\gamma(S_t - c)}{\sigma(S_t)}\right\}} \quad ; \gamma > 0$$

$$G(s_t) \simeq G(\gamma = 0) + G'(\gamma = 0)(\gamma - 0) + \frac{1}{2!}G''(\gamma = 0)(\gamma - 0)^2 + \frac{1}{3!}G'''(\gamma = 0)(\gamma - 0)^3$$

$$\simeq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{(S_t - c)}{b}\right)\gamma + 0 + \frac{\gamma^3}{6}\left\{-\frac{1}{8b^3}(S_t^3 - 3cS_t^2 + 3c^2S_t - c^2)\right\} \quad ; \sigma(s_t) = b$$

$$\simeq \left\{-\frac{1}{2} - \frac{c\gamma}{4b} + \frac{1}{48b^3}c^3\gamma\right\} + \left\{\frac{\gamma}{4b} - \frac{c^2\gamma}{16b^3}\right\}S_t + \left\{\frac{c\gamma}{16b^3}\right\}S_t^2 + \left\{\frac{-\gamma}{48b^3}\right\}S_t^3$$

$$\simeq \{A\} + \{B\}S_t + \{C\}S_t^2 + \{D\}S_t^3 \qquad (2)$$

โดยที่

$$A = \left\{-\frac{1}{2} - \frac{c\gamma}{4b} + \frac{1}{48b^3}c^3\gamma\right\} \qquad C = \left\{\frac{c\gamma}{16b^3}\right\}$$

$$B = \left\{\frac{\gamma}{4b} - \frac{c^2\gamma}{16b^3}\right\} \qquad D = \left\{\frac{-\gamma}{48b^3}\right\}$$

แทนสมการที่ *(2)* ลงไปสมการที่ *(1)* และจัดพจน์จะได้สมการที่ *(3)*

$$y\_i_t = (\mu_1+\phi'_{1,j}W_{t-j}) + \left\{ (\mu_2-\mu_1) + (\phi_{2,j}-\phi_{1,j})'W_{t-j} \right\}(A + BS_t + CS_t^2 + DS_t^3) + \varepsilon_t$$

$$= (\mu_1+\phi'_{1,j}W_{t-j}) + (\mu_2-\mu_1)(A + BS_t + CS_t^2 + DS_t^3) +$$
$$(\phi_{2,j}-\phi_{1,j})'W_{t-j}(A + BS_t + CS_t^2 + DS_t^3) + \varepsilon_t$$

$$= \left\{\mu_1 + (\mu_2-\mu_1)(A + BS_t + CS_t^2 + DS_t^3)\right\} + \left\{\mu_1 + (\mu_2-\mu_1)A\right\}' W_{t-j} +$$
$$\left\{(\phi_{2,j}-\phi_{1,j})B\right\}' W_{t-j}S_t + \left\{(\phi_{2,j}-\phi_{1,j})C\right\}' W_{t-j}S_t^2 + \left\{(\phi_{2,j}-\phi_{1,j})D\right\}' W_{t-j}S_t^3$$

$$y\_i_t = \left\{\mu_1 + (\mu_2-\mu_1)G(S_t)\right\} + \left\{B_0\right\}' W_{t-j} + \left\{B_1\right\}' W_{t-j}S_t + \left\{B_2\right\}' W_{t-j}S_t^2 + \left\{B_3\right\}' W_{t-j}S_t^3 + \varepsilon_t \qquad (3)$$

โดยที่

$$B_0 = \mu_1 + (\mu_2-\mu_1)\left\{-\frac{1}{2} - \frac{c\gamma}{4b} + \frac{1}{48b^3}c^3\gamma\right\} \qquad B_2 = (\phi_{2,j}-\phi_{1,j})\left\{\frac{c\gamma}{16b^3}\right\}$$

$$B_1 = (\phi_{2,j}-\phi_{1,j})\left\{\frac{\gamma}{4b} - \frac{c^2\gamma}{16b^3}\right\} \qquad B_3 = (\phi_{2,j}-\phi_{1,j})\left\{\frac{-\gamma}{48b^3}\right\}$$

เมื่อ $G(s_t)$ *เป็น Quadratic Logistic Function*

$$G(s_t) = \frac{1}{1 + \exp\left\{\dfrac{-\gamma(S - c_1)(S - c_2)}{\sigma(s_t)}\right\}} \quad ; c_1 \le c_2 \, , \gamma > 0$$

$$G(s_t) \simeq G(\gamma = 0) + G'(\gamma = 0)(\gamma - 0) + \frac{1}{2!}G''(\gamma = 0)(\gamma - 0)^2 + \frac{1}{3!}G'''(\gamma = 0)(\gamma - 0)^3$$

$$\simeq \frac{1}{2} + \frac{1}{4b}\left(\frac{(S - c_1)(S - c_2)}{b^2}\right)\gamma + \frac{\gamma^2}{4}(0) + \frac{\gamma^3}{6}\left(-\frac{1}{8b^3}\right)\left\{\begin{array}{l} S_t^6 - 3c_2S_t^5 + 3c_2^2S_t^4 - c_2^3S_t^3 - 3c_1S_t^5 \\ + 9c_1c_2S_t^4 - 9c_1c_2^2S_t^3 + 3c_1c_2^2S_t^2 \\ + 3c_1^2S_t^4 - 9c_1^2c_2S_t^3 + 9c_1^2c_2^2S_t^2 \\ - 3c_1^2c_2^3S_t - c_1^3S_t^3 - 3c_1^2c_2S_t^2 \\ - 3c_1^2c_2S_t + c_1^2c_2^3 \end{array}\right\}$$

โดยที่ $;\sigma^2(s_t) = b$

$$\begin{aligned} \simeq\ & \left\{\frac{1}{2} + \frac{c_1c_2\gamma}{4b} - \frac{c_1^3c_2^3\gamma^3}{48b^3}\right\} + \left\{\frac{-c_2\gamma}{4b} - \frac{c_1\gamma}{4b} + \frac{c_1^2c_2^2\gamma^3}{16b^3} + \frac{c_1^2c_2^3\gamma^3}{16b^3}\right\}S_t + \\ & \left\{\frac{\gamma}{4} - \frac{c_1c_2^3\gamma^3}{16b^3} - \frac{3c_1^2c_2^2\gamma^3}{16b^3} - \frac{3c_1^2c_2\gamma^3}{16b^3}\right\}S_t^2 + \left\{\frac{c_2^3\gamma^3}{48b^3} + \frac{3c_1c_2^2\gamma^3}{16b^3} + \frac{3c_1^2c_2\gamma^3}{16b^3} - \frac{c_1^3\gamma^3}{48b^3}\right\}S_t^3 + \\ & \left\{\frac{-3c_2^2\gamma^3}{48b^3} - \frac{3c_1c_2\gamma^3}{16b^3} - \frac{3c_1^2\gamma^3}{48b^3}\right\}S_t^4 + \left\{\frac{c_2\gamma^3}{16b^3} - \frac{c_1\gamma^3}{16b^3}\right\}S_t^5 + \left\{\frac{-\gamma^3}{48b^3}\right\}S_t^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \simeq\ & \left\{\frac{1}{2} + \frac{c_1c_2\gamma}{4b} - \frac{c_1^3c_2^3\gamma^3}{48b^3}\right\} + \left\{\frac{-\gamma}{4b}(c_2 - c_1) + \frac{\gamma^3}{16b^3}(c_1^2c_2^2 + c_1^2c_2^3)\right\}S_t + \\ & \left\{\frac{\gamma}{4} - \frac{\gamma^3}{16b^3}(c_1c_2^3 + 3c_1^2c_2^2 + 3c_1^2c_2)\right\}S_t^2 + \left\{\frac{\gamma^3}{48b^3}(c_2^3 + 3c_1c_2^2 + 3c_1^2c_2 - c_1^3)\right\}S_t^3 + \\ & \left\{\frac{-\gamma^3}{48b^3}(3c_2^2 + 9c_1c_2 + 3c_1^2)\right\}S_t^4 + \left\{\frac{\gamma^3}{16b^3}(c_2 + c_1)\right\}S_t^5 + \left\{\frac{-\gamma^3}{48b^3}\right\}S_t^6 \end{aligned}$$

$$G(s_t) \simeq E + FS_t + HS_t^2 + IS_t^3 + JS_t^4 + KS_t^5 + LS_t^6 \qquad (4)$$

โดยที่

$$E = \frac{1}{2} + \frac{c_1c_2\gamma}{4b} - \frac{c_1^3c_2^3\gamma^3}{48b^3} \qquad J = \frac{-\gamma^3}{48b^3}(3c_2^2 + 9c_1c_2 + 3c_1^2)$$

$$F = \frac{-\gamma}{4b}(c_2 - c_1) + \frac{\gamma^3}{16b^3}(c_1^2c_2^2 + c_1^2c_2^3) \qquad K = \frac{\gamma^3}{16b^3}(c_2 + c_1)$$

$$H = \frac{\gamma}{4} - \frac{\gamma^3}{16b^3}(c_1c_2^3 + 3c_1^2c_2^2 + 3c_1^2c_2) \qquad L = \frac{-\gamma^3}{48b^3}$$

$$I = \frac{\gamma^3}{48b^3}(c_2^3 + 3c_1c_2^2 + 3c_1^2c_2 - c_1^3)$$

แทนสมการที่ *(4)* ลงไปสมการที่ *(1)* และจัดพจน์จะได้สมการที่ *(5)*

$$y\_i_t = (\mu_1 + \phi_{1,j}'W_{t-j}) + \left\{ (\mu_2 - \mu_1) + (\phi_{2,j} - \phi_{1,j})'W_{t-j} \right\}(E + FS_t + HS_t^2 + IS_t^3 + JS_t^4 + KS_t^5 + LS_t^6) + \varepsilon_t$$

$$= (\mu_1 + \phi_{1,j}'W_{t-j}) + (\mu_2 - \mu_1)(E + FS_t + HS_t^2 + IS_t^3 + JS_t^4 + KS_t^5 + LS_t^6) + (\phi_{2,j} - \phi_{1,j})'W_{t-j}(E + FS_t + HS_t^2 + IS_t^3 + JS_t^4 + KS_t^5 + LS_t^6) + \varepsilon_t$$

$$= \left\{\mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)(E + FS_t + HS_t^2 + IS_t^3 + JS_t^4 + KS_t^5 + LS_t^6)\right\} + \left\{\phi_{1,j} + (\phi_{2,j} - \phi_{1,j})E\right\}'W_{t-j} + \left\{(\phi_{2,j} - \phi_{1,j})F\right\}'W_{t-j}S_t + \left\{(\phi_{2,j} - \phi_{1,j})H\right\}'W_{t-j}S_t^2 + \left\{(\phi_{2,j} - \phi_{1,j})I\right\}'W_{t-j}S_t^3 + \left\{(\phi_{2,j} - \phi_{1,j})J\right\}'W_{t-j}S_t^4 + \left\{(\phi_{2,j} - \phi_{1,j})K\right\}'W_{t-j}S_t^5 + \left\{(\phi_{2,j} - \phi_{1,j})L\right\}'W_{t-j}S_t^6$$

$$y\_i_t = \left\{\mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)G(S_t)\right\} + \left\{B_0\right\}'W_{t-j} + \left\{B_1\right\}'W_{t-j}S_t + \left\{B_2\right\}'W_{t-j}S_t^2 + \left\{B_3\right\}'W_{t-j}S_t^3 + \left\{B_4\right\}'W_{t-j}S_t^4 + \left\{B_5\right\}'W_{t-j}S_t^5 + \left\{B_6\right\}'W_{t-j}S_t^6 + \varepsilon_t \qquad (5)$$

โดยที่

$$B_0 = \phi_{1,j} + (\phi_{2,j} - \phi_{1,j})\left\{\frac{1}{2} + \frac{c_1 c_2 \gamma}{4b} - \frac{c_1^3 c_2^3 \gamma^3}{48b^3}\right\}$$

$$B_1 = (\phi_{2,j} - \phi_{1,j})\left\{\frac{-\gamma}{4b}(c_2 - c_1) + \frac{\gamma^3}{16b^3}(c_1^2 c_2^2 + c_1^2 c_2^3)\right\}$$

$$B_2 = (\phi_{2,j} - \phi_{1,j})\left\{\frac{\gamma}{4} - \frac{\gamma^3}{16b^3}(c_1 c_2^3 + 3c_1^2 c_2^2 + 3c_1^2 c_2)\right\}$$

$$B_3 = (\phi_{2,j} - \phi_{1,j})\left\{\frac{\gamma^3}{48b^3}(c_2^3 + 3c_1 c_2^2 + 3c_1^2 c_2 - c_1^3)\right\}$$

$$B_4 = (\phi_{2,j} - \phi_{1,j})\left\{\frac{-\gamma^3}{48b^3}(3c_2^2 + 9c_1 c_2 + 3c_1^2)\right\}$$

$$B_5 = (\phi_{2,j} - \phi_{1,j})\left\{\frac{\gamma^3}{16b^3}(c_2 + c_1)\right\}$$

$$B_6 = (\phi_{2,j} - \phi_{1,j})\left\{\frac{-\gamma^3}{48b^3}\right\}$$

พิจารณาสมการที่ *(3)* และสมการที่ *(5)* เมื่อ $c_1 = c_2 = 0$

✓ $B_{3,ESTAR} = 0$ แต่ $B_{3,LSTAR} \neq 0$

✓ $B_{3,ESTAR} \neq 0$ แต่ $B_{2,LSTAR} = 0$

✓ $B_{1,ESTAR} = 0$ แต่ $B_{1,LSTAR} \neq 0$

สามารถใช้ Sequence of Nested Test เลือกฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลง (Transition Function) $G(s_t)$ ระหว่าง Quadratic Logistic Function หรือ Logistic Function มีสมมติฐาน

$H_{04} : B_{3,j} = 0$

$H_{03} : B_{2,j} = 0 \mid B_{3,j} = 0$

$H_{02} : B_{1,j} = 0 \mid B_{2,j} = B_{3,j} = 0$

เลือก Quadratic Logistic Function หากไม่สามารถปฏิเสธสมมติฐาน H_{04} แต่ปฏิเสธสมมติฐาน H_{03} และเลือก Logistic Function หากไม่สามารถปฏิเสธสมมติฐาน H_{04} และ H_{03} แต่ปฏิเสธสมมติฐาน H_{02} หรือสามารถใช้ค่า ค่า p-value เป็นหลักเกณฑ์ในการเลือกก็ได้ คือ ถ้าค่าค่า p-value ของสมมติฐาน H_{03} ต่ำที่สุดจะเลือกเลือก Quadratic Logistic Function เป็นฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลง (Transition Function)