

### พื้นฐานระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

ปัจจุบันการศึกษาและวิเคราะห์ปัญหาทางด้านวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์ได้มีการนำความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับระเบียบวิธีเชิงตัวเลข มาผสมผสานกับความสามารถในการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์และความรู้พื้นฐานทางด้านภาษาคอมพิวเตอร์ มาใช้ในการวิเคราะห์หาผลเฉลยของปัญหาทางวิศวกรรมศาสตร์ได้อย่างรวดเร็ว ทำให้การจำลองแบบเชิงตัวเลขได้รับความนิยมเป็นอย่างมาก เนื่องจากสามารถพยากรณ์ผลเฉลยของปัญหาได้อย่างแม่นยำเพียงพอในการใช้งาน รวมทั้งสามารถประหยัดเวลาและค่าใช้จ่ายกว่าการทำการทดลอง ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงศึกษาและวิเคราะห์ผลพลศาสตร์ของกระบวนการถ่ายเทความร้อนและมวลสาร โดยการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ที่สามารถครอบคลุมและอธิบายปรากฏการณ์ในปัญหาของกระบวนการถ่ายเทความร้อนและมวลสาร

ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ที่ใช้ในปัจจุบัน มีอยู่หลายวิธี เช่น ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method) และระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม (finite volume method) เป็นต้น ซึ่งระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มเป็นระเบียบวิธีที่พัฒนามาจากระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (finite difference method) โดยหลังจากการแบ่งขอบเขตของปัญหาเป็นปริมาตรย่อย ๆ แล้วจะทำการอินทิเกรตสมการอนุพันธ์ของปัญหาลดอดปริมาตรควบคุม (control volume) นั้น ซึ่งให้ความหมายทางกายภาพที่ชัดเจนหากจะเปรียบเทียบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อาจกล่าวได้ว่าระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มนี้ จะเสมือนแทนค่าฟังก์ชันประมาณแบบขั้นบันได (stepwise) หรือแบบเชิงเส้น (linear piecewise) แทน (Patankar, 1980) รูปแบบทั่วไปอยู่ในรูปแบบจุด (point form) การประมาณตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่มีความซับซ้อนจึงมีความง่ายกว่า ทำให้เป็นที่นิยมในการคำนวณพลศาสตร์ของไหล (computation fluid dynamics) ส่วนข้อเสียคือมีข้อจำกัดในการแก้ปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อน (Voller et al., 1990) แต่อย่างไรก็ตามกำลังได้รับการปรับปรุงและพัฒนาขึ้นเป็นลำดับ

เมื่อเปรียบเทียบการจำลองแบบด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มและไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เทียบเท่ากัน พบว่าข้อดีของระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม คือ ระบบสมการมีความซับซ้อนน้อยกว่า (Voller et al., 1990, Idelsohn et al., 1994) และแสดงความหมายทางกายภาพได้ชัดเจนกว่า การทำวิจัยนี้จึงเสนอการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ สำหรับอธิบายปรากฏการณ์ในปัญหา

ของกระบวนการถ่ายเทความร้อนและมวลสารภายใต้พลังงานไมโครเวฟด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม (finite volume method)

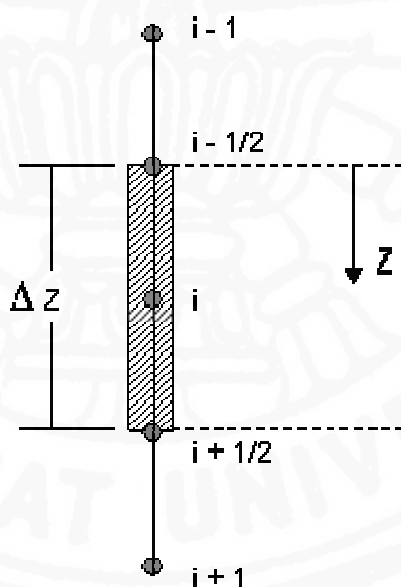
ปรากฏการณ์ของกระบวนการถ่ายเทความร้อนและมวลสารและปฏิกิริยาต่าง ๆ สามารถอธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation) แบบไม่เชิงเส้น ซึ่งไม่สามารถแก้ระบบสมการเหล่านี้เพื่อหาผลเฉลยแน่นอนตรง (exact solution) ได้ด้วยวิธีการวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ (analytical analysis) ยกเว้นในกรณีพิเศษบางกรณีพิเศษบางกรณี ดังนั้นการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (numerical analysis) จึงเข้ามามีบทบาทในการหาผลเฉลยโดยประมาณ (approximate solution) โดยอาศัยการกระจายพจน์ต่าง ๆ เพื่อประมาณสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเหล่านี้ด้วยระบบสมการพีชคณิต (system of algebraic equations) ซึ่งสามารถหาผลเฉลยของระบบสมการนี้ได้ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์

ในบทนี้จะแสดงการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม (finite volume method) ซึ่งเป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่อาศัยการอินทิเกรตสมการอนุพันธ์บนปริมาตรควบคุม (control volume) โดยแบ่งขอบเขตของปัญหาที่สนใจออกเป็นปริมาตรควบคุมย่อย ๆ จำนวนมาก แต่ละปริมาตรควบคุมจะล้อมรอบโหนด (node) ซึ่งเป็นตำแหน่งที่แสดงค่าเฉลี่ยของปริมาณต่าง ๆ ในปริมาตรควบคุมนั้น ผลจากการอินทิเกรตสมการอนุพันธ์แล้วประยุกต์ Gauss divergence theorem จะได้สมการพีชคณิตของแต่ละปริมาตรควบคุมที่มีตัวแปรเป็นค่าของปริมาณใด ๆ บนโหนดในปริมาตรควบคุมนั้นและปริมาตรควบคุมรอบข้าง

#### 4.1 ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม (Finite Volume Method)

ในการแก้ไขปัญหาเนื่องจากสมการถ่ายเทมวลสารและความร้อน อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation) ซึ่งเป็นสมการไม่เชิงเส้นจึงต้องใช้ระเบียบวิธี Newton-Raphson Method ช่วยในการแก้สมการขณะเดียวกันเนื่องจากของเหลวไหลผ่านวัสดุพูนที่มีโครงสร้างซับซ้อน สมการที่ใช้ในการวิเคราะห์ต้องอาศัยสมการเฉพาะตำแหน่งหรือเชิงจุลภาคเพื่ออธิบายพฤติกรรมการไหลภายในช่องว่างหรือรูพูน แต่เนื่องจากพื้นผิวภายในที่ประกอบจากส่วนโค้งของอนุภาคของแข็ง (solid matrix) ของวัสดุพูนมีรูปร่างเชิงเรขาคณิตที่ซับซ้อน ทำให้การหาคำตอบทั่วไปสำหรับวิเคราะห์ความเร็วและอุณหภูมิเป็นไปได้ยาก ในการแก้ปัญหาดังกล่าวจึงพยายามอธิบายปรากฏการณ์ทางกายภาพในวัสดุพูนในรูปสมการเชิงมหภาค (macroscopic equations) ซึ่งจะเป็นจริงก็ต่อเมื่อโดเมนที่พิจารณาเป็นปริมาตรเฉลี่ย

ที่ประกอบมาจากรูพรุนหลาย ๆ อัน ซึ่งรากฐานของสมการเชิงมหภาคหามาได้จากสมการเชิงจุลภาคโดยผ่านเทคนิคปริมาตรเฉลี่ย (volume average technique) ตามที่อธิบายไว้ใน Patankar (1980), Whitaker (1977) และ Ratanadecho et al., (2003) โดยที่สมการดังกล่าวนี้สามารถใช้ได้จริงสำหรับค่าเฉลี่ยของปริมาณเชิงจุลภาคของปริมาณต่าง ๆ ในการศึกษาเกี่ยวกับวัสดุพรุน ได้แก่ porosity( $\varepsilon$ ) ความเร็วที่ไหลผ่านรูพรุน ( $u$ ) ซึ่งปริมาณเหล่านี้ถือเป็นค่าเฉลี่ย (Ratanadecho et al., 2003) เมื่อพิจารณาถึงกลุ่มของสมการที่เกี่ยวข้องกับปรากฏการณ์การถ่ายเทความร้อนและมวลสารทั้งในกรณีการนำความร้อนและแบบการพาความร้อนนั้น พบว่ามีสมการพื้นฐานที่เกี่ยวข้องทั้งหมดได้แก่ สมการถ่ายเทมวลสาร สมการความดัน และ สมการถ่ายเทความร้อน ที่ต้องทำการประยุกต์ให้อยู่ในรูปแบบของนิวเมอริคัล โดยอาศัยหลักการของระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม จากนั้นจึงทำการจัดสมการที่มีลักษณะไม่เป็นเชิงเส้นให้สามารถหาคำตอบโดยใช้ระเบียบวิธี Newton-Raphson Method ตามลำดับ ได้ดังนี้



ภาพที่ 4.1 แสดง grid – point ในระบบ 1 มิติ

สมการถ่ายเทมวลสาร (mass transport equation) เป็นสมการที่อธิบายถึงการกระจายของความชื้นในระนาบและอัตราการเปลี่ยนแปลงของความชื้นเมื่อระยะเวลาการถ่ายเทมวลสารเปลี่ยนไป สำหรับกระบวนการถ่ายเทความร้อนและมวลสารภายใต้พลังงานไม่โครเวฟ นั้นสมการถ่ายเทมวลสารเกิดจากสมมุติฐานการเคลื่อนที่ของของไหลในวัสดุพูนเขียนได้ดังนี้

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} (\rho_l s + \rho_v (1-s)) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho_l \frac{KK_{rl}}{\mu_l} \left( \frac{\partial P_c}{\partial z} + \rho_l g_z \right) + \rho_v \frac{KK_{rg}}{\mu_g} (\rho_g g_z) - D_m \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \rho_v}{\partial z} \right) \right) = 0 \quad (4.1)$$

จากสมการที่ 4.1 ทำการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม (finite volume method) ซึ่งเป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่อาศัยการอินทิเกรตสมการอนุรักษ์บนปริมาตรควบคุม (control volume) โดยแบ่งขอบเขตของปัญหาที่สนใจ ออกเป็นปริมาตรควบคุมย่อย ๆ จำนวนมาก แต่ละปริมาตรควบคุมจะล้อมรอบโหนด (node) ซึ่งเป็นตำแหน่งที่แสดงค่าเฉลี่ยของปริมาณต่าง ๆ ในปริมาตรควบคุมนั้น ผลจากการอินทิเกรตสมการอนุพันธ์แล้วประยุกต์ Gauss divergence theorem จะได้สมการพีชคณิตของแต่ละปริมาตรควบคุมที่มีตัวแปรเป็นค่าของปริมาณใด ๆ บนโหนดในปริมาตรควบคุมนั้น และปริมาตรควบคุมรอบข้าง ดังนี้

$$\int_{i-1/2}^{i+1/2} \int_t^{t+\Delta t} \phi \frac{\partial}{\partial t} (\rho_l s + \rho_v (1-s)) dt dz + \int_t^{t+\Delta t} \int_{i-1/2}^{i+1/2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho_l \frac{KK_{rl}}{\mu_l} \left( \frac{\partial P_c}{\partial z} + \rho_l g_z \right) + \rho_v \frac{KK_{rg}}{\mu_g} (\rho_g g_z) - D_m \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \rho_v}{\partial z} \right) \right) dz dt = 0 \quad (4.2)$$

$$\phi (1-s_{ir}^n) (\rho_l (s_{ei}^{n+1} - s_{ei}^n) + \rho_{vi}^{n+1} (1-s_{ei}^{n+1}) - \rho_{vi}^n (1-s_{ei}^n)) \Delta z + \left[ \left( \rho_l \frac{KK_{rl}}{\mu_l} \left( \frac{\partial P_c}{\partial z} + \rho_l g_z \right) + \rho_v \frac{KK_{rg}}{\mu_g} (\rho_g g_z) - D_m \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \rho_v}{\partial z} \right) \right) \right]_{i+1/2}^{n+1} - \left[ \left( \rho_l \frac{KK_{rl}}{\mu_l} \left( \frac{\partial P_c}{\partial z} + \rho_l g_z \right) + \rho_v \frac{KK_{rg}}{\mu_g} (\rho_g g_z) - D_m \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \rho_v}{\partial z} \right) \right) \right]_{i-1/2}^{n+1} \Delta t = 0 \quad (4.3)$$

จากสมการที่ 4.3 นำ  $\Delta t \Delta z$  หารตลอดทั้งสมการจะได้

$$\begin{aligned}
 & \frac{\phi}{\Delta t} (1 - s_{ir}) (\rho_l (s_{ei}^{n+1} - s_{ei}^n) + \rho_{vi}^{n+1} (1 - s_{ei}^{n+1}) - \rho_{vi}^n (1 - s_{ei}^n)) \\
 & + \frac{1}{\Delta z} \left( \rho_l \left( \frac{KK_{rl}}{\mu_l} \right) \Big|_{i+\frac{1}{2}} \left( \frac{P_{ci+1}^{n+1} - P_{ci}^{n+1}}{\Delta z} + \rho_l g_z \right) - \frac{KK_{rl}}{\mu_l} \Big|_{i-\frac{1}{2}} \left( \frac{P_{ci}^{n+1} - P_{ci-1}^{n+1}}{\Delta z} + \rho_l g_z \right) \right) \\
 & + \frac{1}{\Delta z} \left( \rho_{vi+1}^{n+1} \frac{KK_{rg}}{\mu_g} \Big|_{i+\frac{1}{2}} (\rho_{gi}^{n+1} g_z) - \rho_{vi-1}^{n+1} \frac{KK_{rg}}{\mu_g} \Big|_{i-\frac{1}{2}} (\rho_{gi-1}^{n+1} g_z) \right) \\
 & - \left( D_{mi+\frac{1}{2}}^{n+1} \left( \frac{\rho_{vi+1}^{n+1} - \rho_{vi}^{n+1}}{\Delta z} \right) - D_{mi-\frac{1}{2}}^{n+1} \left( \frac{\rho_{vi}^{n+1} - \rho_{vi-1}^{n+1}}{\Delta z} \right) \right) \\
 & = 0 = F_i^n = Gd[i]
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
 \text{เมื่อ} \quad \frac{KK_{rl}}{\mu_l} \Big|_{i \pm \frac{1}{2}} &= \frac{\frac{KK_{rl}}{\mu_l} \Big|_i + \frac{KK_{rl}}{\mu_l} \Big|_{i \pm 1}}{2}, \quad \frac{KK_{rg}}{\mu_g} \Big|_{i \pm \frac{1}{2}} = \frac{\frac{KK_{rg}}{\mu_g} \Big|_i + \frac{KK_{rg}}{\mu_g} \Big|_{i \pm 1}}{2} \\
 D_{i \pm \frac{1}{2}}^{n+1} &= \frac{D_i^{n+1} + D_{i \pm 1}^{n+1}}{2}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\text{และ} \quad s^{n+1} = s^n - \Delta s, \quad T^{n+1} = T^n - \Delta T \tag{4.6}$$

กรณีโหนดภายใน (internal node)

เมื่อพิจารณาสมการถ่ายเทมวลสารเทียบกับความชื้น (เทียบ s) ณ ตำแหน่ง  $F_i^{n+1}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_i^{n+1}}{\partial s_{ei}^{n+1}} &= \frac{\phi}{\Delta t} (1 - s_{ir}) \{ \rho_l - \rho_{vi}^{n+1} \} \\
&+ \frac{1}{\Delta z} \left\{ \rho_l \left[ \left( \frac{KK_{rl}}{\mu_l} \right)_{i+\frac{l}{2}} \frac{\partial}{\partial s_{ei}^{n+1}} \left( \frac{-P_{ci}^{n+1}}{\Delta z} \right) + \left( \frac{P_{ci+l}^{n+1} - P_{ci}^{n+1}}{\Delta z} + \rho_l g_z \right) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s_{ei}^{n+1}} \left( \frac{KK_{rl}}{\mu_l} \right)_{i+l} \right] \right. \\
&\quad \left. - \left( \frac{KK_{rl}}{\mu_l} \right)_{i-\frac{l}{2}} \frac{\partial}{\partial s_{ei}^{n+1}} \left( \frac{P_{ci}^{n+1}}{\Delta z} \right) + \left( \frac{P_{ci}^{n+1} - P_{ci-l}^{n+1}}{\Delta z} + \rho_l g_z \right) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s_{ei}^{n+1}} \left( \frac{KK_{rl}}{\mu_l} \right)_{i-l} \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[ \rho_{vi}^{n+1} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s_{ei}^{n+1}} \left( \frac{KK_{rg}}{\mu_g} \right)_{|i} \right] (\rho_{gi}^{n+1} g_z) - \rho_{vi-l}^{n+1} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s_{ei}^{n+1}} \left( \frac{KK_{rg}}{\mu_g} \right)_{|i} (\rho_{gi-l}^{n+1} g_z) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial D_{mi}^{n+1}}{\partial s_{ei}^{n+1}} \left( \frac{\rho_{vi+l}^{n+1} - \rho_{vi}^{n+1}}{\Delta z} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial D_{mi-l}^{n+1}}{\partial s_{ei}^{n+1}} \left( \frac{\rho_{vi}^{n+1} - \rho_{vi-l}^{n+1}}{\Delta z} \right) \right] \right\} \\
&= Gb[i]
\end{aligned} \tag{4.7}$$

ณ ตำแหน่ง  $F_{i+l}^{n+1}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{i+l}^{n+1}}{\partial s_{ei}^{n+1}} &= \frac{1}{\Delta z} \left\{ \rho_l \left[ \left( \frac{KK_{rl}}{\mu_l} \right)_{i+\frac{l}{2}} \frac{\partial}{\partial s_{ei}^{n+1}} \left( \frac{-P_{ci}^{n+1}}{\Delta z} \right) + \left( \frac{P_{ci+l}^{n+1} - P_{ci}^{n+1}}{\Delta z} + \rho_l g_z \right) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s_{ei}^{n+1}} \left( \frac{KK_{rl}}{\mu_l} \right)_{i+l} \right] \right\} \\
&\quad + \left[ \rho_{vi}^{n+1} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s_{ei}^{n+1}} \left( \frac{KK_{rg}}{\mu_g} \right)_{|i+l} \right] (\rho_{gi}^{n+1} g_z) - \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial D_{mi}^{n+1}}{\partial s_{ei}^{n+1}} \left( \frac{\rho_{vi+l}^{n+1} - \rho_{vi}^{n+1}}{\Delta z} \right) \right] \\
&= Gc[i]
\end{aligned} \tag{4.8}$$

ณ ตำแหน่ง  $F_{i-l}^{n+1}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{i-l}^{n+1}}{\partial s_{ei}^{n+1}} &= -\frac{1}{\Delta z} \left\{ \rho_l \left[ \left( \frac{KK_{rl}}{\mu_l} \right)_{i-\frac{l}{2}} \frac{\partial}{\partial s_{ei}^{n+1}} \left( \frac{P_{ci}^{n+1}}{\Delta z} \right) - \left( \frac{P_{ci}^{n+1} - P_{ci-l}^{n+1}}{\Delta z} + \rho_l g_z \right) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s_{ei}^{n+1}} \left( \frac{KK_{rl}}{\mu_l} \right)_{i-l} \right] \right\} \\
&\quad - \left[ \rho_{vi-l}^{n+1} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s_{ei}^{n+1}} \left( \frac{KK_{rg}}{\mu_g} \right)_{|i-l} \right] (\rho_{gi-l}^{n+1} g_z) - \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial D_{mi-l}^{n+1}}{\partial s_{ei}^{n+1}} \left( \frac{\rho_{vi}^{n+1} - \rho_{vi-l}^{n+1}}{\Delta z} \right) \right] \\
&= Ga[i-l]
\end{aligned} \tag{4.9}$$

จากสมการที่ 4.7 ถึง 4.9 สามารถเขียน Algorithms ตามลำดับได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{Gd}[i] &= \text{porosity} * (1.0 - s_{ir}) * (\text{rhow} * (\text{se}[i] - \text{se\_old}[i]) + \text{rhov}[i] * (1.0 - \text{se}[i]) \\ &\quad - \text{rhov\_old}[i] * (1.0 - \text{se\_old}[i])) / \text{dt} + (\text{rhow} * (\text{uw}[i] - \text{uw}[i-1]) \\ &\quad + (\text{rhov}[i] * \text{ug}[i] - \text{rhov}[i-1] * \text{ug}[i-1] + \text{md}[i] - \text{md}[i-1])) / \text{dz} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Gb}[i] &= \text{porosity} * (1.0 - s_{ir}) * (\text{rhow} - \text{rhov}[i]) / \text{dt} \\ &\quad + (\text{rhow} * (\text{duwm\_ds}[i] - \text{duwp\_ds}[i-1]) + (\text{rhov}[i] * \text{dugm\_ds}[i] - \text{rhov}[i-1] \\ &\quad * \text{dugp\_ds}[i-1]) + \text{dmdm\_ds}[i] - \text{dmdp\_ds}[i-1]) / \text{dz} \end{aligned}$$

$$\text{Gc}[i] = (\text{rhow} * \text{duwp\_ds}[i] + \text{rhov}[i] * \text{dugp\_ds}[i] + \text{dmdp\_ds}[i]) / \text{dz}$$

$$\text{Ga}[i-1] = -(\text{rhow} * \text{duwm\_ds}[i-1] + \text{rhov}[i-1] * \text{dugm\_ds}[i-1] + \text{dmdm\_ds}[i-1]) / \text{dz}$$

จากนั้นทำการประยุกต์สำหรับพิจารณากรณีตำแหน่งที่เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) โดยทำการประยุกต์ เช่นเดียวกับกรณีโหนดภายใน (internal node) ดังแสดงในภาคผนวก ก จากการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม (finite volume method) โดยผลจากการอินทิเกรตสมการอนุพันธ์แล้วต้องประยุกต์ Gauss Divergence Theorem จะได้สมการพีชคณิตของแต่ละปริมาตรควบคุมที่มีตัวแปรเป็นค่าของปริมาณใด ๆ บนโหนดในปริมาตรควบคุมนั้นและปริมาตรควบคุมรอบข้าง สามารถแสดงเมตริกซ์ของการคำนวณเพื่อหาค่าของความชื้นที่เปลี่ยนแปลงโดยใช้วิธี Gauss divergence theorem ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial s_{e1}} & \frac{\partial F_1}{\partial s_{e2}} & 0 & 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial s_{e1}} & \frac{\partial F_2}{\partial s_{e2}} & \frac{\partial F_2}{\partial s_{e3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_{N-1}}{\partial s_{eN-2}} & \frac{\partial F_{N-1}}{\partial s_{eN-1}} & \frac{\partial F_{N-1}}{\partial s_{eN}} \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_N}{\partial s_{eN-1}} & \frac{\partial F_N}{\partial s_{eN}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta s_{e1} \\ \Delta s_{e2} \\ \Delta s_{e3} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta s_{eN-2} \\ \Delta s_{eN-1} \\ \Delta s_{eN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_{e2} \\ F_{e3} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ F_{N-2} \\ F_{N-1} \\ F_N \end{bmatrix}$$