

บทที่ 3

แบบจำลอง Smooth Transition Autoregressive (STAR) Model

บทที่ 3 จะแบ่งการบรรยายเป็น 2 ส่วน ส่วนแรก บรรยายลักษณะของตัวแบบจำลอง Vector Smooth Transition Autoregressive (Vector STAR) Model ซึ่งเป็นตัวแบบจำลองที่จะนำมาใช้พรรณนาพฤติกรรมการเคลื่อนไหวของอัตราดอกเบี้ยส่วนเกินจากการลงทุนในพันธบัตรรัฐบาลในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ และส่วนที่ 2 เป็นวิธีการกำหนดค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบจำลอง Vector STAR โดยได้รับการพัฒนาจากการศึกษาของ Teräsvirta (1993, 1994) และ Eitrheim and Teräsvirta (1996)

3.1 แบบจำลอง Vector Smooth Transition Autoregressive (STAR) Model

เป็นที่ยอมรับกันอย่างแพร่หลายว่า พฤติกรรมการเคลื่อนไหวของตัวแปรเศรษฐกิจและ/หรือตัวแปรการเงินมีลักษณะที่มีไม่เชิงเส้นตรง โดยเฉพาะพฤติกรรมการเคลื่อนไหวของอัตราดอกเบี้ยส่วนเกินจากการลงทุนในตราสารหนี้ที่มีการศึกษาที่แสดงให้เห็นจริง เช่น การศึกษาของ Brenner Harjes and Kroner (1996) Ball and Torous (1999) พบว่าการเคลื่อนไหวของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นของประเทศสหรัฐ อังกฤษ ญี่ปุ่น มีลักษณะเชิงสุ่มหรือ Stochastic Volatility (SVOL) ทำให้ตัวแบบจำลอง GARCH ถูกนำมาใช้ในการพรรณนาพฤติกรรมการเคลื่อนไหวของอัตราดอกเบี้ย ตัวอย่างการศึกษาที่นำตัวแบบจำลอง GARCH มาใช้พรรณนาพฤติกรรมการเคลื่อนไหวของตัวแปรทางการเงิน เช่น Koedjik (1997) Anderson and Lund (1997) และ Ball and Torous (1999) ต่อมาในปี ค.ศ. 1990 Lamoureux and Lastrapes แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงโครงสร้างทางเศรษฐกิจ (Structural breaks) ที่มีผลทำให้ลักษณะความแปรปรวนหรือพฤติกรรมการเคลื่อนไหวของอัตราดอกเบี้ยในแต่ละช่วงโครงสร้างเศรษฐกิจมีความแตกต่างกันทำให้ตัวแบบจำลอง GARCH ไม่สามารถพรรณนาพฤติกรรมการเคลื่อนไหวได้ดี และได้มีการศึกษาเชิงประจักษ์หลายฉบับสนับสนุนผลการศึกษาของ Lamoureux and Lastrapes ตัวอย่างเช่น Hamilton and Susmel (1994) Cai (1994) และ So, Lam and Li (1998) ได้ใช้ตัวแบบจำลอง Markov switching ในการพรรณนาพฤติกรรมการเคลื่อนไหวของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นในประเทศสหรัฐอเมริกา และในปี ค.ศ. 1998 Naik and Lee ได้กล่าวไว้อย่างชัดเจนใน

การศึกษาว่า ตัวแบบจำลอง regime switching มีความสามารถในการพรรณนาพฤติกรรมความแปรปรวนของเส้นโครงสร้างอัตราดอกเบี้ย ได้ดีกว่าตัวแบบจำลอง GARCH นอกจากนั้นในการศึกษาของ Ang and Bekaert (1998) ยังพบอีกว่าตัวแบบจำลอง regime switching มีความสามารถในการพยากรณ์อัตราดอกเบี้ยของข้อมูลช่วง out-of sample ได้ดีกว่าตัวแบบจำลอง single regime ในปี ค.ศ. 2001 Bekaert, Hodrick and Marshall พบว่าพฤติกรรมการเคลื่อนไหวของค่าชดเชยความเสี่ยง (term premium) มีลักษณะเป็น regime switching ที่มี 2 regimes อันเป็นผลมาจากปัญหาเศรษฐกิจ (peso problems) และในปี ค.ศ. 2003 Evans พบว่า regime switching ที่มี 3 regime เป็นตัวแบบจำลองที่ good fit สำหรับการพรรณนาพฤติกรรมการเคลื่อนไหวในอัตราดอกเบี้ยประเทศอังกฤษ

ความสามารถของตัวแบบจำลอง regime switching ทำให้ Teräsvirta and Anderson (1992) พัฒนาตัวแบบจำลอง Smooth Transition Autoregression (STAR) ซึ่งเป็นประเภทหนึ่งในตัวแบบจำลอง regime switching แต่มีความแตกต่างกับตัวแบบจำลอง Markov switching ที่ชัดเจนคือ ตัวแบบจำลอง STAR มีตัวแปรบ่งชี้สถานะการณที่สามารถเก็บข้อมูลได้ ดังนั้นจึงสามารถระบุฟังก์ชันความน่าจะเป็นที่จะใช้ regime ได้ในการพรรณนาพฤติกรรมการเคลื่อนไหวของตัวแปรได้ แต่ในตัวแบบจำลอง Markov switching ไม่สามารถเก็บตัวแปรบ่งชี้สถานะการณได้ ดังนั้นจึงไม่สามารถระบุฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงได้ แต่จะคาดการณได้เพียงโอกาสความน่าจะเป็นที่จะใช้ regime ได้ในการอธิบายตัวแปรที่กำลังพิจารณา อีกทั้งความน่าจะเป็นในการใช้ regime ใดจะมีค่าคงที่ค่าใดค่าหนึ่ง

ตัวแบบจำลอง Smooth Transition Autoregressive Model (STAR) มีลักษณะเป็นส่วนประสมแบบถ่วงเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของแต่ละ regime ดังนั้นตัวแบบจำลอง STAR จึงประกอบด้วย 2 ส่วนที่สำคัญ คือ (1) สมการซึ่งเป็นตัวแทนในแต่ละ regime (regime อาจจะแบ่งตามวัฏจักรธุรกิจ หรือแบ่งตามนโยบายการเงินของรัฐบาล) ประเด็นคำถามที่ตามมาคือ จำนวน regimes ควรจะเป็นเท่าไร คำตอบ คือมิได้มีการจำกัดอย่างเคร่งครัดว่าตัวแบบจำลอง STAR ควรจะมีจำนวน regime เท่าไร อย่างไรก็ตามการศึกษาเชิงประจักษ์โดยทั่วไปจะแบ่ง regime ออกเป็น 2 ช่วง (Van Dijk, 1999) ส่วนประกอบที่ (2) คือ ฟังก์ชันที่บ่งชี้ถึงน้ำหนักที่จะใช้ในแต่ละ regime ควรจะมีรูปร่างและลักษณะเป็นอย่างไร คำตอบของคำถามนี้จะกล่าวอย่างละเอียดในลำดับถัดไป

อย่างไรก็ตามข้อมูลอนุกรมเวลาเป็นข้อมูลที่ลำดับมีความสำคัญ ดังนั้นข้อมูลแต่ละตัวจะมีสหสัมพันธ์ร่วมกัน (Autocorrelation) ซึ่งตัวแบบจำลองที่ใช้ในการพรรณนาพฤติกรรมของตัวแปรคือ ตัวแบบจำลอง (Autoregression (AR(p)) ดังนั้นการพิจารณาสมการ AR(p) เพียง

สมการเดียว (single equation) เป็นการพิจารณาแค่ส่วนหนึ่งของระบบสมการ ยังมีได้สนใจการมีผลกระทบซึ่งกันและกันของตัวแปรในระบบสมการ (Greene, หน้า 378) หรือละเลยปัญหา Contemporaneous correlation)¹ ดังนั้นการใส่ข้อมูลข่าวสารใหม่ลงไปในตัวแบบจำลองและทำการกำหนดค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบจำลองพร้อมกันทั้งระบบโดยคำนึงถึงผลกระทบซึ่งกันและกันของตัวแปรภายในระบบสมการ หลักการดังกล่าวทำให้มีการพัฒนาตัวแบบจำลอง Vector Autoregression (VAR) แต่ตัวแบบจำลอง VAR ยังมีปัญหาในการพรรณนาพฤติกรรมเชิงสุ่มของตัวแปรเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงโครงสร้างเศรษฐกิจ ดังที่ได้บรรยายไว้ในบทที่ 1 ดังนั้นการใช้ตัวแบบจำลอง Vector STAR และกำหนดค่าพารามิเตอร์พร้อมกันทั้งระบบสมการควรจะเป็นตัวแบบจำลองที่มีความสามารถในการพรรณนาพฤติกรรมของตัวแปรได้ดีกว่าทั้งการใช้ตัวแบบจำลอง STAR หรือ VAR อย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียว การศึกษาของ Lekkos and Milas (2004) ได้ยืนยันข้อความข้างต้น โดย Lekkos and Milas ได้ใช้ตัวแบบจำลอง Vector STAR ในการพรรณนาพฤติกรรมของอัตราผลตอบแทนส่วนเกินจากการลงทุนในพันธบัตรรัฐบาลประเทศอังกฤษ และพบว่าตัวแบบจำลอง Vector STAR มีความสามารถในการพรรณนาได้ดีกว่าตัวแบบจำลอง VAR สมการที่ (3.1) แสดงตัวอย่างของตัวแบบจำลอง Vector STAR กรณีค่าในอดีต p ช่วงเวลา คือ

$$Y_t = \left(\mu^1 + \sum_{j=1}^p \beta_j^1 Y_{t-j} \right) (1 - G(s_t; \gamma, c)) + \left(\mu^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j^2 Y_{t-j} \right) (G(s_t; \gamma, c)) + \varepsilon_t \quad (3.1)$$

โดยที่

$$Y_t = \begin{pmatrix} y_{1t} & x_{1t} & x_{2t} & \dots & x_{mt} \end{pmatrix}'$$

เวกเตอร์ตัวแปร m ตัวที่กำลังพิจารณา ณ เวลาที่ t ; $t = 1, 2, \dots, T$

$$\mu^i = \begin{pmatrix} \mu_1^i & \mu_2^i & \dots & \mu_m^i \end{pmatrix}'$$

เวกเตอร์ของจุดตัดแกน (Intercept) ของ regime ที่ i ; $i = 1, 2$

$$\beta^i = \begin{bmatrix} \beta_{11}^i & \beta_{12}^i & \dots & \beta_{1m}^i \\ \beta_{21}^i & \beta_{22}^i & \dots & \beta_{2m}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1}^i & \beta_{m2}^i & \dots & \beta_{mm}^i \end{bmatrix}$$

¹ การแก้ปัญหา Contemporaneous correlation ในข้อมูลภาคตัดขวาง Cross section data จะใช้ตัวแบบจำลอง Seemingly Unrelated Regression (SUR)

เมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์ของ regime ที่ i ; $i = 1, 2$

โดยที่ β_{jk}^i คือสัมประสิทธิ์ของ $Y_{k,t-j}$ ใน regime ที่ i ของสมการที่พยากรณ์

Y_{it}

$$\varepsilon_t = (\varepsilon_{1t} \ \varepsilon_{2t} \ \dots \ \varepsilon_{mt})'$$

เวกเตอร์ค่าความคลาดเคลื่อนที่มีการกระจายแบบ iid

$$E(\varepsilon_t) = 0; \forall t \quad \text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2 I_m; \forall t \neq 0$$

$$g(s_t; \gamma, c) = \text{ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลง (Transition Function); เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง มีค่าระหว่าง 0 ถึง 1 ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงมีความสำคัญมากในตัวแบบจำลอง Vector STAR เพราะเป็นการบ่งบอกถึงน้ำหนักที่จะใช้ในการพรรณนาพฤติกรรมของตัวแปรต้นในแต่ละจุดเวลา t โดยฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงจะมีความสัมพันธ์อย่างเป็นระบบกับตัวแปรการเปลี่ยนแปลง (s_t)}$$

$$s_t = \text{ตัวแปรบ่งชี้ (Transition Variable) เป็นตัวแปรที่สามารถเก็บข้อมูลได้}^2$$

ตัวแปรบ่งชี้จะเป็นตัวแปรที่ชี้ว่าในแต่ละจุดเวลา t จะให้น้ำหนักในสมการใดเพื่อพรรณนาพฤติกรรมของตัวแปรที่กำลังพิจารณา โดยตัวแปรบ่งชี้ อาจจะเป็นค่าในอดีตของตัวแปร $s_t = (y_{t-d})$; $d > 0$ ³ หรือตัวแปรภายนอก $s_t = (z_t)$ ก็เป็นไปได้

$$\gamma = \text{พารามิเตอร์ในฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลง } \gamma \text{ ที่ถึงความเร็วของการเปลี่ยนแปลงจาก regime หนึ่งไปอีก regime หนึ่ง}$$

$$c = \text{พารามิเตอร์ในฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลง เป็นค่าอ้างอิงที่ใช้เป็นเงื่อนไขในการตัดสินใจเพื่อจะทำการเปลี่ยนแปลงน้ำหนักที่จะใช้ในแต่ละสมการทั้ง 2 (Threshold between to Two Regimes)}$$

² หากตัวแปรบ่งชี้ (Transition Variable) ไม่สามารถเก็บข้อมูลได้ จัดอยู่ในประเภทของแบบจำลอง Markov regime-switching

³ เรียกตัวแบบจำลองนี้ว่า Self-Exciting TAR Model การศึกษาของ Kräger and Kugler (1993) พบความสามารถของแบบจำลอง Self-Exciting TAR (SETAR) Model ในการพยากรณ์พฤติกรรมการณ์เคลื่อนไหวอัตราแลกเปลี่ยนของเงินดอลลาร์ ในช่วง ค.ศ. 1980 ถึง ค.ศ. 1990

พิจารณาสมการที่ (3.1) ตัวแบบจำลอง Vector STAR มีลักษณะคล้ายกับตัวแบบจำลอง VAR แต่ได้ขยายผลกลุ่มตัวแปรที่ใช้อธิบายแทนที่จะใช้โครงสร้างเพียงโครงสร้างเดียวสำหรับตัวแบบจำลอง VAR แต่ในตัวแบบจำลอง Vector STAR ใช้ 2 โครงสร้างโดยการเคลื่อนที่ของตัวแปรทางซ้ายจะได้รับผลจากโครงสร้างสมการที่ 1 และสมการที่ 2 ขนาดความสัมพันธ์ขึ้นกับฟังก์ชัน $G(s_t; \gamma, c)$ สำหรับฟังก์ชัน $G(s_t; \gamma, c)$ มีโครงสร้างระหว่าง 0 ถึง 1 ดังนั้นจึงสามารถพิจารณาได้ว่า $G(s_t; \gamma, c)$ เป็นน้ำหนักที่ใช้ regime ที่ 2 โดยน้ำหนักสามารถเปลี่ยนแปลงได้ตามกลุ่มตัวแปรและลักษณะของสมการ นอกจากนั้นถ้าฟังก์ชัน $G(s_t; \gamma, c)$ มีค่าเป็น 0 หรือ 1 อย่างถาวรแล้วตัวแบบจำลอง Vector STAR จะลดรูปเป็นตัวแบบจำลอง VAR อย่างถาวร และหากกำหนดฟังก์ชัน $G(s_t; \gamma, c)$ ให้มีค่าเฉพาะ 0 หรือ 1 เท่านั้น ณ เวลาใดๆ ตัวแบบจำลอง Vector STAR จะมีรูปลักษณะเป็น Switch ระหว่างโครงสร้างสมการที่ 1 และสมการที่ 2 และเรียกแบบจำลองดังกล่าวว่า Vector TAR

ฟังก์ชัน $G(s_t; \gamma, c)$ ยังเป็นฟังก์ชันที่แสดงถึงรูปแบบพฤติกรรมของน้ำหนักในตัวแบบจำลอง Vector STAR อีกด้วย ดังนั้น ฟังก์ชัน $G(s_t; \gamma, c)$ ที่จะเลือกใช้ในตัวแบบจำลอง Vector STAR ควรจะมีลักษณะการตอบสนองกับตัวแปรบ่งชี้ (s_t) ที่แตกต่างกัน ฟังก์ชัน $G(s_t; \gamma, c)$ ได้นำเสนออยู่อย่างกว้างขวางในงานวิจัยเชิงประจักษ์ต่างประเทศมี 2 รูปแบบ คือ ฟังก์ชัน Logistic และ ฟังก์ชัน Exponential

(1) รูปแบบของฟังก์ชัน Logistic ได้แสดงในสมการที่ (3.2) ตัวแบบจำลอง Vector STAR ที่ใช้ฟังก์ชัน Logistic เป็นฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลง เรียกว่า ตัวแบบจำลอง LSTAR

$$G(s_t; \gamma, c) = \frac{1}{1 + \exp \left\{ \frac{-\gamma(s_t - c)}{\sigma_{s_t}} \right\}} ; \gamma > 0 \quad (3.2)$$

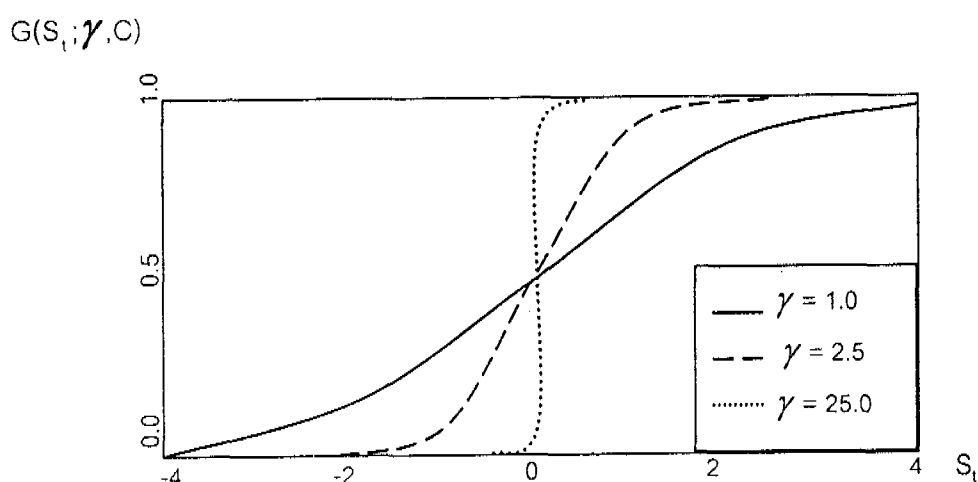
โดยที่

$$\sigma_{s_t} = \text{ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรบ่งชี้}$$

พิจารณาสมการที่ (3.2) ฟังก์ชัน Logistic แสดงถึงรูปแบบการตอบสนองของฟังก์ชัน $G(s_t; \gamma, c)$ ที่มีต่อการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรบ่งชี้ (s_t) ในลักษณะที่แตกต่างกันระหว่างเมื่อ $(s_t > c)$ และ $(s_t < c)$ เรียกการเคลื่อนไหวดังกล่าวว่า การเคลื่อนไหวแบบ asymmetric ส่วนค่าพารามิเตอร์ γ จะมีค่าอยู่ระหว่างศูนย์ถึงจำนวนอนันต์ (infinity) ถ้าหากค่าพารามิเตอร์ $\gamma = 0$ ทำให้ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลง $G(s_t; \gamma, c) = \frac{1}{2}$ ตัวแบบจำลอง

LSTAR จะเปลี่ยนรูปเป็นตัวแบบจำลองเชิงเส้นตรง แต่ถ้าค่าพารามิเตอร์ γ เข้าใกล้จำนวนอนันต์ ($\gamma \rightarrow \infty$) ทำให้เมื่อตัวแปรซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงเพียงเล็กน้อย การเคลื่อนไหวกจาก regimes หนึ่งไปยังอีก regime หนึ่งเป็นไปอย่างรวดเร็ว ลักษณะดังกล่าวทำให้ตัวแบบจำลอง LSTAR เปลี่ยนรูปเป็นตัวแบบจำลอง TAR (Two-Regime Threshold Autoregressive Model) ภาพที่ 3.1 แสดงให้เห็นถึงความแตกต่างของฟังก์ชัน Logistic ที่มีค่าพารามิเตอร์ C เดียวกัน (Threshold) แต่ค่าพารามิเตอร์ γ ต่างกัน

ภาพที่ 3.1
ลักษณะ Logistic Function



ภาพที่ 3.1 ถ้าค่าพารามิเตอร์ $\gamma \rightarrow \infty$ ฟังก์ชัน Logistic จะเข้าใกล้รูปแบบของฟังก์ชันบ่งชี้ (Indicator Function)⁴ คือ ถ้า $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} G(S_t; \gamma, C) = I[S_t > C]$

Van Dijk, Teräsvirta and Franses (2000) ได้กล่าวในการศึกษาว่าตัวแบบจำลอง LSTAR เหมาะสำหรับใช้อธิบายตัวแปรที่มีพฤติกรรมเคลื่อนไหวที่ไม่สมมาตรในแต่ละช่วงวัฏจักร (asymmetric business cycle) โดยพิจารณาให้เห็นจริงจากรูปที่ 3.1 ควบคู่กับตัวอย่างการใช้ตัวแบบจำลอง LSTAR ในการพรรณนาพฤติกรรมเคลื่อนไหวของอัตราการเติบโตของผลผลิต (growth rate of an output) กำหนดให้ $S_t = Y_{t-d}$ และ $C \approx 0$ สังเกตเห็นว่าถ้า $Y_{t-d} > 0$ ตัวแบบจำลอง LSTAR จะให้น้ำหนักใน regimes ที่หนึ่งในการอธิบายพฤติกรรมเคลื่อนไหวของตัวแปรมากกว่า แต่ถ้า $Y_{t-d} < 0$ ตัวแบบจำลอง LSTAR จะให้น้ำหนักกับอีก regimes ในการอธิบายพฤติกรรมเคลื่อนไหวของตัวแปรมากกว่า จะเห็นว่าตัวแบบจำลอง LSTAR สามารถ

⁴ $I[A] = 1$; ถ้า A เป็นจริงและ $I[A] = 0$; ถ้าเป็นเท็จ

แบ่งได้อย่างชัดเจนระหว่างอัตราการเติบโตของผลผลิตที่เป็นบวกและลบ ซึ่งเป็นตัวแทนเศรษฐกิจขาขึ้นและขาลงตามลำดับ ความสามารถของตัวแบบจำลอง LSTAR แสดงให้เห็นในการศึกษาของ Anderson and Teräsvirta (1992) และการศึกษาของ Teräsvirta, Tjøstheim and Granger (1994) ในการอธิบายพฤติกรรมการเคลื่อนไหวของผลผลิตมวลรวมภายในประเทศยุโรปและการเคลื่อนไหวของดัชนีผลผลิตในภาคอุตสาหกรรม (industry production index) ของกลุ่มประเทศ OECD ตามลำดับ และในปี ค.ศ. 2003 Holmes and Maghrebi พบว่าตัวแบบจำลอง LSTAR มีความสามารถในการพรรณนาพฤติกรรมการเคลื่อนไหวอัตราแลกเปลี่ยนของประเทศในเอเชียกับประเทศสหรัฐอเมริการะหว่างปีค.ศ. 1977 ถึง ค.ศ. 2000

(2) รูปแบบของฟังก์ชัน Exponential แสดงในสมการที่ (3.3) ตัวแบบจำลอง Vector STAR ที่ใช้ฟังก์ชัน Exponential เป็นฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลง เรียกว่า ตัวแบบจำลอง ESTAR

$$G(s_i; \gamma, C) = 1 - \exp \left\{ \frac{-\gamma (s_i - C)^2}{\sigma_{s_i}} \right\} ; \gamma > 0 \quad (3.3)$$

ลักษณะการเคลื่อนไหวของตัวแปรมิได้เป็นการเคลื่อนไหวแบบวัฏจักรธุรกิจไม่สมมาตร (asymmetric business cycle) เสมอไป ยังมีตัวแปรทางเศรษฐกิจและการเงินบางตัวที่มีการเคลื่อนไหวที่แตกต่างออกไป ยกตัวอย่างเช่น การเคลื่อนไหวของอัตราแลกเปลี่ยนที่แท้จริง จะเป็นอย่างไรนั้นขึ้นกับขนาดของความเบี่ยงเบน (deviation) จาก Purchasing Power Parity (PPP) หรือมีพฤติกรรมการเคลื่อนไหวแบบสมมาตร (symmetric business cycle) ทำให้ Teräsvirta (1994) พัฒนาฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงแบบ Exponential ขึ้นมา แสดงให้เห็นในสมการที่ (3.3) และรูปที่ 3.2 การศึกษาเชิงประจักษ์ของ Michael, Nobay and Peel (1997) และ Baum, Caglayan and Barkoulas (1998) ได้นำตัวแบบจำลอง ESTAR พรรณนาพฤติกรรมของอัตราแลกเปลี่ยนที่แท้จริง อย่างไรก็ตาม ถ้าค่าพารามิเตอร์ γ ในฟังก์ชัน Exponential (สมการที่ (3.3)) มีค่า $\gamma = 0$ หรือ $\gamma \rightarrow \infty$ ทำให้ฟังก์ชัน Exponential จะมีค่าเข้าใกล้ค่าคงที่ ESTAR Model จะเปลี่ยนรูปเป็นตัวแบบจำลองเชิงเส้นตรง ดังแสดงในภาพที่ 3.2 ทำให้ Jansen and Teräsvirta (1996) พัฒนาฟังก์ชัน Exponential Function เป็น Quadratic Logistic Function เพื่อใช้งานได้จริง รูปแบบของ Quadratic Logistic Function แสดงให้เห็นในสมการที่ (3.4) และภาพที่ 3.3

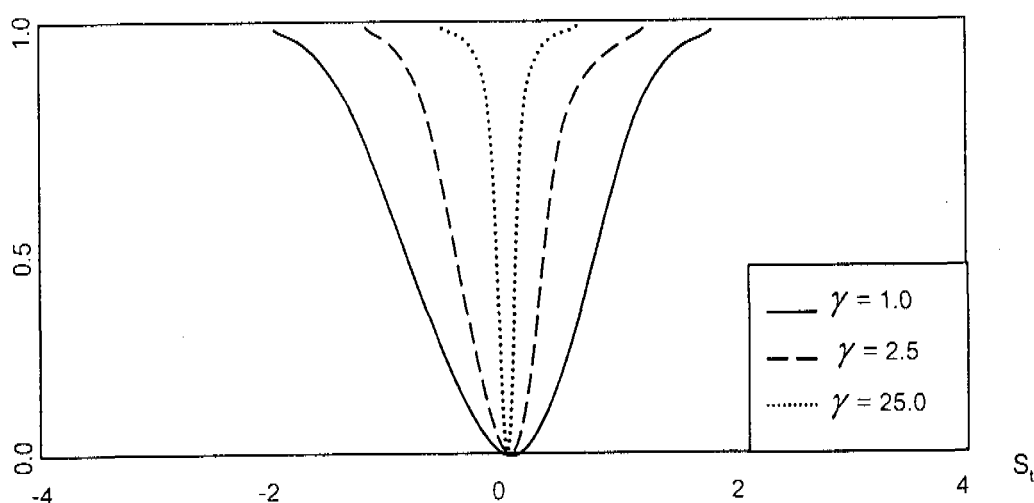
$$G(s_i; \gamma, C_1, C_2) = \frac{1}{1 + \exp \left\{ \frac{-\gamma(s_i - C_1)(s_i - C_2)}{\sigma_{s_i}} \right\}} ; c_1 \leq c_2, \gamma > 0 \quad (3.4)$$

พิจารณาสมการที่ (3.4) ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงเป็นฟังก์ชัน Quadratic Logistic มีลักษณะคล้ายกับฟังก์ชัน Logistic คือ เป็นแบบจำลองเชิงเส้นเมื่อ $\gamma = 0$ และถ้า $\gamma \rightarrow \infty$ ทำให้ $G(s_i; \gamma, C_1, C_2)$ เท่ากับ 1 เมื่อ $s_i < C_1$ หรือ $s_i > C_2$ และ $G(s_i; \gamma, C_1, C_2)$ เท่ากับ 0 เมื่อ $C_1 < s_i < C_2$ ข้อสังเกตสำหรับการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน Quadratic Logistic แสดงถึงรูปแบบการตอบสนองของฟังก์ชัน $G(s_i; \gamma, C_1, C_2)$ ที่มีต่อการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรบ่งชี้ (s_i) ในลักษณะที่แตกต่างกันระหว่างเมื่อระยะห่างระหว่างตัวแปรบ่งชี้ (s_i) กับค่าพารามิเตอร์ ($C = 0$) โดยไม่คำนึงถึงทิศทางของเครื่องหมายว่าตัวแปร (s_i) จะมีค่ามากกว่าหรือน้อยกว่าค่าพารามิเตอร์ (C_1, C_2) ที่ยังคงลักษณะการเคลื่อนไหวแบบสมมาตรเช่นเดิม

ภาพที่ 3.2

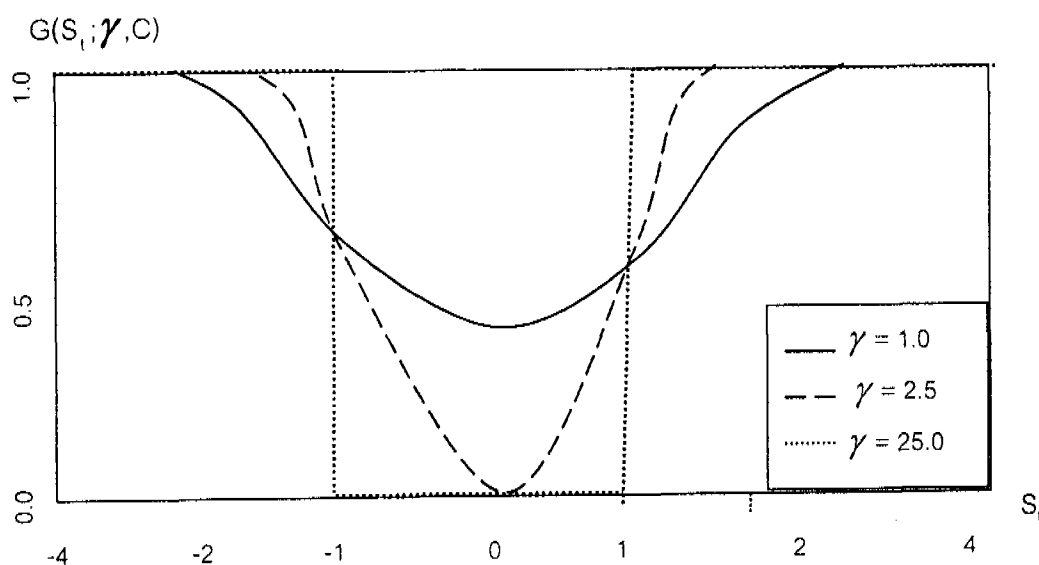
ลักษณะ Exponential Function เมื่อ ($C = 0$)

$G(s_i; \gamma, C)$



ภาพที่ 3.3

ลักษณะของ Quadratic Logistic Function เมื่อ $(C_1 = -1, C_2 = 1,)$



Van Dijk, Teräsvirta and Franses (2000) กล่าวไว้อย่างชัดเจนว่าตัวแบบจำลอง ESTAR เหมาะสำหรับการพรรณนาพฤติกรรมการเคลื่อนไหวของตัวแปร ในลักษณะที่ค่าตัวแปร บ่งชี้มีการผันผวนหรือเบี่ยงเบนไปจากค่ากลางหรือค่าอ้างอิงมากน้อยเพียงใด โดยสามารถ พิจารณาจากรูปที่ 3.3 จะเห็นว่าการใช้น้ำหนักว่าจะใช้ regime ใดนั้นขึ้นอยู่กับว่าตัวแปรบ่งชี้หรือ S_t มีค่าแตกต่างจากค่า C_1 และ C_2 มากน้อยเพียงใด ตัวอย่างเช่น หาก S_t มีค่าแตกต่างจากค่า C_1 และ C_2 อย่างมาก นั่นคือ $S_t < C_1$ และ $S_t > C_2$ จะให้น้ำหนักใน regimes ที่หนึ่งมากกว่า แต่ถ้า S_t มีค่าแตกต่างจากค่า C ไม่มากนัก หรือ $S_t < C_1$ และ $S_t > C_2$ ตัวแบบจำลองจะให้น้ำหนักในอีก regime มากกว่า ตัวอย่างการศึกษาที่นำตัวแบบจำลอง ESTAR สามารถใช้ในพรรณนาพฤติกรรม ของตัวแปร เช่น Kapetanios, Shin and Snell (2003) พรรณนาพฤติกรรมการเคลื่อนไหวของ ราคาหลักทรัพย์ของประเทศอังกฤษ หรือการศึกษาของ Clements and Smith (2001) พรรณนา พฤติกรรมอัตราแลกเปลี่ยนเงินของประเทศไทย และการเคลื่อนไหวอัตราแลกเปลี่ยนเงินของประเทศไทย กับประเทศญี่ปุ่นระหว่างปีค.ศ. 1977 ถึง ค.ศ. 2000 ในการศึกษาของ Holmes and Maghrebi (2003)

3.2 การกำหนดค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบจำลอง Vector STAR

ส่วนที่ 2 จะอธิบายถึงขั้นตอนและวิธีการประมาณค่าเพื่อหาค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบจำลอง Vector STAR ตามสมการที่ (3.1) และ ฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงที่จะนำมาพิจารณาประกอบด้วย ฟังก์ชัน Logistic (สมการที่ (3.2)) และฟังก์ชัน Quadratic Logistic (สมการที่ (3.4)) ทั้งนี้จะต้องทำการทดสอบเพื่อเลือกฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงที่เหมาะสมในการอธิบายพฤติกรรมของการเคลื่อนไหวของตัวแปรก่อนที่จะกำหนดค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบจำลอง Vector STAR

3.2.1 ขั้นตอนกำหนดค่าพารามิเตอร์ตัวแบบจำลอง Vector STAR

ขั้นตอนแรก คือ กำหนดค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบจำลอง Vector Autoregression (VAR Model) เหตุผลที่ทำการกำหนดค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบจำลอง VAR มีด้วยกัน 2 ประการ ประการแรกเพื่อที่จะทำการเปรียบเทียบความสามารถของตัวแบบจำลอง VAR กับตัวแบบจำลอง Vector STAR และประการที่สอง เพื่อจะนำค่าพารามิเตอร์จากแบบจำลอง VAR เป็นค่าตั้งต้น (Initial Values) ในการหาค่าของพารามิเตอร์ของตัวแบบจำลอง Vector STAR ด้วยวิธี Numerical search

ตัวแบบจำลอง Vector STAR เป็นตัวแบบจำลองที่พรรณนาพฤติกรรมของตัวแปรที่มีความสัมพันธ์แบบไม่เป็นเชิงเส้นตรง ดังนั้นก่อนที่จะกำหนดค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบจำลอง Vector STAR จะต้องทำการทดสอบความเป็นเชิงเส้นเสียก่อน โดยการกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ $\gamma = 0$ ทำให้ ฟังก์ชัน $G(s_i; \gamma, C) = \frac{1}{2}$ ในทุกจุดของเวลา t ส่งผลให้ตัวแบบจำลอง Vector STAR ไม่มีการเปลี่ยนแปลงระหว่าง regimes จึงสามารถจัดรูปให้เป็นตัวแบบจำลอง VAR ได้ จากแนวคิดดังกล่าว Teräsvirta (1994) เสนอวิธีการทดสอบความเป็นเชิงเส้นตรง โดยการใช้ประมาณค่าอนุกรมเทย์เลอร์อันดับ 3 (Taylor Series Approximation)⁵ ประมาณค่าฟังก์ชัน $G(s_i; \gamma, C)$ รอบๆค่า $\gamma = 0$ ในสมการที่ (3.1) ส่งผลให้เกิดความสัมพันธ์

⁵ ฟังก์ชัน $f(x)$ ใดๆ ที่หาอนุพันธ์ได้ต่อเนื่อง n ครั้งสามารถประมาณค่ารอบๆจุด $x_0 = 0$ ใดๆ โดย $f(x) \approx f_n(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx}(x - x_0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2f(x_0)}{dx^2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d^nf(x_0)}{dx^n}(x - x_0)^n$

ระหว่างชุดตัวแปรต้นกับค่าในอดีตของชุดตัวแปรต้น และผลคูณแบบ cross product ดังแสดงให้เห็นในสมการที่ (3.5)

$$y_t = \alpha_t + \sum_{j=1}^p \Gamma_j^0 Z_{t-j}^0 + \sum_{j=1}^p \Gamma_j^1 Z_{t-j}^1 + \sum_{j=1}^p \Gamma_j^2 Z_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^p \Gamma_j^3 Z_{t-j}^3 + \varepsilon_t \quad (3.5)$$

โดยที่

$$Y_t = (y_{1t} \ x_{1t} \ x_{2t} \ \dots \ x_{mt})'$$

$$\alpha_t = (\alpha_{1t} \ \alpha_{1t} \ \alpha_{2t} \ \dots \ \alpha_{mt})'$$

เวกเตอร์ของจุดตัดแกน (Intercept)

$$\Gamma_j^i = \begin{bmatrix} \tau_{11}^i & \tau_{12}^i & \dots & \tau_{1m}^i \\ \tau_{21}^i & \tau_{22}^i & \dots & \tau_{2m}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{m1}^i & \tau_{m2}^i & \dots & \tau_{mm}^i \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ของผลคูณแบบ cross product โดยที่ τ_{μ}^i คือสัมประสิทธิ์ของ $Z_{k,t-j}^i$

$$Z_{t-j}^i = (y_{1,t-j} s_{1,t-j}^i \ y_{2,t-j} s_{2,t-j}^i \ \dots \ y_{m,t-j} s_{m,t-j}^i)'$$

$$\varepsilon_t = (e_{1t} \ e_{2t} \ \dots \ e_{mt})'$$

เวกเตอร์ค่าความคลาดเคลื่อนที่มีการกระจายแบบ iid

สมการที่ (3.5) ชี้ให้เห็นว่า ความสัมพันธ์ระหว่างชุดตัวแปรต้นและชุดข้อมูลที่สังเกต จะมีความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงกับค่าพารามิเตอร์ (Linear in Parameters) แต่ไม่เป็นเชิงเส้นตรงกับข้อมูล ดังนั้นค่าพารามิเตอร์ในสมการที่ (3.5) จึงมีความหมาย กล่าวคือ ถ้าเมทริกซ์ของพารามิเตอร์ $\Gamma_j^1, \Gamma_j^2, \Gamma_j^3$ บางตัวไม่เป็น 0 ย่อมแสดงว่าชุดตัวแปรต้นและชุดข้อมูลมีความสัมพันธ์ไม่เป็นเชิงเส้นตรง ดังนั้นจึงต้องทำการทดสอบความสัมพันธ์ระหว่างชุดตัวแปรเสียก่อนว่ามีความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงหรือไม่ โดยใช้การทดสอบ Wald Test สมมติฐานในการทดสอบคือ

$$H_{0i}: \Gamma^1 = \Gamma^2 = \Gamma^3 = 0$$

$$H_{1i}: \Gamma^i \neq 0 \quad \text{สำหรับบาง } i$$

หากผลการทดสอบปฏิเสธสมมติฐานหลัก จะเชื่อว่าพฤติกรรมการเคลื่อนไหวของข้อมูลที่ต้องการศึกษามีลักษณะเป็นแบบไม่เป็นเชิงเส้นตรง แต่เนื่องจากเราไม่ทราบว่าตัวแปรบ่งชี้

คือตัวไหน Teräsvirta (1994) เสนอให้ใช้สมมติฐานของการทดสอบความเป็นเชิงเส้นตรง (Linearity: against STAR Model) ในการเลือกตัวแปรบ่งชี้ (S_i) โดยจะเลือกตัวแปรที่คาดว่าจะเป็นตัวแปรบ่งชี้จากตัวแปรที่ทำให้ความสัมพันธ์ของระบบสมการไม่เป็นเชิงเส้นตรงมากที่สุด หรือเลือกตัวแปร S_i ที่ให้ค่า p-value ต่ำที่สุดในการทดสอบความเป็นเชิงเส้นตรงหลักเกณฑ์ดังกล่าวเป็นหลักเกณฑ์เดียวกับงานวิจัยของ Van Dijk and Franses (2000), Van Dijk (2002) และ Lekkos and Milas (2004) เพื่อหาตัวแปรบ่งชี้ในแบบจำลอง STAR ที่พรรณนาพฤติกรรมอัตราผลตอบแทนส่วนเกินจากการลงทุนพันธบัตรรัฐบาลในประเทศไทย

ในการทดสอบเพื่อระบุฟังก์ชัน $G(S_i; \gamma, C)$ ควรมีลักษณะใด โดยรูปแบบสมการการเปลี่ยนแปลงที่จะทำการเลือกจะมีด้วยกัน 2 รูปแบบคือ ฟังก์ชัน Logistic แสดงให้เห็นในสมการที่ (3.2) และฟังก์ชัน Quadratic Logistic แสดงให้เห็นในสมการที่ (3.4) วิธีการเลือกฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลง Teräsvirta (1994) เสนอให้ใช้วิธี Sequence of Nested Test โดยมีขั้นตอนดังนี้ ประมาณค่าฟังก์ชัน Logistic ด้วยการประมาณอนุกรมเทย์เลอร์อันดับ 3 รอบๆค่า $\gamma = 0$ และนำฟังก์ชัน $G(S_i; \gamma, C_i)$ ที่ประมาณค่าที่ได้แทนลงในสมการ Vector STAR (สมการที่ (3.1)) สามารถจัดรูป LSTAR ให้มีลักษณะใกล้เคียงกับสมการที่ (3.5) จากนั้นทำในลักษณะเดียวกันกับฟังก์ชัน Quadratic Logistic เมื่อได้สมการที่มีลักษณะใกล้เคียงกับสมการที่ (3.5) ของทั้งตัวแบบจำลอง LSTAR และ ESTAR พิจารณาความแตกต่างของค่าพารามิเตอร์ของทั้งสองแบบจำลอง โดยการทดสอบ Sequence of Nested Test ดังสมมติฐานข้างล่าง

$$H_{04} : \Gamma^3 = 0$$

$$H_{03} : \Gamma^2 = 0 \mid \Gamma^3 = 0$$

$$H_{02} : \Gamma^1 = 0 \mid \Gamma^2 = \Gamma^3 = 0$$

ถ้าค่า p-value ของ H_{03} ต่ำสุด จะเลือกฟังก์ชัน Quadratic Logistic เป็นรูปแบบของฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลง แต่ถ้าค่า p-value ของ H_{03} ไม่ใช่ค่าที่ต่ำสุด ให้เลือกฟังก์ชัน Logistic เป็นรูปแบบของฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลง (ดูรายละเอียดแนวความคิดหลักเกณฑ์นี้ได้จากภาคผนวก ก.) หลักเกณฑ์ดังกล่าวถูกนำไปใช้ในงานวิจัยเชิงประจักษ์ในต่างประเทศ ตัวอย่างเช่น Van Dijk, Teräsvirta and Franses (2000) Korhonen (2001) และ Jorge, Salvador and Julián (2005)

เมื่อได้ทราบถึงฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงและตัวแปรบ่งชี้แล้ว ขั้นตอนต่อไปจะเป็นการกำหนดค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลอง STAR โดยวิธี Maximum Likelihood Estimation