

การหา Likelihood Function

จาก Frontier Cost Function

$$\ln c_{it} = \ln C(y_{it}, p_{it}; \beta_y, \beta_p) + \varepsilon_{it}$$

$$\varepsilon_{it} = v_{it} + u_{it}$$

$$u_{it} = z_{it}\delta + w_{it}$$

ฟังก์ชันความหนาแน่นของ v_{it} และ u_{it} คือ

$$f_{v_{it}}(v_{it}) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}v_{it}^2/\sigma_v^2\right)}{\sqrt{2\pi}\sigma_v}, -\infty < v_{it} < \infty \quad (ง.1)$$

และ

$$f_{u_{it}}(u_{it}) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}(u_{it} - z_{it}\delta)^2/\sigma^2\right]}{\sqrt{2\pi}\sigma\Phi(z_{it}\delta/\sigma)}, u_{it} \geq 0 \quad (ง.2)$$

ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ v_{it} และ u_{it} คือ

$$f_{v_{it}, u_{it}}(v_{it}, u_{it}) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(v_{it}\right)^2/\sigma_v^2\right] + \left[\left(u_{it} - z_{it}\delta\right)^2/\sigma^2\right]\right\}}{2\pi\sigma\sigma_v\Phi(z_{it}\delta/\sigma)}, u_{it} \geq 0$$

ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ $\varepsilon_{it} = v_{it} + u_{it}$ และ u_{it} คือ

$$\begin{aligned}
 & f_{\varepsilon_{it}, u_{it}}(e_{it}, u_{it}) \\
 &= \frac{\exp - \frac{1}{2} \left\{ \left[(e_{it} - u_{it})^2 / \sigma_v^2 \right] + \left[(u_{it} - z_{it} \delta)^2 / \sigma^2 \right] \right\}}{2\pi\sigma\sigma_v \Phi(z_{it}\delta/\sigma)}, u_{it} \geq 0 \\
 &= \frac{\exp - \frac{1}{2} \left\{ \left[(e_{it}^2 - 2u_{it}e_{it} + u_{it}^2) / \sigma_v^2 \right] + \left[(u_{it}^2 - 2u_{it}z_{it}\delta + z_{it}^2\delta^2) / \sigma^2 \right] \right\}}{2\pi\sigma\sigma_v \Phi(z_{it}\delta/\sigma)}, u_{it} \geq 0 \\
 &= \frac{\exp - \frac{1}{2} \left\{ \left[(e_{it}^2 - 2u_{it}e_{it} + u_{it}^2)\sigma^2 \right] + \left[(u_{it}^2 - 2u_{it}z_{it}\delta + z_{it}^2\delta^2)\sigma_v^2 \right] / \sigma_v^2\sigma^2 \right\}}{2\pi\sigma\sigma_v \Phi(z_{it}\delta/\sigma)}, u_{it} \geq 0 \\
 &= \frac{\exp - \frac{1}{2} \left\{ \left[e_{it}^2\sigma^2 - 2u_{it}e_{it}\sigma^2 + u_{it}^2\sigma^2 + u_{it}^2\sigma_v^2 - 2u_{it}z_{it}\delta\sigma_v^2 + z_{it}^2\delta^2\sigma_v^2 \right] / \sigma_v^2\sigma^2 \right\}}{2\pi\sigma\sigma_v \Phi(z_{it}\delta/\sigma)}, u_{it} \geq 0 \\
 &= \frac{\exp - \frac{1}{2} \left\{ u_{it}^2 \cdot \left[(\sigma^2 + \sigma_v^2) / \sigma^2\sigma_v^2 \right] - 2u_{it} \left\{ \left[(e_{it}\sigma^2 + z_{it}\delta\sigma_v^2) / (\sigma^2 + \sigma_v^2) \right] \cdot \left[(\sigma^2 + \sigma_v^2) / \sigma^2\sigma_v^2 \right] \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \left(e_{it}^2\sigma^2 / \sigma^2\sigma_v^2 \right) + \left(z_{it}^2\delta^2\sigma_v^2 / \sigma^2\sigma_v^2 \right) \right\}}{2\pi\sigma\sigma_v \Phi(z_{it}\delta/\sigma)}, u_{it} \geq 0 \\
 &= \frac{\exp - \frac{1}{2} \left\{ \left[(u_{it}^2 / \sigma^{*2}) - (2u_{it}u_{it}^* / \sigma^{*2}) + (u_{it}^* / \sigma^*)^2 \right] + (e_{it} / \sigma_v)^2 + (z_{it}\delta / \sigma)^2 - (u_{it}^* / \sigma^*)^2 \right\}}{2\pi\sigma\sigma_v \Phi(z_{it}\delta/\sigma)} \\
 &= \frac{\exp - \frac{1}{2} \left\{ \left[(u_{it} - u_{it}^*)^2 / \sigma^{*2} \right] + (e_{it} / \sigma_v)^2 + (z_{it}\delta / \sigma)^2 - (u_{it}^* / \sigma^*)^2 \right\}}{2\pi\sigma\sigma_v \Phi(z_{it}\delta/\sigma)}
 \end{aligned}$$

ไพบโรจน์ (2546) ได้จัดรูปแบบใหม่ได้ดังนี้

$$= \frac{\exp - \frac{1}{2} \left\{ \left[(u_{it} - u_{it}^*)^2 / \sigma^{*2} \right] + \left[(e_{it} + z_{it} \delta)^2 / (\sigma_v^2 + \sigma^2) \right] \right\}}{2\pi\sigma\sigma_v \Phi(z_{it} \delta / \sigma)}, \quad (ง.3)$$

$$u_{it}^* = \frac{\sigma_v^2 z_{it} \delta + \sigma^2 e_{it}}{\sigma_v^2 + \sigma^2} \quad (ง.4)$$

$$\sigma^{*2} = \frac{\sigma_v^2 \sigma^2}{\sigma_v^2 + \sigma^2} \quad (ง.5)$$

ฟังก์ชันความหนาแน่นของ $\varepsilon_{it} = v_{it} + u_{it}$ ได้จากการอินทิเกรต $f_{\varepsilon_{it}, u_{it}}(e_{it}, u_{it})$ ภายในช่วง u_{it} เมื่อ $u_{it} \geq 0$ แสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} f_{\varepsilon_{it}}(e_{it}) &= \frac{\exp - \frac{1}{2} \left\{ (e_{it}^2 / \sigma_v^2) + (z_{it} \delta / \sigma)^2 - (u_{it}^* / \sigma^*)^2 \right\}}{\sqrt{2\pi}\sigma\sigma_v \Phi(z_{it} \delta / \sigma)} \int_0^\infty \frac{\exp - \frac{1}{2} \left[(u_{it} - u_{it}^*)^2 / \sigma^{*2} \right]}{\sqrt{2\pi}} du \\ &= \frac{\exp - \frac{1}{2} \left\{ (e_{it}^2 / \sigma_v^2) + (z_{it} \delta / \sigma)^2 - (u_{it}^* / \sigma^*)^2 \right\}}{\sqrt{2\pi}(\sigma^2 + \sigma_v^2)^{1/2} [\Phi(z_{it} \delta / \sigma) / \Phi(u_{it}^* / \sigma^*)]} \end{aligned} \quad (ง.6)$$

หรือสามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$f_{\varepsilon_{it}}(e_{it}) = \frac{\exp - \frac{1}{2} \left\{ (e_{it} + z_{it} \delta)^2 / (\sigma_v^2 + \sigma^2) \right\}}{\sqrt{2\pi}(\sigma^2 + \sigma_v^2)^{1/2} [\Phi(z_{it} \delta / \sigma) / \Phi(u_{it}^* / \sigma^*)]} \quad (ง.7)$$

ฟังก์ชันความหนาแน่นแบบมีเงื่อนไขของ u_{it} เมื่อ $\varepsilon_{it} = e_{it}$ คือ

$$f_{u_{it}|\varepsilon_{it}=e_{it}}(u_{it}) = \frac{f_{\varepsilon_{it}, u_{it}}(e_{it}, u_{it})}{f_{\varepsilon_{it}}(e_{it})}, u_{it} \geq 0,$$

$$f_{u_{it}|\varepsilon_{it}=e_{it}}(u_{it}) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\left[\frac{(u_{it}-u_{it}^*)}{\sigma^*}\right]^2\right]}{\sqrt{2\pi}\sigma^*\Phi(u_{it}^*/\sigma^*)}, u_{it} \geq 0, \quad (ง.8)$$

เราสามารถแสดงค่าคาดคะเนแบบมีเงื่อนไขของ $\exp(-u_{it})$ เมื่อ $\varepsilon_{it} = e_{it}$ ได้ดังนี้

$$E[\exp(-u_{it})|\varepsilon_{it} = e_{it}] = \int_0^\infty \exp(-u_{it}) f_{u_{it}|\varepsilon_{it}=e_{it}}(-u_{it}) du_{it}$$

หลังจากอินทิเกรตแล้ว สามารถแสดงตัวประมาณประสิทธิภาพของความผิดพลาดเฉลี่ย
น้อยที่สุดของหน่วยการผลิต i ณ เวลาที่ t ได้ดังนี้

$$E[\exp(-u_{it})|\varepsilon_{it} = e_{it}] = \left\{ \frac{\Phi(u_{it}^*/\sigma^*) - \sigma^*}{\Phi(u_{it}^*/\sigma^*)} \right\} \exp\left[-u_{it}^* + \frac{1}{2}\sigma^{*2}\right] \quad (ง.9)$$

ฟังก์ชันความหนาแน่นของ $\ln c_{it}$ หาได้จากการแทน $\ln c_{it} - \ln C(y_{it}, p_{it}; \beta_y, \beta_p)$ แทน
 e_{it} ในสมการที่ ง.7 ดังนี้

$$f_{\ln c_{it}}(\ln c_{it}) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\left\{(\ln c_{it} - \ln C(y_{it}, p_{it}; \beta_y, \beta_p) + z_{it}\delta)^2/(\sigma_v^2 + \sigma^2)\right\}\right]}{\sqrt{2\pi}(\sigma^2 + \sigma_v^2)^{1/2} [\Phi(d_{it})/\Phi(d_{it}^*)]}, \quad (ง.10)$$

เมื่อ $d_{it} = z_{it}\delta/\sigma, d_{it}^* = u_{it}^*/\sigma^*$

และ $u_{it}^* = \left[\sigma_v^2 z_{it}\delta + \sigma^2 (\ln c_{it} - \ln C(y_{it}, p_{it}; \beta_y, \beta_p)) \right] / (\sigma_v^2 + \sigma^2)$

ให้หน่วยการผลิตที่ i มีตัวอย่างจำนวน T_i เมื่อ $1 \leq T_i \leq T$ และ
 $\ln c_i \equiv (\ln c_{i1}, \ln c_{i2}, \dots, \ln c_{iT})'$ แสดงเวกเตอร์ผลผลิต T_i ดังนั้น Logarithm ของ Likelihood
Function ของตัวอย่าง $\ln c \equiv (\ln c_1', \ln c_2', \dots, \ln c_T')'$ คือ

$$\begin{aligned}
L^*(\theta^*; \ln c) = & -\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N T_i \right) \{ \ln 2\pi + \ln(\sigma_v^2 + \sigma^2) \} \\
& - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^{T_i} [(\ln c_{it} - \ln C(y_{it}, p_{it}; \beta_y, \beta_p) + z_{it}\delta)^2 / (\sigma_v^2 + \sigma^2)] \\
& - \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^{T_i} [\ln \Phi(d_{it}) - \ln \Phi(d_{it}^*)]
\end{aligned} \tag{ง.11}$$

เมื่อ $\theta^* = (\beta_y', \beta_p', \delta', \sigma_v^2, \sigma^2)'$

ทำการ Reparameterization แบบจำลองโดยให้ $\sigma_s^2 = \sigma_v^2 + \sigma^2$ และ $\gamma = \sigma^2 / \sigma_s^2$ แล้ว
Logarithm ของ Likelihood function สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
L^*(\theta; \ln c) = & -\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N T_i \right) \{ \ln 2\pi + \ln \sigma_s^2 \} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^{T_i} [(\ln c_{it} - \ln C(y_{it}, p_{it}; \beta_y, \beta_p) + z_{it}\delta)^2 / \sigma_s^2] \\
& - \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^{T_i} [\ln \Phi(d_{it}) - \ln \Phi(d_{it}^*)]
\end{aligned} \tag{ง.12}$$

$$\text{เมื่อ } d_{it} = z_{it}\delta / (\gamma\sigma_s^2)^{1/2}; \tag{ง.13}$$

$$d_{it}^* = u_{it}^* / [\gamma(1-\gamma)\sigma_s^2]^{1/2}; \tag{ง.14}$$

$$u_{it}^* = (1-\gamma)z_{it}\delta + \gamma(\ln c_{it} - \ln C(y_{it}, p_{it}; \beta_y, \beta_p)); \tag{ง.15}$$

$$\sigma^* = [\gamma(1-\gamma)\sigma_s^2]^{1/2}; \text{ และ } \tag{ง.16}$$

$$\theta = (\beta_y', \beta_p', \delta', \sigma_s^2, \gamma)' \tag{ง.17}$$

Partial Derivative ของแบบจำลอง Logarithm ของ Likelihood function ตามสมการ
ที่ ง.12 เมื่อเทียบกับพารามิเตอร์ $\beta_y, \beta_p, \delta, \sigma_s^2$ และ γ สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\frac{\partial L^*}{\partial \beta_y} = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^{T_i} \left[\frac{(\ln c_{it} - \ln C(y_{it}, p_{it}; \beta_y, \beta_p) + z_{it}\delta)^2}{\sigma_s^2} + \frac{\phi(d_{it}^*)}{\Phi(d_{it}^*)} \cdot \frac{\gamma}{\sigma^*} \right] y_{it}'$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \beta_p} = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^{T_i} \left[\frac{(\ln c_{it} - \ln C(y_{it}, p_{it}; \beta_y, \beta_p) + z_{it}\delta)^2}{\sigma_s^2} + \frac{\phi(d_{it}^*)}{\Phi(d_{it}^*)} \cdot \frac{\gamma}{\sigma^*} \right] p_{it}'$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \delta} = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^{T_i} \left\{ \frac{(\ln c_{it} - \ln C(y_{it}, p_{it}; \beta_y, \beta_p) + z_{it}\delta)^2}{\sigma_s^2} + \left[\frac{\phi(d_{it}^*)}{\Phi(d_{it}^*)} \cdot \frac{1}{(\gamma\sigma_s^2)^{1/2}} - \frac{\phi(d_{it}^*)}{\Phi(d_{it}^*)} \cdot \frac{(1-\gamma)}{\sigma^*} \right] \right\} z_{it}'$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^*}{\partial \sigma_s^2} = & -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_s^2} \right) \left\{ \left(\sum_{i=1}^N T_i \right) - \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^{T_i} \left[\frac{\phi(d_{it})}{\Phi(d_{it})} d_{it} - \frac{\phi(d_{it}^*)}{\Phi(d_{it}^*)} d_{it}^* \right] \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^{T_i} \left[\frac{(\ln c_{it} - \ln C(y_{it}, p_{it}; \beta_y, \beta_p) + z_{it}\delta)^2}{\sigma_s^2} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \gamma} = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^{T_i} \left\{ \frac{\phi(d_{it})}{\Phi(d_{it})} \cdot \frac{d_{it}}{2\gamma} + \frac{\phi(d_{it}^*)}{\Phi(d_{it}^*)} \left[\frac{\ln c_{it} - \ln C(y_{it}, p_{it}; \beta_y, \beta_p) + z_{it}\delta}{\sigma^*} + \frac{d_{it}^*(1-2\gamma)}{2\gamma(1-\gamma)\sigma^{*2}} \right] \right\}$$

การประมาณแบบ ML ได้จากการหาค่าสูงสุดของ Log-likelihood function ตามสมการที่ 12