



ใบรับรองวิทยานิพนธ์
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วิศวกรรมเครื่องกล)
ปริญญา

วิศวกรรมเครื่องกล

สาขา

วิศวกรรมเครื่องกล

ภาควิชา

เรื่อง การควบคุมที่เหมาะสมที่สุดของหุ่นยนต์สองล้อด้วยการวัดความเอียงแบนด์วิทสูง

Optimal Control of a Two-wheeled Robot with High Bandwidth Tilt Measurement

นามผู้วิจัย นายกิตติพงษ์ เยาวาจา

ได้พิจารณาเห็นชอบโดย

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(อาจารย์ยวีทิต ฉัตรรัตนกุลชัย, Ph.D.)

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ทวีเดช ศิริธนาพิพัฒน์, Ph.D.)

หัวหน้าภาควิชา

(รองศาสตราจารย์ชวลิต กิตติชัยการ, Ph.D)

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์รับรองแล้ว

(รองศาสตราจารย์กัญญา วีระกุล, D.Agr.)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่

เดือน พ.ศ.

วิทยานิพนธ์

เรื่อง

การควบคุมที่เหมาะสมที่สุดของหุ่นยนต์สองล้อด้วยการวัดความเอียงแบนด์วิธสูง

Optimal Control of a Two-wheeled Robot with High Bandwidth Tilt Measurement

โดย

นายกิตติพงษ์ เขาวาจา

เสนอ

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

เพื่อความสมบูรณ์แห่งปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วิศวกรรมเครื่องกล)

พ.ศ. 2551

กิตติพงษ์ เขาวาจา 2551: การควบคุมที่เหมาะสมที่สุดของหุ่นยนต์สองล้อด้วยการวัด
ความเอียงแบบดัดวีทซ์สูง ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วิศวกรรมเครื่องกล)
สาขาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก:
อาจารย์วิทิต ภัตตรัตนกุลชัย, Ph.D. 111 หน้า

หุ่นยนต์สองล้อถูกขับเคลื่อนด้วยมอเตอร์กระแสตรงสองตัวที่เป็นอิสระต่อกันแต่มีแกน
หมุนร่วมกัน หุ่นยนต์สองล้อเป็นระบบที่มีเสถียรภาพอย่างมีขอบเขต การควบคุมให้หุ่นยนต์สอง
ล้อรักษาเสถียรภาพและการตอบสนองของระบบมีประสิทธิภาพทำได้ยากเนื่องจากเป็นระบบไม่
เชิงเส้น, ระบบไม่ใช้มุมเฟสน้อยที่สุด และมีสัญญาณป้อนเข้าน้อยกว่าสัญญาณป้อนออก

ในงานวิจัยนี้นำเสนอการออกแบบระบบควบคุมของหุ่นยนต์สองล้อโดยอาศัยตัวควบคุมค่า
กำลังสองเชิงเส้นและต่อเติมตัวอินทิกรัล รวมทั้งการนำเอาตัวสังเกตมาประมาณค่า โดยแสดงให้เห็น
ทั้งทางทฤษฎี, การจำลองผลด้วยโปรแกรม MATLAB และการทดลองจริง ตัวสังเกตลูนเบอร์
เกอร์ถูกใช้เพื่อประมวลสัญญาณป้อนกลับจากตัวตรวจวัดความเอียงและตัวตรวจวัดอัตราความ
โน้มเอียงเพื่อให้ได้สัญญาณความเอียงที่มีความแม่นยำมากขึ้น

ผลการจำลองและการทดลองตัววัดความเอียงที่ได้มีประสิทธิภาพดีในย่านความถี่สูง โดย
การวางตำแหน่งโพลต่างๆ จะได้ผลลัพธ์ที่ดีในช่วงความถี่ที่แตกต่างออกไป ผลการจำลองและ
ทดลองการควบคุมระบบดังกล่าวแสดงผลที่น่ายอมรับและมีประสิทธิภาพของตัวควบคุมที่ได้
ออกแบบไว้ ถึงแม้ว่าการทดลองระบบจะเกิดการแกว่งเนื่องมาจากแรงเสียดทานและน้ำหนัก
สายไฟที่แกว่งไปมา การควบคุมการเคลื่อนที่ทำได้ไม่รวดเร็วนักเพราะเกี่ยวข้องกับ
ควบคุมมุมเอียงของหุ่นยนต์ แต่การควบคุมมุมเอียงทำได้แม่นยำ

Kittipong Yaovaja 2008: Optimal Control of a Two-wheeled Robot with High Bandwidth Tilt Measurement. Master of Engineering (Mechanical Engineering), Major Field: Mechanical Engineering, Department of Mechanical Engineering. Thesis Advisor: Mr. Withit Chatlatanagulchai, Ph.D. 111 pages.

A two-wheeled robot is independently driven by two concentric motors. The two-wheeled robot is a marginally stable plant. Control of the robot for stabilizing and obtaining some desired responses are complicated because the plant is nonlinear, non-minimum phase and its inputs are lower than its outputs.

In this research, the LQR control and LQR control with integrator augment, including state observer in order to estimate states, of a two-wheeled robot are shown in theoretical, designed and simulated with MATLAB and implemented. Luenberger observer is also presented in order to improve tilt measurement from an inclinometer and a rate gyroscope.

Both simulation and experiment of estimated tilt measurement are accurate over a high frequency range. Pole placement with a variety of pole position result as accuracy over a variety of frequency range. Simulation and experimental results demonstrate the reliability and effectiveness of the proposed control scheme even if oscillation occurs in experiment due to frictions and oscillated wire weight. Position control shows slow response because of coupling of pose control, but making a turn has high accuracy.

Student's signature

Thesis Advisor's signature

/ /

กิตติกรรมประกาศ

ข้าพเจ้าขอกราบขอบพระคุณ อ.ดร.วิทิศ ฉัตรรัตนกุลชัย ประธานกรรมการที่ปรึกษา สำหรับการแนะนำผู้สาขาวิชาการควบคุม ให้คำปรึกษาทั้งด้านทฤษฎีและการปฏิบัติการระบบควบคุม ช่วยเหลือในการวางแผนงานวิจัยในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ตลอดจนการตรวจแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ และขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทวีเดช ศิริธนาพิพัฒน์ กรรมการที่ปรึกษาวิชาเอก สำหรับคำแนะนำเชิงปฏิบัติการต่างๆ มาโดยตลอด

ขอขอบคุณมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, สถาบันค้นคว้าและพัฒนาเทคโนโลยีอุตสาหกรรม (RDIP), ห้องปฏิบัติการควบคุมหุ่นยนต์และการสั่งสะเทือน (Control of Robot and Vibration Laboratory, CRV LAB) ที่เอื้อเฟื้อสถานที่และอุปกรณ์การทำวิจัย รวมทั้งโครงการวิจัยพัฒนาและวิศวกรรมจากส่วนงานกลาง สำนักงานพัฒนาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีแห่งชาติสำหรับเงินทุนสนับสนุนในการทำวิจัย นอกจากนี้คือ บริษัท National Instruments สำหรับความรู้ต่างๆ เกี่ยวกับการเขียนโปรแกรมรวมถึงงานสัมมนา และขอขอบคุณนักเขียนทุกท่านที่มอบความรู้อันมีค่าบนหนังสือ บทความวิชาการทั้งในวารสารวิชาการและงานประชุมวิชาการ

ท้ายสุดนี้ ข้าพเจ้าขอกล่าวคำว่าขอบพระคุณแก่ คุณพ่อ คุณแม่ พี่ ๆ และน้อง ๆ ทุกคนที่คอยให้ความช่วยเหลือให้กำลังใจ ชี้นำและสนับสนุนการทำวิทยานิพนธ์จนสำเร็จ ลุล่วงได้ด้วยดี

กิตติพงษ์ เยาวจา

กันยายน 2551

สารบัญ

	หน้า
สารบัญ	(1)
สารบัญตาราง	(2)
สารบัญภาพ	(3)
คำอธิบายสัญลักษณ์ และอักษรย่อ	(6)
คำนำ	1
วัตถุประสงค์	2
การตรวจเอกสาร	3
อุปกรณ์และวิธีการ	10
อุปกรณ์	10
วิธีการ	14
ผลและวิจารณ์	53
สรุปและข้อเสนอแนะ	74
สรุป	74
ข้อเสนอแนะ	76
เอกสารและสิ่งอ้างอิง	77
ภาคผนวก	80
ภาคผนวก ก การหาค่าพารามิเตอร์ด้วยโปรแกรมเขียนแบบสามมิติ	81
ภาคผนวก ข การหาเอกลักษณ์ของระบบ	84
ภาคผนวก ค การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์	92
ภาคผนวก ง โค้ดโปรแกรม MATLAB	98
ประวัติการศึกษา และการทำงาน	111

สารบัญตาราง

ตารางที่		หน้า
1	ค่าพารามิเตอร์ทั่วไปของหุ่นยนต์	17

สารบัญภาพ

ภาพที่		หน้า
1	(ซ้าย) Dean Kamen บน Segway (กลาง) Segway PT (ขวา) Winglet	4
2	การทดลองหุ่นยนต์สองล้อของ Shiroma <i>et al.</i>	5
3	หุ่นยนต์สองล้อ JOE: a mobile, inverted pendulum	6
4	(ซ้าย) หุ่นยนต์สองล้อ Steve Hassenplug's Legway (ขวา) หุ่นยนต์สองล้อ NXTway-GS	6
5	(ซ้าย) หุ่นยนต์สองล้อ Yamabico Kuro (ขวา) หุ่นยนต์สองล้อ YAIP	7
6	(ซ้าย) หุ่นยนต์สองล้อของ Kim <i>et al.</i> (ขวา) หุ่นยนต์สองล้อ T-WIP mobile robot	8
7	อุปกรณ์และการออกแบบการทดลอง	11
8	หุ่นยนต์สองล้อในห้องปฏิบัติการควบคุมหุ่นยนต์และการสัมผัสเทียม	11
9	อุปกรณ์เอนโคคเคอร์เซนเซอร์	12
10	อุปกรณ์ตัวตรวจวัดความเอียง Inclinometer	12
11	อุปกรณ์ตัวตรวจวัดอัตราการหมุนเอียง Rate Gyroscope	13
12	อุปกรณ์วงจรจับมอเตอร์กระแสตรง	13
13	การรับส่งข้อมูล (Data Acquisition) NI PCI 6221 (CB68)	14
14	หุ่นยนต์สองล้อที่มี 4 องศาอิสระ	15
15	หุ่นยนต์สองล้อบนแกนพิกัด	15
16	บล็อกไดอะแกรมในการควบคุมป้อนกลับแบบรักษาเสถียรภาพ	34
17	บล็อกไดอะแกรมในการควบคุมป้อนกลับแบบตามรอยสัญญาณ	37
18	บล็อกไดอะแกรมในการควบคุมป้อนกลับแบบตามรอยสัญญาณที่มีตัวอินทิกรัล	39
19	บล็อกไดอะแกรมในการควบคุมป้อนกลับแบบตามรอยสัญญาณที่มีตัวอินทิกรัลและ ตัวสังเกตแบบอันดับเต็ม	42
20	บล็อกไดอะแกรมในการควบคุมป้อนกลับแบบตามรอยสัญญาณที่มีตัวอินทิกรัลและ ตัวสังเกตแบบลดอันดับ	47
21	แบบจำลองของ Inclinometer อย่างง่าย	50

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่	หน้า	
22	บล็อกไดอะแกรมของระบบการประมาณค่าความเอียง	51
23	ผลการจำลองการรักษาเสถียรภาพของระบบควบคุมอาศัยตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุด	54
24	ผลการจำลองการรักษาเสถียรภาพของระบบควบคุมอาศัยตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุดที่มีตัวอินทิกรัล	54
25	ผลการจำลองการติดตามค่าของระบบควบคุมอาศัยตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุด	55
26	ผลการจำลองการเคลื่อนในสองมิติของระบบควบคุมอาศัยตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุด	55
27	ผลการจำลองการตามสัญญาณอ้างอิงของระบบควบคุมอาศัยตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุดที่มีตัวอินทิกรัล	56
28	ผลการจำลองการเคลื่อนในสองมิติของระบบควบคุมอาศัยตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุดที่มีตัวอินทิกรัล	56
29	ค่าผิดพลาดของสเตตจากการประมาณค่าด้วยตัวสังเกตแบบอันดับเต็ม	57
30	ค่าผิดพลาดของสเตตจากการประมาณค่าด้วยตัวสังเกตแบบอันดับเต็มเมื่อพลาตันต์ไม่แน่นอน 30 เปอร์เซ็นต์	57
31	ค่าผิดพลาดของสเตตจากการประมาณค่าด้วยตัวสังเกตแบบลดอันดับ	58
32	ค่าผิดพลาดของสเตตจากการประมาณค่าด้วยตัวสังเกตแบบลดอันดับเมื่อพลาตันต์ไม่แน่นอน 30 เปอร์เซ็นต์	58
33	ผลการจำลองผลการวัดมุมเอียงที่ความถี่ต่ำ	59
34	ผลการจำลองผลการวัดมุมเอียงที่ความถี่สูง	59
35	ผลการทดลองการวัดความเอียงด้วย Inclinometer, Rate Gyroscope และมุมประมาณ	65
36	ผลการทดลองตัวสังเกตสเตตความเอียงที่ความถี่ประมาณ 0.5 เฮิรต์	66
37	ผลการทดลองตัวสังเกตสเตตความเอียงที่ความถี่ประมาณ 1 เฮิรต์	66
38	ผลการทดลองตัวสังเกตสเตตความเอียงที่ความถี่ประมาณ 1.5 เฮิรต์	67
39	การทดลองการรักษาเสถียรภาพของหุ่นยนต์สองล้อ	69
40	ผลการทดลองการติดตามค่าของหุ่นยนต์สองล้อ	70

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่		หน้า
41	ผลการทดลองการเคลื่อนในสองมิติของหุ่นยนต์สองล้อ	70
42	ผลการทดลองการติดตามค่าของหุ่นยนต์สองล้อที่มวลเพิ่ม	71
43	ผลการทดลองการเคลื่อนในสองมิติของหุ่นยนต์สองล้อที่มวลเพิ่ม	71
ภาพผนวกที่		
ก1	รูป 3 มิติของหุ่นยนต์สองล้อและแกนพิกัด (x_0, y_0, z_0)	82
ข1	วงจรสมมูลของมอเตอร์กระแสตรง	85
ข2	การทดลองการพิสูจน์เอกลักษณ์ของมอเตอร์กระแสตรง	86
ข3	ผลการทดสอบความแม่นยำการหาเอกลักษณ์ของมอเตอร์กระแสตรง	88
ข4	แบบจำลองของ Inclinometer อย่างง่าย	88
ข5	การทดลองการพิสูจน์เอกลักษณ์ของตัวตรวจรู้ Inclinometer	90
ข6	ผลการทดสอบความแม่นยำการหาเอกลักษณ์ของตัวตรวจรู้ Inclinometer	91

คำอธิบายสัญลักษณ์ และอักษรย่อ

คำอธิบายสัญลักษณ์

ϕ	=	มุมเอียงของหุ่นยนต์ (rad)
θ	=	มุมหมุนเฉลี่ยของล้อซ้ายและขวา (rad)
θ_1	=	มุมเอียงจริง (rad)
θ_2	=	มุมเอียงของตัวตรวจรู้ Inclinometer (rad)
ρ	=	มุมยกของหุ่นยนต์ (rad)
ω_g	=	อัตราโน้มเอียงจากตัวตรวจรู้ Rate Gyroscope ($rad.s^{-1}$)
ξ	=	อินทิกรัลของเอาต์พุต
ψ	=	มุมเอียงของหุ่นยนต์ (rad)
c	=	สัมประสิทธิ์ความหน่วง
E	=	ค่าผิดพลาดของสมการกำลังสองน้อยที่สุด
e	=	ค่าผิดพลาดของตัวสังเกต
F_ϕ	=	แรงภายนอกที่กระทำในระบบพิกัด ϕ ($N.m$)
F_θ	=	แรงภายนอกที่กระทำในระบบพิกัด θ ($N.m$)
F_ψ	=	แรงภายนอกที่กระทำในระบบพิกัด ψ ($N.m$)
F_l	=	แรงภายนอกที่กระทำกับล้อซ้าย ($N.m$)
F_r	=	แรงภายนอกที่กระทำกับล้อขวา ($N.m$)
f_m	=	สัมประสิทธิ์แรงเสียดทานระหว่างตัวถังและมอเตอร์
f_w	=	สัมประสิทธิ์แรงเสียดทานระหว่างล้อและพื้น
g	=	แรงโน้มถ่วง (ms^{-2})
G_p	=	ฟังก์ชันถ่ายโอนของพลาเน็ต
H_∞	=	การควบคุมโดยวิเคราะห์ด้วยนอร์ม H_∞
i	=	อันดับของระบบ
J	=	ค่าครรชนี่สมรรถนะ
J_{by}	=	โมเมนต์ความเฉื่อยตัวถังรอบแกน y_0 (kgm^2)
J_{bz}	=	โมเมนต์ความเฉื่อยตัวถังรอบแกน z_0 (kgm^2)
J_e	=	โมเมนต์ความเฉื่อยของเอนโคเดอร์ (kgm^2)

คำอธิบายสัญลักษณ์ (ต่อ)

J_g	=	โมเมนต์ความเฉื่อยของเกียร์ทรอบมอเตอร์ (kgm^2)
J_m	=	โมเมนต์ความเฉื่อยอาร์เมเจอร์รอบแกน y_0 (kgm^2)
J_r	=	โมเมนต์ความเฉื่อยของพูลเลย์ทดเอนโคคเตอร์ (kgm^2)
J_{wy}	=	โมเมนต์ความเฉื่อยของล้อรอบแกน y_0 (kgm^2)
J_{wz}	=	โมเมนต์ความเฉื่อยของล้อรอบแกน z_0 (kgm^2)
K	=	ค่าอัตราขยายของตัวควบคุม, ค่าอัตราขยายสำหรับ Dual System
K_1	=	ค่าอัตราขยายสำหรับเอาต์พุต, ค่าอัตราขยายสำหรับอินทิกรัลของเอาต์พุต
K_2	=	ค่าอัตราขยายสำหรับค่าสเตรคของระบบ
K_b	=	ค่าคงที่แรงดันไฟฟ้าย้อนกลับมอเตอร์ ($Vsrad^{-1}$)
K_e	=	ค่าอัตราขยายของตัวสังเกต
K_t	=	ค่าคงที่แรงบิดมอเตอร์ (NmA^{-1})
L	=	ค่าลากรานจ์, ความสูงจุดศูนย์กลางมวลของหุ่นยนต์จากแกนล้อ (m)
l	=	ความยาวแขนระหว่างจุดหมุนกับโพลีไดโอด (m)
m	=	มวลของโพลีไดโอด (kg)
m_w	=	มวลล้อ (kg)
m_b	=	มวลตัวถัง (kg)
n	=	อัตราทดมอเตอร์, เอาต์พุตของระบบ Dual System
n_2	=	อัตราทดเอนโคคเตอร์
Q	=	เมตริกซ์ถ่วงน้ำหนักของสเตต
Q_i	=	แรงในระบบพิกัดที่สนใจ
q_i	=	ระบบพิกัด
R	=	รัศมีล้อ (m), เมตริกซ์ถ่วงน้ำหนักของสัญญาณควบคุม
R_m	=	ค่าความต้านทานมอเตอร์ (Ω)
r	=	สัญญาณอ้างอิง
T	=	พลังงานจลน์รวมของระบบ (kgm^2s^{-2})
T_1	=	พลังงานจลน์รวมจากการเคลื่อนที่เชิงเส้น (kgm^2s^{-2})
T_2	=	พลังงานจลน์รวมจากการเคลื่อนที่แบบหมุน (kgm^2s^{-2})
u	=	สัญญาณควบคุม (V)

คำอธิบายสัญลักษณ์ (ต่อ)

V	=	พลังงานศักย์รวมของระบบ (kgm^2s^{-2})
v	=	สัญญาณควบคุมของระบบ Dual System
W	=	ระยะความกว้างฐานล้อ (m)
x	=	ค่าสเตตของระบบ
\dot{x}	=	ค่าความเร่งในแนวระดับ
\ddot{x}	=	ค่าประมาณของสเตตของระบบ
\tilde{x}_a	=	ค่าที่วัดได้จากเอาต์พุตสำหรับตัวสังเกตลดอันดับ
\tilde{x}_b	=	ค่าประมาณสำหรับตัวสังเกตลดอันดับ
y	=	เอาต์พุตของระบบ
\ddot{y}	=	ค่าความเร่งในแนวตั้ง

คำอธิบายอักษรย่อ

IMU	=	Inertial Measurement Unit
LQR	=	Linear Quadratic Regulator
LTI	=	Linear Time Invariant
MIMO	=	Multi-input Multi-output
NMP	=	Non-minimum Phase

การควบคุมที่เหมาะสมที่สุดของหุ่นยนต์สองล้อด้วยการวัดความเอียงแบนด์วิธสูง

Optimal Control of a Two-wheeled Robot with High Bandwidth Tilt Measurement

คำนำ

มนุษย์มีความสมรรถนะแบบในหลายๆด้านที่หุ่นยนต์ไม่สามารถเทียบเคียงได้ และดูเหมือนว่าเป็นระยะเวลาอีกยาวนานที่หุ่นยนต์จะสามารถแสดงได้เท่าทางได้ใกล้เคียงกับมนุษย์ ส่วนหนึ่งนั้นก็เนื่องเพราะปัญหาของการทรงตัว ซึ่งงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับหุ่นยนต์ส่วนใหญ่เป็นระบบที่มีเสถียรภาพ เช่น หุ่นยนต์ที่มีหลายล้อหรือมีหลายขา เพื่อลดความซับซ้อนของพลศาสตร์ในการรักษาสมดุลของระบบ ซึ่งงานวิจัยนี้เป็นการศึกษาการควบคุมของหุ่นยนต์ที่ไม่มีเสถียรภาพโดยพิจารณาสมองศาอิสระ ในขณะที่พลศาสตร์ของการทรงตัวของหุ่นยนต์นั้นเกี่ยวโยงโดยตรง (coupling) กับการเคลื่อนที่ไปด้านหน้าและด้านหลังของหุ่นยนต์

การควบคุมการรักษาสมดุลของหุ่นยนต์สองล้อมีลักษณะเดียวกับลูกตุ้มนาฬิกากลับหัวโดยเคลื่อนที่ด้วยล้อที่ขนานกันสองล้อที่เป็นอิสระต่อกัน ซึ่งในประเทศไทยนับว่ามีงานวิจัยด้านนี้อยู่ น้อยมาก และยังคงเป็นปัญหาเปิดเนื่องจากระบบมีความซับซ้อน เช่น เป็นระบบที่มีเสถียรภาพอย่างมีขอบเขต (marginally stable) ระบบไม่ใช่มุมเฟสน้อยสุด (non-minimum phase system, NMP) ระบบที่มีหลายสัญญาณป้อนเข้าและสัญญาณป้อนออก (Multi-input Multi output, MIMO) และระบบไม่เป็นเชิงเส้น (nonlinear system) อันเป็นผลมาจากแรงโน้มถ่วงของโลก แต่เมื่อย้อนกลับไปจะพบว่างานวิจัยที่เกี่ยวข้องในแต่ละปีนั้นมีปริมาณเพิ่มมากขึ้นเรื่อยๆ ส่วนหนึ่งเพราะการพัฒนาเทคโนโลยีตัวตรวจวัดที่มีความละเอียดสูงขึ้น มีความเร็วมากขึ้น และมีราคาต่ำลง จึงสามารถประยุกต์ระบบการวัดความเอียงนั้นสำหรับการผลิตเชิงพาณิชย์ได้ หุ่นยนต์สองล้อมีขนาดเล็กสามารถหมุนรอบตัวเองได้ ใช้พลังงานไฟฟ้าในปริมาณต่ำซึ่งลดการเกิดมลพิษทางอากาศ

ระบบของลูกตุ้มนาฬิกากลับหัวนิยมนำมาทดสอบประสิทธิภาพของการออกแบบตัวควบคุมขั้นสูงเพราะมีความซับซ้อนดังที่ได้กล่าวไว้ และงานวิจัยนี้นำตัวควบคุมในระบบการควบคุมสมัยใหม่ที่มีประสิทธิภาพตัวหนึ่งมาใช้คือ ตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุด (linear quadratic regulator, LQR) ซึ่งอยู่ในหมวดการควบคุมที่เหมาะสมที่สุด (optimal Control) เพื่อออกแบบระบบควบคุมสำหรับหุ่นยนต์สองล้อให้มีสมรรถนะที่เหมาะสมที่สุด

วัตถุประสงค์

1. ออกแบบระบบวัดความเอียงที่มีความแม่นยำในช่วงแบนด์วิธสูงด้วยตัวสังเกตแบบลูนเบอร์เกอร์ โดยใช้ตัวตรวจรู้ประเภท Inclinometer และ Rate Gyroscope เพื่อใช้เป็นสัญญาณความเอียงป้อนกลับสำหรับหุ่นยนต์สองล้อ
2. ออกแบบระบบควบคุมของหุ่นยนต์สองล้อที่สามารถควบคุมการเคลื่อนที่ในสองมิติไปพร้อมๆกับการรักษาเสถียรภาพของระบบได้ โดยใช้ออกแบบตัวควบคุมด้วยตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุดที่มีตัวอินทิกรัล และระบบควบคุมดังกล่าวสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในเชิงพาณิชย์ได้

การตรวจเอกสาร

หุ่นยนต์สองล้อนั้นเป็นยานพาหนะที่ค่อนข้างแปลกตาในปัจจุบัน ถึงแม้ว่าความคิดในการประดิษฐ์ยานพาหนะดังกล่าวนี้มีมานานแล้ว แต่สำหรับการควบคุมอัตโนมัติของหุ่นยนต์สองล้อยังคงเป็นปัญหาที่มีความซับซ้อนในปัจจุบัน เนื่องจากมีล้อเพียงสองล้อเท่านั้นที่เป็นตัวกำหนดทั้งการเคลื่อนที่ในสองมิติและการทรงตัว แต่ทว่าการเคลื่อนที่ด้วยล้อเพียงสองล้อนั้นกลับทำให้หุ่นยนต์สามารถเคลื่อนที่ได้คล่องแคล่ว เช่น การหมุนตัวเองอยู่กับที่ และการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งจุดศูนย์กลางของหุ่นยนต์ที่มีประโยชน์สำหรับการขึ้นลงทางลาดชัน เป็นต้น และหุ่นยนต์สองล้อยังมีลักษณะการทรงตัวที่ใกล้เคียงมนุษย์มากยิ่งขึ้น ในหลายอุตสาหกรรมได้พัฒนาหุ่นยนต์ประเภทนี้สำหรับทำงานแทนมนุษย์ เช่น หุ่นยนต์สำรวจบนต่างดาว, หุ่นยนต์ให้ความช่วยเหลือ (Kakio *et.al.*, 2006; Jeong and Takahashi, 2007), หุ่นยนต์ชกมวย (Noh *et.al.*, 2008) และ หุ่นยนต์เสิร์ฟอาหาร เป็นต้น

หุ่นยนต์สองล้อถูกขับเคลื่อนด้วยมอเตอร์กระแสตรงที่เป็นอิสระต่อกันแต่มีแกนหมุนร่วมกัน หุ่นยนต์สองล้อถูกแบ่งย่อยตามลักษณะการทรงตัวเป็น 3 ประเภท ประเภทแรกคือ หุ่นยนต์สองล้อที่มีเสถียรภาพในตัวเองเนื่องจากหุ่นยนต์นั้นมีจุดศูนย์กลางอยู่ต่ำกว่าแกนล้อ ซึ่งมีลักษณะเหมือนลูกตุ้มนาฬิกา (pendulum) จึงไม่ต้องการระบบควบคุมสำหรับการทรงตัว (Anonymous, 1935) อย่างไรก็ตามหุ่นยนต์ประเภทแรกนี้ไม่มีข้อได้เปรียบในการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งจุดศูนย์กลางสำหรับการขึ้นลงทางลาดชัน รวมทั้งการนำเอาไปใช้ประโยชน์ก็ทำได้ยาก

หุ่นยนต์สองล้อประเภทที่สองและสาม มีลักษณะทางพลศาสตร์แบบลูกตุ้มนาฬิกากลับหัว (inverted pendulum) จึงเป็นยานพาหนะที่มีเสถียรภาพอย่างมีขอบเขต (marginally stable) เมื่อไม่มีแรงภายนอกกระทำ ระบบนั้นมีจุดสมดุล (equilibrium point) อยู่ที่ตำแหน่งมุมเอียงศูนย์กลางเท่านั้น มิเช่นนั้นแรงโน้มถ่วงของโลกจะทำให้หุ่นยนต์ล้มลง หุ่นยนต์นั้นจึงต้องมีตัวตรวจรู้เพื่อบอกถึงสถานะความเอียงของหุ่นยนต์ เพื่อรักษาสมดุลของตำแหน่งจุดศูนย์กลาง การควบคุมหุ่นยนต์นั้นต้องอาศัยทั้งระบบควบคุมที่แม่นยำและมีความไวสูงเนื่องจากต้องเผชิญกับความโน้มถ่วงของโลกที่มีลักษณะไม่เชิงเส้นที่จะทำให้ระบบไม่มีเสถียรภาพ ซึ่งส่วนใหญ่ระบบที่มีความซับซ้อนเช่นนี้มักจะใช้สำหรับการทดสอบประสิทธิภาพของตัวควบคุม

โดยหุ่นยนต์สองล้อประเภทที่สองนั้นได้รับการควบคุมจากแรงภายนอก ตัวอย่างเช่น พาหนะสองล้อส่วนบุคคล Segway ที่เป็นยานพาหนะที่รู้จักกันดี โดยหุ่นยนต์นี้มีระบบการควบคุม

อัตโนมัติซึ่งทำงานด้วยการเคลื่อนที่ยานพาหนะตามการเคลื่อนไหวของบุคคลที่อยู่บนพาหนะ เช่น เมื่อผู้ขับขี่ถ่วงน้ำหนักไปด้านหน้า หุ่นยนต์จะทรงตัวไม่ให้ล้ม โดยขับเคลื่อนล้อให้เคลื่อนที่ไปด้านหน้า ในการถอยหลังจะมีลักษณะเดียวกัน หรือเมื่อผู้ขับขี่เอียงคันโยกไปด้านใดด้านหนึ่ง หุ่นยนต์จะเลี้ยวซ้ายหรือเลี้ยวขวาจากการหมุนล้อทั้งสองด้วยความเร็วที่แตกต่างกัน ซึ่งงานวิจัยหลายๆงาน (Sasaki *et al.*, 2005; Lin *et al.*, 2007; Morrell and Field, 2007) ได้ชี้แจงเกี่ยวกับการออกแบบหุ่นยนต์สองล้อประเภทที่สองนี้

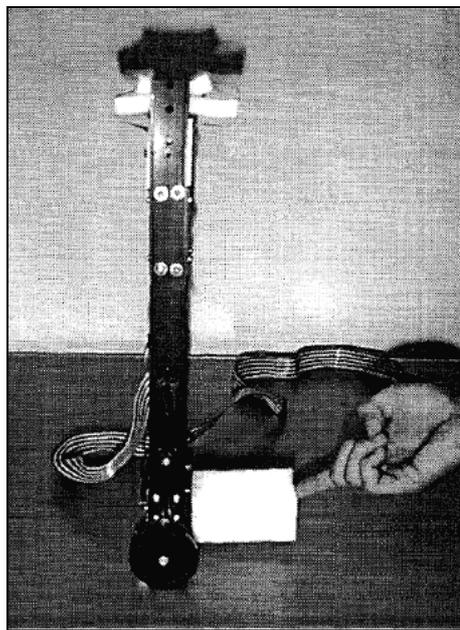
ภาพที่ 1 (ซ้าย) คือ Dean Kamen ผู้คิดค้น Segway พาหนะสองล้อส่วนบุคคลที่เปิดตัวอย่างเป็นทางการในปี ค.ศ. 2002 และมีตัวแทนจำหน่ายในประเทศไทยด้วย (www.segway.co.th) แต่ว่ายังมีราคาสูงอยู่มาก และมีปัญหาเรื่องความปลอดภัย พาหนะสองล้อส่วนบุคคลนวัตกรรมล้ำสมัย Segway PT ถูกนำมาใช้อย่างแพร่หลาย ไม่ว่าจะเป็นยานพาหนะสำหรับการเดินทางในตัวเมือง หรือในการแข่งขันกีฬาโอลิมปิก 2008 ที่ปักกิ่งนั้น เจ้าหน้าที่รักษาความปลอดภัยเตรียมความพร้อมรับมือเหตุการณ์ฉุกเฉินที่อาจจะเกิดขึ้นด้วย Segway PT นับว่าเป็นการเลือกใช้อุปกรณ์ที่ล้ำสมัยและเข้ากับสถานการณ์ที่โลกรณรงค์หันมาใช้พลังงานสะอาดเป็นมิตรกับสิ่งแวดล้อม และในช่วงเดือนสิงหาคม พ.ศ. 2551 บริษัท Toyota ประเทศญี่ปุ่น (www.toyota.co.jp) เปิดตัวหุ่นยนต์หูกู้ที่ชื่อว่า Winglet มีขนาดลักษณะที่เล็กกว่า Segway แต่ยังสามารถเคลื่อนที่โดยมีความเร็วสูงสุดเพียง 6 กิโลเมตรต่อชั่วโมงเท่านั้นเมื่อเทียบกับ Segway PT มีความเร็วสูงสุด 20 กิโลเมตรต่อชั่วโมง



ภาพที่ 1 (ซ้าย) Dean Kamen บน Segway (กลาง) Segway PT (ขวา) Winglet

ในงานวิจัยนี้เป็นการออกแบบหุ่นยนต์สองล้อประเภทที่สามมีลักษณะคล้ายคลึงกับประเภทที่สองแต่ไม่มีคนควบคุมบนพาหนะ แต่อาศัยการควบคุมอัตโนมัติตามคำสั่งสัญญาณอ้างอิง ดังนั้นการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์เป็นระบบไม่ใช้มุมเฟสน้อยที่สุด นอกจากนั้นยังเป็นระบบหลายอินพุตหลายเอาต์พุต (multi-input multi-output, MIMO) ที่มีสัญญาณป้อนเข้าน้อยกว่าสัญญาณป้อนออก ซึ่งการออกแบบหุ่นยนต์ประเภทนี้จะแพร่หลายในช่วงหลังปี ค.ศ. 1995

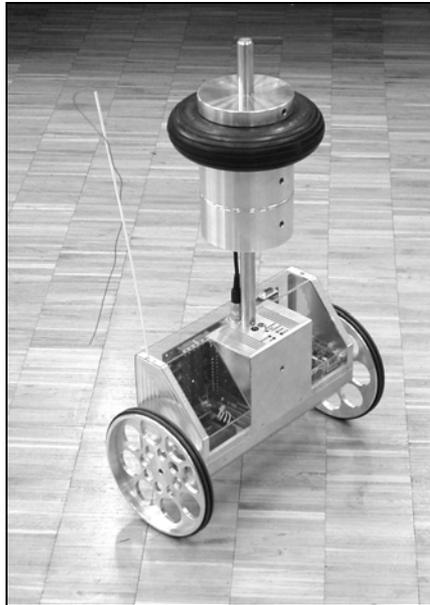
ในปี ค.ศ. 1996 Shiroma *et al.* ได้ศึกษาเกี่ยวกับพฤติกรรมของหุ่นยนต์สองล้อที่เคลื่อนที่ร่วมกันตั้งแต่สองตัว เป็นการต่อยอดมาจากงานวิจัยเดิมสำหรับพฤติกรรมของหุ่นยนต์ที่เคลื่อนที่ร่วมกันของ Hashimoto and Oba (1993) ที่มีลักษณะเป็นรถสี่ล้อทำให้แรงภายนอกไม่ส่งผลกระทบต่อเสถียรภาพ แต่งานวิจัยเขานั้นพิจารณาความสมดุลของหุ่นยนต์สองล้อที่เป็นระบบที่ไม่มีเสถียรภาพจากแรงภายนอกสำหรับระบบเคลื่อนที่ร่วมกัน ใช้ระบบควบคุมจากการประมาณแรงภายนอกด้วยตัวสังเกตในขณะทรงตัวเพื่อชดเชยแรง จากการทดลองการประมาณแรงภายนอกสามารถสามารถทำให้ระบบทรงตัวและชดเชยแรงได้ และสามารถทำงานร่วมกันได้ระหว่างมนุษย์และหุ่นยนต์



ภาพที่ 2 การทดลองหุ่นยนต์สองล้อของ Shiroma *et al.*

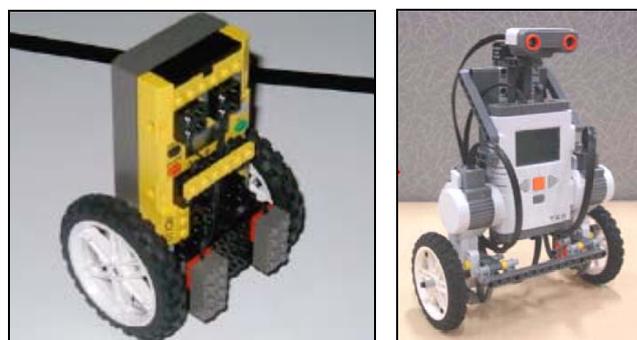
ในปี ค.ศ. 2002 Grasser *et al.* ได้ออกแบบหุ่นยนต์สองล้อดังภาพที่ 3 ขนาดความสูง 65 เซนติเมตร น้ำหนักประมาณ 12 กิโลกรัม สามารถวิ่งได้ด้วยความเร็วสูงสุด 1.5 เมตรต่อวินาที สามารถรักษาสมดุล และทนทานต่อแรงรบกวนภายนอกและตอบสนองต่อสัญญาณอ้างอิงได้ โดยได้กล่าวถึงปัญหาของ Planetary Gearbox ของมอเตอร์เมื่อ โมเมนต์ความเฉื่อยของมอเตอร์ต่ำกว่า โมเมนต์ความเฉื่อยล้อมากๆ สัญญาณรบกวนอาจจะทำให้เกิดการเสียหายกับมอเตอร์ได้ ซึ่งได้แก้ไขด้วยการใช้ตัวกรองความถี่สูงที่ 10 เฮิร์ต ในการออกแบบนั้นเริ่มจากการสร้างสมการคณิตศาสตร์จำลองพลศาสตร์ของระบบด้วยกฎข้อที่สองของนิวตันและประมาณระบบเป็นระบบเชิงเส้นตรง จะได้สมการพลศาสตร์เป็นรูปแบบปริภูมิสแตตสองส่วน และออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธีการวางโพลไว้หลายรูปแบบ ในแต่ละรูปแบบจะได้ผลตอบสนองดีในช่วงการทำงานแตกต่างกัน

เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพผู้วิจัยดังกล่าวจึงได้เสนอให้ออกแบบตัวควบคุมด้วยเทคนิค Adaptive Control เช่นอาศัย Fuzzy Logic เป็นต้น



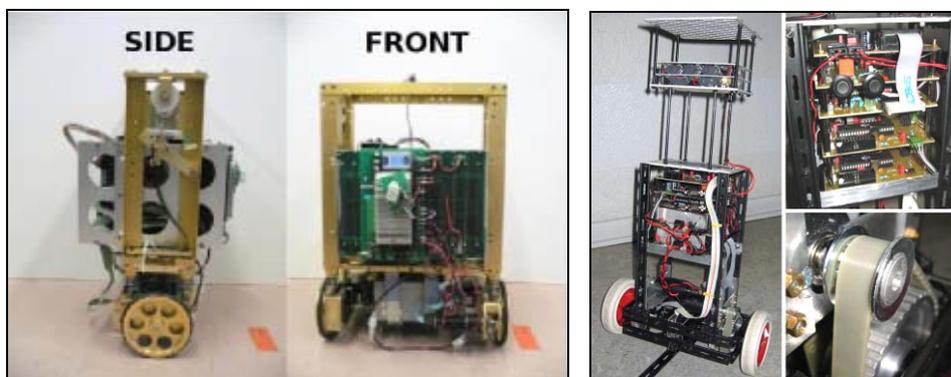
ภาพที่ 3 หุ่นยนต์สองล้อ JOE: a mobile, inverted pendulum

การควบคุมระบบหุ่นยนต์สองล้อเป็นตัวอย่างที่น่าสนใจและเหมาะสำหรับการเรียนรู้ มีหุ่นยนต์ประเภทนี้สำหรับการศึกษาในห้องทดลอง โดยเฉพาะจากค่าย LEGO ดังภาพที่ 4 โดยในหุ่นยนต์ราคาต่ำสามารถใช้ตัวตรวจรู้ความเอียงที่ใช้หลักการวัดระยะทางด้วยแสงเพื่อวัดระยะทางระหว่างหุ่นยนต์กับพื้น แต่ผลลัพธ์ที่ได้จะไม่แม่นยำและใช้ได้เฉพาะกับพื้นที่มีลักษณะเรียบ สำหรับหุ่นยนต์แบบที่ดีกว่านิยมใช้ตัวตรวจรู้ Rate Gyroscope ร่วมกับ Accelerometer ซึ่งสามารถใช้งานได้ดีและมีราคาต่ำ ซึ่งเรียกว่า Inertial Measurement Unit (IMU) ตัวอย่างเช่น งานวิจัยของ Ko *et al.* (2005) หรือการออกแบบระบบควบคุมของ NXTway-GS โดย Yomamoto (2008)



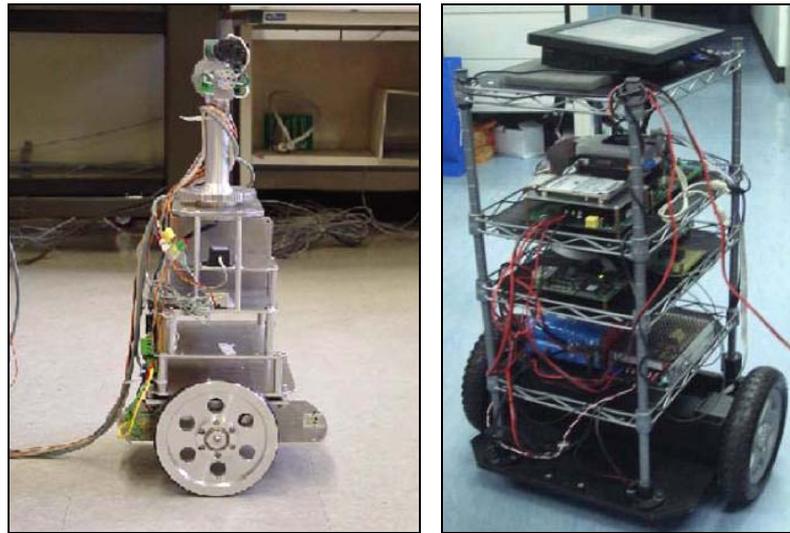
ภาพที่ 4 (ซ้าย) หุ่นยนต์สองล้อ Steve Hassenplug's Legway (ขวา) หุ่นยนต์สองล้อ NXTway-GS

การออกแบบระบบควบคุมในกับงานวิจัยนี้ คือ การควบคุมที่เหมาะสมที่สุดโดยใช้ตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุด ถือว่าเป็นการออกแบบตัวควบคุมที่มีประสิทธิภาพอย่างหนึ่ง โดย Ha and Yuta (1996) นำหุ่นยนต์ Yamabico Kuro ดังภาพที่ 5 มาออกแบบระบบควบคุมแบบที่เหมาะสมที่สุดโดยใช้ตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุดที่มีตัวอินทิกรัล โดยสร้างสมการพลศาสตร์มาจากสมการลากรางจ์สำหรับควบคุมความเร็วของการเคลื่อนที่และการทรงตัว แต่ใช้ตัวควบคุม PID แบบสุมค่าอัตราขยายสำหรับการควบคุมมุมเลี้ยว และในปี ค.ศ. 2008 Imamura *et al.* นำหุ่นยนต์ดังกล่าวมาศึกษาถึงประสิทธิภาพการควบคุมสำหรับใช้เป็นหุ่นยนต์สำรวจ นอกนั้น Akesson *et al.* (2006) ได้ทำงานวิจัยหุ่นยนต์สองล้อ YAIP โดยใช้การประมาณค่าความเร็วจากอะนาล็อกเอนโคเดอร์ และใช้ระบบควบคุมแบบตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุดร่วมกับฟังก์ชันชดเชยแรงเสียดทาน



ภาพที่ 5 (ซ้าย) หุ่นยนต์สองล้อ Yamabico Kuro (ขวา) หุ่นยนต์สองล้อ YAIP

โดยการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบนั้นแบ่งออกเป็น 3 วิธีคือ วิธีแรกวิเคราะห์มาจากกฎข้อที่สองของนิวตัน ซึ่งคือการวิเคราะห์โดยให้แรงในแต่ละแนวที่มีความสมดุลนั้นเท่ากัน ถึงได้ว่าเป็นวิธีพื้นฐานมากที่สุดเหมาะสำหรับระบบที่ไม่ซับซ้อนมากนัก แต่ยิ่งระบบซับซ้อนมากขึ้นยิ่งทำได้ยากขึ้นมาก วิธีที่สองเป็นวิธีที่นิยมวิธีหนึ่งที่ถูกพัฒนามาภายหลัง โดยการพิจารณาความสมดุลระหว่างแรงที่ป้อนเข้าไปในระบบพิกัดกับพลังงานศักย์และพลังงานจลน์ของระบบ ทำให้เหมาะสำหรับระบบที่มีความซับซ้อนมากขึ้น วิธีที่สามคือ วิธีของเคน ได้พัฒนาต่อมาในภายหลัง โดยการพิจารณาในแต่ละพิกัด ทำให้สามารถลดรูปสมการให้มีความซับซ้อนน้อยลงได้ ตัวอย่างเช่น งานวิจัยของ Kim *et al.* (2005) ออกแบบระบบควบคุมแบบตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุดโดยจำลองระบบมาจากสมการของเคน เช่นเกี่ยวกับหุ่นยนต์สองล้อ T-WIP mobile robot ของ Nawawi *et al.* (2007) ในภาพที่ 6



ภาพที่ 6 (ซ้าย) หุ่นยนต์สองล้อของ Kim *et al.* (ขวา) หุ่นยนต์สองล้อ T-WIP mobile robot

การออกแบบตัวควบคุมหุ่นยนต์สองล้อด้วยเทคนิค H_∞ ซึ่งกล่าวได้ว่าเป็นการออกแบบตัวควบคุมขั้นสูงชนิดหนึ่งถูกนำมาเปรียบเทียบกับ การออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธีการวาง โพล (Yano *et al.*, 1998) โดยออกแบบให้ตัวควบคุมทนทานต่อแรงรบกวนสองข้อ ได้แก่ แรงบิดอันเกิดจากแรงโน้มถ่วงของโลกและความผิดพลาดของมุมลูกตุ้มนาฬิกา กลับหัว และค่าผิดพลาดอัตราขยายของตัวควบคุมและแรงเสียดทานในแกนหมุน พบว่าการออกแบบวิธีการวาง โพลนั้นทำได้ลำบากในการหา โพลที่เหมาะสมแตกต่างกับเทคนิค H_∞ ที่สามารถจัดรูปสมการฟังก์ชันถ่ายโอนที่มีประสิทธิภาพในการเพิ่มความสมดุล (robust stability) และลดผลของแรงรบกวนทำให้ลดการสั่นของลูกตุ้มนาฬิกา กลับหัวในสภาวะคงตัว

หุ่นยนต์สองล้อ Two-wheeled vehicle (TWV) โดย Ren *et al.* (2008) ใช้ตัวควบคุมที่มีลักษณะของ Neural Network ทำการปรับแก้ค่าอัตราขยายแบบออนไลน์เพื่อแก้ปัญหาต่อสิ่งรบกวนภายนอกและความไม่แน่นอนของแบบจำลอง ซึ่งแบบจำลองนั้นได้มาจากการแก้สมการนิวตัน และการใช้ตัวควบคุมนั้นช่วยปรับเปลี่ยนค่าอัตราขยายของสัญญาณควบคุม การทดลองแสดงให้เห็นถึงผลดีของระบบควบคุมดังกล่าวเปรียบเทียบกับ การใช้ค่าอัตราขยายคงที่ของ PID แบบทั่วไปในด้านสมรรถนะและความทนทาน โดยเฉพาะเมื่อเปลี่ยนแปลงภาระการทำงาน

ในระบบที่ส่วนหนึ่งส่วนใดของระบบติดตั้งถาวรอยู่กับพื้นหรือมีจุดอ้างอิง การตรวจวัด การเคลื่อนที่ของพลศาสตร์ไม่ใช่เรื่องยาก โดยการใช้เอนโคเดอร์เซนเซอร์ แต่ในทางตรงกันข้ามระบบยานพาหนะสองล้อ นั้นเป็นระบบที่เคลื่อนที่อย่างอิสระ ดังนั้นจึงไม่สามารถใช้เอนโคเดอร์เซนเซอร์สำหรับการวัดความเอียงได้ โดยหุ่นยนต์สองล้อ นั้นต้องการตัวตรวจรู้ที่แม่นยำและ

ตอบสนองต่อแบนด์วิธสูง (high bandwidth) การใช้ตัวตรวจรู้ประเภทตัววัดความเร่งสามารถตอบสนองต่อแบนด์วิธสูงได้ดี แต่พบว่ามีปัญหาต่อการตอบสนองต่อการสั่นสะเทือนที่สูงเกินไป (Vaganay *et al.*, 1993)

ในปี ค.ศ. 1996 Baerveldt and Klang ได้ออกแบบตัวตรวจรู้สำหรับวัดความเอียงโดยใช้หลักการของ Complementary Filter ระหว่างตัวตรวจรู้สองตัวคือ Pendulum Inclinometer และ Rate Gyroscope โดยสามารถชดเชยการตอบสนองทางพลศาสตร์ที่ช้าของ Inclinometer และการเบี่ยงเบนของสัญญาณของ Rate Gyroscope ได้ แต่พบว่าจากการประมาณค่าพารามิเตอร์ของ Inclinometer ด้วย First-Order Low-Pass filter ด้วยเวลาคงที่ ตัวตรวจรู้นี้จะตอบสนองต่อความถี่ได้ดีเฉพาะช่วง 0.15 ถึง 1.5 เฮิรต์ และในปี ค.ศ. 2004 Rehbinder and Hu พัฒนาการวัดความเอียงจาก Rate Gyroscope และ Accelerometer โดยอาศัย Switching State Estimator ก็สามารภแก้ปัญหาการ Drift ของสัญญาณ Rate Gyroscope ได้

ในปี ค.ศ. 2006 Leavitt *et al.* ได้พัฒนาตัวตรวจรู้จาก Pendulum Inclinometer และ Rate Gyroscope โดยเพิ่มตัวตรวจรู้วัดความเร่ง อาศัยความรู้ของ State Observation จำลองโมเดลตัวตรวจรู้ทุกชนิดแบบไม่แปรผันตามเวลา (linear time invariant, LTI) จำลองโมเดล Rate Gyroscope เป็นค่าการประมาณความเร็วเชิงมุมที่รวมกับค่าไบอัสและค่าสเกลที่ไม่ทราบค่า และจำลองสมการคณิตศาสตร์ของ Inclinometer เป็น Second-Order Transfer Function โดยค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ นั้น ได้มาจากการทดลองการจำลองการตอบสนองเชิงความถี่ วิธีการออกแบบตัวตรวจรู้ที่คล้ายเดิมคือ การจำกัด Gyro Bias ออก ตัวตรวจรู้ที่ถูกพัฒนาขึ้นนี้สามารถตอบสนองต่อแบนด์วิธสูงได้มากกว่า 4 เฮิรต์ ทั้งนี้ขึ้นกับความแม่นยำของแบบจำลอง Inclinometer และสามารถทำงานได้เมื่อระบบมีความเร่งในแนวแกนต่างๆ

อุปกรณ์และวิธีการ

ส่วนแรกในบทนี้จะกล่าวถึงอุปกรณ์การทดลอง ซึ่งแบ่งย่อยเป็นการออกแบบและจำลองระบบควบคุมผ่านโปรแกรมคอมพิวเตอร์ และการทดลองจริงสำหรับหุ่นยนต์สองล้อ ส่วนในวิธีการสำหรับงานวิจัยนี้ถูกแบ่งออกเป็นสองส่วน คือ การหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และออกแบบระบบควบคุม

อุปกรณ์

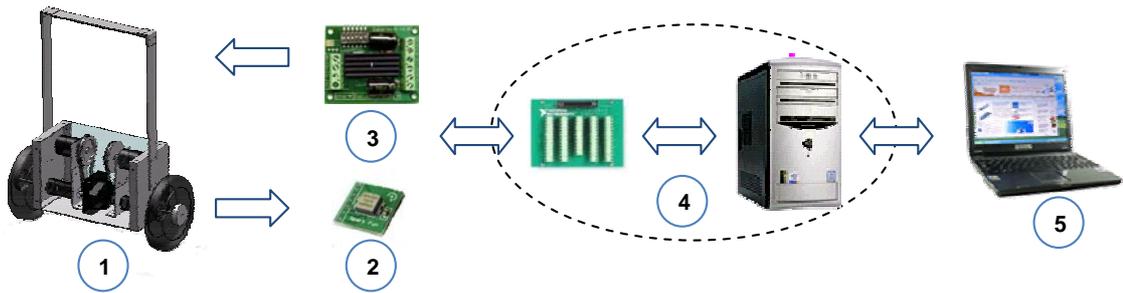
อุปกรณ์ในการออกแบบและจำลองระบบควบคุม

ประเด็นสำคัญในงานวิจัยนี้คือการออกแบบระบบควบคุมและการจำลองเพื่อวิเคราะห์ผลโปรแกรมที่นำมาใช้คือ โปรแกรม MATLAB ซึ่งถูกใช้อย่างแพร่หลายในงานด้านวิศวกรรมศาสตร์ โปรแกรมดังกล่าวเป็นภาษาขั้นสูงที่ช่วยลดระยะเวลาในการเขียนโปรแกรมด้วยฟังก์ชันต่างๆ เช่น กระบวนการทางเมตริกซ์ และการออกแบบตัวควบคุม เป็นต้น

โดยค่าพารามิเตอร์ของระบบสำหรับการจำลองได้มาอุปกรณ์ทดลองจริงในหัวข้อถัดไป โดยดูได้จากภาคผนวก ก, ภาคผนวก ข และภาคผนวก ง

อุปกรณ์ในการทดลองระบบควบคุมของหุ่นยนต์สองล้อ

อุปกรณ์การทดลองประกอบด้วย หุ่นยนต์สองล้อ, ระบบป้อนเข้าสัญญาณซึ่งประกอบด้วยระบบควบคุมความแรงดันไฟฟ้ามอเตอร์และแหล่งจ่ายพลังงาน, ระบบป้อนกลับสัญญาณคือระบบรับค่าสัญญาณจากตัวตรวจรู้, ตัวควบคุมประกอบด้วยการ์ดรับส่งสัญญาณที่ติดตั้งภายในคอมพิวเตอร์ตั้งโต๊ะที่ทำหน้าที่เป็น Target Computer และคอมพิวเตอร์โน้ตบุ๊กทำหน้าที่เป็น Host Computer ดังแสดงในภาพที่ 7



ภาพที่ 7 อุปกรณ์และการออกแบบการทดลอง

1. หุ่นยนต์สองล้อ เป็นหุ่นยนต์ขนาด $14.7 \times 36.6 \times 52$ เซนติเมตร น้ำหนักรวม 3.079 กิโลกรัม วัสดุโครงทำมาจากอลูมิเนียม ภายในหุ่นยนต์จะมีมอเตอร์กระแสตรง 2 ชุด โดยต่อตรงกับล้อทั้งสองที่ทำงานอย่างอิสระต่อกัน เพื่อควบคุมการทรงตัวของหุ่นยนต์สองล้อในห้องปฏิบัติการควบคุมหุ่นยนต์และการสั่งสะเทือน ดังภาพที่ 8



ภาพที่ 8 หุ่นยนต์สองล้อในห้องปฏิบัติการควบคุมหุ่นยนต์และการสั่งสะเทือน

2. ตัวตรวจรู้ คือ อุปกรณ์ที่เปลี่ยนพลังงานกลเป็นพลังงานไฟฟ้าเพื่อบอกถึงสถานะของหุ่นยนต์ ตัวตรวจรู้สำหรับหุ่นยนต์สองล้อ ประกอบด้วย

2.1 เอนโคเดอร์เซนเซอร์ (Encoder) คือ อุปกรณ์วัดตำแหน่งที่ทำงานโดยอาศัยการยิงลำแสงผ่านแถบมืด-สว่างและส่งออกเป็นสัญญาณดิจิทัล การอ่านค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของระดับสัญญาณถูกนำมาคำนวณเป็นอัตราเร็วของการเปลี่ยนแปลงตำแหน่ง งานวิจัยนี้ใช้ตัวตรวจรู้ Omron รุ่น E6B2 CWZ6BC มีความละเอียดเท่ากับ 360 ครั้งต่อรอบ (CPR) โดยมี 2 ชุด สำหรับการวัดอัตราเร็วของล้อซ้ายและล้อขวา เอนโคเดอร์ต่ออยู่กับมอเตอร์ผ่านพลูเลย์และสายพาน รายละเอียดเพิ่มเติมที่ www.omron.com



ภาพที่ 9 อุปกรณ์เอนโคเดอร์เซนเซอร์

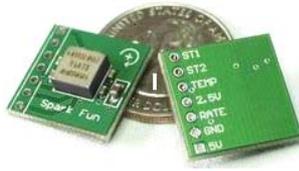
2.2 ตัวตรวจรู้วัดความเอียง (Inclinometer) คือ อุปกรณ์วัดมุมเอียงของของ โครงหุ่นยนต์ ลักษณะการทำงานเหมือนเอนโคเดอร์เซนเซอร์ แต่อาศัยการแกว่งของลูกตุ้มที่อยู่ภายใน งานวิจัยนี้ใช้ตัวตรวจรู้ USDigital รุ่น EM1/HEDS T6 มีความละเอียดเท่ากับ 2500 ครั้งต่อรอบ (CPR) รายละเอียดเพิ่มเติมที่ www.usdigital.com



ภาพที่ 10 อุปกรณ์ตัวตรวจรู้วัดความเอียง Inclinometer

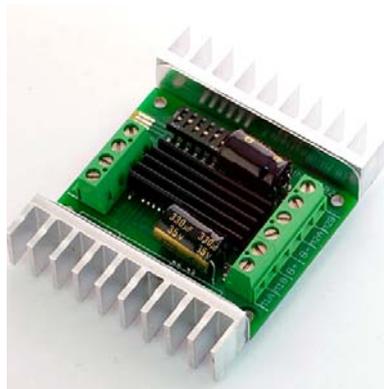
2.3 ตัวตรวจรู้วัดอัตราการโน้มเอียง เรียกว่า Rate Gyroscope เป็นอุปกรณ์วัดอัตราการโน้มเอียง มีการตอบสนองดีต่อความถี่สูง อุปกรณ์นี้นิยมนำไปใช้ในอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์หลายประเภท เช่น กล้องถ่ายรูป ลูกศรนำวิถีในรถยนต์ และวีดีโอเกมส์ เป็นต้น ชิปเซ็ต ADXRS300 ถูกนำมาใช้

ในงานวิจัยนี้ สามารถตอบสนองอัตราเร็วได้ถึง 300 องศาต่อวินาที โดยมีน้ำหนักเพียง 0.5 กรัม เอาท์พุทที่ได้เป็นแรงดันไฟฟ้าแบบอะนาลอก รายละเอียดเพิ่มเติมที่ www.sparkfun.com



ภาพที่ 11 อุปกรณ์ตัวตรวจรู้วัดอัตราการโน้มเอียง Rate Gyroscope

3. วงจรขับมอเตอร์กระแสตรง (Power Amplifier) ทำหน้าที่ขยายกระแสไฟฟ้า โดยอุปกรณ์นี้จะรับสัญญาณป้อนเข้าคือกระแสไฟฟ้าที่มีปริมาณและแรงดันต่ำ และจ่ายกระแสไฟฟ้าที่มีปริมาณและแรงดันสูงกว่า โดยใช้พลังงานจากแหล่งกำเนิดไฟฟ้าไปยังมอเตอร์กระแสตรงที่ติดตั้งอยู่บนหุ่นยนต์ ซึ่งในงานวิจัยนี้ใช้อุปกรณ์รุ่น Sabertooth2x10 ทำหน้าที่เป็นวงจรที่รับและจ่ายไฟฟ้า โดยแปรผันตามแรงดันไฟฟ้า รายละเอียดเพิ่มเติมที่ www.dimensionengineering.com



ภาพที่ 12 อุปกรณ์วงจรถับมอเตอร์กระแสตรง

4. Target Computer คือคอมพิวเตอร์ที่ใช้เป็นตัวควบคุมของระบบ ในคอมพิวเตอร์นี้ถูกติดตั้งการ์ดรับส่งข้อมูล (Data Acquisition) NI PCI 6221 ทำหน้าที่รับส่งสัญญาณ มีความเร็ว 250kSต่อวินาทีและความละเอียด 16 บิตสำหรับอนาลอก ความละเอียด 8 บิตสำหรับดิจิทัล และความละเอียด 32 บิต 80 เมกกะเฮิร์ต สำหรับช่องต่อเคาท์เตอร์ ต่ออยู่กับการ์ดเชื่อมต่อ (CB68) และในคอมพิวเตอร์ตัวนี้ติดตั้งโปรแกรม LabVIEW Real-Time 8.2.0 รายละเอียดเพิ่มเติมที่ www.ni.com/labview



ภาพที่ 13 การ์ดรับส่งข้อมูล (Data Acquisition) NI PCI 6221 (CB68)

5. Host Computer คือคอมพิวเตอร์สำหรับพัฒนาแอปพลิเคชัน และในคอมพิวเตอร์ตัวนี้ติดตั้งโปรแกรม LabVIEW 8.2.0 รายละเอียดเพิ่มเติมที่ www.ni.com/labview

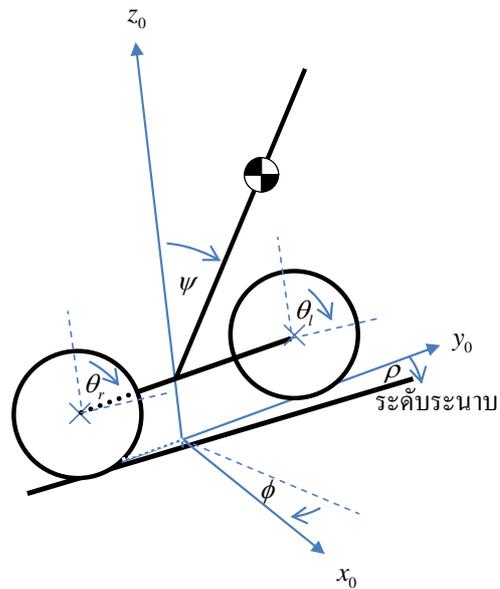
วิธีการ

การหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ส่วนที่สำคัญในการออกแบบระบบควบคุมที่อาศัยแบบจำลอง (model-based control) คือ การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แม่นยำ เนื่องจากขั้นตอนการตัดสินใจในขบวนการออกแบบตัวควบคุมจะทำได้ดีเมื่อเข้าใจถึงพฤติกรรมของระบบที่จะทำการควบคุม และบางครั้งพบว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จากวิธีกล่องดำ (black box) ที่มีอันดับต่างๆไม่สามารถบอกถึงพลศาสตร์ของระบบได้ดีนัก

หุ่นยนต์สองล้อนั้นสามารถหาแบบจำลองที่มีประสิทธิภาพได้จากสมการการเคลื่อนที่เชิงกล ได้แก่ กฎข้อที่สองของนิวตัน (Grasser et al., 2002) ทฤษฎีของเคน (Kim et al., 2005) และสมการลากรางจ์ที่งานวิจัยนี้นำมาใช้

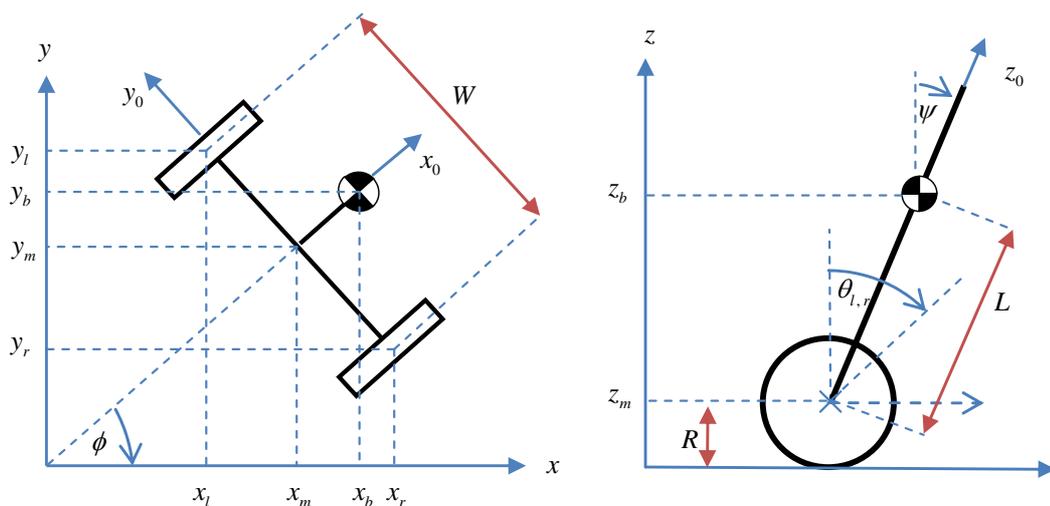
ภาพที่ 14 แสดงถึงองศาอิสระทั้งหมดของหุ่นยนต์เท่ากับ 4 องศาอิสระ ประกอบด้วยค่าเฉลี่ยมุมหมุนของล้อทั้งสอง $(\theta_l + \theta_r) / 2$, มุมเอียงของหุ่นยนต์ (ψ), มุมเลี้ยวของหุ่นยนต์ (ϕ) และมุมยกของหุ่นยนต์ (ρ) แต่ในงานวิจัยนี้จะพิจารณาเฉพาะกรณีที่หุ่นยนต์วิ่งบนพื้นที่ไม่มีความลาดชันหรือค่ามุมยกของหุ่นยนต์มีค่าเท่ากับศูนย์เสมอ ส่งผลให้ระบบหุ่นยนต์สองล้อในงานวิจัยนี้มีองศาอิสระเท่ากับ 3



ภาพที่ 14 หุ่นยนต์สองล้อที่มี 4 องศาอิสระ

1. พลศาสตร์ลากรางจ์สำหรับหุ่นยนต์สองล้อ

วิธีการหาแบบจำลองการเคลื่อนที่โดยใช้สมการลากรางจ์เหมาะสำหรับระบบที่มีความยุ่งยากและซับซ้อน โดยจะคำนวณจากสมการพลังงานศักย์และพลังงานจลน์ในรูปของตัวแปรพิกัดหุ่นยนต์สองล้อที่กำหนดให้ อยู่สามระบบพิกัดคือ (θ, ψ, ϕ)



ภาพที่ 15 หุ่นยนต์สองล้อบนแกนพิกัด x, y, z

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{1}{2}(\theta_l + \theta_r) = \text{มุมหมุนเฉลี่ยของล้อซ้ายและล้อขวา} \\ \phi &= \frac{R}{W}(\theta_r - \theta_l) = \text{มุมหมุนของหุ่นยนต์สองล้อ (Body yaw angle)} \\ \psi &= \text{มุมเอียงของหุ่นยนต์สองล้อ (Body pitch angle)}\end{aligned}$$

โดย θ_l, θ_r = มุมของล้อซ้ายและล้อขวา

และความสัมพันธ์ของ θ และ ϕ จาก $\frac{1}{2}(\theta_l + \theta_r)$ และ $\frac{R}{W}(\theta_r - \theta_l)$ จะได้ว่า

$$\theta_r = \theta + \frac{W}{2R}\phi, \theta_l = \theta - \frac{W}{2R}\phi \quad (1)$$

สมการลากรางจ์สำหรับหาแบบจำลองทางพลศาสตร์สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (2)$$

โดย L = ค่าลากรางจ์ (Lagrangian) = $T - V$

T = พลังงานจลน์รวมของระบบ

V = พลังงานศักย์รวมของระบบ

q_i = ระบบพิกัด

Q_i = แรงในระบบพิกัดที่กำลังสนใจ

i = อันดับของระบบ

เมื่อขณะเวลาเริ่มต้น กำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ของหุ่นยนต์สองล้อให้อยู่บนระบบพิกัดดังแสดงในภาพที่ 15 ดังนั้นสามารถเขียนค่าพารามิเตอร์ได้ดังนี้

$$(x_m, y_m, z_m) = (R\theta \cos \phi, R\theta \sin \phi, R) \quad (3)$$

$$(x_l, y_l, z_l) = \left(x_m - \frac{W}{2} \sin \phi, y_m + \frac{W}{2} \cos \phi, z_m\right) \quad (4)$$

$$(x_r, y_r, z_r) = \left(x_m + \frac{W}{2} \sin \phi, y_m - \frac{W}{2} \cos \phi, z_m\right) \quad (5)$$

$$(x_b, y_b, z_b) = (x_m + L \sin \psi \cos \phi, y_m + L \sin \psi \sin \phi, z_m + L \cos \psi) \quad (6)$$

ตารางที่ 1 ค่าพารามิเตอร์ทั่วไปของหุ่นยนต์

พารามิเตอร์	ความหมาย	ขนาด (หน่วย)
g	แรงโน้มถ่วงโลก	$9.81 \text{ (m/s}^2\text{)}$
m_w	มวลล้อ	0.5675 (kg)
m_b	มวลตัวถัง	1.94033 (kg)
R	รัศมีล้อ	0.146 (m)
W	ระยะความกว้างฐานล้อ	0.3103 (m)
n	อัตราทดมอเตอร์	64
n_2	อัตราทดเอนโคดเดอร์	0.25
J_e	โมเมนต์ความเฉื่อยของเอนโคดเดอร์	$1 \times 10^{-6} \text{ (kgm}^2\text{)}$

จาก ภาคผนวก ก จะได้ค่าพารามิเตอร์ดังนี้

$$\begin{aligned}
 L &= \text{ระยะห่างของจุดศูนย์กลางถ่วงในแนวแกน } z_0 &= 0.04895 \text{ m} \\
 J_{by} &= \text{โมเมนต์ความเฉื่อยตัวถังรอบแกน } y_0 &= 0.0173198 \text{ kgm}^2 \\
 J_{wy} &= \text{โมเมนต์ความเฉื่อยของล้อรอบแกน } y_0 &= 0.0013824 \text{ kgm}^2 \\
 J_{bz} &= \text{โมเมนต์ความเฉื่อยตัวถังรอบแกน } z_0 &= 0.0117333 \text{ kgm}^2 \\
 J_{wz} &= \text{โมเมนต์ความเฉื่อยของล้อรอบแกน } z_0 &= 0.0144355 \text{ kgm}^2 \\
 J_r &= \text{โมเมนต์ความเฉื่อยของพูลเลย์ทดเอนโคดเดอร์} &= 0.0000578 \text{ kgm}^2
 \end{aligned}$$

จาก ภาคผนวก ข จากการหาเอกลักษณ์ของระบบ (Chatlatanagulchai et al., 2008)

จะได้ค่าพารามิเตอร์ดังนี้

$$\begin{aligned}
 R_m &= \text{ค่าความต้านทานมอเตอร์} \\
 K_b &= \text{ค่าคงที่แรงดันไฟฟ้าย้อนกลับมอเตอร์} \\
 K_t &= \text{ค่าคงที่แรงบิดมอเตอร์} \\
 K_{b_l} &= 0.004129229, & K_{b_r} &= 0.004420931 \\
 \left(\frac{K_t}{R_m}\right)_l &= 0.003718956, & \left(\frac{K_t}{R_m}\right)_r &= 0.0038156
 \end{aligned}$$

พารามิเตอร์อื่นๆ ที่หาได้ยากแต่มีค่าใกล้เคียงกับงานวิจัยอื่น จึงกำหนดค่าได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 J_m &= \text{โมเมนต์ความเฉื่อยอาร์เมเจอร์รอบแกน } y_0 &= 1 \times 10^{-5} \text{ kgm}^2 \\
 J_g &= \text{โมเมนต์ความเฉื่อยของเกียร์ทดรอบมอเตอร์} &= 1 \times 10^{-5} \text{ kgm}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_m &= \text{สัมประสิทธิ์แรงเสียดทานระหว่างตัวถังและมอเตอร์} &= 0.0022 \\
f_w &= \text{สัมประสิทธิ์แรงเสียดทานระหว่างล้อและพื้น} &= 0 \\
J_e &= \text{โมเมนต์ความเฉื่อยของเอนโคเดอร์} &= 1 \times 10^{-5} \text{ kgm}^2 \\
&\quad (\text{ข้อมูลจากโรงงานผลิต Omron})
\end{aligned}$$

พลังงานจลน์จากการเคลื่อนที่เชิงเส้น (T_1), พลังงานจลน์จากการเคลื่อนที่แบบหมุน (T_2) และพลังงานศักย์ (V) หาได้จากสมการ (7), (8) และ (9)

$$T_1 = \frac{1}{2} m_w (\dot{x}_l^2 + \dot{y}_l^2 + \dot{z}_l^2) + \frac{1}{2} m_w (\dot{x}_r^2 + \dot{y}_r^2 + \dot{z}_r^2) + \frac{1}{2} m_b (\dot{x}_b^2 + \dot{y}_b^2 + \dot{z}_b^2) \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
T_2 &= \frac{1}{2} J_{by} \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} J_{bz} \dot{\phi}^2 + J_{wz} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} J_{wy} \dot{\theta}_l^2 + \frac{1}{2} J_{wy} \dot{\theta}_r^2 \\
&\quad + \left[\frac{1}{2} (\dot{\theta}_l - \dot{\psi})^2 + \frac{1}{2} (\dot{\theta}_r - \dot{\psi})^2 \right] [J_g + J_m n^2 + (J_e + J_r) n^2 n_2^2]
\end{aligned} \quad (8)$$

$$V = mgz_l + mgz_r + mgz_b \quad (9)$$

จากสมการพลังงานจลน์จากการเคลื่อนที่เชิงเส้น (7) แทนค่าจากสมการ (3), (4), (5), (6) เปลี่ยนรูปให้อยู่ในระบบพิกัดได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2} m \left(\left[\frac{d}{dt} (R\theta \cos \phi - \frac{W}{2} \sin \phi) \right]^2 + \left[\frac{d}{dt} (R\theta \sin \phi + \frac{W}{2} \cos \phi) \right]^2 + \left[\frac{d}{dt} (R) \right]^2 \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} m \left(\left[\frac{d}{dt} (R\theta \cos \phi + \frac{W}{2} \sin \phi) \right]^2 + \left[\frac{d}{dt} (R\theta \sin \phi - \frac{W}{2} \cos \phi) \right]^2 + \left[\frac{d}{dt} (R) \right]^2 \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} m \left(\left[\frac{d}{dt} (R\theta \cos \phi + L \sin \psi \cos \phi) \right]^2 + \left[\frac{d}{dt} (R\theta \sin \phi + L \sin \psi \sin \phi) \right]^2 + \left[\frac{d}{dt} (R + L \cos \psi) \right]^2 \right) \\
T_1 &= \frac{1}{2} m_w \left(\left[\begin{aligned} & \left[-R\theta \dot{\phi} \sin \phi + R\dot{\theta} \cos \phi - \frac{W}{2} \dot{\phi} \cos \phi \right]^2 + \left[R\theta \dot{\phi} \cos \phi + R\dot{\theta} \sin \phi - \frac{W}{2} \dot{\phi} \sin \phi \right]^2 + \\ & \left[-R\theta \dot{\phi} \sin \phi + R\dot{\theta} \cos \phi + \frac{W}{2} \dot{\phi} \cos \phi \right]^2 + \left[R\theta \dot{\phi} \cos \phi + R\dot{\theta} \sin \phi + \frac{W}{2} \dot{\phi} \sin \phi \right]^2 \end{aligned} \right] \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} m_b \left[\begin{aligned} & \left[-R\theta \dot{\phi} \sin \phi + R\dot{\theta} \cos \phi - L\dot{\phi} \sin \psi \sin \phi + L\dot{\psi} \cos \psi \cos \phi \right]^2 \\ & + \left[R\theta \dot{\phi} \cos \phi + R\dot{\theta} \sin \phi + L\dot{\phi} \sin \psi \cos \phi + L\dot{\psi} \cos \psi \sin \phi \right]^2 + \left[-L\dot{\psi} \sin \psi \right]^2 \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

จัดรูปใหม่จะได้

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2} m_w \left[\begin{aligned} &R^2 \theta^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \phi + R^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \phi + \frac{W^2}{4} \dot{\phi}^2 \cos^2 \phi - 2R^2 \theta \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \phi \cos \phi \\ &+ RW \theta \dot{\phi}^2 \sin \phi \cos \phi - RW \dot{\theta} \dot{\phi} \cos^2 \phi + R^2 \theta^2 \dot{\phi}^2 \cos^2 \phi + R^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \phi \\ &+ \frac{W^2}{4} \dot{\phi}^2 \sin^2 \phi + 2R^2 \theta \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \phi \cos \phi - RW \theta \dot{\phi}^2 \sin \phi \cos \phi - RW \dot{\theta} \dot{\phi} \sin^2 \phi \\ &+ R^2 \theta^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \phi + R^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \phi + \frac{W^2}{4} \dot{\phi}^2 \cos^2 \phi - 2R^2 \theta \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \phi \cos \phi \\ &- RW \theta \dot{\phi}^2 \sin \phi \cos \phi + RW \dot{\theta} \dot{\phi} \cos^2 \phi + R^2 \theta^2 \dot{\phi}^2 \cos^2 \phi + R^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \phi \\ &+ \frac{W^2}{4} \dot{\phi}^2 \sin^2 \phi + 2R^2 \theta \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \phi \cos \phi + RW \theta \dot{\phi}^2 \sin \phi \cos \phi + RW \dot{\theta} \dot{\phi} \sin^2 \phi \end{aligned} \right] \\
&+ \frac{1}{2} m_b \left[\begin{aligned} &R^2 \theta^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \phi + R^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \phi + L^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \phi \sin^2 \psi + L^2 \dot{\psi}^2 \cos^2 \phi \cos^2 \psi \\ &- 2R^2 \theta \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \phi \cos \phi + 2LR \theta \dot{\phi}^2 \sin^2 \phi \sin \psi - 2LR \theta \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \phi \cos \phi \cos \psi \\ &- 2LR \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \phi \cos \phi \sin \psi + 2LR \dot{\theta} \dot{\psi} \cos^2 \phi \cos \psi \\ &- 2L^2 \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \phi \cos \phi \sin \psi \cos \psi + R^2 \theta^2 \dot{\phi}^2 \cos^2 \phi + R^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \phi \\ &L^2 \dot{\phi}^2 \cos^2 \phi \sin^2 \psi + L^2 \dot{\psi}^2 \sin^2 \phi \cos^2 \psi + 2R^2 \theta \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \phi \cos \phi \\ &+ 2LR \theta \dot{\phi}^2 \cos^2 \phi \sin \psi + 2LR \theta \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \phi \cos \phi \cos \psi \\ &+ 2LR \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \phi \cos \phi \sin \psi + 2LR \dot{\theta} \dot{\psi} \sin^2 \phi \cos \psi \\ &+ 2L^2 \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \phi \cos \phi \sin \psi \cos \psi + L^2 \dot{\psi}^2 \sin^2 \psi \end{aligned} \right] \\
T_1 &= \frac{1}{2} m_w \left(\begin{aligned} &\left(2R^2 \theta^2 \dot{\phi}^2 + 2R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{W^2 \dot{\phi}^2}{2} \right) (\sin^2 \phi) \\ &+ \left(2R^2 \theta^2 \dot{\phi}^2 + 2R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{W^2 \dot{\phi}^2}{2} \right) (\cos^2 \phi) \end{aligned} \right) \\
&+ \frac{1}{2} m_b \left[\begin{aligned} &\left(R^2 \theta^2 \dot{\phi}^2 + R^2 \dot{\theta}^2 \right) \sin^2 \phi + \left(R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \theta^2 \dot{\phi}^2 \right) \cos^2 \phi + \left(L^2 \dot{\phi}^2 \right) \sin^2 \phi \sin^2 \psi \\ &+ \left(L^2 \dot{\phi}^2 \right) \cos^2 \phi \sin^2 \psi + \left(L^2 \dot{\psi}^2 \right) \sin^2 \phi \cos^2 \psi + \left(L^2 \dot{\psi}^2 \right) \cos^2 \phi \cos^2 \psi \\ &+ \left(2LR \theta \dot{\phi}^2 \right) \sin^2 \phi \sin \psi + \left(2LR \theta \dot{\phi}^2 \right) \cos^2 \phi \sin \psi + \left(2LR \dot{\theta} \dot{\psi} \right) \sin^2 \phi \cos \psi \\ &+ \left(2LR \dot{\theta} \dot{\psi} \right) \cos^2 \phi \cos \psi + \left(L^2 \dot{\psi}^2 \right) \sin^2 \psi \end{aligned} \right] \\
T_1 &= \frac{1}{2} m_w \left(2R^2 \theta^2 \dot{\phi}^2 + 2R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{W^2 \dot{\phi}^2}{2} \right) \\
&+ \frac{1}{2} m_b \left(R^2 \theta^2 \dot{\phi}^2 + R^2 \dot{\theta}^2 + L^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \psi + L^2 \dot{\psi}^2 + 2LR \theta \dot{\phi}^2 \sin \psi + 2LR \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \psi \right) \tag{10}
\end{aligned}$$

แทนค่าสมการ (1) ในสมการพลังงานจลน์จากการเคลื่อนที่แบบหมุน (8) จะเปลี่ยนรูปให้อยู่ในระบบพิกัดได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
T_2 &= \frac{1}{2} J_w \left[\frac{d}{dt} \left(\theta - \frac{W}{2R} \phi \right) \right]^2 + \frac{1}{2} J_w \left[\frac{d}{dt} \left(\theta + \frac{W}{2R} \phi \right) \right]^2 + \frac{1}{2} J_\psi \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} J_\phi \dot{\phi}^2 \\
&+ \frac{1}{2} n^2 J_m \left(\dot{\theta} + \frac{W}{2R} \dot{\phi} - \dot{\psi} \right)^2 + \frac{1}{2} n^2 J_m \left(\dot{\theta} - \frac{W}{2R} \dot{\phi} - \dot{\psi} \right)^2 \\
T_2 &= \frac{1}{2} J_w \left[2\dot{\theta}^2 + \frac{W^2}{2R^2} \dot{\phi}^2 \right] + \frac{1}{2} J_\psi \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} J_\phi \dot{\phi}^2 \\
&+ \frac{1}{2} n^2 J_m \left[\begin{aligned} &\dot{\theta}^2 + \frac{W^2}{4R^2} \dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + \frac{W}{R} \dot{\theta} \dot{\phi} - 2\dot{\theta} \dot{\psi} - \frac{W}{R} \dot{\phi} \dot{\psi} + \dot{\theta}^2 \\ &+ \frac{W^2}{4R^2} \dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 - \frac{W}{R} \dot{\theta} \dot{\phi} - 2\dot{\theta} \dot{\psi} + \frac{W}{R} \dot{\phi} \dot{\psi} \end{aligned} \right] \\
T_2 &= \frac{1}{2} J_{by} \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} (J_{bz} + 2J_{wz}) \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} J_{wy} \left[2\dot{\theta}^2 + \frac{W^2}{2R^2} \dot{\phi}^2 \right] \\
&+ \frac{1}{2} [J_g + J_m n^2 + (J_e + J_r) n^2 n_2^2] \left(2\dot{\theta}^2 + \frac{W^2}{2R^2} \dot{\phi}^2 + 2\dot{\psi}^2 - 4\dot{\theta} \dot{\psi} \right)
\end{aligned} \tag{11}$$

จากสมการพลังงานศักย์ (9) เปลี่ยนรูปให้อยู่ในระบบพิกัดได้ดังนี้

$$V = m_w g R + m_w g R + m_b g (R + L \cos \psi) = 2m_w g R + m_b g R + m_b g L \cos \psi$$

จะได้ค่าลากรางจ์ (L) คือ

$$L = T_1 + T_2 - V \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2} m_w \left(2R^2 \dot{\theta}^2 + 2R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{W^2 \dot{\phi}^2}{2} - 4gR \right) \\
&+ \frac{1}{2} m_b \left(R^2 \dot{\theta}^2 \dot{\phi}^2 + R^2 \dot{\theta}^2 + L^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \psi + L^2 \dot{\psi}^2 + 2LR \dot{\theta} \dot{\phi}^2 \sin \psi \right. \\
&\quad \left. + 2LR \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \psi - 2gR - 2gL \cos \psi \right) \\
&+ \frac{1}{2} J_{wy} \left(2\dot{\theta}^2 + \frac{W^2}{2R^2} \dot{\phi}^2 \right) + \frac{1}{2} J_{by} \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} (J_{bz} + 2J_{wz}) \dot{\phi}^2 \\
&+ \frac{1}{2} [J_g + J_m n^2 + (J_e + J_r) n^2 n_2^2] \left(2\dot{\theta}^2 + \frac{W^2}{2R^2} \dot{\phi}^2 + 2\dot{\psi}^2 - 4\dot{\theta} \dot{\psi} \right)
\end{aligned} \tag{13}$$

กำหนดให้
$$J_o = [J_g + J_m n^2 + (J_e + J_r) n^2 n_2^2] \quad (14)$$

สมการลากรางจ์สามารถหาได้จากสมการ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = F_\theta \quad (15)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = F_\psi \quad (16)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = F_\phi \quad (17)$$

จากสมการลากรางจ์ทั้ง 3 พิกัดจะได้อยู่ในรูป 3 สมการคือ สมการ (18), (19) และ (20)

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 2m_w R^2 \dot{\theta}^2 + m_b R^2 \dot{\theta} \dot{\phi}^2 + m_b LR \dot{\phi}^2 \sin \psi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2m_w R^2 \dot{\theta} + m_b R^2 \dot{\theta} + m_b LR \dot{\psi} \cos \psi + 2J_{wy} \dot{\theta} + 2J_o \dot{\theta} - 2J_o \dot{\psi}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 2m_w R^2 \ddot{\theta} + m_b R^2 \ddot{\theta} + m_b LR \cos \psi \ddot{\psi} - m_b LR \dot{\psi}^2 \sin \psi + 2J_{wy} \ddot{\theta} + 2J_o \ddot{\theta} - 2J_o \ddot{\psi}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= (2m_w R^2 + m_b R^2 + 2J_{wy} + 2J_o) \ddot{\theta} + (m_b LR \cos \psi - 2J_o) \ddot{\psi} \\ &\quad - m_b LR \dot{\psi}^2 \sin \psi - [2m_w R^2 \dot{\theta} + m_b R^2 \dot{\theta} + m_b LR \dot{\theta} \sin \psi] \dot{\phi}^2 = F_\theta \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = m_b L^2 \dot{\phi}^2 \sin \psi \cos \psi + m_b LR \dot{\theta} \dot{\phi}^2 \cos \psi + m_b LR \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \psi - m_b gL \sin \psi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = m_b L^2 \dot{\psi} + m_b LR \cos \psi \dot{\theta} + J_{by} \dot{\psi} + 2J_o \dot{\psi} - 2J_o \dot{\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) = m_b L^2 \ddot{\psi} + m_b LR \cos \psi \ddot{\theta} - m_b LR \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \psi + J_{by} \ddot{\psi} + 2J_o \ddot{\psi} - 2J_o \ddot{\theta}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} &= (m_b L^2 + J_\psi + 2J_0) \ddot{\psi} + (m_b LR \cos \psi - 2J_0) \ddot{\theta} - m_b g L \sin \psi \\ &- (m_b L^2 \sin \psi + m_b LR \theta) \dot{\phi}^2 \cos \psi = F_\psi \end{aligned} \quad (19)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= 2m_w R^2 \theta^2 \dot{\phi} + \frac{1}{2} m_w W^2 \dot{\phi} + m_b R^2 \theta^2 \dot{\phi} + m_b L^2 \dot{\phi} \sin^2 \psi \\ &+ 2m_b LR \theta \dot{\phi} \sin \psi + 2J_{wy} \dot{\phi} + \frac{1}{2} (J_{bz} + 2J_{wz}) \dot{\phi} + J_0 \frac{W^2}{2R^2} \dot{\phi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) &= 2m_w R^2 \theta^2 \ddot{\phi} + \frac{1}{2} m_w W^2 \ddot{\phi} + m_b R^2 \theta^2 \ddot{\phi} + m_b L^2 \sin^2 \psi \ddot{\phi} \\ &+ 2m_b LR \theta \sin \psi \ddot{\phi} + 2J_{wy} \ddot{\phi} + \frac{1}{2} (J_{bz} + 2J_{wz}) \ddot{\phi} + J_0 \frac{W^2}{2R^2} \ddot{\phi} \end{aligned}$$

$$+ 2(2m_w R^2 \theta \dot{\theta} \dot{\phi} + m_b R^2 \theta \dot{\theta} \dot{\phi} + m_b L^2 \dot{\psi} \sin \psi \cos \psi + m_b LR \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \psi + m_b LR \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \psi)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \left(\frac{1}{2} m_w W^2 + \frac{1}{2} (J_{bz} + 2J_{wz}) + \frac{W^2}{2R^2} (J_0 + J_{wy}) + \right. \\ \left. (2m_w + m_b) R^2 \theta^2 + 2m_b LR \theta \sin \psi + m_b L^2 \sin^2 \psi \right) \ddot{\phi} \quad (20)$$

$$+ 2 \left((2m_w + m_b) R^2 \theta \dot{\theta} + m_b L^2 \dot{\psi} \sin \psi \cos \psi + m_b LR (\dot{\theta} \sin \psi + \theta \dot{\psi} \cos \psi) \right) \dot{\phi} = F_\phi$$

แรงที่กระทำต่อระบบในระบบพิกัด ได้แก่ แรงที่กระทำต่อพิกัด θ หรือ (F_θ), แรงที่กระทำต่อพิกัด ψ หรือ (F_ψ) และแรงที่กระทำต่อพิกัด ϕ หรือ (F_ϕ) สามารถจัดรูปเป็นแรงที่กระทำต่อล้อซ้ายล้อขวาได้ดังสมการ (21) และ (22)

$$F_\theta = \frac{1}{2} (F_l + F_r) \quad (21)$$

$$F_\phi = \frac{R}{W} (F_r - F_l) \quad (22)$$

2. แบบจำลองหุ่นยนต์สองล้อแบบค่าพารามิเตอร์ของมอเตอร์ซ้ายและขวาเท่ากัน

โดยพิจารณาให้แรงที่กระทำกับล้อและแรงที่ทำให้เกิดการโน้มเอียงคือ แรงบิดของมอเตอร์ กระแสตรง แรงเสียดทานระหว่างมอเตอร์กับล้อ และแรงเสียดทานระหว่างล้อกับพื้น ซึ่งสามารถเขียนได้ดังสมการ

$$F_l = nK_{t_l}i_l + f_m(\dot{\psi} - \dot{\theta}_l) - f_w\dot{\theta}_l \quad (23)$$

$$F_r = nK_{t_r}i_r + f_m(\dot{\psi} - \dot{\theta}_r) - f_w\dot{\theta}_r \quad (24)$$

$$F_\psi = -nK_{t_l}i_l - nK_{t_r}i_r - f_m(\dot{\psi} - \dot{\theta}_l) - f_m(\dot{\psi} - \dot{\theta}_r) \quad (25)$$

โดย
$$i_l = \frac{V_l}{R_m} - \frac{K_b}{R_m}(\dot{\psi} - \dot{\theta}_l), i_r = \frac{V_r}{R_m} - \frac{K_b}{R_m}(\dot{\psi} - \dot{\theta}_r) \quad (26)$$

แทนค่าสมการ (26) ใน (21), (22), (41), (42), (43) จะได้สามสมการของแรงในระบบ พิกัดในเทอมของสัญญาณป้อนเข้า (V_l, V_r)

$$F_\theta = \frac{1}{2} \frac{nK_t}{R_m} (V_l + V_r) - \left(nK_t \frac{K_b}{R_m} + f_m + f_w \right) \dot{\theta} + nK_t \frac{K_b}{R_m} \dot{\psi} \quad (27)$$

$$F_\psi = -\frac{nK}{R_{m_l}} (V_l + V_r) + 2 \left(nK_t \frac{K_{b_l}}{R_{m_l}} + f_m \right) \dot{\theta} - 2 \left(nK_t \frac{K_{b_l}}{R_{m_l}} + f_m \right) \dot{\psi} \quad (28)$$

$$F_\phi = n \frac{R}{W} \frac{K_t}{R_m} (V_r - V_l) - \left(n \frac{K_t K_b}{R_m} + f_w \right) \dot{\phi} \quad (29)$$

แทนค่า (27), (28) และ (29) ในสมการ (18), (19), (20) และแทนสมการ (1) เพื่อถูกจัดรูปให้อยู่ในระบบพิกัด (θ, ψ, ϕ) จะได้สมการพลศาสตร์สามสมการ

$$\begin{aligned} & \left((2m_w + m_b)R^2 + 2J_{wy} + 2J_0 \right) \ddot{\theta} + (m_b LR \cos \psi - 2J_0) \ddot{\psi} \\ & - m_b LR \dot{\psi}^2 \sin \psi - \left[2m_w R^2 \dot{\theta} + m_b R^2 \dot{\theta} + mLR \dot{\theta} \sin \psi \right] \dot{\phi}^2 \\ & = \frac{1}{2} \frac{nK_t}{R_m} (V_l + V_r) - \left(nK_t \frac{K_b}{R_m} + f_m + f_w \right) \dot{\theta} + nK_t \frac{K_b}{R_m} \dot{\psi} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned}
& (m_b L^2 + J_\psi + 2J_0) \ddot{\psi} + (m_b LR \cos \psi - 2J_0) \ddot{\theta} - m_b g L \sin \psi \\
& - (m_b L^2 \sin \psi + m_b LR \theta) \dot{\phi}^2 \cos \psi \\
& = -\frac{nK}{R_{m-l}} (V_l + V_r) + 2 \left(nK_t \frac{K_{b-l}}{R_{m-l}} + f_m \right) \dot{\theta} - 2 \left(nK_t \frac{K_{b-l}}{R_{m-l}} + f_m \right) \dot{\psi}
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{2} m_w W^2 + \frac{1}{2} (J_{bz} + 2J_{wz}) + \frac{W^2}{2R^2} (J_0 + J_{wy}) + \right. \\
& \left. (2m_w + m_b) R^2 \theta^2 + 2m_b LR \theta \sin \psi + m_b L^2 \sin^2 \psi \right) \ddot{\phi} \\
& + 2 \left((2m_w + m_b) R^2 \theta \dot{\theta} + m_b L^2 \dot{\psi} \sin \psi \cos \psi + m_b LR (\dot{\theta} \sin \psi + \theta \dot{\psi} \cos \psi) \right) \dot{\phi} \\
& = n \frac{R}{W} \frac{K_t}{R_m} (V_r - V_l) - \left(n \frac{K_t K_b}{R_m} + f_w \right) \dot{\phi}
\end{aligned} \tag{32}$$

สมการ (30), (31) และ (32) นั้นเป็นระบบไม่เชิงเส้นที่มีความแม่นยำแต่มีความซับซ้อน การออกแบบระบบควบคุมในงานวิจัยนี้ยังคงอยู่ภายใต้ทฤษฎีเชิงเส้น ดังนั้นจึงประมาณระบบดังกล่าวเป็นเชิงเส้น คือ กำหนดให้ค่า ψ มีค่าน้อยๆ จึงสามารถประมาณค่าทอมที่ไม่เป็นเชิงเส้น เช่น $\sin \psi = \psi$, $\cos \psi = 1$ และ $\psi^2 = 0$ จะได้สามสมการพลศาสตร์เชิงเส้นสำหรับการออกแบบระบบควบคุมเชิงเส้นคือสมการ

$$\begin{aligned}
& ((2m_w + m_b) R^2 + 2J_{wy} + 2J_0) \ddot{\theta} + (m_b LR - 2J_0) \ddot{\psi} \\
& + \left(nK_t \frac{K_b}{R_m} + f_m + f_w \right) \dot{\theta} - nK_t \frac{K_b}{R_m} \dot{\psi} = \frac{1}{2} \frac{nK_t}{R_m} (V_l + V_r)
\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
& (m_b L^2 + J_\psi + 2J_0) \ddot{\psi} + (m_b LR \cos \psi - 2J_0) \ddot{\theta} - m_b g L \sin \psi \\
& - 2 \left(nK_t \frac{K_b}{R_m} + f_m \right) \dot{\theta} + 2 \left(nK_t \frac{K_b}{R_m} + f_m \right) \dot{\psi} = -\frac{nK}{R_m} (V_l + V_r)
\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{2} m_w W^2 + \frac{1}{2} (J_{bz} + 2J_{wz}) + \frac{W^2}{2R^2} (J_0 + J_{wy}) \right) \ddot{\phi} \\
& + \left(n \frac{K_t K_b}{R_m} + f_w \right) \dot{\phi} = n \frac{R}{W} \frac{K_t}{R_m} (V_r - V_l)
\end{aligned} \tag{35}$$

สมการ(33), (34) และ (35) จัดรูปได้คือ

$$E \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + F \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \theta \\ \psi \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} V_l \\ V_r \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\text{โดย } E = \begin{bmatrix} (2m_w + m_b)R^2 + 2J_{wy} + 2J_0 & m_b LR - 2J_0 \\ m_b LR - 2J_0 & m_b L^2 + J_{by} + 2J_0 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} nK_t \frac{K_b}{R_m} + f_m + f_w & -nK_t \frac{K_b}{R_m} \\ 2 \left(nK_t \frac{K_b}{R_m} + f_m \right) & 2 \left(nK_t \frac{K_b}{R_m} + f_m \right) \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -m_b gL \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{nK_t}{R_m} & \frac{1}{2} \frac{nK_t}{R_m} \\ -\frac{nK}{R_m} & -\frac{nK}{R_m} \end{bmatrix}$$

$$\text{และ } K\ddot{\phi} + I\dot{\phi} = J(V_r - V_l)$$

$$\text{โดย } K = \frac{1}{2} m_w W^2 + \frac{1}{2} (J_{bz} + 2J_{wz}) + \frac{W^2}{2R^2} (J_0 + J_{wy})$$

$$I = n \frac{K_t K_b}{R_m} + f_w$$

$$J = n \frac{R}{W} \frac{K_t}{R_m}$$

จากสมการ (36) จะได้สมการ

$$E(1,1)\ddot{\theta} + E(1,2)\ddot{\psi} + F(1,1)\dot{\theta} + F(1,2)\dot{\psi} = H(1,1)V_l + H(1,2)V_r \quad (37)$$

$$\text{และ } E(2,1)\ddot{\theta} + E(2,2)\ddot{\psi} + F(2,1)\dot{\theta} + F(2,2)\dot{\psi} + G(2,2)\psi = H(2,1)V_l + H(2,2)V_r \quad (38)$$

สามารถแก้สมการหาค่า $\ddot{\theta}$ ได้จาก (37) $\times E(2,2)$ - (38) $\times E(1,2)$

สามารถแก้สมการหา $\ddot{\psi}$ ได้จาก (38) $\times E(1,1)$ - (37) $\times E(2,1)$

$$\text{กำหนดให้ } \alpha = \frac{nK_t}{R_m}, \quad \beta = \frac{nK_t K_b}{R_m} + f_m$$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปปริภูมิสถานะได้คือ

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} u \quad (39)$$

$$\text{เมื่อ } x = [\theta, \psi, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \phi, \dot{\phi}]^T \quad \text{และ } u = [V_l, V_r]^T$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & A_1(3,2) & A_1(3,3) & A_1(3,4) \\ 0 & A_1(4,2) & A_1(4,3) & A_1(4,4) \end{bmatrix}$$

$$A_1(3,2) = -m_b g L E(1,2) / \det E$$

$$A_1(4,2) = m_b g L E(1,1) / \det E$$

$$A_1(3,3) = -[(\beta + f_w) E(2,2) + 2\beta E(1,2)] / \det E$$

$$A_1(3,4) = \beta (E(2,2) + 2E(1,2)) / \det E$$

$$A_1(4,3) = [(\beta + f_w) E(1,2) + 2\beta E(1,1)] / \det E$$

$$A_1(4,4) = -\beta (E(1,2) + 2E(1,1)) / \det E$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ B_1(3) & B_1(3) \\ B_1(4) & B_1(4) \end{bmatrix}$$

$$B_1(3) = \alpha (E(2,2) / 2 + E(1,2)) / \det E$$

$$B_1(4) = -\alpha (E(1,2) / 2 + E(1,1)) / \det E$$

$$\det E = E(1,1) E(2,2) - E(1,2)^2$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{I}{K} \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{J}{K} & \frac{J}{K} \end{bmatrix}$$

โดยเอาที่พุดระบบคือ

$$y = Cx \quad (40)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. แบบจำลองหุ่นยนต์สองล้อแบบค่าพารามิเตอร์ของมอเตอร์ซ้ายและขวาไม่เท่ากัน

โดยพิจารณาให้แรงที่กระทำกับล้อและแรงที่ทำให้เกิดการไถ้มเอียงคือ แรงบิดของมอเตอร์ กระแสตรง แรงเสียดทานระหว่างมอเตอร์กับล้อ และแรงเสียดทานระหว่างล้อกับพื้น ซึ่งสามารถเขียนได้ดังสมการ

$$F_l = nK_{t_l}i_l + f_m(\dot{\psi} - \dot{\theta}_l) - f_w\dot{\theta}_l \quad (41)$$

$$F_r = nK_{t_r}i_r + f_m(\dot{\psi} - \dot{\theta}_r) - f_w\dot{\theta}_r \quad (42)$$

$$F_\psi = -nK_{t_l}i_l - nK_{t_r}i_r - f_m(\dot{\psi} - \dot{\theta}_l) - f_m(\dot{\psi} - \dot{\theta}_r) \quad (43)$$

โดย
$$i_l = \frac{V_l}{R_{m_l}} - \frac{K_{b_l}}{R_{m_l}}(\dot{\psi} - \dot{\theta}_l), i_r = \frac{V_r}{R_{m_r}} - \frac{K_{b_r}}{R_{m_r}}(\dot{\psi} - \dot{\theta}_r) \quad (44)$$

แทนค่าสมการ (44) ใน (21), (22), (41), (42) และ (43) จะได้สามสมการของแรงในสามระบบพิกัดในเทอมของสัญญาณป้อนเข้า (V_l, V_r)

$$F_\theta = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} nK_{t_l} \left(\frac{V_l}{R_{m_l}} + \frac{K_{b_l}}{R_{m_l}}(\dot{\psi} - \dot{\theta}_l) \right) + f_m(\dot{\psi} - \dot{\theta}_l) - f_w\dot{\theta}_l \\ + nK_{t_r} \left(\frac{V_r}{R_{m_r}} + \frac{K_{b_r}}{R_{m_r}}(\dot{\psi} - \dot{\theta}_r) \right) + f_m(\dot{\psi} - \dot{\theta}_r) - f_w\dot{\theta}_r \end{pmatrix} \quad (45)$$

$$F_\psi = -nK_{t_l} \left(\frac{V_l}{R_{m_l}} + \frac{K_{b_l}}{R_{m_l}}(\dot{\psi} - \dot{\theta}_l) \right) - nK_{t_r} \left(\frac{V_r}{R_{m_r}} + \frac{K_{b_r}}{R_{m_r}}(\dot{\psi} - \dot{\theta}_r) \right) - f_m(\dot{\psi} - \dot{\theta}_l) - f_m(\dot{\psi} - \dot{\theta}_r) \quad (46)$$

$$F_\phi = \frac{R}{W} \begin{pmatrix} nK_{t-r} \left(\frac{V_r}{R_{m-r}} + \frac{K_{b-r}}{R_{m-r}} (\dot{\psi} - \dot{\theta}_r) \right) + f_m (\dot{\psi} - \dot{\theta}_r) - f_w \dot{\theta}_r \\ -nK_{t-l} \left(\frac{V_l}{R_{m-l}} + \frac{K_{b-l}}{R_{m-l}} (\dot{\psi} - \dot{\theta}_l) \right) - f_m (\dot{\psi} - \dot{\theta}_l) + f_w \dot{\theta}_l \end{pmatrix} \quad (47)$$

แรงที่กระทำต่อระบบ (45), (46) และ (47) นั้นสำหรับแทนค่าในสมการ (18), (19), (20) และแทนสมการ (1) เพื่อถูกจัดรูปให้อยู่ในระบบพิกัด (θ, ψ, ϕ) จะได้สมการพลศาสตร์ตามสมการ

$$\begin{aligned} & \left[(2m_w + m_b)R^2 + 2J_{wy} + 2J_0 \right] \ddot{\theta} + \frac{1}{2} \left[n \left(\frac{K_t}{R_m} \right)_l K_{b-l} + n \left(\frac{K_t}{R_m} \right)_r K_{b-r} + 2f_m + 2f_w \right] \dot{\theta} \\ & + (m_b LR \cos \psi - 2J_0) \ddot{\psi} - \frac{1}{2} \left[n \left(\frac{K_t}{R_m} \right)_l K_{b-l} + n \left(\frac{K_t}{R_m} \right)_r K_{b-r} + 2f_m \right] \dot{\psi} \\ & - m_b LR \dot{\psi}^2 \sin \psi - \left[2m_w R^2 \dot{\theta} + m_b R^2 \dot{\theta} + m LR \theta \sin \psi \right] \dot{\phi}^2 \\ & - \frac{nW}{4R} \left[\left(\frac{K_t}{R_m} \right)_r K_{b-r} - \left(\frac{K_t}{R_m} \right)_l K_{b-l} \right] \dot{\phi} = \frac{1}{2} \left[n \left(\frac{K_t}{R_m} \right)_l V_l + n \left(\frac{K_t}{R_m} \right)_r V_r \right] \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} & (m_b LR \cos \psi - 2J_0) \ddot{\theta} - \left[\left(\frac{K_t}{R_m} \right)_l K_{b-l} + \left(\frac{K_t}{R_m} \right)_r K_{b-r} + 2f_m \right] \dot{\theta} \\ & (m_b L^2 + J_{by} + 2J_0) \ddot{\psi} + \left[\left(\frac{K_t}{R_m} \right)_l K_{b-l} + \left(\frac{K_t}{R_m} \right)_r K_{b-r} + 2f_m \right] \dot{\psi} \\ & - (m_b L^2 \sin \psi + m_b LR \theta) \dot{\phi}^2 \cos \psi - m_b g L \sin \psi \\ & - \frac{W}{2R} \left[\left(\frac{K_t}{R_m} \right)_r K_{b-r} - \left(\frac{K_t}{R_m} \right)_l K_{b-l} \right] \dot{\phi} = -n \left[\left(\frac{K_t}{R_m} \right)_l V_l + n \left(\frac{K_t}{R_m} \right)_r V_r \right] \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{nR}{W} \left[\left(\frac{K_t}{R_m} \right)_r K_{b-r} - \left(\frac{K_t}{R_m} \right)_l K_{b-l} \right] \dot{\psi} - \frac{nR}{W} \left[\left(\frac{K_t}{R_m} \right)_l K_{b-l} - \left(\frac{K_t}{R_m} \right)_r K_{b-r} \right] \dot{\theta} \\ & \left\{ \begin{aligned} & + \frac{W}{2R} \left[n \left(\frac{K_t}{R_m} \right)_l K_{b-l} + n \left(\frac{K_t}{R_m} \right)_r K_{b-r} - f_m - f_w \right] \\ & + 2 \left[(2m_w + m_b) R^2 \dot{\theta} + m_b L^2 \dot{\psi} \sin \psi \cos \psi + m_b LR (\dot{\theta} \sin \psi + \theta \dot{\psi} \cos \psi) \right] \end{aligned} \right\} \dot{\phi} \quad (50) \\ & + \left(\frac{1}{2} m_w W^2 + \frac{1}{2} (J_{bz} + 2J_{wz}) + \frac{W^2}{2R^2} (J_0 + J_{wy}) + (2m_w + m_b) R^2 \dot{\theta}^2 + 2m_b LR \theta \sin \psi + m_b L^2 \sin^2 \psi \right) \ddot{\phi} = \frac{R}{W} n \left[\left(\frac{K_t}{R_m} \right)_r V_r - \left(\frac{K_t}{R_m} \right)_l V_l \right] \end{aligned}$$

สมการ (48), (49) และ (50) นั้นเป็นระบบไม่เชิงเส้นที่มีความแม่นยำแต่มีความซับซ้อน การออกแบบระบบควบคุมในงานวิจัยนี้ยังคงอยู่ภายใต้ทฤษฎีเชิงเส้น ดังนั้นจึงประมาณระบบดังกล่าวเป็นเชิงเส้น คือ กำหนดให้ค่า ψ มีค่าน้อยๆ จึงสามารถประมาณค่าทอมที่ไม่เป็นเชิงเส้น เช่น $\sin \psi = \psi$, $\cos \psi = 1$ และ $\psi^2 = 0$ จะได้สามสมการพลศาสตร์เชิงเส้นสำหรับการออกแบบระบบควบคุมเชิงเส้นคือสมการ

$$\begin{aligned} & \left((2m_w + m_b)R^2 + 2J_{wy} + 2J_0 \right) \ddot{\theta} + \frac{1}{2} \left[n \left(\frac{K_t}{R_m} \right)_l K_{b_{-l}} + n \left(\frac{K_t}{R_m} \right)_r K_{b_{-r}} + 2f_m + 2f_w \right] \dot{\theta} \\ & + (m_b LR - 2J_0) \ddot{\psi} - \frac{1}{2} \left[n \left(\frac{K_t}{R_m} \right)_l K_{b_{-l}} + n \left(\frac{K_t}{R_m} \right)_r K_{b_{-r}} + 2f_m \right] \dot{\psi} \\ & + \frac{nW}{4R} \left[\left(\frac{K_t}{R_m} \right)_r K_{b_{-r}} - \left(\frac{K_t}{R_m} \right)_l K_{b_{-l}} \right] \dot{\phi} = \frac{1}{2} \left(n \left(\frac{K_t}{R_m} \right)_l V_l + n \left(\frac{K_t}{R_m} \right)_r V_r \right) \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} & (m_b LR - 2J_0) \ddot{\theta} - \left[\left(\frac{K_t}{R_m} \right)_l K_{b_{-l}} + \left(\frac{K_t}{R_m} \right)_r K_{b_{-r}} + 2f_m \right] \dot{\theta} \\ & (m_b L^2 + J_{by} + 2J_0) \ddot{\psi} + \left[\left(\frac{K_t}{R_m} \right)_l K_{b_{-l}} + \left(\frac{K_t}{R_m} \right)_r K_{b_{-r}} + 2f_m \right] \dot{\psi} \\ & - \frac{W}{2R} \left[\left(\frac{K_t}{R_m} \right)_r K_{b_{-r}} - \left(\frac{K_t}{R_m} \right)_l K_{b_{-l}} \right] \dot{\phi} - m_b g L \psi = -n \left(\left(\frac{K_t}{R_m} \right)_l V_l + n \left(\frac{K_t}{R_m} \right)_r V_r \right) \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{nR}{W} \left[\left(\frac{K_t}{R_m} \right)_r K_{b_{-r}} - \left(\frac{K_t}{R_m} \right)_l K_{b_{-l}} \right] \dot{\psi} - \frac{nR}{W} \left[\left(\frac{K_t}{R_m} \right)_l K_{b_{-l}} - \left(\frac{K_t}{R_m} \right)_r K_{b_{-r}} \right] \dot{\theta} \\ & + \frac{W}{2R} \left[n \left(\frac{K_t}{R_m} \right)_l K_{b_{-l}} + n \left(\frac{K_t}{R_m} \right)_r K_{b_{-r}} - f_m - f_w \right] \dot{\phi} \\ & + \left(\frac{1}{2} m_w W^2 + \frac{1}{2} (J_{bz} + 2J_{wz}) + \frac{W^2}{2R^2} (J_0 + J_{wy}) \right) \ddot{\phi} = \frac{R}{W} n \left(\left(\frac{K_t}{R_m} \right)_r V_r - \left(\frac{K_t}{R_m} \right)_l V_l \right) \end{aligned} \quad (53)$$

สมการ (51), (52) และ (53) จัดรูปได้คือ

$$z_1 \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + z_2 \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + z_3 \begin{bmatrix} \theta \\ \psi \\ \phi \end{bmatrix} = z_4 \begin{bmatrix} V_l \\ V_r \end{bmatrix} \quad (54)$$

$$\begin{aligned}
\text{โดย } z_1 &= \begin{bmatrix} (2m_w + m_b)R^2 + 2J_{wy} + 2J_0 & m_bLR - 2J_0 & 0 \\ m_bLR - 2J_0 & m_bL^2 + J_{by} + 2J_0 & 0 \\ 0 & 0 & z_1(3,3) \end{bmatrix} \\
z_2 &= \begin{bmatrix} z_2(1,1) & z_2(1,2) & z_2(1,3) \\ z_2(2,1) & z_2(2,2) & z_2(2,3) \\ z_2(3,1) & z_2(3,2) & z_2(3,3) \end{bmatrix} \\
z_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_bgL & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
z_4 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}n\left(\frac{K_t}{R_m}\right)_l & \frac{1}{2}n\left(\frac{K_t}{R_m}\right)_r \\ -n\left(\frac{K_t}{R_m}\right)_l & -n\left(\frac{K_t}{R_m}\right)_r \\ -\frac{R}{W}n\left(\frac{K_t}{R_m}\right)_l & \frac{R}{W}n\left(\frac{K_t}{R_m}\right)_r \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$z_1(3,3) = \frac{1}{2}m_wW^2 + \frac{1}{2}(J_{bz} + J_{wz}) + \frac{W^2}{2R^2}(J_0 + J_{wy})$$

$$z_2(1,1) = \frac{1}{2} \left[n\left(\frac{K_t}{R_m}\right)_l K_{b_l} + n\left(\frac{K_t}{R_m}\right)_r K_{b_r} + 2f_m + 2f_w \right]$$

$$z_2(1,2) = -\frac{1}{2} \left[n\left(\frac{K_t}{R_m}\right)_l K_{b_l} + n\left(\frac{K_t}{R_m}\right)_r K_{b_r} + 2f_m \right]$$

$$z_2(1,3) = -\frac{nW}{4R} \left[\left(\frac{K_t}{R_m}\right)_r K_{b_r} - \left(\frac{K_t}{R_m}\right)_l K_{b_l} \right]$$

$$z_2(2,1) = - \left[\left(\frac{K_t}{R_m}\right)_l K_{b_l} + \left(\frac{K_t}{R_m}\right)_r K_{b_r} + 2f_m \right]$$

$$z_2(2,2) = \left(\frac{K_t}{R_m}\right)_l K_{b_l} + \left(\frac{K_t}{R_m}\right)_r K_{b_r} + 2f_m$$

$$z_2(2,3) = -\frac{W}{2R} \left[\left(\frac{K_t}{R_m}\right)_r K_{b_r} - \left(\frac{K_t}{R_m}\right)_l K_{b_l} \right]$$

$$z_2(3,1) = -\frac{nR}{W} \left[\left(\frac{K_t}{R_m}\right)_l K_{b_l} - \left(\frac{K_t}{R_m}\right)_r K_{b_r} \right]$$

$$z_2(3,2) = -\frac{nR}{W} \left[\left(\frac{K_t}{R_m}\right)_r K_{b_r} - \left(\frac{K_t}{R_m}\right)_l K_{b_l} \right]$$

$$z_2(3,3) = \frac{W}{2R} \left[n \left(\frac{K_t}{R_m} \right)_l K_{b-l} + n \left(\frac{K_t}{R_m} \right)_r K_{b-r} - f_m - f_w \right]$$

จากสมการ (54) จะได้สมการ

$$z_1(1,1)\ddot{\theta} + z_1(1,2)\ddot{\psi} + z_2(1,1)\dot{\theta} + z_2(1,2)\dot{\psi} + z_2(1,3)\dot{\phi} = z_4(1,1)V_l + z_4(1,2)V_r \quad (55)$$

$$\begin{aligned} z_1(2,1)\ddot{\theta} + z_1(2,2)\ddot{\psi} + z_2(2,1)\dot{\theta} + z_2(2,2)\dot{\psi} + z_2(2,3)\dot{\phi} - z_3(2,2) \\ = z_4(2,1)V_l + z_4(2,2)V_r \end{aligned} \quad (56)$$

สามารถแก้สมการหา $\ddot{\theta}$ ได้จาก (55) $\times z_1(2,2)$ - (56) $\times z_1(1,2)$

สามารถแก้สมการหา $\ddot{\psi}$ ได้จาก (56) $\times z_1(1,1)$ - (55) $\times z_1(2,1)$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปปริภูมิสถานะได้คือ

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (57)$$

เมื่อ $x = [\theta, \psi, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \phi, \dot{\phi}]^T$ และ $u = [V_l, V_r]^T$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & A(3,2) & A(3,3) & A(3,4) & 0 & 0 \\ 0 & A(4,2) & A(4,3) & A(4,4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-z_2(3,1)}{z_1(3,3)} & \frac{-z_2(3,2)}{z_1(3,3)} & 0 & \frac{-z_2(3,3)}{z_1(3,3)} \end{bmatrix}$$

$$A(3,2) = \frac{z_3(2,2)z_1(1,2)}{z_1(1,1)z_1(2,2) - z_1(1,2)z_1(2,1)}$$

$$A(3,3) = -\frac{z_2(1,1)z_1(2,2) - z_2(2,1)z_1(1,2)}{z_1(1,1)z_1(2,2) - z_1(1,2)z_1(2,1)}$$

$$A(3,4) = -\frac{z_2(1,2)z_1(2,2) - z_2(2,2)z_1(1,2)}{z_1(1,1)z_1(2,2) - z_1(1,2)z_1(2,1)}$$

$$A(3,6) = -\frac{z_2(1,3)z_1(2,2) - z_2(2,3)z_1(1,2)}{z_1(1,1)z_1(2,2) - z_1(1,2)z_1(2,1)}$$

$$A(4,2) = -\frac{z_3(2,2)z_1(1,1)}{z_1(1,1)z_1(2,2) - z_1(1,2)z_1(2,1)}$$

$$A(4,3) = -\frac{z_2(2,1)z_1(1,1) - z_2(1,1)z_1(2,1)}{z_1(1,1)z_1(2,2) - z_1(1,2)z_1(2,1)}$$

$$A(4,4) = -\frac{z_2(2,2)z_1(1,1) - z_2(1,2)z_1(2,1)}{z_1(1,1)z_1(2,2) - z_1(1,2)z_1(2,1)}$$

$$A(4,6) = -\frac{z_2(2,3)z_1(1,1) - z_2(1,3)z_1(2,1)}{z_1(1,1)z_1(2,2) - z_1(1,2)z_1(2,1)}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ B(3,1) & B(3,2) \\ B(4,1) & B(4,2) \\ 0 & 0 \\ \frac{z_4(3,1)}{z_1(3,3)} & \frac{z_4(3,2)}{z_1(3,3)} \end{bmatrix}$$

$$B(3,1) = \frac{z_4(1,1)z_1(2,2) - z_4(2,1)z_1(1,2)}{z_1(1,1)z_1(2,2) - z_1(1,2)z_1(2,1)}$$

$$B(3,2) = \frac{z_4(1,2)z_1(2,2) - z_4(2,2)z_1(1,2)}{z_1(1,1)z_1(2,2) - z_1(1,2)z_1(2,1)}$$

$$B(4,1) = \frac{z_4(2,1)z_1(1,1) - z_4(1,1)z_1(2,1)}{z_1(1,1)z_1(2,2) - z_1(1,2)z_1(2,1)}$$

$$B(4,2) = \frac{z_4(2,2)z_1(1,1) - z_4(1,2)z_1(2,1)}{z_1(1,1)z_1(2,2) - z_1(1,2)z_1(2,1)}$$

การออกแบบระบบควบคุม

บทนี้นำเสนอการออกแบบตัวควบคุมซึ่งเป็นหัวใจของงานวิจัยนี้ ระบบการควบคุมที่ใช้คือการออกแบบระบบควบคุมที่เหมาะสมที่สุด (optimal control) (วิบูลย์, 2548; วโรดม, 2551; Lewis and Syrmos, 1995; Ogata, 1997) และในบทนี้ประกอบด้วย 5 ส่วน คือ คุณสมบัติความควบคุมได้ และสังเกตได้ การออกแบบตัวควบคุมด้วยตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุด การออกแบบตัวควบคุมด้วยตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุดที่มีตัวอินทิกรัล การออกแบบตัวควบคุมด้วยตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุดที่มีตัวอินทิกรัลและตัวสังเกตแบบอันดับเต็ม การออกแบบตัวควบคุมด้วยตัวคุมค่ากำลังสอง

น้อยที่สุดที่มีตัวอินทิกรัลและสังเกตแบบลดอันดับ และการวัดความเอียงด้วยตัวสังเกตแบบลดอันดับ

1. คุณสมบัติความควบคุมได้และสังเกตได้ (Controllability and Observability)

สำหรับการออกแบบระบบควบคุมในงานวิจัยนี้จะสอดคล้องและเป็นไปตามทฤษฎีเมื่อระบบที่ต้องการควบคุมนั้นมีคุณสมบัติความสามารถควบคุมได้และสังเกตได้

1.1 คุณสมบัติความควบคุมได้ (Controllability)

ถ้าระบบมีคุณสมบัติความควบคุมได้ (controllable) หมายความว่า จะมีสัญญาณควบคุมแบบต่อเนื่องที่สามารถควบคุมระบบจากตำแหน่งเริ่มต้นไปยังตำแหน่งใดๆ ที่ต้องการได้ในช่วงเวลาหนึ่ง และสามารถหาตัวควบคุมที่เป็นหนึ่งเดียวตามสมการกฎการควบคุมที่ทำให้สมการลักษณะเฉพาะแบบพหุนาม $\alpha_c(s)$ กำลัง n ใดๆ $\alpha_c(s) = \det[sI - A - BK]$

$$\text{เมื่อ} \quad \text{rank} [B : AB : \dots : A^{n-1}B] = n \quad (58)$$

การพิสูจน์คุณสมบัติความควบคุมได้แสดงอยู่ในภาคผนวก ค.

$$\text{rank} [B : AB : A^2B : A^3B : A^4B : A^5B] = 6$$

$$\text{rank} [\hat{B} : \hat{A}\hat{B} : \hat{A}^2\hat{B} : \hat{A}^3\hat{B} : \hat{A}^4\hat{B} : \hat{A}^5\hat{B}] = 9$$

ซึ่งสามารถพิจารณาได้ด้วยโปรแกรม MATLAB ด้วยคำสั่ง $\text{rank}(\text{ctrb}(A,B))$

1.2 คุณสมบัติความสังเกตได้ (Observability)

ถ้าระบบ (A, B) มีคุณสมบัติความควบคุมได้ (Observability) หมายความว่า ที่เวลาใดๆ และระบบอยู่ที่ตำแหน่งใดๆ สามารถที่บอกค่าสเตรตของระบบจากการพิจารณาสัญญาณป้อนออกของระบบได้ในช่วงเวลาหนึ่ง

$$\text{เมื่อ} \quad \text{rank} [C^T : A^T C^T : \dots : A^{T(n-1)} C^T] = n \quad (59)$$

การพิสูจน์คุณสมบัติความสังเกตได้แสดงอยู่ในภาคผนวก ค.

$$\text{rank}[C^T : A^T C^T : A^{2T} C^T : A^{3T} C^T : A^{4T} C^T : A^{5T} C^T] = 6$$

ซึ่งสามารถพิจารณาได้ด้วยโปรแกรม MATLAB ด้วยคำสั่ง $\text{rank}(\text{obsv}(A,C))$

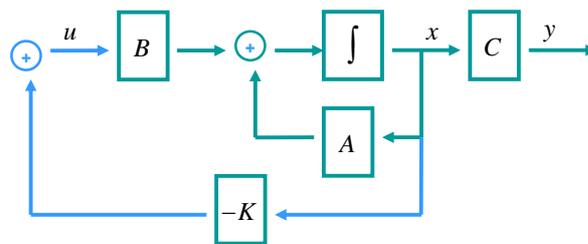
2. ตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุด (Linear Quadratic Regulator, LQR)

จุดเด่นของการออกแบบด้วยตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุด (linear quadratic regulator) ที่เหนือกว่าวิธีการวางโพลก็คือมีแบบแผนที่เป็นระบบมากกว่าในการคำนวณหาค่าอัตราขยาย โดยการออกแบบสัญญาณควบคุมซึ่งทำให้ค่าดัชนีสมรรถนะ (performance index, J) มีค่าน้อยที่สุด (minimization)

กำหนดให้ดัชนีสมรรถนะ (performance index) คือ

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (60)$$

Q เป็นเมตริกซ์สมมาตรที่เป็นบวกแน่นอนซึ่งเป็นเมตริกซ์ถ่วงน้ำหนักให้ความสำคัญในการควบคุมของสเตตแต่ละตัว และ R เป็นเมตริกซ์สมมาตรที่เป็นกึ่งบวกแน่นอนทำหน้าที่ถ่วงน้ำหนักสำหรับสัญญาณควบคุม สัญญาณควบคุมนี้ถูกกำหนดให้ไม่มีข้อจำกัด (unconstraint) บล็อกไดอะแกรมแสดงอยู่ในภาพที่ 16



ภาพที่ 16 บล็อกไดอะแกรมในการควบคุมป้อนกลับแบบรักษาเสถียรภาพ

จากภาพที่ 16 จะได้

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (61)$$

$$y = Cx$$

$$u(t) = -Kx(t) \quad (62)$$

เมื่อ $x = [\theta \ \psi \ \dot{\theta} \ \dot{\psi} \ \phi \ \dot{\phi}]^T$, $u = [V_l \ V_r]^T$

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์ A, B คือพลานต์จากสมการ (39) แทนค่า u (62) ลงในสมการ (61) จะได้

$$\dot{x} = Ax - BKx = (A - BK)x \quad (63)$$

กำหนดให้เมตริกซ์ $A - BK$ มีเสถียรภาพหรือมีค่าเจาะจงเป็นค่าจริงเครื่องหมายลบทั้งหมด เมื่อแทนค่า $u(t)$ ในสมการดรชนี้สมรรถนะ (60) จะได้

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} (x^T Qx + x^T K^T RKx) dt \\ &= \int_0^{\infty} x^T (Q + K^T RK) x dt \end{aligned} \quad (64)$$

กำหนดให้
$$x^T (Q + K^T RK) x = -\frac{d}{dt} (x^T P x)$$

$$x^T (Q + K^T RK) x = -\dot{x}^T P x - x^T P \dot{x} = -x^T [(A - BK)^T P + P(A - BK)] x$$

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -(Q + K^T RK) \quad (65)$$

ในภาคผนวก ค. แสดงให้เห็นว่าเมื่อ $A - BK$ เป็นเมตริกซ์ที่มีเสถียรภาพ จะมี P เป็นเมตริกซ์สมมาตรที่เป็นบวกแน่นอนสอดคล้องกับสมการ (65) และในกรณีที่ระบบมีเสถียรภาพแล้วสามารถหาค่า P ที่เป็นเมตริกซ์สมมาตรที่เป็นบวกแน่นอน ได้เพียงค่าเดียว ดังนั้นค่า P อื่นๆที่ได้จากการแก้สมการ (65) จะไม่เป็นเมตริกซ์สมมาตรที่เป็นบวกแน่นอน

จากดรชนี้สมรรถนะจะได้

$$J = \int_0^{\infty} x^T (Q + K^T RK) x dt = -x^T P x = -x^T(\infty) P x(\infty) + x^T(0) P x(0) \quad (66)$$

และเนื่องจากค่าเจาะจงของ $A - BK$ ถูกกำหนดให้เป็นลบทั้งหมด หรือ $x(\infty) \rightarrow 0$

ดังนั้นจะได้
$$J = x^T(0) P x(0)$$

แสดงว่าบรรพนี้สมรรถนะเป็นฟังก์ชันของค่าเริ่มต้น $x(0)$ และเมตริกซ์ P

เพื่อหาคำตอบ กำหนดให้ $R = T^T T$

เมื่อ R เป็นเมตริกซ์สมมาตรที่เป็นบวกแน่นอน และ T ไม่เป็นเมตริกซ์หนึ่ง จากสมการ (65) สามารถเขียนได้เป็น

$$(A^T - K^T B^T)P + P(A - BK) + Q + K^T T^T T K = 0 \quad (67)$$

$$A^T P + PA + [TK - (T^T)^{-1} B^T P]^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P] - PBR^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (68)$$

โดยพยายามทำให้ค่า J ต่ำสุดโดยการปรับค่า K หรือต้องการค่าต่ำสุดของ

$$x^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P]^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P] x$$

ซึ่งเป็นพจน์ที่มีค่าเป็นกึ่งบวกแน่นอนจึงมีค่าต่ำสุดคือศูนย์ ซึ่งจะเป็นอย่างนั้นเมื่อ

$$TK = (T^T)^{-1} B^T P$$

ดังนั้น $K = T^{-1} (T^T)^{-1} B^T P = R^{-1} B^T P \quad (69)$

สมการ (69) เป็นสมการที่ให้ค่า K ที่เหมาะสมที่สุดสำหรับระบบดังกล่าว ดังนั้นเราสามารถคำนวณหาสัญญาณควบคุมที่เหมาะสมที่สุด คือ

$$u(t) = -Kx(t) = -R^{-1} B^T P x(t) \quad (70)$$

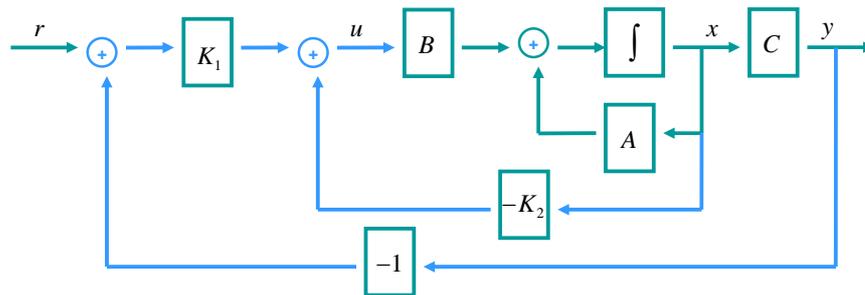
ซึ่งเมตริกซ์ P ในสมการ (70) ต้องสอดคล้องกับสมการ (65) หรือที่ลดรูปลงดังสมการ (71) เรียกว่า Reduced-matrix Riccati Equation คือ

$$A^T P + PA - PBR^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (71)$$

สรุปการออกแบบตัวควบคุมด้วยเทคนิคดังกล่าว คือ แก้คำตอบของสมการ Reduced-matrix Riccati Equation (71) เพื่อหาค่าเมตริกซ์ P เมื่อปรากฏค่า P ที่เป็นเมตริกซ์สมมาตรที่เป็น

บวกแน่นอนแสดงได้ว่า ระบบมีเสถียรภาพหรือเมตริกซ์ $A - BK$ มีเสถียรภาพ และแทนค่าเมตริกซ์ P ในสมการ (69) เพื่อคำนวณหาค่า K ที่เหมาะสมที่สุด

ส่วนถัดไปในงานวิจัยนี้เป็นปัญหาการตามรอยสัญญาณ (tracking) ในบางครั้งถูกเรียกว่า Servo Systems ซึ่งเป็นการขยายขอบเขตของปัญหาการรักษาเสถียรภาพออกไปเล็กน้อย รูปแบบการควบคุมแสดงดังภาพที่ 17



ภาพที่ 17 บล็อกไดอะแกรมในการควบคุมป้อนกลับแบบตามรอยสัญญาณ

จากภาพที่ 17
$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (72)$$

$$y = Cx$$

$$u = -K_2x + K_1(r - y) \quad (73)$$

เมื่อ $x = [\theta \ \psi \ \dot{\theta} \ \dot{\psi} \ \phi \ \dot{\phi}]^T, u = [V_l \ V_r]^T$

$$r = [\theta_{ref} \ \psi_{ref} \ \phi_{ref}]^T$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & k_{25} \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_{13} & k_{14} & 0 & k_{16} \\ 0 & 0 & k_{23} & k_{24} & 0 & k_{26} \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \end{bmatrix}$$

จากสมการ (72), (73)
$$\dot{x} = Ax + Bu = (A - BK)x + Bk_1r \quad (74)$$

ระบบมีเสถียรภาพเมื่อ โพลของระบบปิดอยู่ในบนฝั่งซ้ายของระนาบเชิงซ้อน ดังนั้นค่า $y(\infty)$ จะมีค่าเข้าสู่ค่าคงที่ r และ $u(\infty)$ มีค่าเข้าสู่ค่าศูนย์

$$\dot{x}(\infty) = (A - BK)x(\infty) + Bk_1r(\infty) \quad (75)$$

ที่ r เป็นฟังก์ชันขั้นบันได $r(\infty) = r(t) = r$ เป็นค่าคงที่เมื่อ $t > 0$ และพิจารณาสมการ (74) ลบด้วยสมการ (75) จะได้

$$\dot{x}(t) - \dot{x}(\infty) = (A - BK)[x(t) - x(\infty)]$$

กำหนดให้ $x_e(t) = [x(t) - x(\infty)]$

$$\dot{x}_e(t) = (A - BK)x_e(t)$$

หรือ
$$\dot{x}_e(t) = Ax_e(t) + Bu \quad (76)$$

และ
$$u = -Kx_e \quad (77)$$

การออกแบบด้วยตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุดสำหรับการตามรอยสัญญาณ คือ การออกแบบระบบ (76) และ (77) ให้มีเสถียรภาพหรือมีค่าลู่เข้า โดยการออกแบบอัตราขยาย K ให้สมการดรชนี้สมรรถนะที่มีลักษณะคล้ายกับสมการ (60) ให้มีค่าต่ำสุด โดยสมการดรชนี้สมรรถนะสำหรับระบบนี้คือ

$$J = \int_0^{\infty} (x_e^T Q x_e + x_e^T K^T R K x_e) dt \quad (78)$$

ทำการออกแบบโดย $Q = \text{diag}[0.1, 1, 0.1, 1, 0.1, 0.1]$

$$R = \text{diag}[1, 1]$$

จะได้ค่าอัตราขยายคือ

$$K = \begin{bmatrix} -0.2236 & -6.0222 & -0.6541 & -1.4885 & -0.2236 & -0.5249 \\ -0.2236 & -6.0222 & -0.6541 & -1.4885 & 0.2236 & 0.5249 \end{bmatrix}$$

3. ตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุดที่มีตัวอินทิกรัล (LQR with Integrator)

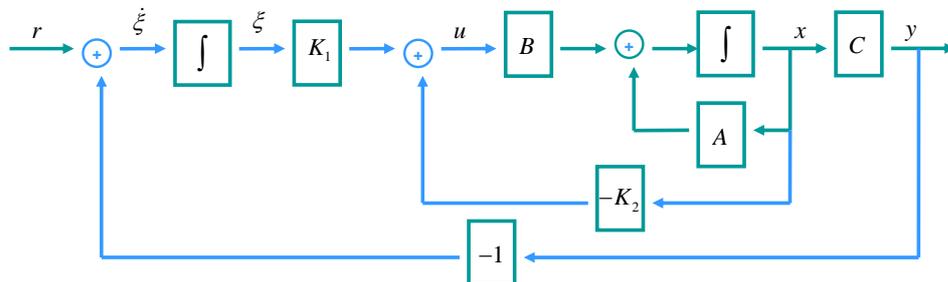
การออกแบบระบบที่พลานต์ไม่มีตัวอินทิกรัล (type 0 plant) มักจะใช้ตัวอินทิกรัลเพิ่มในวงรอบเปิดระหว่างค่าผิดพลาดและพลานต์ ในอีกด้านหนึ่งการเพิ่มตัวอินทิกรัล (integral control) สามารถทำให้ค่าผิดพลาดในสถานะอยู่ตัวต่อสัญญาณขั้นบันไดเป็นศูนย์ ในส่วนนี้ให้นำตัวควบคุมอินทิกรัลมาใช้ร่วมกับตัวป้อนกลับสเตตของหุ่นยนต์สองล้อเมื่อต้องการติดตามค่าอ้างอิง ดังแสดงในภาพที่ 18 จะได้

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (79)$$

$$y = Cx$$

$$u = -K_2x + K_1\xi$$

$$\dot{\xi} = r - y = r - Cx \quad (80)$$



ภาพที่ 18 บล็อกไดอะแกรมในการควบคุมป้อนกลับแบบตามรอยสัญญาณที่มีตัวอินทิกรัล

เมื่อ $x = [\theta \ \psi \ \dot{\theta} \ \dot{\psi} \ \phi \ \dot{\phi}]^T$, $u = [V_l \ V_r]^T$

$$r = [\theta_{ref} \ \psi_{ref} \ \phi_{ref}]^T$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} k_{17} & k_{18} & k_{19} \\ k_{27} & k_{28} & k_{29} \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \end{bmatrix}$$

กำหนดให้ (79) มีคุณสมบัติความควบคุมได้ ฟังก์ชันถ่ายโอนของพลานต์คือ

$$G_p(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

เพื่อหลีกเลี่ยงการหักล้างของอินทิกรัลด้วยค่าซีโรของพลาเน็ต พลาเน็ตดังกล่าวต้องไม่มีซีโรที่จุดกำเนิด และกำหนดให้ค่าอินพุตอ้างอิงเป็นฟังก์ชันบันไดเริ่มจาก $t=0$ ดังนั้นใน $t > 0$ ระบบนี้อธิบายได้ด้วยสมการ (79) และ (80) จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \quad (81)$$

เมื่อต้องการออกแบบระบบให้มีเสถียรภาพหรือ $x(\infty)$, $\xi(\infty)$ และ $u(t)$ ให้นำเข้าสู่ค่าคงที่ ดังนั้นที่สภาวะคงตัว $\dot{\xi} = 0$ และ $y(\infty) = r$ และจะได้สมการที่สภาวะคงตัวคือ

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(\infty) \\ \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\infty) \\ \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(\infty) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(\infty) \quad (82)$$

สำหรับฟังก์ชันบันไดแล้ว $r(\infty) = r(t) = r$ เป็นค่าคงที่ สำหรับ $t > 0$ โดยใช้สมการ (81) ลบด้วยสมการ (82) จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) - \dot{x}(\infty) \\ \dot{\xi}(t) - \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) - x(\infty) \\ \xi(t) - \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} [u(t) - u(\infty)]$$

กำหนดให้

$$x(t) - x(\infty) = x_e(t)$$

$$\xi(t) - \xi(\infty) = \xi_e(t)$$

$$u(t) - u(\infty) = u_e(t)$$

ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e(t) \\ \dot{\xi}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} [u_e(t)] \quad (83)$$

$$u_e(t) = -K_2 x_e(t) + K_1 \xi_e(t)$$

กำหนดให้

$$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix}$$

ดังนั้นสมการ (83) คือ

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u_e \quad (84)$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

และ
$$u_e = -\hat{K}\hat{x} \quad (85)$$

$$\hat{K} = [K_2 \ : \ -K_1] \quad (86)$$

จากสมการ (84) และ (85) นำไปออกแบบระบบตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุด ให้ระบบมีเสถียรภาพหรือเสถียรค่าคู่เข้า โดยการออกแบบอัตราขยาย K ให้สมการครรชนีสมรรถนะที่มีลักษณะคล้ายกับสมการ (78) ให้มีค่าต่ำสุด โดยสมการครรชนีสมรรถนะสำหรับระบบนี้คือ

$$J = \int_0^{\infty} (\hat{x}^T Q \hat{x} + \hat{x}^T \hat{K}^T R \hat{K} \hat{x}) dt$$

ทำการออกแบบโดย
$$Q = \text{diag} [0.1, 10, 0.1, 10, 0.1, 0.1, 10, 10, 10]$$

$$R = \text{diag} [1, 1]$$

จะได้ค่าอัตราขยายคือ

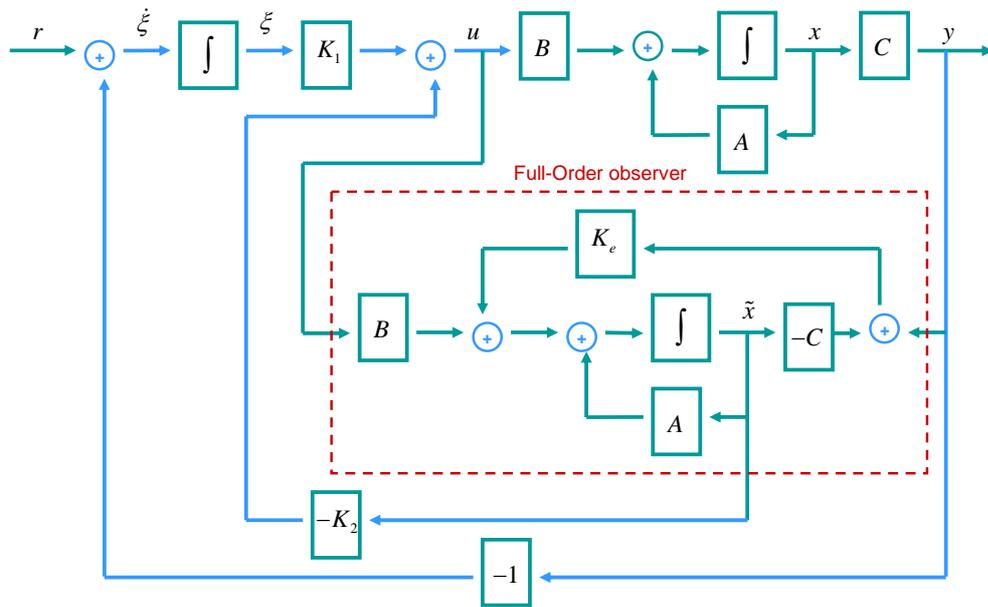
$$K_2 = \begin{bmatrix} -4.3725 & -13.3942 & -4.2773 & -3.0282 & -2.8079 & -1.7377 \\ -4.3725 & -13.3942 & -4.2773 & -3.0282 & 2.8079 & 1.7377 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -2.2361 & 0 & -2.2361 \\ -2.2361 & 0 & 2.2361 \end{bmatrix}$$

4. ตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุดที่มีตัวอินทิกรัลและตัวสังเกตแบบอันดับเต็ม

(LQR with Integrator and Full-order State Observer)

ในการออกแบบระบบที่กล่าวมานั้นเสถียรทุกตัวของระบบเป็นค่าที่ทราบได้สำหรับการนำมาป้อนกลับ แต่ในบางครั้งการวัดเสถียรทั้งหมดของระบบอาจจะทำไม่ได้หรือทำให้ระบบควบคุมนั้นมีราคาแพง มักใช้การประมาณค่าเสถียรแทน ซึ่งสามารถทำได้โดยอาศัยตัวสังเกตเสถียร (state observer) หรือเรียกว่า ตัวสังเกต (observer) ในบทนี้เสนอการออกแบบตัวสังเกตแบบอันดับเต็ม เป็นตัวสังเกตสำหรับการประมาณค่าทุกๆ เสถียรของระบบ ตัวสังเกตนั้นนำมาใช้กับระบบป้อนกลับที่มีตัวอินทิกรัลแสดงในภาพที่ 19



ภาพที่ 19 บล็อกไดอะแกรมในการควบคุมป้อนกลับแบบตามรอยสัญญาณที่มีตัวอินทิกรัลและตัวสังเกตแบบอันดับเต็ม

การประมาณค่าสแตตได้มาจากค่าเอาท์พุตและอินพุตของระบบ และระบบต้องมีคุณสมบัติความสังเกตได้ที่กล่าวในการออกแบบระบบควบคุมหัวข้อ 1.2

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (87)$$

$$y = Cx$$

$$\dot{\xi} = r - y = r - Cx$$

$$\tilde{u} = -K_2 \tilde{x} + K_1 \xi$$

เมื่อ $x = [\theta \ \psi \ \dot{\theta} \ \dot{\psi} \ \phi \ \dot{\phi}]^T$, $u = [V_l \ V_r]^T$

$$r = [\theta_{ref} \ \psi_{ref} \ \phi_{ref}]^T$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} k_{17} & k_{18} & k_{19} \\ k_{27} & k_{28} & k_{29} \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \end{bmatrix}$$

กำหนดให้ค่าอินพุตอ้างอิงเป็นฟังก์ชันขั้นบันไดเริ่มจาก $t = 0$ ดังนั้นใน $t > 0$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{u}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(\infty) \\ \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\infty) \\ \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(\infty) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(\infty)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) - \dot{x}(\infty) \\ \dot{\xi}(t) - \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) - x(\infty) \\ \xi(t) - \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} [\tilde{u}(t) - u(\infty)]$$

กำหนดให้ $x(t) - x(\infty) = x_e(t)$

$$\xi(t) - \xi(\infty) = \xi_e(t)$$

$$\tilde{u}(t) - u(\infty) = \tilde{u}_e(t)$$

ดังนั้น
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e(t) \\ \dot{\xi}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} [\tilde{u}_e(t)] \quad (88)$$

$$\tilde{u}_e(t) = -K_2 \tilde{x}_e(t) + K_1 \xi_e(t)$$

กำหนดให้
$$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix}$$

ดังนั้นสมการ (88) คือ
$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}\tilde{u}_e \quad (89)$$

เมื่อ
$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

และ
$$u_e = -\hat{K}\tilde{x} \quad (90)$$

$$\hat{K} = [K_2 \ : \ -K_1] \quad (91)$$

แทนสมการ (90) ในสมการ (89) จะได้

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} - \hat{B}\hat{K}\tilde{x} = (\hat{A} - \hat{B}\hat{K})\hat{x} + \hat{B}\hat{K}(\hat{x} - \tilde{x}) \quad (92)$$

ค่าผิดพลาดตัวสังเกตคือ
$$e(t) = \hat{x}(t) - \tilde{x}(t) \quad (93)$$

$$\dot{\hat{x}} = (\hat{A} - \hat{B}\hat{K})\hat{x} + \hat{B}\hat{K}e \quad (94)$$

โดยกำหนดให้
$$\dot{e} = (A - K_e C)e \quad (95)$$

สามารถเขียนได้ใหม่คือ

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A} - \hat{B}\hat{K} & \hat{B}\hat{K} \\ 0 & A - K_e C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ e \end{bmatrix} \quad (96)$$

จะพบว่า
$$|sI - \hat{A} + \hat{B}\hat{K}| |sI - A + K_e C| = 0$$

ดังนั้นระบบป้อนกลับที่มีตัวสังเกตสามารถแยกปัญหาการออกแบบอัตราขยายของระบบออกจากปัญหาการออกแบบอัตราขยายตัวสังเกตได้โดยไม่ขึ้นต่อกัน และระบบที่มีตัวสังเกตแบบอันดับเต็มสำหรับระบบที่มีอันดับเท่ากับ n ตัวสังเกตก็มีอันดับเท่ากับ n ดังนั้นสมการ (96) มีอันดับเท่ากับ $2n$

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของตัวสังเกตเหมือนกับแบบจำลองระบบยกเว้นเทอมที่เพิ่มมาสำหรับการประมาณค่าผิดพลาดเนื่องจากความไม่แน่นอนของเมตริกซ์ A , B และค่าเริ่มต้นที่ไม่ทราบ โดยค่าประมาณค่าผิดพลาดได้จากเอาต์พุตจริงลบด้วยค่าประมาณเอาต์พุต ค่าประมาณจากตัวสังเกตคือ

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + K_e(y - C\tilde{x}) = (A - K_e C)\tilde{x} + Bu + K_e y \quad (97)$$

\tilde{x} คือ ค่าประมาณสเตต, $C\tilde{x}$ คือ ค่าประมาณเอาต์พุต, เอาต์พุตของระบบ y และ สัญญาณควบคุม u เป็นอินพุตของตัวสังเกต K_e คืออัตราขยายตัวสังเกตซึ่งเป็นค่านำหนักสำหรับการปรับปรุงค่าแตกต่างของค่าจริงกับค่าประมาณเอาต์พุต

จากสมการของระบบ
$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (98)$$

สามารถหาสมการค่าผิดพลาดได้โดยการลบสมการ (98) ด้วยสมการ (97) คือ

$$\dot{x} - \dot{\tilde{x}} = Ax - A\tilde{x} - K_e(Cx - C\tilde{x}) = (A - K_e C)(x - \tilde{x}) \quad (99)$$

กำหนดให้ค่าผิดพลาด $e = x - \tilde{x}$

$$\dot{e} = (A - K_e C)e \quad (100)$$

พลศาสตร์ของค่าผิดพลาดขึ้นกับค่าเงาของเมตริกซ์ $A - K_e C$ ซึ่งในกรณีที่เมตริกซ์นี้มีเสถียรภาพแล้วค่าผิดพลาด (e) จะลู่เข้าหาศูนย์ หรือ \tilde{x} จะมีค่าลู่เข้าหาค่า x และ K_e ก็เป็นตัวกำหนดความไวของพลศาสตร์ค่าผิดพลาด

การออกแบบตัวสังเกตดังกล่าวแก้ปัญหาสมการที่มีความคล้ายคลึงกับสมการ (100) ได้จากคุณสมบัติของทวิภาวะ (Duality) โดยกำหนดให้

$$\dot{z} = A^T z + C^T v$$

$$n = B^T z$$

และ $v = -Kz$

ระบบดังกล่าวเรียกว่า Dual System และกำหนดให้มีคุณสมบัติสามารถควบคุมได้ ดังนั้นอัตราขยาย K สามารถหาได้จากวิธีการวางโพล $A^T - C^T K$ ให้มีค่าลู่เข้า และจากค่าเงาของระบบ $A^T - C^T K$ และ $A - K^T C$ จะมีค่าเท่ากัน

$$\left|sI - (A^T - C^T K)\right| = \left|sI - (A - K^T C)\right| \quad (101)$$

และจากสมการ (101) และ (97) จะได้ความสัมพันธ์คือ

$$K_e = K^T$$

ดังนั้นจาก Dual System สามารถหาค่า K ได้จากวิธีการวางโพล และสามารถหาอัตราขยายตัวสังเกตได้จาก $K_e = K^T$

การออกแบบตัวสังเกตแบบเต็มอันดับโดยใช้วิธีการวางโพลจากสมการ

$$\dot{z} = (A^T - C^T K_e^T) z$$

ดังนั้นจะได้

$$|sI - A^T + C^T K_e^T| = 0$$

โดยวางโพลยังตำแหน่งที่ต้องการที่ $(-10, -20, -30, -40, -50, -60)$ จะได้ค่าอัตราขยาย

$$K_e = \begin{bmatrix} 86.6220 & -9.5867 & 1795.3 & -427.567 & -7.3 \times 10^{-7} & -1.19 \times 10^{-5} \\ -9.1452 & 93.2827 & -404.296 & 2.11 \times 10^3 & 1.29 \times 10^{-6} & 2.15 \times 10^{-5} \\ -4.6 \times 10^{-6} & -4.1 \times 10^{-9} & -2.1 \times 10^{-4} & 3.52 \times 10^{-4} & 29.9737 & 199.2114 \end{bmatrix}^T$$

5. ตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุดที่มีตัวอินทิกรัลและตัวสังเกตแบบลดอันดับ
(LQR with Integrator and Reduced-order State Observer)

เนื่องจากค่าสเตตของหุ่นยนต์สองล้อสองตัวคือ มุมหมุนล้อเฉลี่ย (θ) และมุมเลี้ยว (ϕ) สามารถวัดได้จากเอนโคเดอร์เซอร์เซนเซอร์ด้านซ้ายและขวา ซึ่งมีความแม่นยำสูงจึงไม่จำเป็นต้องประมาณค่าดังกล่าว ส่วนสเตตที่เหลือของหุ่นยนต์ โดยเฉพาะมุมเอียง ψ ที่ไม่มีความแม่นยำในการตรวจวัดสามารถประมาณค่าได้โดยใช้ตัวสังเกตแบบลดอันดับ โดยมีระบบควบคุมดังภาพที่ 20

การประมาณค่าสเตตได้มาจากค่าเอาต์พุตและอินพุตของระบบ และระบบต้องมีคุณสมบัติความสังเกตได้ที่กล่าวในการออกแบบระบบควบคุมหัวข้อ 1.2

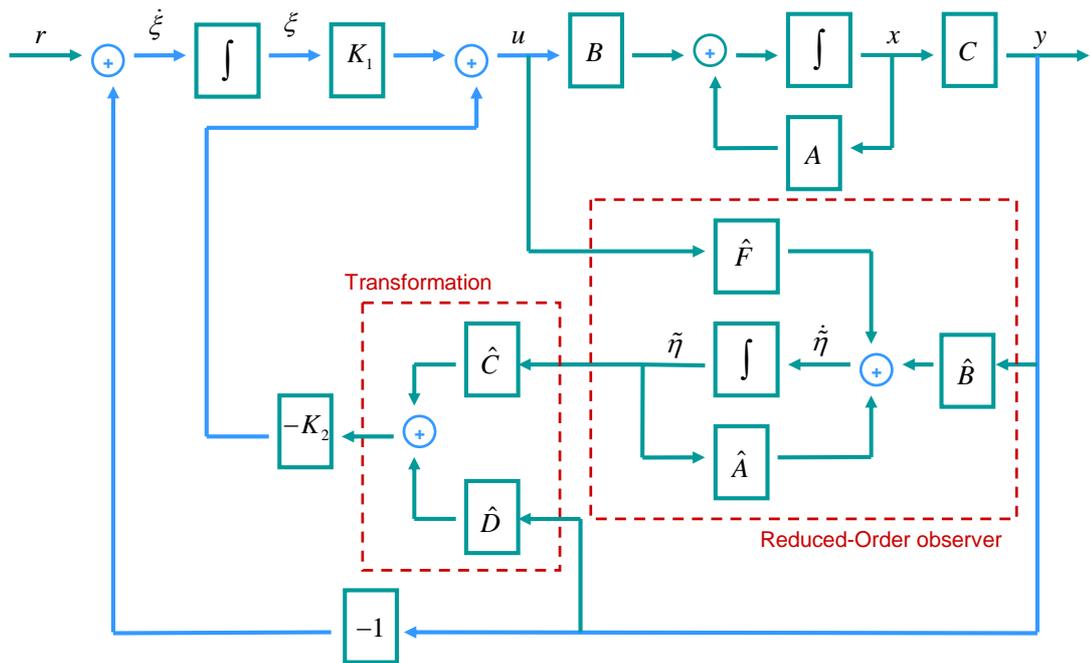
$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{102}$$

และ

$$y = Cx$$

จาก

$$\tilde{u} = -K_2(x_a, \tilde{x}_b) + K_1 \zeta \tag{103}$$



ภาพที่ 20 บล็อกไดอะแกรมในการควบคุมป้อนกลับแบบตามรอยสัญญาณที่มีตัวอินทิกรัลและตัวสังเกตแบบอันดับน้อยที่สุด

$$x = [\theta \quad \psi \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi} \quad \phi \quad \dot{\phi}]^T, u = [V_l \quad V_r]^T$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} k_{17} & k_{18} & k_{19} \\ k_{27} & k_{28} & k_{29} \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \end{bmatrix}$$

ค่า x แบ่งออกเป็นสองส่วนคือ x_a เป็นค่าที่สามารถวัดได้เหมือนสมการ Output Equation และ x_b เป็นค่าสแตตเหมือนสมการ State Equation ดังนั้นจะได้สมการคือ

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} \\ A_{ba} & A_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ B_b \end{bmatrix} u \quad (104)$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix}$$

$$x_a = [\theta, \phi]^T, x_b = [\dot{\theta}, \dot{\phi}, \psi, \dot{\psi}]^T$$

จากสมการตัวสังเกต (97) สามารถประมาณค่า โดยต้องทราบค่า x_a

$$\dot{\tilde{x}}_b = (A_{bb} - K_e A_{ab}) \tilde{x}_b + A_{ba} x_a + B_b u + K_e (\dot{x}_a - A_{aa} x_a - B_a u) \quad (105)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_b - K_e \dot{x}_a &= (A_{bb} - K_e A_{ab}) \tilde{x}_b + (A_{ba} - K_e A_{aa}) y + (B_b - K_e B_a) u \\ &= (A_{bb} - K_e A_{ab}) (\tilde{x}_b - K_e y) + [(A_{bb} - K_e A_{ab}) K_e + A_{ba} - K_e A_{aa}] y \\ &\quad + (B_b - K_e B_a) u \end{aligned} \quad (106)$$

กำหนดให้ $x_b - K_e y = x_b - K_e x_a = \eta$

$$\tilde{x}_b - K_e y = \tilde{x}_b - K_e x_a = \tilde{\eta}$$

จากสมการ (106) จะได้สมการ

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\eta}} &= (A_{bb} - K_e A_{ab}) \tilde{\eta} + [(A_{bb} - K_e A_{ab}) K_e + A_{ba} - K_e A_{aa}] y \\ &\quad + (B_b - K_e B_a) u \end{aligned} \quad (107)$$

กำหนดให้ $\hat{A} = A_{bb} - K_e A_{ab}$

$$\hat{B} = \hat{A} K_e + A_{ba} - K_e A_{aa}$$

$$\hat{F} = B_b - K_e B_a$$

ดังนั้นสมการ (107) จะได้ $\dot{\tilde{\eta}} = \hat{A} \tilde{\eta} + \hat{B} y + \hat{F} u \quad (108)$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_a \\ \tilde{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \tilde{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} [\tilde{x}_b - K_e y] + \begin{bmatrix} I \\ K_e \end{bmatrix} [y]$$

กำหนดให้ $\hat{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \hat{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ K_e \end{bmatrix}$

ดังนั้นสามารถหาค่าประมาณสแตต \tilde{x} จาก $\tilde{\eta}$ ได้คือ

$$\tilde{x} = \hat{C}\tilde{\eta} + \hat{D}y$$

จากสมการ (104) และ (105) สามารถจัดรูปสมการได้

$$\dot{\tilde{x}}_b = (A_{bb} - K_e A_{ab}) \tilde{x}_b + A_{ba} x_a + B_b u + K_e A_{ab} x_b \quad (109)$$

จากสมการ (104) และ (109) สามารถหาค่าผิดพลาดได้คือ

$$\dot{e} = \dot{\eta} - \dot{\tilde{\eta}} = \dot{x}_b - \dot{\tilde{x}}_b = (A_{bb} - K_e A_{ab})(x_b - \tilde{x}_b)$$

$$\dot{e} = (A_{bb} - K_e A_{ab})e$$

ด้วยวิธีการเดียวกับตัวสังเกตแบบอันเต็ม สมการที่ (92) - (96) ระบบป้อนกลับที่มีตัวสังเกตแบบอันคั่นน้อยที่สุดจะมีสมการพลศาสตร์คือ

$$|sI - \hat{A} + \hat{B}\hat{K}| |sI - A_{bb} + K_e A_{ab}| = 0$$

ดังนั้นการออกแบบค่าอัตราขยายของระบบ \hat{K} สามารถแยกกับการออกแบบค่าอัตราขยายตัวสังเกต K_e โดยวางโพลที่ตำแหน่ง $(-30, -40, -50, -60)$ จะได้

$$K_e = \begin{bmatrix} 130.1143 & 0.1688 & 1.22 \times 10^3 & 1.67 \times 10^4 \\ 25.4754 & 49.7642 & 491.9114 & 9.88 \times 10^3 \end{bmatrix}^T$$

6. ตัวสังเกตเสถียรแบบลูเนนเบอร์เกอร์ (Luenberger Observer for Tilt Measurement)

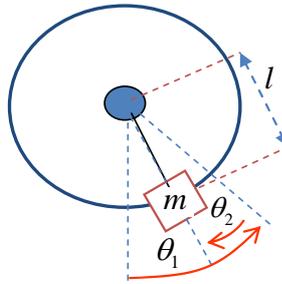
จากที่ได้กล่าวไว้ว่าระบบควบคุมหุ่นยนต์สองล้อนั้นมีส่วนประกอบที่ต้องการทราบสามตัวคือ มุมล้อ, มุมเลี้ยว และมุมเอียง และการวัดมุมเอียงหรือความเอียงถูกแยกเป็นหัวข้อหนึ่งที่สำคัญในงานวิจัยนี้ และเป็นปัญหาที่สำคัญประเด็นหนึ่งเนื่องจากตัวตรวจวัดที่มีราคาไม่สูงซึ่งเหมาะสมสำหรับการนำไปใช้กับหุ่นยนต์สองล้อในเชิงพาณิชย์นั้นมิจิตความสามารถที่จำกัด

ตัวตรวจวัดความเอียงประเภท Inclinometer เป็นอุปกรณ์สำหรับวัดความเอียงที่มีลักษณะการทำงานเหมือนเอนโคดเดอร์เซนเซอร์ คืออาศัยโฟโตไดโอด (photodiode) อ่านค่าแสงของไดโอดเมื่อผ่านแถบมืดสว่างของจานที่ติดตั้งอยู่ภายใน โดยภายใน Inclinometer จะมีโฟโตไดโอดติดตั้งอยู่ในลักษณะลูกตุ้มนาฬิกา เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงความเอียง θ_1 ดังภาพที่ 21 ลูกตุ้มพยายาม

เคลื่อนที่ในทิศทางตรงกันข้ามตามแรงโน้มถ่วงของโลกให้เท่ากับ θ_1 แต่เนื่องจากพลศาสตร์ เช่น โมเมนต์ความเฉื่อยและแรงเสียดทาน ส่งผลให้ที่เวลาหนึ่งๆ การเคลื่อนที่ของลูกตุ้มไม่เท่ากับมุมเอียงจริง และให้เท่ากับ θ_2

ผลของพลศาสตร์ของลูกตุ้มนาฬิกาภายในตัวตรวจรู้ประเภท Inclinometer ส่งผลให้สัญญาณป้อนออกหรือการวัดสเตตของความเอียงหุ่นยนต์จากตัวตรวจรู้ Inclinometer มีการตอบสนองไม่ดีที่ความถี่สูงแต่มีการตอบสนองดีเฉพาะช่วงความถี่ต่ำ

แต่ Rate Gyroscope สามารถวัดความเอียงที่ความถี่สูงได้ดีในรูปของสัญญาณของความเร็วเชิงมุมเมื่อทำการอินทิเกรตด้วยวิธีเชิงตัวเลขจะเกิดการเบี่ยงเบนเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ มักเรียกว่า Gyro Drift การประมาณค่าสเตตเพื่อแก้ปัญหาดังกล่าวมีหลายวิธี เช่น อาศัยตัวสังเกตแบบลูนเบอร์เกอร์



ภาพที่ 21 แบบจำลองของ Inclinometer อย่างง่าย

จากภาพที่ 21 มุมเอียงจริง (θ_1), มุมเอียงของ Inclinometer (θ_2), ความเร่งในแนวระดับ (\ddot{x}) และแนวตั้ง (\ddot{y}) เขียนสมการการเคลื่อนที่ของระบบดังกล่าวได้คือ

$$J(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) = c\dot{\theta}_2 - mgl \sin(\theta_1 - \theta_2) - ml(\ddot{y} \sin(\theta_1 - \theta_2) + \ddot{x} \cos(\theta_1 - \theta_2)) \quad (110)$$

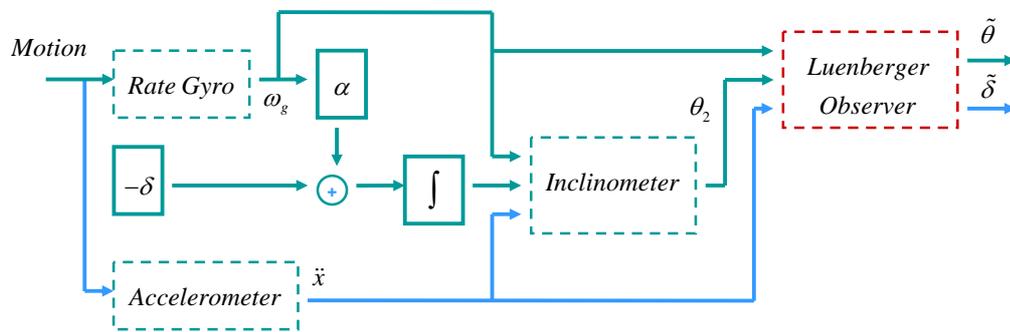
c คือสัมประสิทธิ์ความหน่วง, l คือความยาวแขนระหว่างจุดหมุนกับโพโตไดโอด, m คือมวลของโพโตไดโอด, J คือค่าโมเมนต์ความเฉื่อย และประมาณให้ระบบเป็นเชิงเส้นได้โดย $\sin(\theta_1 - \theta_2) \approx \theta_1 - \theta_2$, $\cos(\theta_1 - \theta_2) \approx 1$ และไม่คิดค่าของ $\ddot{y}(\theta_1 - \theta_2)$ และจัดให้อยู่ในรูปฟังก์ชันถ่ายโอนได้คือ

$$\theta_2(s) = \frac{s^2 + mgl/J}{s^2 + (c/J)s + mgl/J} \theta_1(s) + \frac{(ml/J)s^2}{s^2 + (c/J)s + mgl/J} X(s) \quad (111)$$

จัดระบบให้อยู่ในรูปตัวสังเกตแบบลูนเบอร์เกอร์ เพื่อออกแบบสัญญาณความเอียงที่แม่นยำจากตัวตรวจรู้ประเภท Rate Gyroscope, Accelerometer และสัญญาณของ Inclinometer (θ_2) จะได้จากสมการที่ (111) ดังภาพที่ 22 และจัดอยู่ในรูป observable-canonical ได้คือ

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c/J & 1 \\ -mgl/J & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -c/J \\ 0 \end{bmatrix} \theta_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ ml/J \end{bmatrix} \ddot{x}$$

และ
$$\theta_2 = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \theta_1$$



ภาพที่ 22 บล็อกไดอะแกรมของระบบการประมาณค่าความเอียง

θ_1 คือมุมเอียงจริง ω_g คืออัตราโน้มเอียงจาก Rate Gyroscope และ x_1, x_2 ไม่มีความหมายทางกายภาพ โดยสัญญาณ Rate Gyroscope คือ

$$\omega_g = \frac{1}{\alpha}(\dot{\theta}_1 - \delta)$$

α เป็นค่าสเกล, δ เป็นค่าไบอัส โดยกำหนดให้ $\dot{\delta} = 0$ และ $\alpha = 1.212$ จะได้

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta} \\ \dot{\theta} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c/J & -c/J & 1 \\ 0 & 0 & -mgl/J & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ \theta \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.212 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & ml/J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_g \\ \ddot{x} \end{bmatrix} \quad (112)$$

$$\theta_2 = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} \delta \\ \theta \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

โดยให้ตำแหน่งศูนย์กลางของ Inclinometer ต่อร่วมแกนหมุนกับมอเตอร์จึงไม่มีความเร่งเชิงเส้นและไม่นำมาพิจารณา ดังนั้นสามารถลดรูปสมการได้คือ

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -c/J & -c/J & 1 \\ 0 & -mgl/J & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.212 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \omega_g \quad (113)$$

$$\theta_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ในภาคผนวก ข. ใช้วิธีการหาเอกลักษณ์ของระบบ จะได้ค่า $ml/J = 1.0314$ และ $J/c = 0.0022$ ซึ่งจากวิธีการของตัวสังเกตที่ได้กล่าวไว้แล้ว จะได้ว่า

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + K_e(\theta_2 - C\tilde{x}) + Bu$$

หรือ
$$\dot{\tilde{x}} = (A - K_e C)\tilde{x} + Bu + K\theta_2$$

สามารถหาค่า K ด้วยวิธีการวางโพลเพื่อให้ $A - K_e C$ มีเสถียรภาพดังนั้นค่ามุมเอียงจริงลบด้วยค่าประมาณย่อมมีค่าคู่เข้า ในการจำลองนี้กำหนดตำแหน่งโพลคือ $(-15, -30, -300)$ จะได้ค่าอัตราขยาย $K = [29.977, -130.051, 9446.66]$

ผลและวิจารณ์

ผลการทดลองจะแสดงถึงการออกแบบระบบควบคุมที่ได้กล่าวไว้ ซึ่งแบ่งออกเป็นสองส่วนคือ ผลการจำลองด้วยโปรแกรม MATLAB และผลการทดลองของหุ่นยนต์สองล้อ ทั้งสองส่วนแสดงให้เห็นความสัมพันธ์ที่สอดคล้องกัน และผลทั้งสองส่วนนั้นยังแบ่งออกเป็นสองประเภทคือ การออกแบบตัวควบคุม และการออกแบบการวัดมุมเอียง

ผลการจำลองด้วยโปรแกรม MATLAB

การจำลองด้วยโปรแกรม MATLAB แบ่งออกเป็น 5 ส่วน ส่วนที่ 1 ถึง 4 เป็นการออกแบบตัวควบคุมประเภทต่างๆ ส่วนที่ 5 เป็นการออกแบบการวัดมุมเอียงด้วยตัวสังเกตสเตรต

ผลการออกแบบตัวควบคุมอาศัยตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุด (LQR)

จากการออกแบบระบบควบคุมแบบอาศัยตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุด ออกแบบสมการสมรรถนะโดยกำหนด $Q = \text{diag}[0.1, 1, 0.1, 1, 0.1, 0.1]$ และ $R = \text{diag}[1, 1]$ จะได้ค่าอัตราขยายคือ

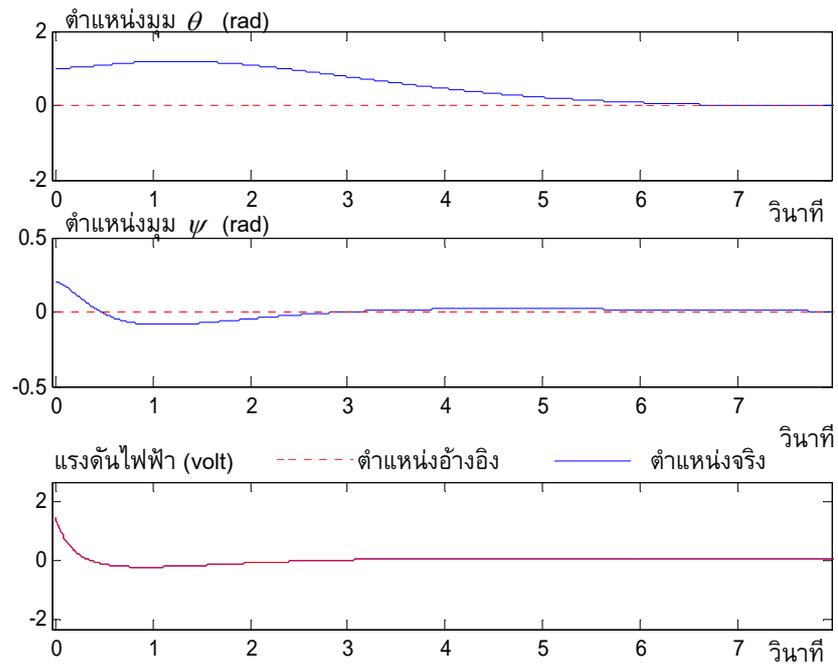
$$K = \begin{bmatrix} -0.2236 & -6.0222 & -0.6541 & -1.4885 & -0.2236 & -0.5249 \\ -0.2236 & -6.0222 & -0.6541 & -1.4885 & 0.2236 & 0.5249 \end{bmatrix}$$

ค่าอัตราขยายดังกล่าวนำไปใช้กับระบบควบคุมแบบอาศัยตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุด จะได้ผลดังนี้

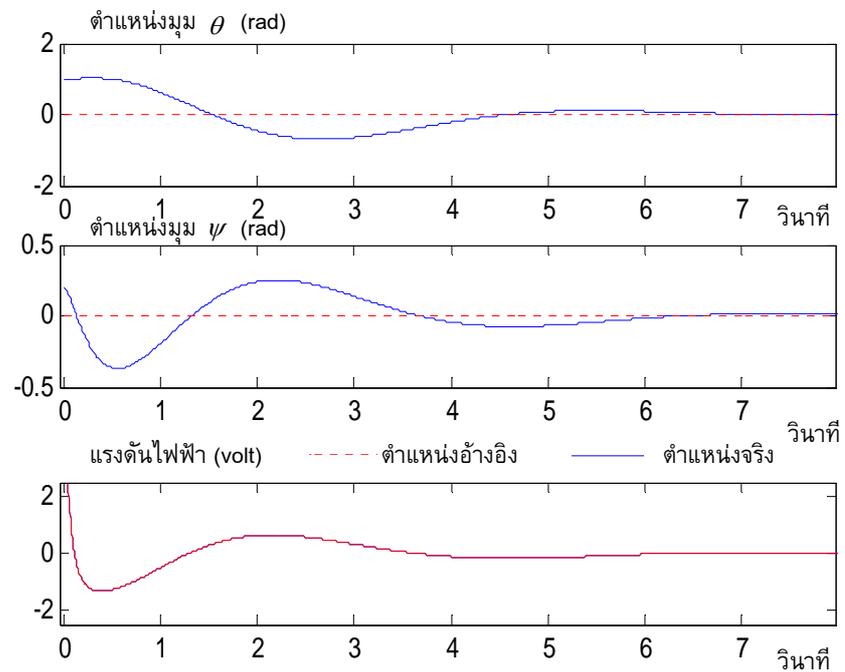
1. ระบบรักษาเสถียรภาพ

การรักษาเสถียรภาพคือ เมื่อเวลาผ่านไปสเตรตของระบบจะลู่เข้าหาตำแหน่งที่แน่นอน กำหนดให้ตำแหน่งเริ่มต้นของสเตรตของระบบไม่อยู่ที่ศูนย์แต่อยู่ที่ $\theta = 1$ เรเดียน และ $\psi = 0.2$ เรเดียน

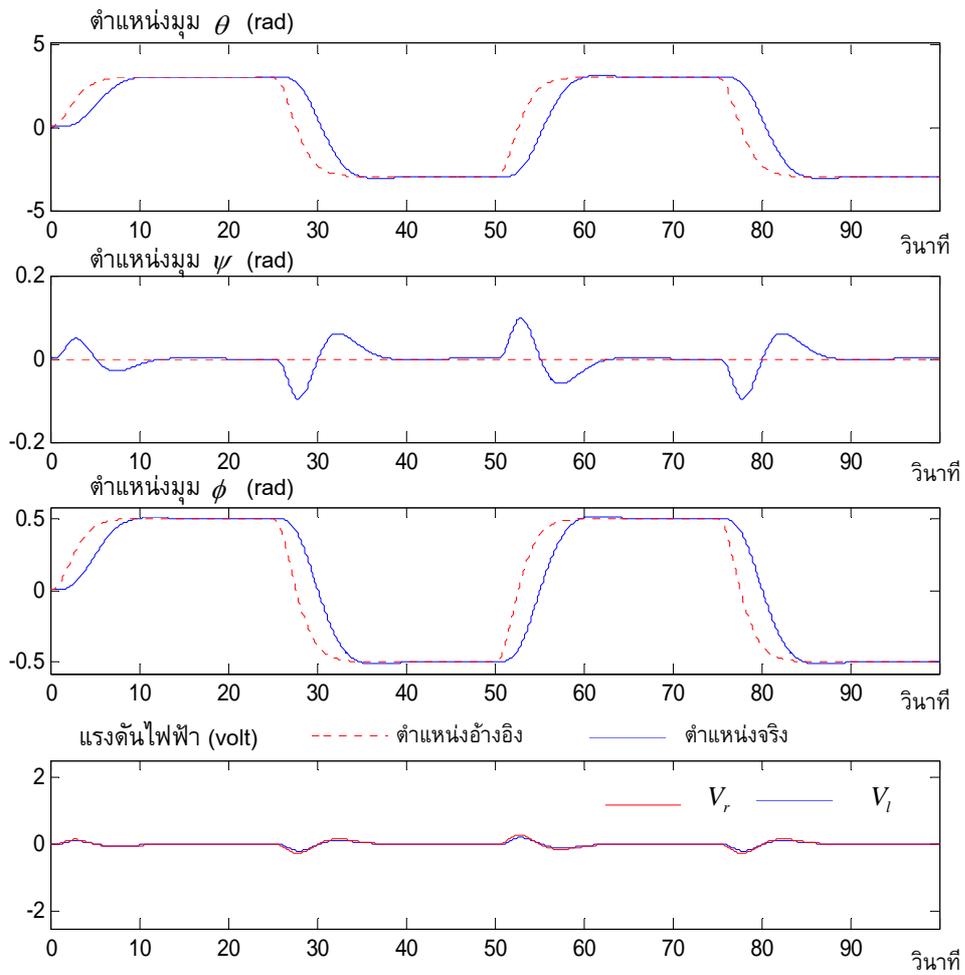
จากผลการจำลองระบบดังภาพที่ 23 แสดงให้เห็นว่าระบบสามารถรักษาเสถียรภาพได้โดยตำแหน่งมุม ψ จะเคลื่อนที่เข้าสู่ตำแหน่งสมมูลได้ด้วยเวลา 3 วินาที แต่ตำแหน่งมุม θ มีลักษณะไม่ใช่มุมเฟสน้อยที่สุดคือจะเริ่มเคลื่อนที่ในทิศทางตรงกันข้ามกับทิศทางลู่เข้าตำแหน่งสมมูลในช่วงแรกและเคลื่อนที่เข้าสู่สภาวะคงตัวได้ด้วยเวลา 6 วินาที



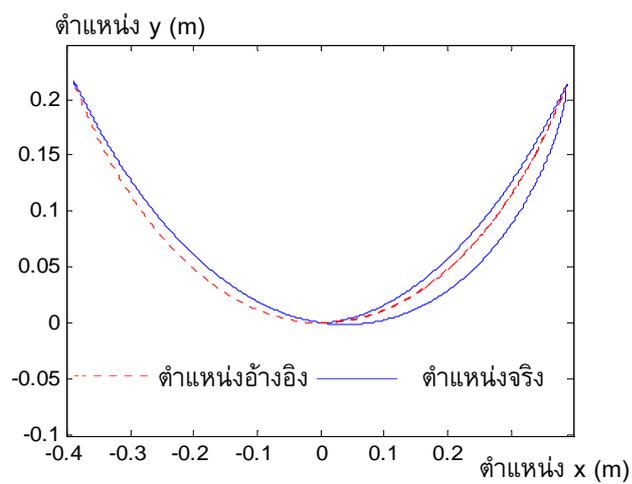
ภาพที่ 23 ผลการจำลองการรักษาเสถียรภาพของระบบควบคุมอาศัยตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุด



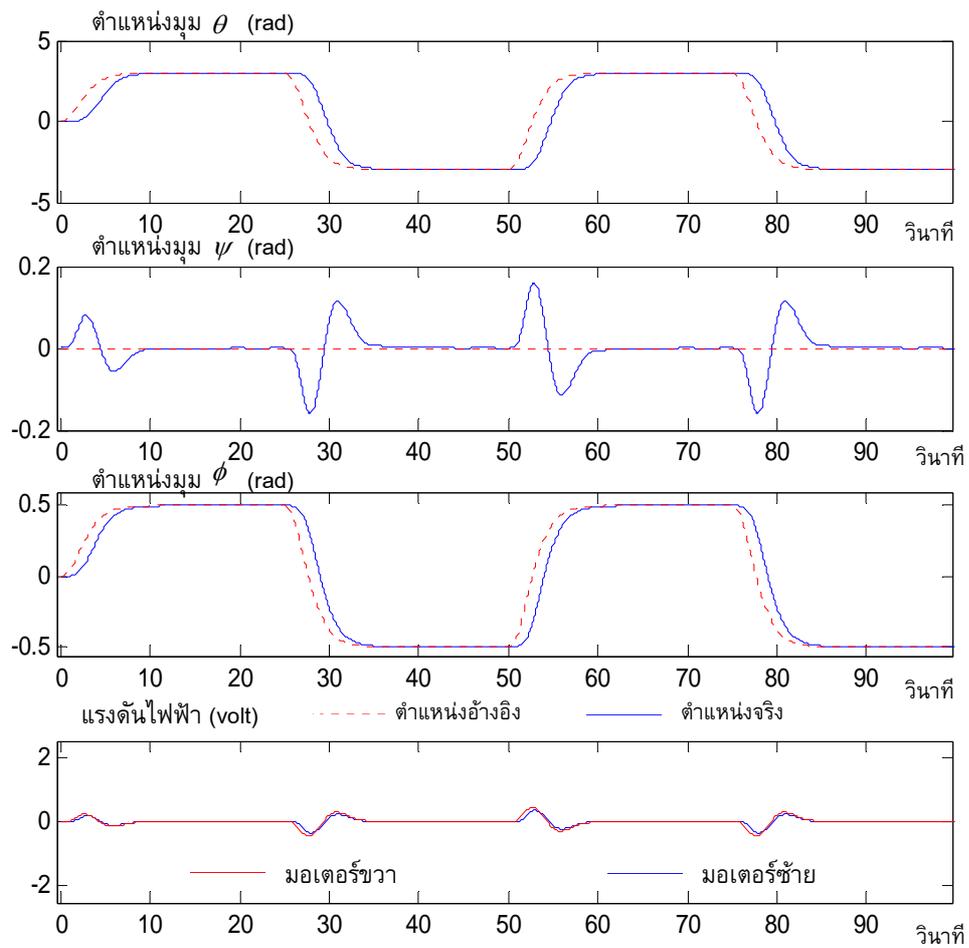
ภาพที่ 24 ผลการจำลองการรักษาเสถียรภาพของระบบควบคุมอาศัยตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุดที่มีตัวอินทิกรัล



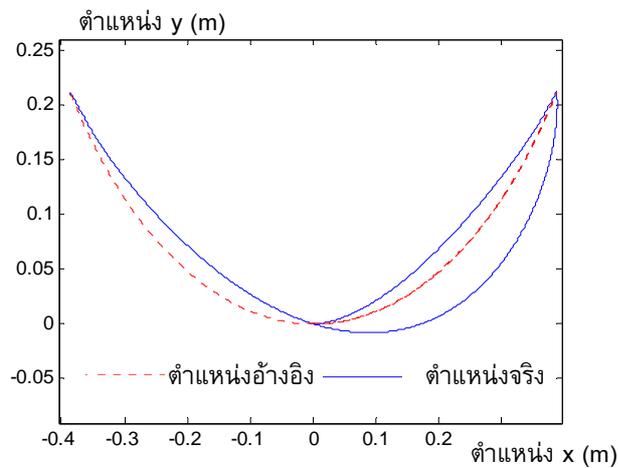
ภาพที่ 25 ผลการจำลองการติดตามค่าของระบบควบคุมอาศัยตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุด



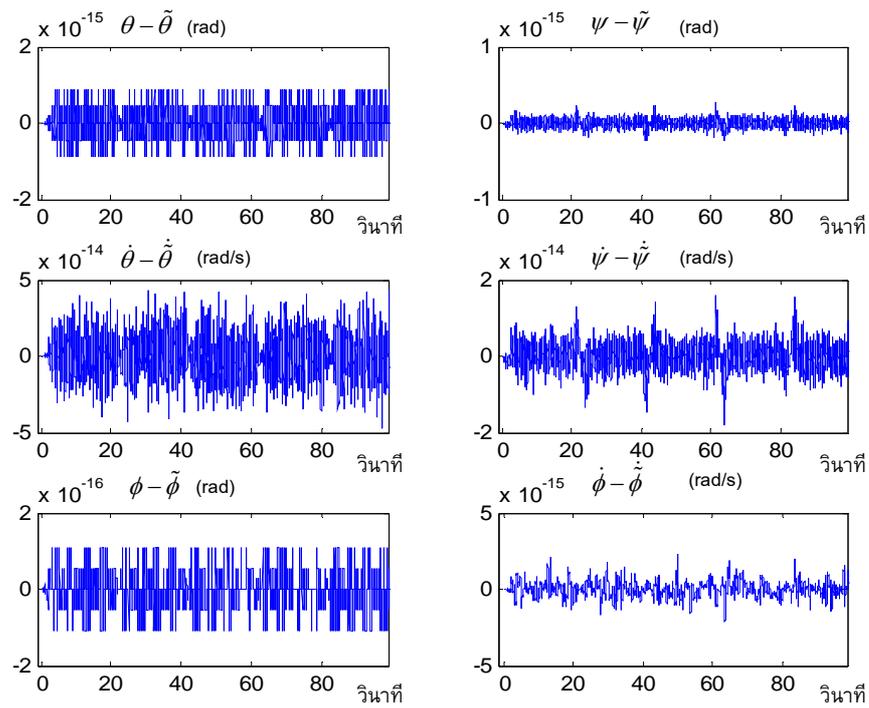
ภาพที่ 26 ผลการจำลองการเคลื่อนในสองมิติของระบบควบคุมอาศัยตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุด



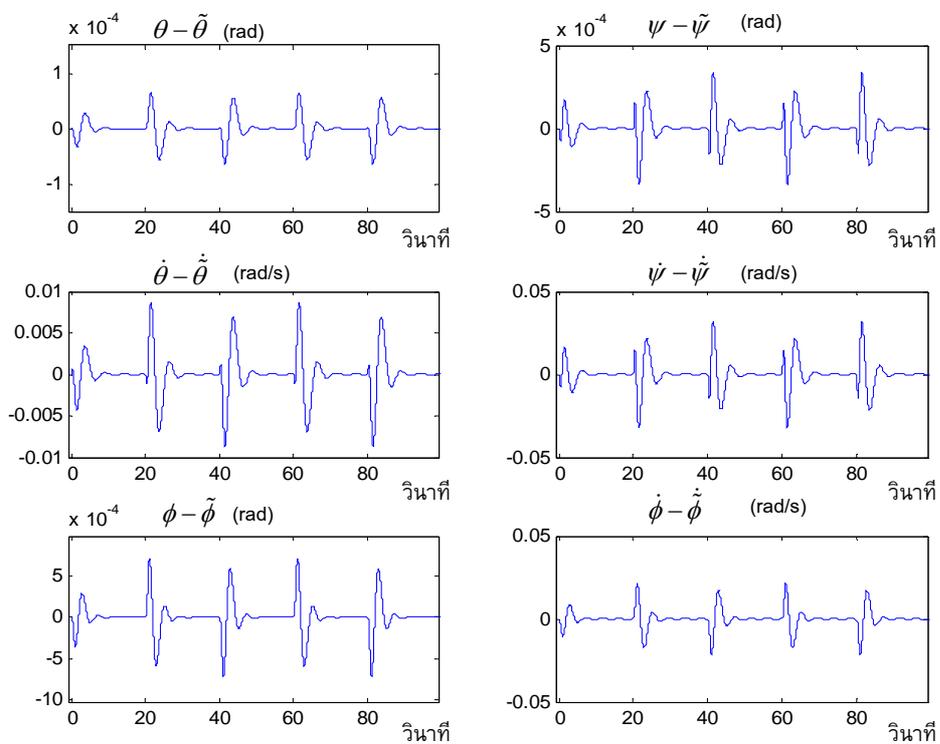
ภาพที่ 27 ผลการจำลองการตามสัญญาณอ้างอิงของระบบควบคุมอาศัยตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุดที่มีตัวอินทิกรัล



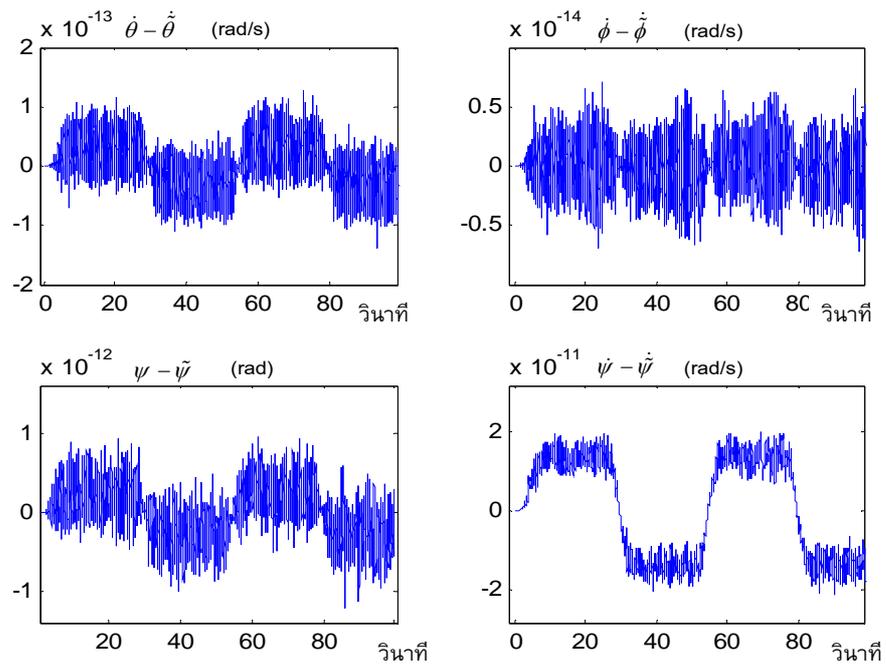
ภาพที่ 28 ผลการจำลองการเคลื่อนในสองมิติของระบบควบคุมอาศัยตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุดที่มีตัวอินทิกรัล



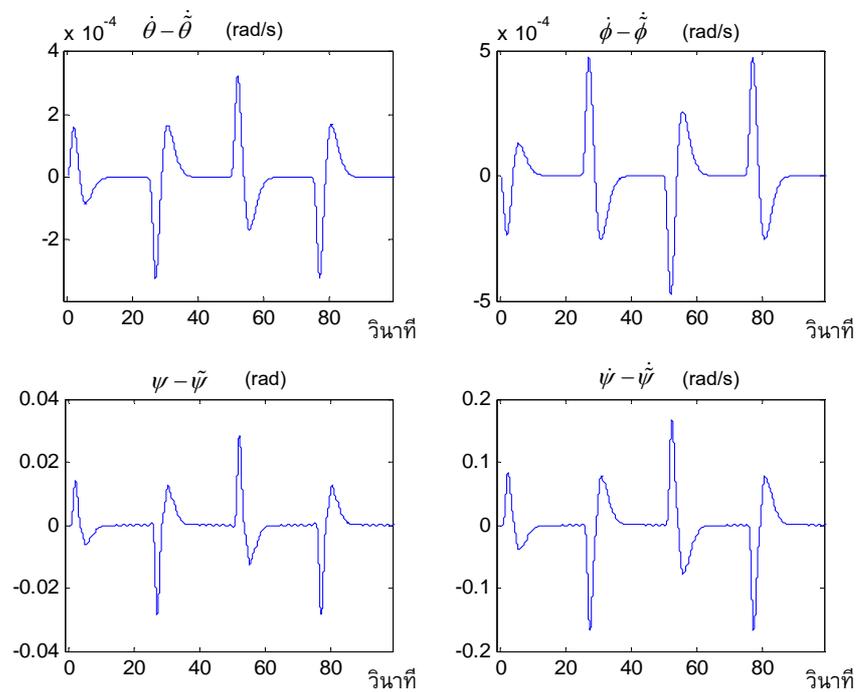
ภาพที่ 29 ค่าผิดพลาดของสเตตจากการประมาณค่าด้วยตัวสังเกตแบบอันดับเต็ม



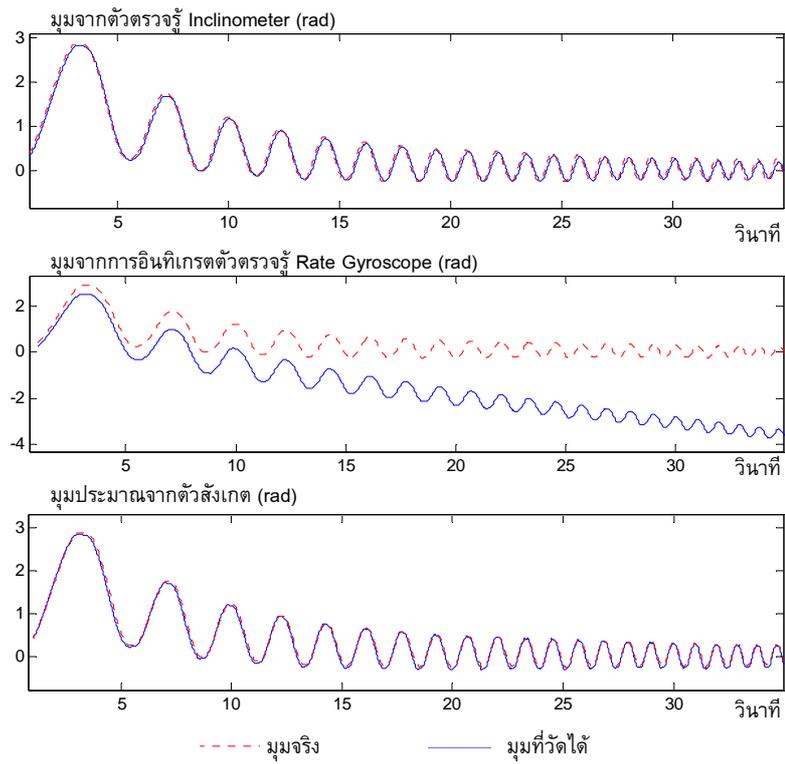
ภาพที่ 30 ค่าผิดพลาดของสเตตจากการประมาณค่าด้วยตัวสังเกตแบบอันดับเต็มเมื่อพลาตันไม้แน่นนอน 30 เปอร์เซนต์



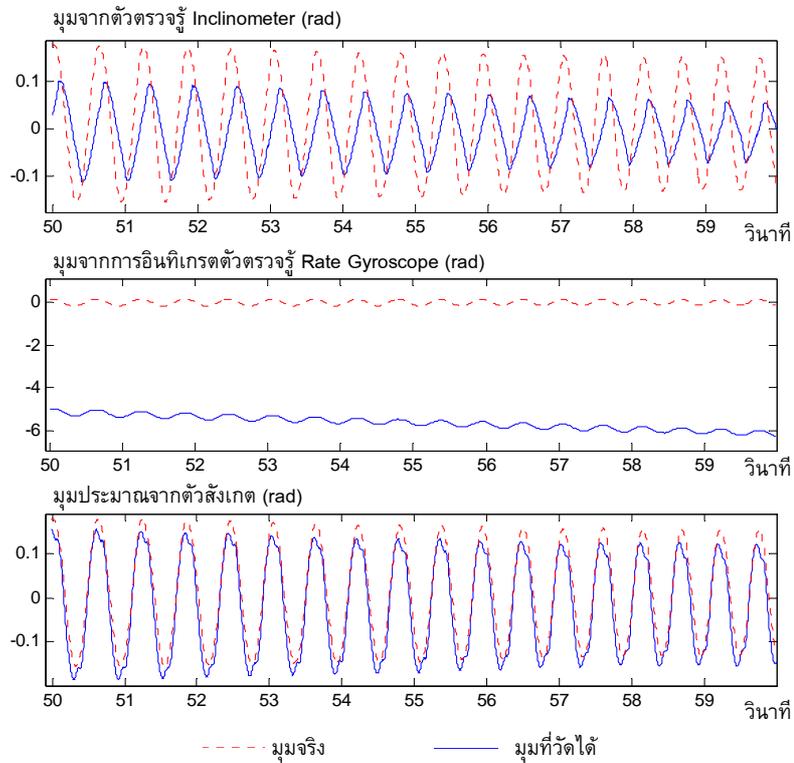
ภาพที่ 31 ค่าผิดพลาดของสเตตจากการประมาณค่าด้วยตัวสังเกตแบบลดอันดับ



ภาพที่ 32 ค่าผิดพลาดของสเตตจากการประมาณค่าด้วยตัวสังเกตแบบลดอันดับเมื่อพลาตันไม่แน่นอน 30 เปอร์เซนต์



ภาพที่ 33 ผลการจำลองการวัดมุมเอียงที่ความถี่ต่ำ



ภาพที่ 34 ผลการจำลองการวัดมุมเอียงที่ความถี่สูง

2. ระบบตามรอยสัญญาณอ้างอิง

การตามรอยสัญญาณอ้างอิง คือ การควบคุมให้เอาต์พุตของระบบมีค่าเท่ากับค่าที่ต้องการ กำหนดให้ตำแหน่งเริ่มต้นของสเตตทั้งหมดของระบบอยู่ที่ศูนย์ โดยสัญญาณอ้างอิงจะแปรผันตามเวลา โดยสัญญาณอ้างอิงทั้งสาม ได้แก่ สัญญาณอ้างอิงสำหรับมุม θ คือ สัญญาณรูปสี่เหลี่ยมขนาดแอมพลิจูด 6 เรเดียนที่ผ่านตัวกรองความถี่ต่ำ $1/(s+5)^3$ สัญญาณอ้างอิงสำหรับมุม ψ คือศูนย์ สัญญาณอ้างอิงสำหรับมุม ϕ คือสัญญาณรูปสี่เหลี่ยมขนาดหนึ่งหน่วยที่ผ่านตัวกรองความถี่ต่ำ $1/(s+5)^3$ เช่นเดียวกัน

จากผลการจำลองระบบในภาพที่ 25 สามรูปแบบนแสดงถึงการติดตามค่า เส้นประสีแดงคือสัญญาณอ้างอิงของเอาต์พุตทั้งสาม เส้นสีน้ำเงินคือเอาต์พุตที่ได้จากการจำลอง การควบคุมตำแหน่งมุม θ ไม่สามารถทำได้รวดเร็วมากเนื่องจากเกี่ยวข้องกับมุมเอียงของหุ่นยนต์ (ψ) ด้วย และการควบคุมตำแหน่งมุม ϕ ทำได้ดีกว่าตำแหน่งมุม θ เล็กน้อย รูปสุดท้ายแสดงแรงดันไฟฟ้าที่ป้อนเข้าระบบและคือกำลังไฟฟ้าที่สูญเสียไปด้วย โดยออกแบบไม่ให้มากกว่า 2.5 และไม่ต่ำกว่า -2.5 โวลต์ซึ่งเป็นกำลังสูงสุดของวงจรขับเคลื่อนกระแสตรง

การเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ในสองมิติจากมุมมองด้านบนแสดงดังภาพที่ 26 เส้นประสีแดงแสดงเส้นทางการเคลื่อนที่อ้างอิง และเส้นสีน้ำเงินแสดงเส้นทางการเคลื่อนที่จริง การเคลื่อนที่เริ่มจากตำแหน่ง ก. ไปยัง ข., ก. และ ค. ตามลำดับ ถึงแม้ว่าเอาต์พุตที่ตามรอยจะตอบสนองช้าแต่ตำแหน่งการเคลื่อนที่ค่อนข้างแม่นยำเนื่องจากตำแหน่งมุม θ และมุม ϕ มีความไวในการตอบสนองใกล้เคียงกัน

ผลการออกแบบตัวควบคุมอาศัยตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุดที่มีตัวอินทิกรัล

(LQR with Integrator)

จากการออกแบบระบบควบคุมแบบอาศัยตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุดที่มีตัวอินทิกรัล ออกแบบสมการสมรรถนะโดยกำหนด $Q = \text{diag}[0.1, 10, 0.1, 10, 0.1, 0.1, 10, 10, 10]$ และ $R = \text{diag}[1, 1]$ จะได้ค่าอัตราขยายคือ

$$K_1 = \begin{bmatrix} -2.2361 & 0 & -2.2361 \\ -2.2361 & 0 & 2.2361 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -4.3725 & -13.3942 & -4.2773 & -3.0282 & -2.8079 & -1.7377 \\ -4.3725 & -13.3942 & -4.2773 & -3.0282 & 2.8079 & 1.7377 \end{bmatrix}$$

ค่าอัตราขยายดังกล่าวนำไปใช้กับระบบควบคุมดังกล่าว จะได้ผลดังนี้

1. ระบบรักษาเสถียรภาพ

การรักษาเสถียรภาพคือ เมื่อเวลาผ่านไประบบจะลู่เข้าหาค่าที่แน่นอน กำหนดให้ตำแหน่งเริ่มต้นของระบบไม่อยู่ที่ศูนย์แต่อยู่ที่ $\theta = 1$ เรเดียน และ $\psi = 0.2$ เรเดียน

จากผลการจำลองระบบดังกล่าวที่ 24 แสดงให้เห็นว่าระบบสามารถรักษาเสถียรภาพได้โดยตำแหน่งมุม ψ และตำแหน่งมุม θ ที่ยังแสดงลักษณะไม่ไข่มุมเฟสน้อยที่สุดจะเคลื่อนที่เข้าสู่ตำแหน่งสมดุลได้ด้วยเวลา 6 วินาที ได้ผลแยกลงเมื่อเปรียบเทียบกับตัวควบคุมอาศัยตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุดเนื่องจากระบบมีความไวมาก โดยเฉพาะการควบคุมตำแหน่งมุม θ ทำให้ค่ามุม ψ โอเวอร์ชูตมากและแรงดันไฟฟ้าก็เกินกว่าที่กำหนด

2. ระบบตามรอยสัญญาณอ้างอิง

การตามสัญญาณรอยอ้างอิงในหัวข้อนี้มีสัญญาณอ้างอิงเช่นเดียวกับที่ได้กล่าวไว้แล้ว โดยต้องการการควบคุมให้อาต์พุตของระบบมีค่าเท่ากับค่าที่ต้องการ กำหนดให้ตำแหน่งเริ่มต้นของสเตตทั้งหมดของระบบอยู่ที่ศูนย์

จากผลการจำลองระบบในภาพที่ 27 สามรูปแบบแสดงถึงการติดตามค่า เส้นปะสีแดงคือสัญญาณอ้างอิงของเอาต์พุตทั้งสาม เส้นสีน้ำเงินคือเอาต์พุตที่ได้จากการจำลอง โดยเปรียบเทียบกับตัวควบคุมอาศัยตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุด การควบคุมตำแหน่งมุม θ สามารถทำได้แม่นยำมากขึ้น และมุมเลี้ยวสามารถทำได้ดีมาก แต่มุมเอียงของหุ่นยนต์ (ψ) เพิ่มมากขึ้นด้วย และกำลังไฟฟ้าที่ใช้มากขึ้นเล็กน้อย ซึ่งอยู่ภายในเกณฑ์ของค่าต่ำสุดและสูงสุดของพาวเวอร์แอมพลิไฟเออร์ คือ -2.5 ถึง 2.5 โวลต์

การเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ในสองมิติจากมุมมองด้านบนแสดงดังภาพที่ 28 เส้นปะสีแดงแสดงเส้นทางการเคลื่อนที่อ้างอิง และเส้นสีน้ำเงินแสดงเส้นทางการเคลื่อนที่จริง การเคลื่อนที่เริ่มจากตำแหน่ง ก. ไปยัง ข., ก. และ ค. ตามลำดับ

ผลที่ได้เปรียบเทียบกับตัวควบคุมอาศัยตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุดพบว่าเส้นทางการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์สองล้อมีทิศทางที่เบี่ยงเบนจากมากขึ้นเนื่องจากความไวในการตอบสนองของมุม θ และ ϕ แตกต่างกัน แต่หุ่นยนต์สามารถเข้าหาตำแหน่งได้แม่นยำกว่าในระยะเวลาที่จำกัด

ผลการออกแบบตัวควบคุมอาศัยตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุดที่มีตัวอินทิกรัลและตัวสังเกตแบบอันดับเต็ม (LQR with Integrator and Full-order State Observer)

การออกแบบระบบควบคุมประเภทนี้ได้พิสูจน์แล้วว่า การออกแบบตัวควบคุมสามารถแยกออกจากการออกแบบตัวสังเกต จากการออกแบบระบบควบคุมมีลักษณะเช่นเดียวกับตัวควบคุมอาศัยตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุด คือ

$$Q = \text{diag} [0.1, 10, 0.1, 10, 0.1, 0.1, 10, 10, 10] \text{ และ } R = \text{diag} [1, 1]$$

การออกแบบตัวสังเกตโดยใช้วิธีการวางตำแหน่งโพลที่ตำแหน่ง $(-10, -20, -30, -40, -50, -60)$ ซึ่งมีความไวในการตอบสนองมากกว่าสองเท่าของตัวควบคุม ดังนั้นจะได้ค่าอัตราขยายคือ

$$K_e = \begin{bmatrix} 86.6220 & -9.5867 & 1795.3 & -427.567 & -7.3 \times 10^{-7} & -1.19 \times 10^{-5} \\ -9.1452 & 93.2827 & -404.296 & 2.11 \times 10^3 & 1.29 \times 10^{-6} & 2.15 \times 10^{-5} \\ -4.6 \times 10^{-6} & -4.1 \times 10^{-9} & -2.1 \times 10^{-4} & 3.52 \times 10^{-4} & 29.9737 & 199.2114 \end{bmatrix}^T$$

ปรากฏว่าค่าสเตตที่ได้ทั้งหมด 6 ตัวมีความแม่นยำสูงมาก มีความไวในการตอบสนองสูง ค่าผิดพลาดของสเตต $(x - \hat{x})$ แสดงดังภาพที่ 29

ดังนั้นผลการควบคุมของตัวควบคุมอาศัยตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุดที่มีตัวอินทิกรัลและตัวสังเกตแบบอันดับเต็มมีลักษณะไม่แตกต่างกับตัวควบคุมที่ไม่ใช่ตัวสังเกตหรือดังภาพที่ 27

ภาพที่ 30 แสดงค่าผิดพลาดของค่าประมาณจากตัวสังเกตแบบอันดับเต็ม เมื่อกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ที่สำคัญของพลาตซ์ของระบบเปลี่ยนแปลงไปจากเดิม 30 เปอร์เซ็นต์ ซึ่งได้แก่ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของระบบขับเคลื่อน และโมเมนต์ความเฉื่อยของตัวถังรอบแกน x, y, z ซึ่งค่าผิดพลาดของทุกสเตต $(x - \hat{x})$ จะมีค่าเข้าสู่ศูนย์

**ผลการออกแบบตัวควบคุมอาศัยตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุดที่มีตัวอินทิกรัลและตัวสังเกตแบบ
อันดับน้อยที่สุด (LQR with Integrator and minimum-order state observer)**

ตัวสังเกตแบบอันดับน้อยที่สุดเป็นการคำนวณที่ประหยัดทรัพยากรกว่าตัวสังเกตแบบ
อันดับเต็ม การออกแบบตัวควบคุมสามารถแยกออกจากการออกแบบตัวสังเกต จากการออกแบบ
ระบบควบคุมมีลักษณะเช่นเดียวกับตัวควบคุมอาศัยตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุด คือ

$$Q = \text{diag} [0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 10, 10, 10, 10] \text{ และ } R = \text{diag} [1, 1]$$

การออกแบบตัวสังเกตโดยใช้วิธีการวางตำแหน่งโพลที่ตำแหน่ง $(-30, -40, -50, -60)$
ซึ่งมีความไวในการตอบสนองมากกว่าสองเท่าของตัวควบคุม ดังนั้นจะได้ค่าอัตราขยายคือ

$$K_2 = \begin{bmatrix} -4.3399 & -2.8079 & -4.2138 & -1.7377 & -13.3083 & -3.0230 \\ -4.3399 & 2.8079 & -4.2138 & 1.7377 & -13.3083 & -3.0230 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -2.2361 & -2.2361 \\ -2.2361 & 2.2361 \end{bmatrix}$$

$$K_e = \begin{bmatrix} 130.1143 & 0.1688 & 1.22 \times 10^3 & 1.67 \times 10^4 \\ 25.4754 & 49.7642 & 491.9114 & 9.88 \times 10^3 \end{bmatrix}^T$$

เอาท์พุทของระบบคือ มุม θ และ ϕ เพื่อประมาณค่าสเตตที่เหลือ 4 ตัว ได้แก่ $\dot{\theta}, \dot{\phi}, \psi, \dot{\psi}$
ซึ่งมีค่าความผิดพลาดต่ำมากเช่นเดียวกัน จะได้ผลดังแสดงในภาพที่ 31

ภาพที่ 32 แสดงค่าผิดพลาดของค่าประมาณจากตัวสังเกตแบบอันดับเต็ม เมื่อกำหนดให้
ค่าพารามิเตอร์ที่สำคัญของพลาเน็ตของระบบเปลี่ยนแปลงไปจากเดิม 30 เปอร์เซ็นต์ ซึ่งได้แก่ค่า
โมเมนต์ความเฉื่อยของระบบขับเคลื่อน และโมเมนต์ความเฉื่อยของตัวถังรอบแกน x, y, z ซึ่งค่า
ผิดพลาดของทุกสเตต $(x - \hat{x})$ จะมีค่าเข้าสู่ศูนย์

ผลการออกแบบตัวสังเกตสเตตความเอียงแบบลูเนเบอร์เกอร์

(Luenberger Observer for Tilt Measurement)

อีกส่วนหนึ่งที่แบ่งแยกจากส่วนที่กล่าวมาแล้วในหัวข้อระบบควบคุม คือการออกแบบการ
วัดสเตตมุมเอียงโดยใช้ตัวตรวจรู้สองประเภท คือ ตัวตรวจรู้วัดความเอียง Inclinometer และตัว

ตรวจรู้วัดอัตราโน้มเอียง Rate Gyroscope ดังที่ได้กล่าวไว้แล้ว อัตราขยายของตัวสังเกตแบบลุนเบอร์เกอร์ได้จากการวางตำแหน่งโพล ในการจำลองนี้กำหนดตำแหน่งโพลคือ $(-15, -30, -300)$ จะได้ค่าอัตราขยาย $K=[29.977, -130.051, 9446.66]$ และผลการจำลองแสดงในภาพที่ 33 และภาพที่ 34

จากภาพที่ 33 เส้นสีแดงแสดงถึงมุมจริงได้จากการวัดด้วยเอนโคดเดอร์เซนเซอร์ ค่ามุมเอียงที่วัดได้ตัวตรวจรู้ Inclinometer ให้ผลดีใกล้เคียงกับมุมประมาณจากตัวสังเกตในช่วงต้นของการทดลอง ในช่วงหลังพบว่า Inclinometer แสดงผลมุมได้ช้ากว่าความเป็นจริงเนื่องจากพลศาสตร์ของลูกค้อนนาฬิกาภายในตอบสนองต่อความถี่สูงไม่ได้ดี ในส่วนของมุมที่ได้จากการอินทิเกรตของ Rate Gyroscope ไม่สามารถบอกมุมที่ถูกต้องแม่นยำได้เพราะเกิดการ Drift ของสัญญาณ มุมดังกล่าวจึงไม่ตรงกับความเป็นจริงถึงแม้ว่าจะสามารถบอกการตอบสนองต่อความถี่สูงได้แม่นยำเหมือนเอนโคดเดอร์เซนเซอร์ก็ตาม และมุมประมาณจากตัวสังเกตนั้นมีความแม่นยำในย่านความถี่ต่ำ

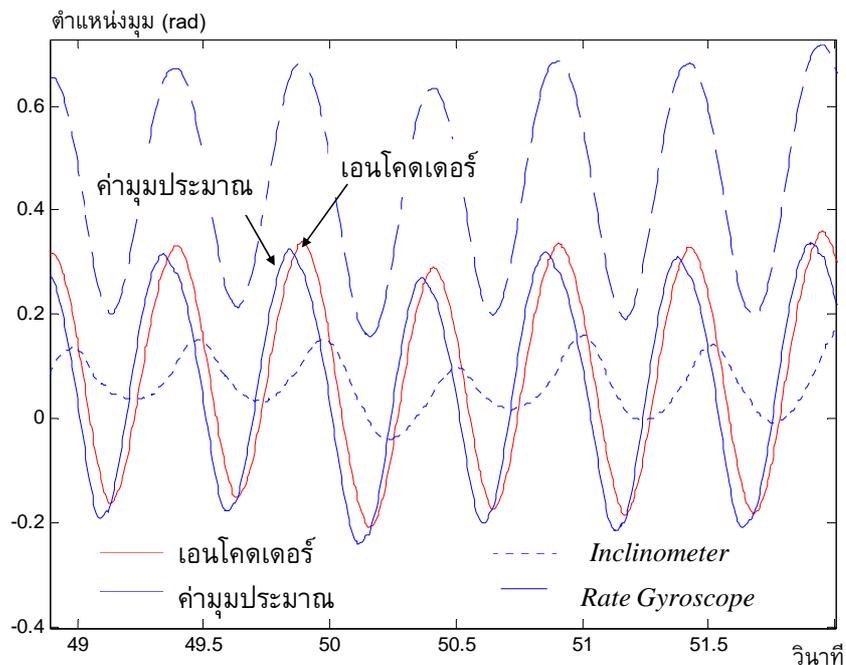
และภาพที่ 34 แสดงผลการจำลองผลการวัดมุมเอียงที่ความถี่สูง แสดงให้เห็นความแตกต่างชัดเจนของมุมจริง (เส้นปะสีแดง) ที่ได้จากเอนโคดเดอร์เซนเซอร์กับมุมจาก Inclinometer ว่ามีความแตกต่างโดย ตัวตรวจรู้ Inclinometer ไม่สามารถตอบสนองต่อความถี่สูงได้ แอมพลิจูดของสัญญาณที่ได้มีขนาดต่ำกว่าและเฟสของสัญญาณตามหลังมุมจริง ในส่วนของมุมที่ได้จากการอินทิเกรตสัญญาณของ Rate Gyroscope แสดงผลเช่นเดิมดังที่ได้กล่าวไว้ และมุมประมาณจากตัวสังเกตลุนเบอร์เกอร์สามารถตอบสนองความถี่สูงได้ดี โดยมีขนาดแอมพลิจูดและเฟสของสัญญาณใกล้เคียงกับมุมจริง

ผลการทดลองระบบควบคุม

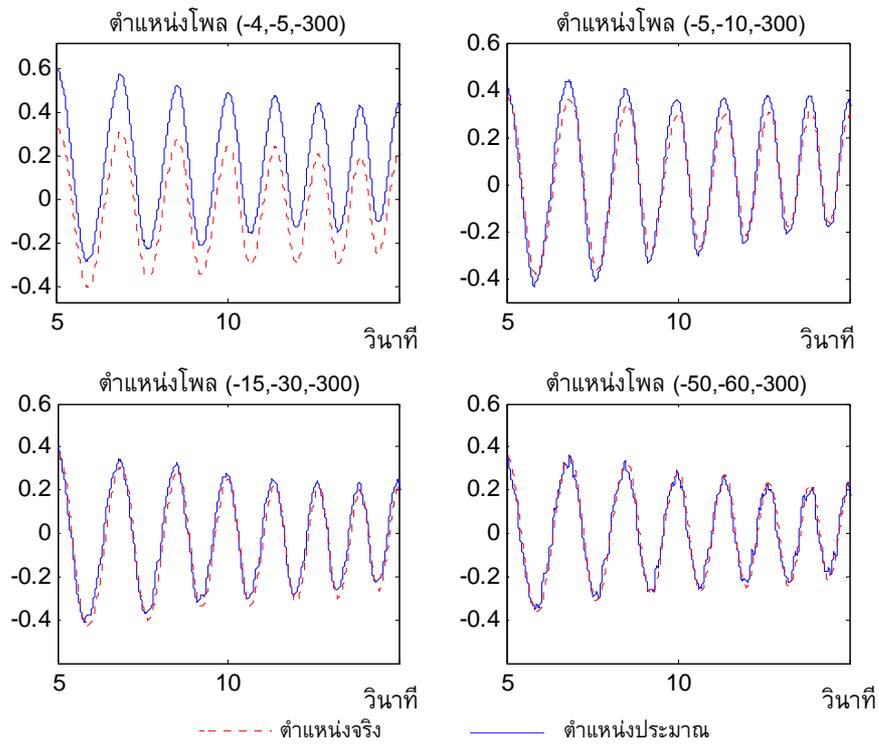
ในการทดลองนั้นเป็นการนำตัวควบคุมที่ได้จากการออกแบบด้วยการจำลองระบบในหัวข้อที่ผ่านมา แบ่งเป็น 2 หัวข้อคือ การทดลองตัวสังเกตและการทดลองตัวควบคุมอาศัยตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุดที่มีตัวอินทิกรัล

ผลการทดลองตัวสังเกตเสถียรความเอียง

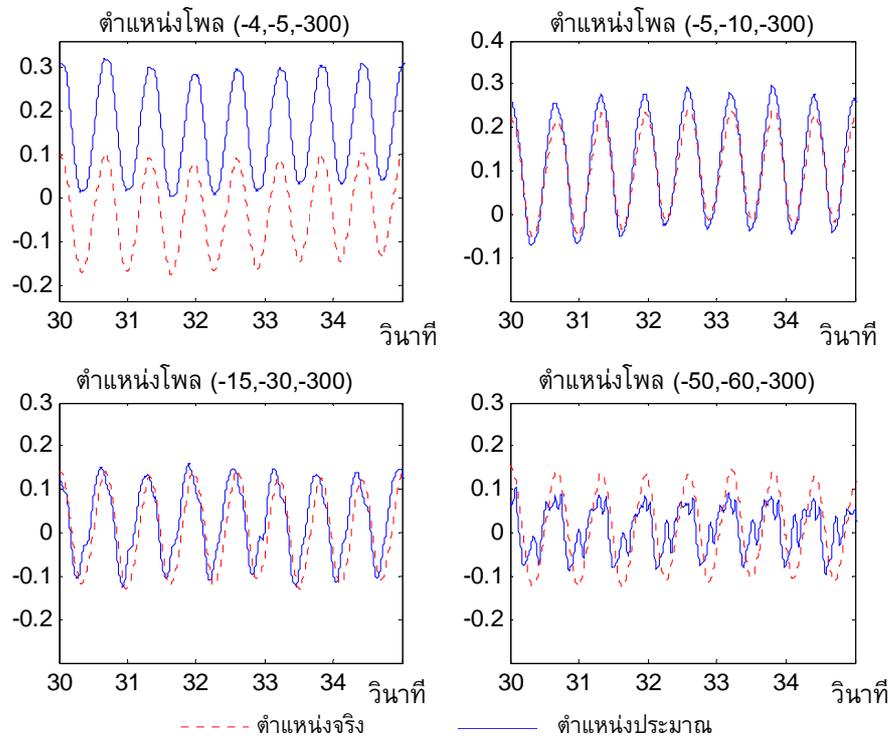
การออกแบบการจำลองที่ได้จากการวางโพลที่ตำแหน่ง $(-15, -30, -300)$ จะได้ค่าอัตราขยาย $K = [29.977, -130.051, 9446.66]$ นั้นนำมาประยุกต์ใช้จริงในการทดลองและแสดงผลดังภาพที่ 35



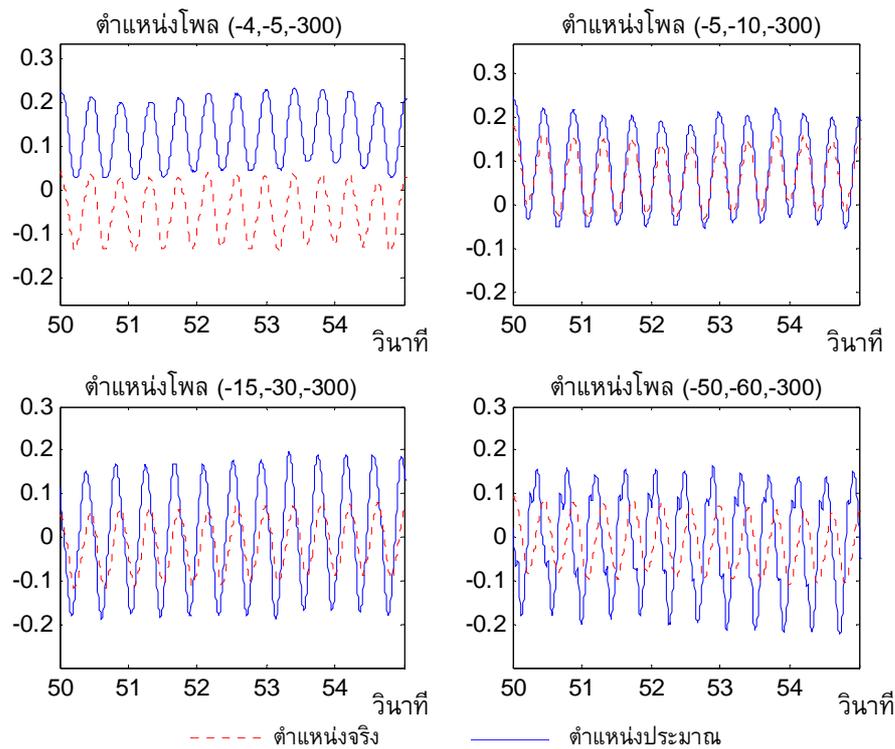
ภาพที่ 35 ผลการทดลองการวัดความเอียงด้วย Inclinometer, Rate Gyroscope และมุมประมาณ



ภาพที่ 36 ผลการทดลองตัวสังเกตสเตรตความเอียงต่อสัญญาณไซน์ความถี่ประมาณ 0.5 เฮิรต์



ภาพที่ 37 ผลการทดลองตัวสังเกตสเตรตความเอียงต่อสัญญาณไซน์ความถี่ประมาณ 1 เฮิรต์



ภาพที่ 38 ผลการทดลองตัวสังเกตสเตตความเอียงต่อสัญญาณไซน์ความถี่ประมาณ 1.5 เฮิร์ต

จากภาพที่ 35 แสดงผลการทดลองที่สัญญาณไซน์ความถี่ประมาณ 1 เฮิร์ต ซึ่งมีผลใกล้เคียงกับผลที่ได้จากการจำลอง สัญญาณจากเอนโคเดอร์เซนเซอร์ (เส้นสีแดง) เป็นสัญญาณที่มีความแม่นยำสูงและถูกยึดถือเป็นสัญญาณอ้างอิง สัญญาณที่ได้จากตัวตรวจรู้ Inclinometer (เส้นจุดสีน้ำเงิน) แสดงค่ามุมเอียงผิดพลาดสูง ส่วนสัญญาณจากการอินทิเกรต Rate Gyroscope (เส้นปะสีน้ำเงิน) แสดงผลได้แม่นยำแต่บวกด้วยค่าไบอัสที่ไม่ทราบค่า และเส้นสีน้ำเงินแสดงสัญญาณที่ได้จากการประมาณค่ามุมเอียงว่ามีความแม่นยำใกล้เคียงเอนโคเดอร์เซนเซอร์มากที่สุด

ส่วนต่อไปเป็นการแสดงถึงผลการทดลองตัวสังเกตสเตตความเอียงเมื่อออกแบบตัวสังเกตที่แตกต่างกันออกไป 4 แบบ ประกอบด้วย แบบแรกเป็นการออกแบบตัวควบคุมโดยวางตำแหน่งโพลที่ตำแหน่ง $(-4, -5, -300)$ จะได้อัตราขยาย $K=[1.332, -137.406, -1783.331]$ แบบที่สองได้จากการวางโพลที่ตำแหน่ง $(-5, -10, -300)$ ซึ่งจะได้ค่าอัตราขยายคือ $K=[3.33, -133.404, 46.668]$ แบบที่สามได้จากการวางโพลที่ตำแหน่ง $(-15, -30, -300)$ จะได้อัตราขยาย $K=[29.977, -130.051, 9446.66]$ และแบบที่สี่ได้จากการวางโพลที่ตำแหน่ง $(-50, -60, -300)$ จะได้อัตราขยาย $K=[199.852, -234.925, 31496.668]$

ผลการทดลองแสดงดังภาพที่ 36 ถึงภาพที่ 38 ในภาพที่ 36 แสดงถึงการตอบสนองของค่าประมาณจากตัวสังเกตต่อสัญญาณไซน์ความถี่ประมาณ 0.5 เฮิรต์ แสดงให้เห็นว่าตำแหน่งโพลที่ใกล้จุดกำเนิดคือ $(-50, -60, -300)$ จะให้การตอบสนองในช่วงความถี่ต่ำได้ดีที่สุด

ภาพที่ 37 แสดงการตอบสนองต่อสัญญาณไซน์ความถี่ประมาณ 1 เฮิรต์แสดงให้เห็นว่าตำแหน่งโพลที่จุดที่ได้ ออกแบบไว้คือ $(-15, -30, -300)$ มีแอมพลิจูดใกล้เคียงความจริงมากที่สุด แต่อีกสองตำแหน่งที่ใกล้จุดกำเนิดมากกว่าจะให้เฟสแม่นยำมากกว่า

ภาพที่ 38 แสดงการตอบสนองต่อสัญญาณไซน์ความถี่ประมาณ 1.5 เฮิรต์แสดงให้เห็นว่าตำแหน่งโพลที่ $(-5, -10, -300)$ จะให้การตอบสนองในช่วงความถี่สูงได้แม่นยำที่สุด ซึ่งการวางโพลที่ตำแหน่ง $(-4, -5, -300)$ นั้นไม่ได้ผลของสถานะคงตัวที่แม่นยำในทุกช่วงความถี่

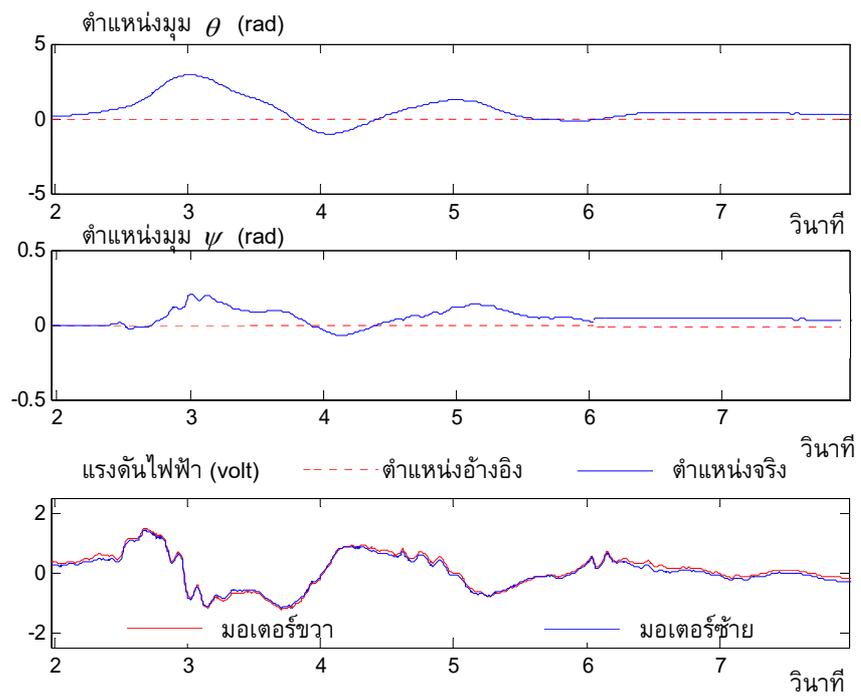
ผลการทดลองตัวควบคุมอาศัยตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุดที่มีตัวอินทิกรัล (LQR with Integrator)

จากการออกแบบตัวควบคุมจากการจำลองระบบด้วยโปรแกรม MATLAB จนได้สมรรถนะที่ต้องการแล้ว ตัวควบคุมที่เหมาะสมที่สุดที่นำมาใช้ในการทดลองคือ

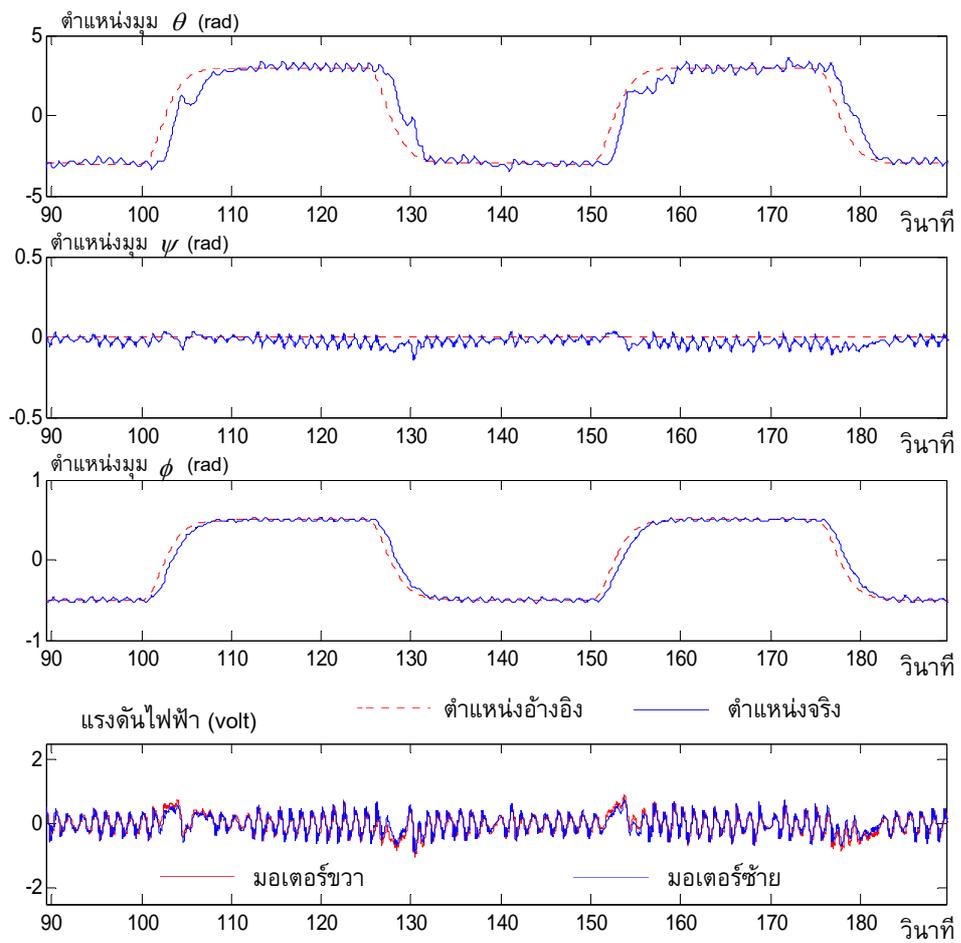
$$K_2 = \begin{bmatrix} -0.80 & -15.00 & 0 & -30.00 & -2.00 & 0 \\ -0.80 & -15.00 & 0 & -30.00 & -2.00 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.40 & 0 & -2.00 \\ -0.40 & 0 & -2.00 \end{bmatrix}$$

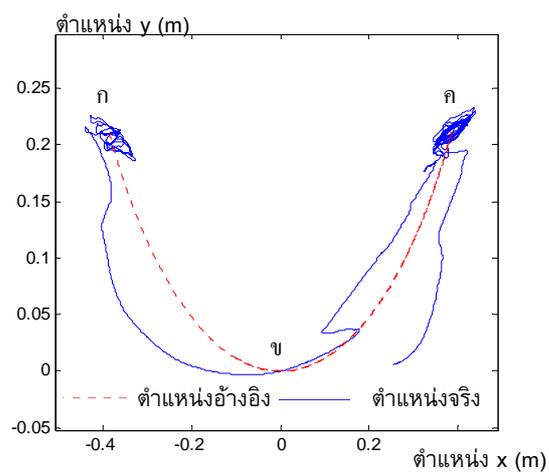
โดยแบ่งการทดลองเป็น 3 แบบคือ การรักษาเสถียรภาพ การตามรอยสัญญาณอ้างอิง และการตามรอยสัญญาณอ้างอิงโดยเพิ่มมวลให้ระบบ



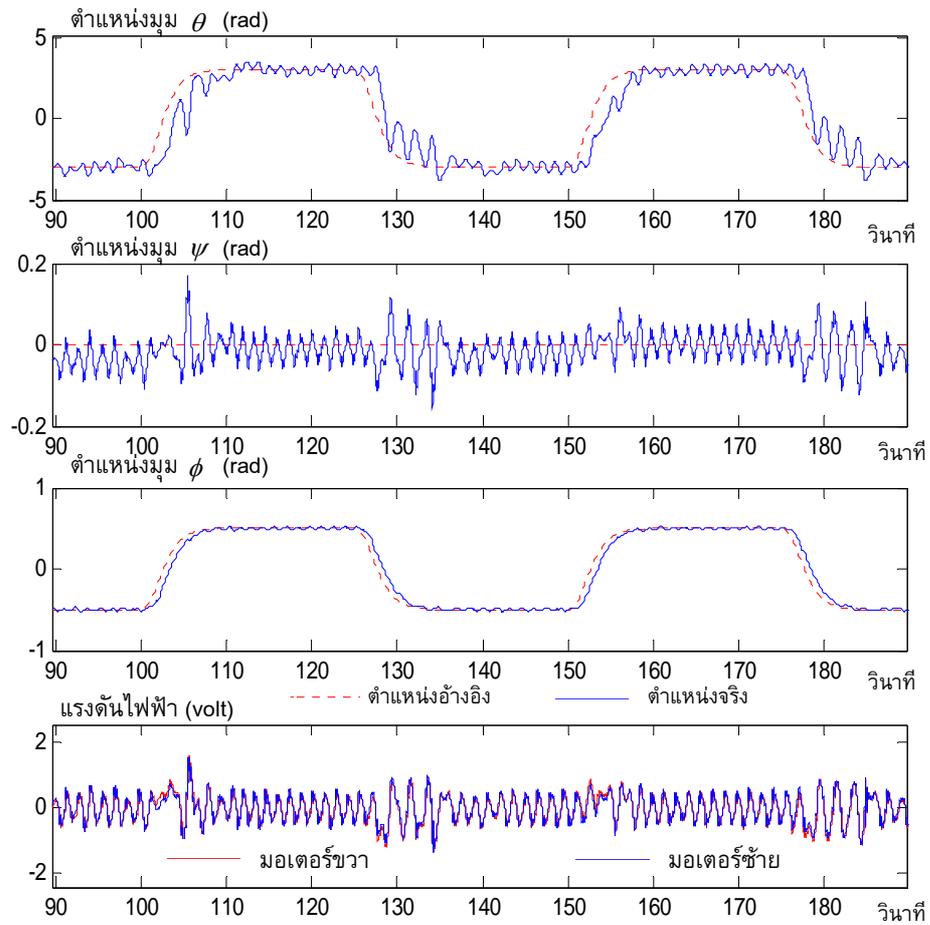
ภาพที่ 39 การทดลองการรักษาเสถียรภาพของหุ่นยนต์สองล้อ



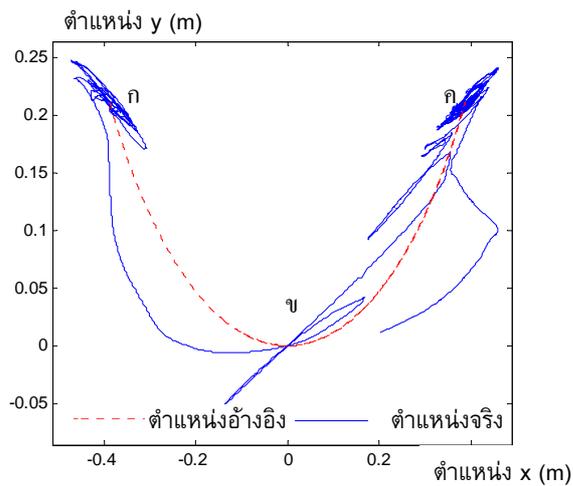
ภาพที่ 40 ผลการทดลองการติดตามค่าของหุ่นยนต์สองล้อ



ภาพที่ 41 ผลการทดลองการเคลื่อนในสองมิติของหุ่นยนต์สองล้อ



ภาพที่ 42 ผลการทดลองการติดตามค่าของหุ่นยนต์สองล้อที่มวลเพิ่ม



ภาพที่ 43 ผลการทดลองการเคลื่อนในสองมิติของหุ่นยนต์สองล้อที่มวลเพิ่ม

ในการทดลองที่ 1 เป็นการทดลองการรักษาเสถียรภาพของระบบ ซึ่งแตกต่างเล็กน้อยกับการจำลอง โดยค่าเริ่มต้นของทุกสแตตเป็นศูนย์ จากนั้นจึงให้แรงผลักดันบนของหุ่นยนต์ให้ล้มลงที่เวลาประมาณ 2 ถึง 2.5 วินาที ระบบที่ได้รับแรงกระทำจะสามารถรักษาเสถียรภาพได้ในระยะเวลาประมาณ 3.5 วินาที ผลที่ได้แสดงด้วยภาพที่ 39

จากภาพที่ 39 รูปบนแสดงการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ ตำแหน่งมุม θ แสดงผลลักษณะเดียวกับการจำลองคือจะเป็นระบบไม่ใช้มุมเฟสน้อยที่สุด หุ่นยนต์เคลื่อนที่ไปในทิศทางตรงกันข้ามก่อนที่จะเข้าสู่จุดสมดุล รูปกลางแสดงตำแหน่งมุม ψ คือการเอียงของหุ่นยนต์ โดยหุ่นยนต์สามารถรักษาเสถียรภาพได้โดยหลังจากที่เวลา 2.5 วินาที มุม $\psi = 0.2$ เรเดียน ระบบพยายามหวนมุมเอียงทำให้โอเวอร์ชูตที่ $\psi = -0.1$ เรเดียนและกลับเข้าสู่จุดสมดุลในระยะเวลา 3 วินาที รูปล่างแสดงแรงดันไฟฟ้าของมอเตอร์ ซึ่งมอเตอร์ทั้งสองเคลื่อนที่ด้วยแรงดันไฟฟ้าเท่ากัน ที่เวลา 2.5 วินาทีจะมีแรงดันไฟฟ้าสูงสุดแต่ไม่เกินกว่า ± 2.5 โวลต์

การทดลองที่ 2 เป็นการทดลองการติดตามค่าเช่นเดียวกับการออกแบบด้วยการจำลองด้วยโปรแกรม MATLAB สัญญาณที่ต้องการติดตามหรือสัญญาณอ้างอิงมีลักษณะเดียวกัน ผลที่ได้แสดงดังภาพที่ 40

รูปบนในภาพที่ 40 แสดงการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์หรือมุม θ ด้วยเส้นสีฟ้า โดยสัญญาณอ้างอิงเป็นเส้นปะสีแดง การเคลื่อนที่ไปด้านหน้าและด้านหลังมีการตอบสนองช้าเล็กน้อยเนื่องจากต้องย้ายตำแหน่งมุมเอียงให้อยู่ในทิศทางเดียวกับทิศทางเคลื่อนที่ก่อน ผลที่ได้แสดงการแกว่งไปมาเนื่องมาจากแรงเสียดทานและน้ำหนักของสายไฟ

รูปที่สอง เส้นปะสีแดงเป็นศูนย์หมายถึงสัญญาณอ้างอิง ตำแหน่งมุมเอียงแสดงด้วยเส้นสีฟ้า มุมเอียงจะมีค่าเป็นบวกสำหรับการเคลื่อนที่ไปด้านหน้า และเป็นลบสำหรับการเคลื่อนที่กลับหลัง แต่ผลที่ได้แสดงไม่ชัดเจนเนื่องมาจากน้ำหนักของสายไฟที่มีมากส่งผลให้เกิดการแกว่งของมุมเอียงอยู่ตลอดเวลา

รูปที่สามแสดงถึงความแม่นยำในการติดตามค่าของตำแหน่งมุมเอียง (ϕ) เส้นสีฟ้ากับสัญญาณอ้างอิงเส้นสีแดง เนื่องจากการควบคุมเอียงจะได้รับผลจากมุมเอียงน้อย หรือระบบการเอียงจะแยกออกจากการควบคุมมุมเอียงได้มาก จะเห็นได้ว่าการควบคุมมุมเอียงมีประสิทธิภาพ

รูปที่สี่แสดงแรงดันไฟฟ้า ซึ่งเนื่องจากสัญญาณควบคุมดังกล่าว ไม่ใช่สัญญาณที่มีรูปร่างเหมือนสัญญาณดิจิทัล แรงดันไฟฟ้าจะไม่ถูกกระตุ้นในทันที ทำให้ผลที่ได้คือใช้พลังงานไฟฟ้าต่ำ แต่แรงดันไฟฟ้ามีการแกว่งอยู่ตลอดเวลาเพื่อรักษาการแกว่งของมุมเอียง

ภาพที่ 41 แสดงการเคลื่อนที่ในสองมิติ การเคลื่อนที่เริ่มจากตำแหน่ง ก. ไปยัง ข., ค. และ ข. ตามลำดับ โดยที่ตำแหน่งสมมูลหรือจุด ก. และ ค. แสดงให้เห็นว่ามีการแกว่ง และการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ตามเส้นทางการเคลื่อนที่อ้างอิงมีความผิดพลาดเนื่องจากแรงเสียดทานและน้ำหนักสายไฟเป็นหลัก

การทดลองอันดับสุดท้ายคือการติดตามค่าโดยเพิ่มมวลให้กับระบบ การเพิ่มมวล 680 กรัม ทำให้มวลตัวถังเพิ่มและตำแหน่งจุดศูนย์กลางถ่วงเปลี่ยนไป ในการทดลองนี้เป็นการทดสอบความทนทานของระบบควบคุมเมื่อแบบจำลองนั้นเปลี่ยนไป

ภาพที่ 42 แสดงการติดยุทธศาสตร์สัญญาณที่มีลักษณะเกี่ยวกับการทดลองที่ผ่านมา ผลการทดลองนี้เมื่อเปรียบเทียบกับทดลองที่ผ่านมา การควบคุมมุม θ มีการตอบสนองช้าลงเนื่องจากน้ำหนักที่เพิ่มและมีการแกว่งมากขึ้นอันเนื่องมาจากการควบคุมมุมเอียง ดังรูปที่สองการควบคุมมุมเอียงหรือมุม ψ แสดงผลชัดเจนว่า เมื่อมวลมากขึ้นในการควบคุมระบบด้วยตัวควบคุมเดิมทำให้มีการแกว่งของมุมเอียงมากขึ้นอย่างชัดเจน ในขณะที่รูปที่สามยังคงแสดงความแม่นยำสำหรับการควบคุมมุมเอียงหรือมุม θ ที่ไม่แตกต่างกับการทดลองก่อนหน้านี้ รูปที่สี่แสดงแรงดันไฟฟ้าของมอเตอร์ซ้ายและขวานั้นเพิ่มมากกว่าการทดลองที่ผ่านมาอย่างชัดเจนเนื่องจากมวลที่เพิ่มขึ้นโดยตรง ซึ่งมอเตอร์ต้องใช้แรงบิดมากขึ้นในการควบคุมระบบนี้

ภาพที่ 43 แสดงการเคลื่อนที่ในสองมิติ การเคลื่อนที่เริ่มจากตำแหน่ง ก. ไปยัง ข., ค. และ ข. ตามลำดับ ผลการทดลองนี้เมื่อเปรียบเทียบกับทดลองที่ผ่านมา การทดลองนี้แสดงผลที่ตำแหน่งสมมูลหรือ ก. และ ค. มีการแกว่งของระบบมากกว่า และการเคลื่อนที่ตามเส้นทางการเคลื่อนที่อ้างอิงมีความผิดพลาดมากกว่า

สรุปและข้อเสนอแนะ

สรุป

การควบคุมหุ่นยนต์สองล้อเป็นปัญหาที่ระบบมี 3 เอาต์พุต และมี 2 อินพุต และการควบคุมเอาต์พุตสองตัวที่มีความเกี่ยวโยงกันมาก คือการควบคุมการเคลื่อนที่ไปด้านหน้าและหลังหรือมุม θ กับความเอียงหรือมุม ψ ซึ่งหุ่นยนต์จะสามารถเคลื่อนที่ไปด้านหน้าได้ต่อเมื่อหุ่นยนต์เอียงไปด้านหน้า ในขณะที่การควบคุมมุมเอียงไม่เกี่ยวข้องกันกับมุมเอียง ซึ่งการออกแบบระบบควบคุมนั้น ทำได้ยากจากการลองผิดลองถูกค่าคงที่ทั้งหมดที่มีหลายตัว

การออกแบบตัวควบคุมแบบสุ่มค่าเกินแบบ PID ที่เหมาะสำหรับระบบที่มี 1 อินพุต และ 1 เอาต์พุต สามารถทำได้จากการลองผิดลองถูก แต่สำหรับระบบที่มีสเตตมากกว่านั้นจะทำได้ยาก การออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธีการวางโพลในโดเมนเวลาหรือวิธีของลูตโกล์สในโดเมนความถี่เป็นการสุ่มออกแบบให้ระบบมีเสถียรภาพ แต่การใช้ตัวคุมค่ากำลังสองเป็นการออกแบบในโดเมนเวลา ที่ออกแบบให้ค่าสมรรถนะมีค่าน้อยที่สุด ซึ่งคือค่าผลรวมของเทอม Q และเทอม R มีค่าต่ำที่สุด ในกรณีที่มีเมตริกซ์ Q มีค่ามาก แสดงถึงการให้ความสำคัญของการควบคุมค่าผิดพลาดระหว่างเอาต์พุตและสัญญาณอ้างอิงให้มีค่าน้อยเพื่อให้ระบบมีการตอบสนองที่ดี และในกรณีที่มีเมตริกซ์ R มีค่ามาก แสดงถึงการให้ความสำคัญของการควบคุมค่าสัญญาณควบคุมให้มีค่าต่ำ หรือมีการใช้พลังงานน้อย และสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในเชิงพาณิชย์ได้เนื่องจากสัญญาณควบคุมที่ได้จากนั้นเป็นผลคูณของค่าคงที่กับสเตตซึ่งไม่กินทรัพยากรคอมพิวเตอร์มาก

การเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์หรือมุม θ มีการตอบสนองช้าเนื่องจากต้องย้ายตำแหน่งมุมเอียงให้อยู่ในทิศทางเดียวกับทิศทางการเคลื่อนที่ก่อน ในขณะที่การควบคุมมุมเอียงหรือมุม ψ สามารถควบคุมได้อย่างมีประสิทธิภาพเนื่องจากไม่เกี่ยวข้องกันกับมุมเอียง การออกแบบตัวควบคุมด้วยตัวคุมค่ากำลังสองที่ต่อเติมตัวอินทิกรัลนั้นสามารถทำให้การควบคุมหุ่นยนต์สองล้อดีขึ้นกว่าเดิม โดยผลลัพธ์ของการควบคุมแสดงดังนี้ การควบคุมให้หุ่นยนต์เข้าสู่สภาวะคงตัวจากค่าเริ่มต้นที่กำหนดนั้นมีระยะเวลาคงตัวต่ำลง ผลการควบคุมการเคลื่อนที่ไปด้านหน้าและด้านหลัง หรือมุม θ มีการตอบสนองต่อสัญญาณได้แม่นยำมากขึ้น และการควบคุมมุมเอียงทำได้ดีกว่าเดิม ในขณะที่มุมเอียงของหุ่นยนต์เพิ่มขึ้นเล็กน้อย และใช้พลังงานเพิ่มขึ้นเล็กน้อยเพื่อขับเคลื่อนให้หุ่นยนต์เคลื่อนที่ได้รวดเร็วขึ้น

ในการทดลองตัวควบคุมนั้นผลที่ได้มีลักษณะใกล้เคียงกับการจำลอง แต่มีการแกว่งเนื่องมาจากแรงเสียดทานภายในระบบและน้ำหนักของสายไฟที่แกว่ง แรงดันไฟฟ้าอยู่ขอบเขตที่จำกัดคือ ± 2.5 โวลต์ และเมื่อเพิ่มมวล 650 กรัมกับระบบ การควบคุมการเคลื่อนที่ทำได้ช้าลง การแกว่งของมุมเอียงมีมากขึ้น ส่งผลให้กินกำลังไฟฟ้าเพิ่มมากขึ้นด้วย แต่การควบคุมมุมเอียงยังมีความแม่นยำไม่แตกต่างจากเดิม

การนำตัวสังเกตแบบอันดับเต็มมาใช้นั้นมีประโยชน์เพื่อละทิ้งการใช้ตัวตรวจรู้สำหรับการวัดสเตตซึ่งเป็นอุปกรณ์ที่มีราคาค่อนข้างสูงในระบบโดยเฉพาะเมื่อระบบมีสเตตจำนวนมากหรือไม่สามารถวัดสเตตได้ ในการจำลองแสดงผลได้ของการประมาณค่าได้แม่นยำ แม้กำหนดให้แบบจำลองมีความไม่แน่นอน 30 เปอร์เซ็นต์ และตัวสังเกตแบบลดอันดับเหมาะสำหรับการประมาณค่าเฉพาะสเตตที่ไม่ทราบค่า ผลดีคือการประหยัดทรัพยากรในการคำนวณ และผลที่ได้แสดงผลของการประมาณค่าได้แม่นยำเหมือนกัน การนำตัวสังเกตนั้นไปใช้จริงพบว่ายังไม่สามารถทำได้เนื่องจากระบบมีความไม่แน่นอนสูง ได้แก่ แบบจำลองที่ถูกแปลงจากระบบไม่เชิงเส้นเป็นระบบเชิงเส้น รวมทั้งมีสิ่งรบกวนภายนอกมาก ดังนั้นในการทดลองนั้นจะสามารถควบคุมหุ่นยนต์ได้ในชั่วขณะหลังจากนั้นหุ่นยนต์ก็จะล้มลงในที่สุด

การวัดความเอียงโดยใช้ตัวตรวจรู้ Inclinometer แสดงผลที่แม่นยำเฉพาะในแบนด์วิธต่ำและการวัดความเอียงจากการอินทิเกรตสัญญาณของตัวตรวจรู้ Rate Gyroscope ให้ผลแม่นยำต่อแบนด์วิธสูง แต่เกิดการเบี่ยงเบนของสัญญาณจึงไม่สามารถนำมาใช้ได้ การใช้ตัวสังเกตแบบลูนเบอร์เกอร์ประมาณค่ามุมเอียงเป็นการปรับแก้ค่าสัญญาณของตัวตรวจรู้ Inclinometer และตัวตรวจรู้ Rate Gyroscope เพื่อให้ได้สัญญาณของความเอียงที่มีความแม่นยำมากขึ้น และสามารถตอบสนองต่อแบนด์วิธสูงได้ดี

จากการออกแบบการวัดความเอียงดังกล่าว แสดงผลที่น่าพอใจเหมือนกันทั้งในการจำลองและการทดลองในช่วงความถี่ 0.1 ถึง 1 เฮิรตซ์ โดยการเลือกตำแหน่งโพลที่แตกต่างกันไปนั้นแสดงผลคือ เมื่อวางตำแหน่งโพลที่ใกล้จุดกำเนิดจะตอบสนองดีในเฉพาะช่วงความถี่ต่ำ และเมื่อวางตำแหน่งโพลใกล้จุดกำเนิดจะตอบสนองได้ดีในช่วงความถี่สูง แต่เมื่อวางตำแหน่งโพลใกล้จุดกำเนิดมากเกินไป ผลของการประมาณมุมเอียงจะได้ผลใกล้เคียงกับการอินทิเกรตสัญญาณของตัวตรวจรู้ Rate Gyroscope ที่มีการเบี่ยงเบนสัญญาณ

ข้อเสนอแนะ

การออกแบบระบบควบคุมนี้อยู่พื้นฐานของการควบคุมเชิงเส้น การหาเอกลักษณ์ของมอเตอร์และตัวตรวจรู้ Inclinometer ด้วยกำลังเชิงเส้นน้อยที่สุดให้ผลคลาดเคลื่อนบางส่วน การหาแบบจำลองของระบบด้วยสมการลากรางจ์อาจจะเลยพลังงานในบางส่วนไป และการประมาณระบบดังกล่าวเป็นเชิง ทำให้ผลการควบคุมที่ห่างจากมุมศูนย์องศามากขึ้นยังมีความคลาดเคลื่อนมากขึ้น การปรับเปลี่ยนให้เป็นระบบไม่เชิงเส้นนั้นน่าจะทำให้สามารถควบคุมหุ่นยนต์ได้ดีขึ้น รวมถึงการใช้แบบแปรผันค่าได้ (adaptive control) เช่น Neural Network หรือ Fuzzy Logic ก็น่าจะเป็นอีกทางที่เหมาะสม

การควบคุมหุ่นยนต์สองล้อเป็นการควบคุมการทรงตัว ในขณะที่มีการควบคุมการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ระบบอื่นๆ มากมายที่มีลักษณะใกล้เคียงกัน เช่น หุ่นยนต์คล้ายมนุษย์ที่มีการเคลื่อนที่ด้วยการใช้สองขา การเอียงตัวของมอเตอร์ไซค์ในขณะที่เข้าโค้ง เป็นต้น การนำเอาหุ่นยนต์สองล้อไปใช้ในปัจจุบันยังมีอยู่น้อย แต่ก็สามารถพบเห็นได้มากขึ้น ตัวอย่างเช่น ในประเทศญี่ปุ่นนำเอาหุ่นยนต์สองล้อสำหรับเป็นหุ่นยนต์ช่วยเหลือในบ้านและหุ่นยนต์สำหรับเสิร์ฟอาหาร ในภัตตาคาร นอกจากนั้นคือ ยานพาหนะส่วนบุคคล Segway หุ่นยนต์คู่หู Winglet รวมถึงสเก็ตบอร์ดที่เคลื่อนที่ด้วยมอเตอร์ หรือรถสี่ล้อที่สามารถทรงตัวได้ขณะที่ยกล้อหน้าขึ้นทำให้เคลื่อนที่ได้คล่องตัวมากขึ้น และบางครั้งก็พบเห็นรถเข็นคนพิการที่สามารถข้ามสิ่งกีดขวางได้

เอกสารและสิ่งอ้างอิง

- วโรตม ผู้จินดา. 2550. การวิเคราะห์และออกแบบระบบควบคุมทางวิศวกรรม.
มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, กรุงเทพมหานคร
- วิบูลย์ แสงวีระพันธุ์ศิริ. 2548. การควบคุมระบบพลศาสตร์. พิมพ์ครั้งที่ 2. จุฬาลงกรณ์
มหาวิทยาลัย, กรุงเทพมหานคร
- Akesson, J., A. Blomdell and R. Brarun. 2006. Design and Control of YAIP – an Inverted
Pendulum on Two Wheels Robot. **Proceedings of the 2008 IEEE International
Conference on Control Applications**, October 4-6, 2006, Munich, Germany.
- Anonymous. 1935. Gyro-wheel car zooms along on giant tires at 116 mph. **Modern Mech.
Inventions**, 14.
- Baerveldt, A. J. and R. Klang. 1996. A low-cost and low-weight attitude estimation system for
an autonomous helicopter, pp 391-395. **Proceedings of IEEE Conf. Intelligent
Engineering System**.
- Chatlatanagulchai, W., B. Inseemeeesak and W. Siwakosit. 2008. Quantitative feedback control
of a pendulum with uncertain payload. **Journal of Research in Engineering and
Technology**, 5(1).
- Grasser, F., A. D. Arrigo, S. Colombi and A. Ruffer. 2002. JOE: A Mobile, Inverted Pendulum.
IEEE Transactions on Industrial Electronics, 49(1).
- Ha, Y. and S. Yuta. 1996. Trajectory Tracking Control for Navigation of The Inverse Pendulum
Type Self-contained Mobile Robot. **Robotic and Autonomous System**, 17(1-2): 65-80.
- Hashimoto, M. and F. Oba. 1993. Dynamic control approach for motion coordination of
multiple wheeled mobile robots transporting a single object, **Proceedings of 1993
IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems: 1944-1951**.

- Imamura, R., T. Takei and S. Yuta. 2008. Sensor Drift Compensation and Control of a Wheeled Inverted Pendulum Mobile Robot, pp 137-142. **Proceedings of Advanced Motion Control, 10th IEEE International Workshop.**
- Jeong, S. and Takahashi, T. 2007. Wheeled Inverted Pendulum Type Assistant Robot: Inverted Mobile, Standing, and Sitting Motions. **Proceedings of the International Conference on Intelligent Robots and Systems**, Oct 29- Nov 2, 2007, San Diego, CA, USA.
- Kaiko, M., T. Miyashita, N. Mitsunaga, H. Ishiguro and N. Hagita. 2006. Natural Reflexive Behavior for Wheeled Inverted Pendulum Type Humanoid Robots. **The 15th IEEE International Symposium on Robot and Human Interactive Communication (RO-MAN06)**, September 6-8, 2006, Hatfield, UK.
- Kim, Y. H., S. H. Kim and Y. K. Kwak. 2005. Dynamic Analysis of a Nonholonomic Two-wheeled Inverted Pendulum Robot, pp. 505-513. **Proceedings of the 8th on Artificial Life and Robotics**, 21(3).
- Ko, A., H.Y.K. Lau and T.L. 2005. Lau SOHO security with mini self-balancing robots. **Industrial Robot: An International Journal**, 32(6) (2005): 492–498
- Leavitt, J., A. Sideris and J.E. Bobrow. 2006. High Bandwidth Tilt Measurement Using Low-Cost Sensors. **IEEE/ASME Transactions on Mechatronics**, 11(3).
- Lewis, F. L. And V. L. Syrmos. 1995. **Optimal Control**. 2nd edition. John Wiley & Sons, Inc. New York.
- Lin, S. C., C. C. Tsai and W. L. Luo. 2007. Adaptive Neural Network Control of a Self-balancing Two-wheeled Scooter, pp. 869-873. **The 33rd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society (IECON)**, Nov. 5-8, 2007, Taipei, Taiwan.
- Morrell, B. J. and D. Field. 2007. Design of a closed loop controller for a two wheeled balancing transporter, pp 4059-4064. **Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems**. Oct 29 - Nov 2, 2007 San Diego, CA, USA.

- Nawawi, S. W., M. N. Ahmad and J. H. S. Osman. 2007. Development of a Two-Wheeled Inverted Pendulum Mobile Robot. **Proceedings of the 5th Student Conference on Research and Development – SCORED 2007**, 11-12 December, Malaysia.
- Ogata, K. 1997. **Modern Control Engineering**. 3rd Edition. Prentice-Hall. New York.
- Rehbinder, H. and X. Hu. 2004. Drift-free attitude estimation for accelerated rigid bodies. **Automatica**, 40: 653-659.
- Ren, T.J., T.C. Chen and C.T. Chen. 2008. Motion control for a two-wheeled vehicle using a self-tuning PID controller. **Control Engineering Practice**, 16: 365 – 375.
- Shiroma, N., O. Matsumoto, S. Kajita. And K. Tani. 1996. Cooperative Behavior of a Wheeled Inverted Pendulum for Object Transportation. **Proceeding of IROS 96**.
- Sasaki, M., N. Yanagihara, O. Matsumoto, K. Komoriya. 2005. Steering control of the personal riding-type wheeled mobile platform (PMP), pp. 1697- 1702. **Conference on Intelligent Robots and Systems, 2005 IEEE/RSJ International. (IROS 2005)**. 2-6 Aug. 2005.
- Vaganay, J., M. J. Aldon and A. Fournier. 1993. Mobile robot attitude estimation by fusion of inertial data, pp. 277-282. **Proceedings of IEEE. Internation Conference of Robot and Automation**. 1. 2-6 May 1993, Atlanta, GA, USA.
- Yomamoto, Y. 2008. **NXTway-GS (Self-Balancing Two-Wheeled Robot) Controller Design**.
<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/loadFile.do?objectId=19147>
- Yano, M., S. Kuramochi and H. Ikeda. 1998. Evaluation of the Robustness of H_{∞} Control Design versus Pole Allocation Control Design Using of a Wheeled Inverted Pendulum. **AMC' 98**.

ภาคผนวก

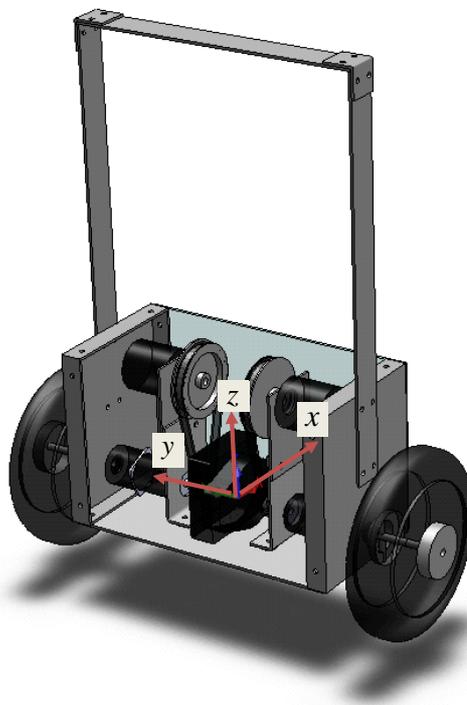
ภาคผนวก ก

การหาค่าพารามิเตอร์ด้วยโปรแกรมเขียนแบบสามมิติ

โมเมนต์ความเฉื่อยเป็นตัวแปรที่สำคัญสำหรับการวิเคราะห์พลศาสตร์ทางกลของหุ่นยนต์สองล้อ การหาโมเมนต์ความเฉื่อยสำหรับวัตถุทรงเรขาคณิตสามารถหาได้จากสูตรทางคณิตศาสตร์ซึ่งมีอยู่ในหนังสือกลศาสตร์วิศวกรรมทุกเล่ม แต่สำหรับรูปร่างที่ซับซ้อนมากขึ้นการคำนวณนี้อาจยุ่งยาก โปรแกรมเขียนแบบสามมิติเป็นอีกทางเลือกสำหรับการแก้ปัญหาดังกล่าว สำหรับงานวิจัยนี้จึงอาศัยโปรแกรมเขียนแบบสามมิติ SolidWorks สำหรับการหาโมเมนต์ความเฉื่อย รวมถึงการสามารถหาจุดศูนย์กลางถ่วงของหุ่นยนต์สองล้อด้วย

ในแต่ละชิ้นส่วนของหุ่นยนต์อยู่ด้วยระยะและซึ่งนำหน้ากันอย่างละเอียด เพื่อนำมาเขียนแบบสามมิติในแต่ละชิ้นส่วน โดยในโปรแกรมดังกล่าว ส่วนของชิ้นงานเรียกว่า Part ซึ่งค่านำหน้าและขนาดถูกนำมาคำนวณความหนาแน่นโดยเพื่อระบุภายในโปรแกรม

การเขียนแบบของส่วนประกอบเรียกว่า Assembly ซึ่งประกอบมาจากชิ้นงานต่างๆที่เราเขียนในขั้นตอนก่อนหน้านี้ จากนั้นสร้างแกนพิกัด (x, y, z) ดังแสดงในภาพฉนวนกที่ ก1 จึงสามารถคำนวณค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของหุ่นยนต์สองล้อต่อแกนพิกัดต่างๆ และสามารถหาค่าจุดศูนย์กลางถ่วงของตัวโครงหุ่นยนต์จากค่าเฉลี่ยแบบถ่วงน้ำหนักของแต่ละชิ้นงาน



ภาพฉนวนกที่ ก1 รูป 3 มิติของหุ่นยนต์สองล้อและแกนพิกัด (x_0, y_0, z_0)

ค่าพารามิเตอร์ที่คำนวณได้

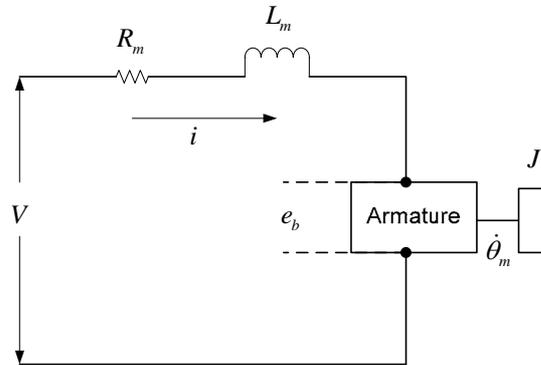
L	= ระยะห่างของจุดศูนย์กลางถ่วงในแนวแกน z_0	= 0.04895	m
J_{by}	= โมเมนต์ความเฉื่อยตัวถ่วงรอบแกน y_0	= 0.0173198	kgm^2
J_{wy}	= โมเมนต์ความเฉื่อยของล้อรอบแกน y_0	= 0.0013824	kgm^2
J_{bz}	= โมเมนต์ความเฉื่อยตัวถ่วงรอบแกน z_0	= 0.0117333	kgm^2
J_{wz}	= โมเมนต์ความเฉื่อยของล้อรอบแกน z_0	= 0.0144355	kgm^2
J_r	= โมเมนต์ความเฉื่อยของพูลเลย์ทาดเอน โคลดเคอร์	= 0.0000578	kgm^2

ภาคผนวก ข

การหาเอกลักษณ์ของระบบ

การหาเอกลักษณ์ของมอเตอร์กระแสตรง

จากวงจรสมมูลของมอเตอร์กระแสตรงดังภาพผนวกที่ ข1



ภาพผนวกที่ ข1 วงจรสมมูลของมอเตอร์กระแสตรง

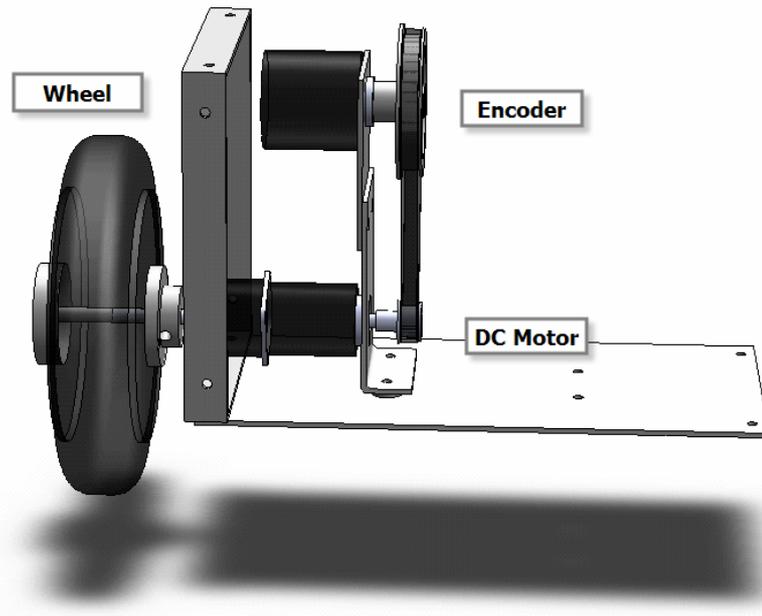
โดยแรงดันป้อนเข้าเท่ากับ (V) กระแสไฟฟ้าป้อนเข้า (i) ค่าความต้านทานของมอเตอร์ (R_m) ค่าความเหนี่ยวนำของมอเตอร์ (L_m) ค่าคงที่แรงดันไฟฟ้าย้อนกลับมอเตอร์ (k_b) และความสัมพันธ์ของแรงดันไฟฟ้าย้อนกลับ ($e_b = K_b \dot{\theta}$) สามารถเขียนความสัมพันธ์ของวงจรดังกล่าวได้คือ

$$V = iL_m + R_m i + K_b \dot{\theta}_m \quad (114)$$

เนื่องจากค่าความเหนี่ยวนำมอเตอร์ L_m มีค่าต่ำมากเมื่อเทียบกับพจน์อื่นในสมการจึงประมาณเท่ากับศูนย์ได้ k_t คือค่าคงที่แรงบิดมอเตอร์ และจากความสัมพันธ์ของแรงบิดมอเตอร์ (T_m) กับกระแสไฟฟ้าป้อนเข้า ($T_m = nK_t i$) และสมการที่ (114) จะได้

$$T_m = nK_t i = \frac{nK_t V}{R_m} - \frac{nK_t K_b \dot{\theta}_m}{R_m} \quad (115)$$

การหาค่าพารามิเตอร์ของมอเตอร์กระแสตรงวิเคราะห์โดยการพิสูจน์เอกลักษณ์ระบบด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ออกแบบการทดลองจากอุปกรณ์ดังภาพผนวกที่ ข2



ภาพนวกที่ ข2 การทดลองการพิสูจน์เอกลักษณ์ของมอเตอร์กระแสตรง

อุปกรณ์ถูกติดตั้งกับระบบป้อนเข้าหนึ่งสัญญาณผ่านมอเตอร์กระแสตรงและหนึ่งสัญญาณป้อนกลับผ่านเอนโคเดอร์เซนเซอร์ และสมการการเคลื่อนที่ระบบนี้สามารถเขียนได้อยู่ในรูป

$$T_m = (J_w + n(J_m + J_g) + n_2 n(J_e + J_r)) \ddot{\theta}_w \quad (116)$$

แทนค่าแรงบิดมอเตอร์ (115) ในสมการที่ (116) จะได้

$$\frac{nK_t V}{R_m} - \frac{nK_t K_b \dot{\theta}_m}{R_m} = T_m = (J_w + n(J_m + J_g) + nn_2(J_e + J_r)) \ddot{\theta}_w$$

$$V = \frac{R_m}{nK_t} (J_w + n(J_m + J_g) + nn_2(J_e + J_r)) \ddot{\theta}_w + K_b \dot{\theta}_m$$

$$V = [\ddot{\theta}_w, \dot{\theta}_m] [A \ B]^T$$

สมการดังกล่าวอยู่รูปสำหรับให้วิธีการของกำลังสองน้อยที่สุดคือ

$$Y = \Phi \Theta$$

โดย

$$\Phi \in \mathbb{R}^{n \times 2} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_w & \dot{\theta}_m \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \Theta \in \mathbb{R}^{3 \times 1} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}, Y \in \mathbb{R}^{n \times 1} = \begin{bmatrix} V \\ \vdots \end{bmatrix}$$

เมื่อ n คือ จำนวนของข้อมูลที่ได้จากการทดลองการพิสูจน์เอกลักษณ์ระบบ สมการดังกล่าวกำหนดมาเพื่อให้ค่าความผิดพลาด (E) มีค่าน้อยที่สุดเมื่อ E สอดคล้องกับสมการ

$$E = \frac{(Y - \Phi\Theta)^2}{2}$$

จะได้สมการ
$$\hat{\Theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y \quad (117)$$

สำหรับการทดลองนี้จะสร้างสัญญาณป้อนเข้ามอเตอร์กระแสตรงเป็นสัญญาณไซน์ที่แปรผันความถี่สัญญาณจาก 0.1 เฮิร์ต ถึง 1 เฮิร์ตภายในระยะเวลา 60 วินาที เพื่อให้ค่าที่ได้เป็นค่าที่ครอบคลุมช่วงความถี่ทำงานของระบบ สัญญาณป้อนกลับจากเอนโคเดอร์เช่นเซอร์คือค่า Φ สามารถคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ ($\hat{\Theta}$) ได้จากสมการที่ (117) และจากการทดลอง 35 ครั้ง พบว่าค่าความเบี่ยงมาตรฐานของข้อมูลต่ำกว่า 8.3×10^{-5} และค่าเฉลี่ยของข้อมูลดังกล่าวคือ

0.013794265 สำหรับค่าสัมประสิทธิ์ A ล้อซ้าย

0.004129229 สำหรับค่าสัมประสิทธิ์ B ล้อซ้าย

0.013444875 สำหรับค่าสัมประสิทธิ์ A ล้อขวา

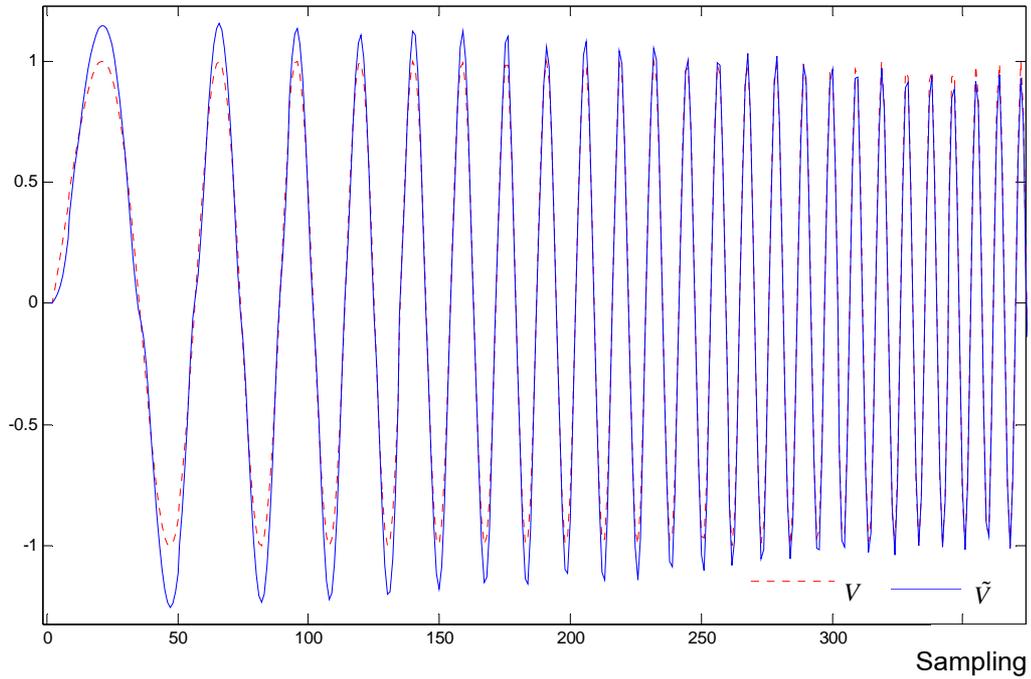
0.004420931 สำหรับค่าสัมประสิทธิ์ B ล้อขวา

ค่าพารามิเตอร์ของมอเตอร์ที่ได้คือ

$$\begin{aligned} K_{b_l} &= 0.004129229, & K_{b_r} &= 0.004420931 \\ \left(\frac{K_t}{R_m} \right)_l &= 0.003718956, & \left(\frac{K_t}{R_m} \right)_r &= 0.003815600 \end{aligned}$$

ภาพผนวกที่ ข3 แสดงการจำลองระบบด้วยค่าพารามิเตอร์ดังกล่าว โดยใช้ค่าเอาต์พุตของระบบเพื่อหาค่าแรงดันประมาณ (\tilde{V}) และนำมาเปรียบเทียบกับแรงดันจริงที่ป้อนเข้ากับระบบ พบว่าแรงดันทั้งสองแตกต่างกันเพียงเล็กน้อย

สัญญาณควบคุม (โวลต์)

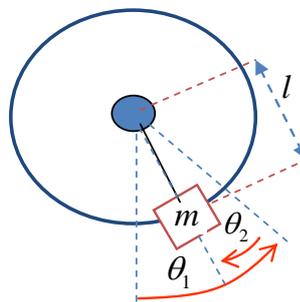


ภาพผนวกที่ ข3 ผลการทดสอบความแม่นยำการหาเอกลักษณ์ของมอเตอร์กระแสตรง

การหาเอกลักษณ์ของตัวตรวจรู้วัดความเอียง Inclinometer

จากสมการพลศาสตร์ของตัวตรวจรู้ Inclinometer ดังแสดงในภาพผนวกที่ ข4 คือ

$$J(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) = c\dot{\theta}_2 - mgl \sin(\theta_1 - \theta_2) - ml(\ddot{y} \sin(\theta_1 - \theta_2)) + \ddot{x} \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (118)$$



ภาพผนวกที่ ข4 แบบจำลองของ Inclinometer อย่างง่าย

c คือสัมประสิทธิ์ความหน่วง, l คือความยาวแขนระหว่างจุดหมุนกับโพโต้ไดโอด, m คือมวลของโพโต้ไดโอด, J คือค่าโมเมนต์ความเฉื่อย ประมาณให้ระบบเป็นเชิงเส้นได้โดย $\sin(\theta_1 - \theta_2) \approx \theta_1 - \theta_2$, $\cos(\theta_1 - \theta_2) \approx 1$ และไม่คิดค่าของ $\ddot{y}(\theta_1 - \theta_2)$

$$\left[(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2), g \sin(\theta_1 - \theta_2) \right] \begin{bmatrix} J/c \\ ml/c \end{bmatrix} = \dot{\theta}_2$$

หรือ
$$\dot{\theta}_2 = \left[(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2), g \sin(\theta_1 - \theta_2) \right] \begin{bmatrix} J/c & ml/c \end{bmatrix}^T$$

สมการดังกล่าวอยู่รูปสำหรับให้วิธีการของกำลังสองน้อยที่สุดคือ

$$Y = \Phi \Theta$$

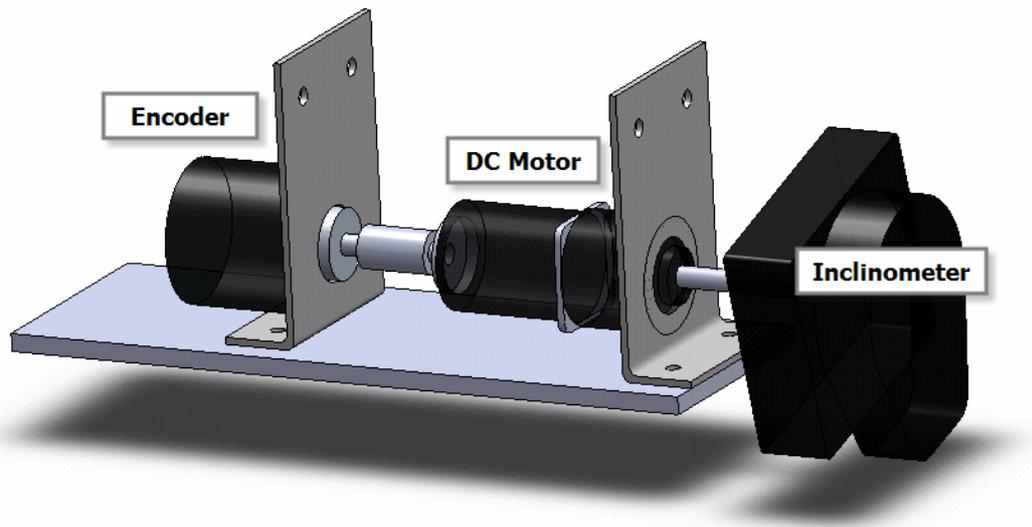
โดย
$$\Phi \in \mathbb{R}^{n \times 2} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_w & \dot{\theta}_m \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \Theta \in \mathbb{R}^{3 \times 1} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}, Y \in \mathbb{R}^{n \times 1} = \begin{bmatrix} V \\ \vdots \end{bmatrix}$$

เมื่อ n คือ จำนวนของข้อมูลที่ได้จากการทดลองการพิสูจน์เอกลักษณ์ระบบ สมการดังกล่าวกำหนดมาเพื่อให้ค่าความผิดพลาด (E) มีค่าน้อยที่สุดเมื่อ E สอดคล้องกับสมการ

$$E = \frac{(Y - \Phi \Theta)^2}{2}$$

จะได้สมการ
$$\hat{\Theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y \quad (119)$$

ภาพผนวกที่ ข5 แสดงอุปกรณ์การทดลองสำหรับการพิสูจน์เอกลักษณ์ของตัวตรวจรู้ Inclinometer ประกอบด้วยอุปกรณ์ 3 ชนิดต่อรวมแกนหมุนกันอยู่ โดยให้จุดศูนย์กลางของ Inclinometer ต่อรวมแกนหมุนด้วย



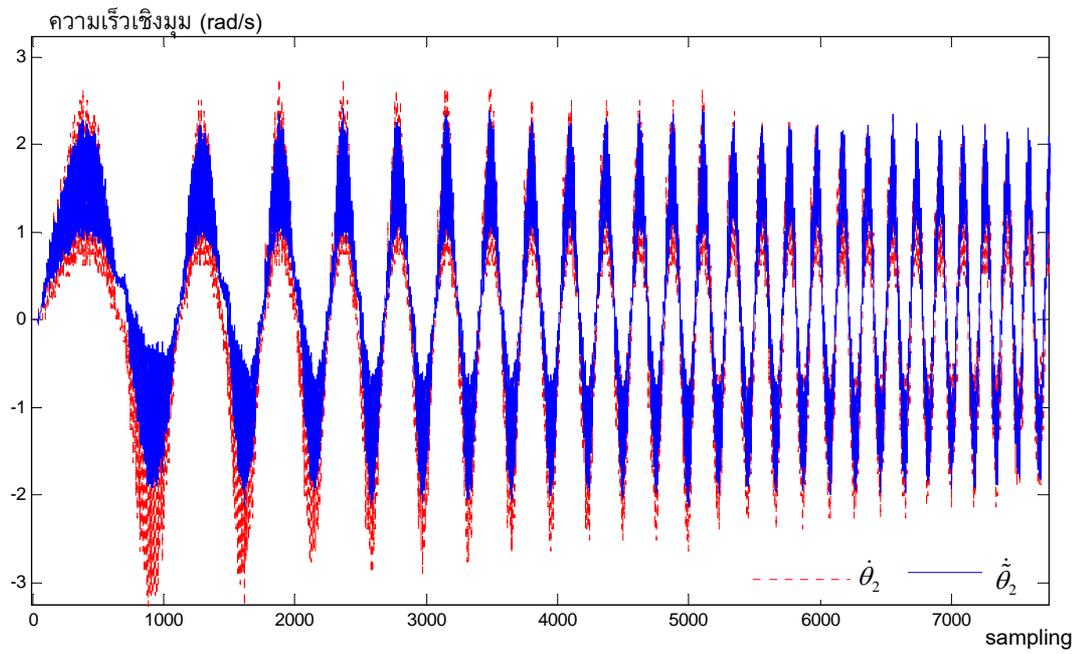
ภาพผนวกที่ ข5 การทดลองการพิสูจน์เอกลักษณ์ของตัวตรวจรู้ Inclinometer

สำหรับการทดลองนี้จะสร้างสัญญาณป้อนเข้ามอเตอร์กระแสตรงเป็นสัญญาณไซน์ที่แปรผันความถี่สัญญาณจาก 0.1 เฮิร์ต ถึง 1 เฮิร์ตภายในระยะเวลา 60 วินาที เพื่อให้ค่าที่ได้เป็นค่าที่ครอบคลุมช่วงความถี่ทำงานของระบบ สัญญาณป้อนกลับจากเอนโคเดอร์เช่นเซอร์คือค่า Φ สามารถคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ได้ ($\hat{\Theta}$) จากสมการที่ (119) และจากการทดลอง 35 ครั้ง และค่าเฉลี่ยของข้อมูลดังกล่าวคือ

จากค่าสัมประสิทธิ์ A คือ $J/c = 0.0022$

จากค่าสัมประสิทธิ์ B คือ $ml/c = 1.0314$

ภาพผนวกที่ ข6 แสดงการจำลองระบบด้วยค่าพารามิเตอร์ดังกล่าว โดยใช้ค่าเอาต์พุตของระบบเพื่อหาค่าความเร็วของมุมเอียงของตัวตรวจรู้ Inclinometer ($\dot{\theta}_2$) และนำมาเปรียบเทียบกับมุมของตัวตรวจรู้ Inclinometer พบว่าความเร็วเชิงมุมทั้งสองแตกต่างกันเพียงเล็กน้อย



ภาพผนวกที่ ข6 ผลการทดสอบความแม่นยำการหาเอกลักษณ์ของตัวตรวจรู้ Inclinometer

ภาคผนวก ค

การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

คุณสมบัติความควบคุมได้ (Controllability)

จากระบบควบคุม $\dot{x} = Ax + Bu$

$$y = Cx + Du$$

สามารถหาคำตอบสมการได้จาก

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad (120)$$

กำหนดให้เวลาเริ่มต้น $t_0 = 0$ สแตตเริ่มต้น $x(0)$ จากนิยามของคุณสมบัติการควบคุมได้คือสแตตสุดท้ายจะอยู่ที่จุดกำเนิด

$$x(t_f) = 0 = e^{At_f} x(0) + \int_0^{t_f} e^{A(t_f-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad (121)$$

หรือ
$$x(0) = -\int_0^{t_f} e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau \quad (122)$$

จาก Cayley-Hamilton Theorem
$$e^{-A\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau) A^k \quad (123)$$

แทนค่า (123) ใน (122)
$$x(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_0^{t_f} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau \quad (124)$$

กำหนดให้
$$\int_0^{t_f} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau = \beta_k \quad (125)$$

แทนค่า (125) ใน (124)
$$x(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} A^k B \beta_k$$

$$x(0) = -\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \quad (126)$$

ระบบจะมีคุณสมบัติความควบคุมได้เมื่อค่าเริ่มต้นใดๆ $x(0)$ สามารถแก้สมการ (126) เพื่อหาคำตอบมราเป็นเอกภาพอย่างน้อยหนึ่งคำตอบได้เมื่อ

$$\text{rank} [B : AB : \dots : A^{n-1}B] = n$$

คุณสมบัติความสังเกตได้ (Observability)

จากระบบควบคุม $\dot{x} = Ax + Bu$

$$y = Cx + Du$$

สามารถหาคำตอบสมการได้จาก

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du \quad (127)$$

เนื่องจากทราบค่า A, B, C, D และ u จึงสามารถนำพจน์ที่สองและสามฝั่งขวามือสมการ (127) ไปหักจาก $y(t)$ ที่สามารถวัดได้จากระบบ จะได้ส่วนที่เหลือเป็น

$$y'(t) = y(t) - C \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau - Du = Ce^{At}x(0)$$

ในส่วนของ $y'(t)$ ที่ต้องการพิจารณาคุณสมบัติความสังเกตได้ คำตอบสมการสเตตคือ

$$\dot{x} = Ax \text{ และ } y = Cx$$

โดย $x(t) = e^{At}x(0)$

$$y(t) = Ce^{At}x(0)$$

จาก Cayley-Hamilton Theorem $e^{-At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau) A^k$

จะได้ $y(t) = C \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau) A^k x(0)$

$$\text{หรือ} \quad y(t) = \alpha_0(t)Cx(0) + \alpha_1(t)CAx(0) + \dots + \alpha_{n-1}(t)CA^{n-1}x(0) \quad (128)$$

การแก้สมการหาค่า $x(0)$ จาก $y(t)$ จะได้อย่างน้อยหนึ่งคำตอบได้เมื่อ

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & A^{T(n-1)} C^T \end{bmatrix} = n$$

การพิสูจน์เมตริกซ์ P ที่สอดคล้องกับสมการ Riccati Equation

$$\text{จากระบบควบคุม} \quad \dot{x} = Ax$$

A เป็นเมตริกซ์ของค่าคงที่ขนาด $n \times n$ และกำหนดให้เป็นเมตริกซ์ที่ไม่เท่ากับหนึ่ง (non-singular matrix) จากเมตริกซ์ของสมการอนุพันธ์

$$\dot{X} = A^T X + XA$$

$$\text{มีผลเฉลยคือ} \quad X = e^{A^T t} Q e^{At}$$

เมื่อ Q เป็นเมตริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน, $X(0) = Q$

เมื่ออินทิเกรตเมตริกซ์ของสมการอนุพันธ์จาก $X = 0$ ถึง $X = \infty$ จะได้

$$X(\infty) - X(0) = A^T \left(\int_0^\infty X dt \right) + \left(\int_0^\infty X dt \right) A$$

พิจารณาให้ A เป็นเมตริกซ์สมมูล ดังนั้น $X(\infty) = 0$

$$-X(0) = A^T \left(\int_0^\infty X dt \right) + \left(\int_0^\infty X dt \right) A$$

$$\text{กำหนดให้} \quad P = \int_0^\infty X dt = \int_0^\infty (e^{A^T t} Q e^{At}) dt$$

เมื่อ e^{At} สามารถหาค่าได้จาก $e^{\lambda_1 t}, t e^{\lambda_2 t}, \dots, t^{m_i-1} e^{\lambda_i t}$ เมื่อ λ_i เป็นค่าเฉพาะ (eigenvalues) ของ A และ m_i คือจำนวนผลคูณของ λ_i เพราะ λ_i เป็นค่าจริงจำนวนลบ ดังนั้น $\int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt$ สามารถหา

ค่าได้ และกำหนดให้

$$P^T = \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{A t} dt = P$$

ดังนั้น P เป็นเมตริกซ์ Hermitian หรือเมตริกซ์สมมาตรที่เป็นจำนวนจริง สามารถแสดงได้ว่าเมตริกซ์สมมูล A และเมตริกซ์ Q ที่มีค่าเป็นบวกแน่นอน จะได้ค่าเมตริกซ์ P ที่สอดคล้องกับสมการ (129) เมื่อพิจารณาจาก

$$x^T P x = x^T \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{A t} dt x$$

$$x^T P x = \int_0^{\infty} (e^{A t} x)^T Q (e^{A t} x) dt > 0 \quad \text{สำหรับ } x \neq 0$$

และมีค่าเท่ากับ 0 เมื่อ $x = 0$

ดังนั้นที่สถานะสมมูล $x = 0$ สำหรับระบบสมมูลแบบมีขอบเขต (asymptotically stable) หรือ A เป็นเมตริกซ์ที่สมมูล จะมี P ที่เป็นเมตริกซ์เป็นบวกแน่นอนที่สอดคล้องกับสมการที่ (129)

$$A^T P + P A = -Q \quad (129)$$

การพิสูจน์การหาค่า P และ K ของระบบตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุด

จากระบบควบคุม $\dot{x} = ax + bu$

เมื่อ $x < 0$ สมรรถนะคือ $J = \int_0^{\infty} (qx^2 + ru^2) dt$

โดยค่า $q > 0$ และ $r > 0$ สัญญาณควบคุมที่เหมาะสมได้จากสมการสมรรถนะที่มีค่าต่ำสุด คือ

$$u = -Kx$$

ดังนั้นจะได้สมรรถนะ $J = \int_0^{\infty} (q + rK^2)x^2 dt$

กำหนดให้
$$(q + rK^2)x^2 = -\frac{d}{dt}(px^2)$$

หรือ
$$(q + rK^2)x^2 = -2px\dot{x} = -2p(a - bK)x^2$$

จัดรูปได้คือ
$$[q + rK^2 + 2p(a - bK)]x^2 = 0$$

จะเป็นจริงทุก $x(t)$ เมื่อ
$$q + rK^2 + 2p(a - bK) = 0 \quad (130)$$

สำหรับ $(a - bK)$ มีเสถียรภาพจะเป็นค่าลบ ดังนั้นจะมีค่า p ที่เป็นบวกสอดคล้องกับสมการ (130)

หรือ
$$(a - bK)p + p(a - bK) = -(q + rK^2)$$

หรือ
$$p = -\frac{q + rK^2}{1(a - bK)} \quad (131)$$

โดยกำหนดให้
$$J = \int_0^{\infty} (q + rK^2)x^2 dt = -\int_0^{\infty} \frac{d}{dt}(px^2) dt = px^2(0)$$

ทำให้สมรรถนะต่ำสุดได้เมื่อ
$$\frac{\partial p}{\partial K} = 0$$

จากสมการ (131)
$$\frac{\partial p}{\partial K} = -\frac{2rK(a - bK) - b(q + rK^2)}{2(a - bK)^2} = 0$$

จะได้
$$K = \frac{pb}{r} \quad (132)$$

และแทนค่าสมการ (132) ในสมการ (130) จะได้สมการสำหรับหาค่า p ที่เป็นค่าบวก

$$q + 2pa - \frac{p^2 b^2}{r} = 0$$

ภาคผนวก ง

โค้ดโปรแกรม MATLAB

การหาเอกลักษณ์ของมอเตอร์กระแสตรง

```

%load raw data
input = load('File Location\ File Name.txt');
theta_encoder = load('File Location\ File Name.txt');
theta_encoderd=diff(theta_encoder)/ts;
theta_encoderdd=diff(theta_encoderd)/ts;
theta_motor=theta_encoder/n_2;
theta_motord=diff(theta_motor)/ts;
theta_motordd=diff(theta_motord)/ts;
theta_wheel=theta_motor/n;
theta_wheeld=diff(theta_wheel)/ts;
theta_wheeldd=diff(theta_wheeld)/ts;

    J_wy=0.001382417;
    J_r=0.0000578;
    J_m=1*10^(-5);
    J_g=1*10^(-5);
    J_e=1*10^(-6);
    n=64;
    n_2=0.25;    % 55mm and 13mm
    J_id=J_wy+(J_g+J_m)*n+n_2*n*(J_e+J_r);
ts = 0.1;    %sampling period
    %perform linear least-square
[x,resnorm]=lsqin([theta_wheeldd,theta_motord(1:length(theta_wheeldd))],...
input(1:length(theta_wheeldd));

Kb=x(2)
Kt_by_R_m=1/(x(1)*n/J_id)

```

การหาเอกลักษณ์ของตัวตรวจรู้วัดความเอียง Inclinometer

```

%load raw data

theta_gyr = load('File Location\ File Name.txt');
theta_til = load('File Location\ File Name.txt');
theta_enc = load('File Location\ File Name.txt');
thetad_gyr = load('File Location\ File Name.txt');
thetad_enc = load('File Location\ File Name.txt');
theta2d_enc = load('File Location\ File Name.txt');
ts = 5000/1000000;      %in seconds
t = 0:ts:(length(theta_gyr)-1)*ts;
    for i=1:length(t)-1
        thetad_til(i) = (theta_til(i+1)-theta_til(i))/ts;
    end
    for i=1:length(t)-2
        theta2d_til(i) = (thetad_til(i+1)-thetad_til(i))/ts;
    end
    %select ranges of data
t1 = ts; t2 = 60; g = 9.81;
theta_gyr = theta_gyr(t1/ts:t2/ts);
theta_til = theta_til(t1/ts:t2/ts);
theta_enc = theta_enc(t1/ts:t2/ts);
thetad_gyr = thetad_gyr(t1/ts:t2/ts);
thetad_til = thetad_til(t1/ts:t2/ts)';
thetad_enc = thetad_enc(t1/ts:t2/ts);
theta2d_enc = theta2d_enc(t1/ts:t2/ts);
theta2d_til = theta2d_til(t1/ts:t2/ts)';
t = t(t1/ts:t2/ts);
    %linear least square
[x,resnorm]=lsqlin([theta2d_enc-theta2d_til g.*sin(theta_enc-theta_til)]...
    ,thetad_til,[],[],[],[],[0 0],[+inf +inf]);

```

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของหุ่นยนต์สองล้อ

```

% plant model.....

g=9.81;
m_w=0.5675;
m_b=1.94033;
R=0.147;
W=0.3103;
n=64;
n_2=0.25;

%from specification
J_m=1*10^(-6);
J_g=1*10^(-6);
J_e=1*10^(-6);
f_m=0.0022;
f_w=0;

%from SolidWorks
L=0.04895;
J_by=0.0173198;
J_wy=0.0013824;
J_bz=0.0117333;
J_wz=0.0144355;
J_r=0.0000578;

%form system ID
k_b=0.004275;
kt_by_Rm=0.0037673;

alpha=n*kt_by_Rm;
beta=alpha*k_b+f_m;

```

```

E=[(2*m_w+m_b)*R^2+2*J_wy+2*J_o,m_b*L*R-2*J_o;...
m_b*L*R-2*J_o,m_b*L^2+J_by+2*J_o];
F=[beta+f_w, -beta; -2*beta, 2*beta];
G=[0,0;0,-m_b*g*L];
H=[alpha/2, alpha/2; -alpha, -alpha];
I=beta+W/R*f_w;
J=R/W*alpha;
K=1/2*m_w*W^2+J_bz+2*J_wz+W^2/2/R^2*(J_wy+J_o);

A1=[0,0,1,0;0,0,0,1;0,-m_b*g*L*E(1,2)/det(E),((beta+f_w)*E(2,2)+2*beta*E(1,2))/det(E),...
beta*(E(2,2)+2*E(1,2))/det(E);0,m_b*g*L*E(1,1)/det(E),((beta+f_w)*E(1,2)+...
2*beta*E(1,1))/det(E),-beta*(E(1,2)+2*E(1,1))/det(E)];

B1=[0,0;0,0;alpha*(E(2,2)/2+E(1,2))/det(E),alpha*(E(2,2)/2+E(1,2))/det(E);...
-alpha*(E(1,2)/2+E(1,1))/det(E),-alpha*(E(1,2)/2+E(1,1))/det(E)];

C1=[1,0,0,0;0,1,0,0];
D1=[0,0;0,0];

A2=[0,1;0,-I/K];
B2=[0,0;-J/K,J/K];
C2=[1,0];
D2=[0,0];

sys1 = ss(A1,B1,C1,D1,'statename',{'theta' 'psi' 'thetadot' 'psidot'},...
          'inputname',{'v1' 'vr'},'outputname',{'theta' 'psi'});
sys2 = ss(A2,B2,C2,D2,'statename',{'phi' 'phidot'},'inputname',{'v1' 'vr'},'outputname',{'phi'});
syssss = [sys1; sys2]      %state-space model
[A,B,C,D] = ssdata(syssss);

```

สัญญาณอ้างอิงสำหรับการออกแบบระบบควบคุม

```
%desired trajectories.....
ts = 0.005;    %sampling period
tend = 20;
t = 0:ts:tend;

zeta = 1;
omegan = 5;
filt = tf(omegan^2,[1 2*zeta*omegan omegan^2]);
filtin = 1*square(0.5*pi*0.1*t);
filtout = lsim(filt,filtin,t);

ref_theta = 3*filtout;    % Tracking case
    %ref_theta = zeros(size(filtout)); % Stabilization case

ref_psi = zeros(size(filtout));    % All case

ref_phi = 0.5*filtout;    % Tracking case
    %ref_phi = zeros(size(filtout)); % Stabilization case
```

ระบบควบคุมอาศัยตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุด (LQR)

ต่อจาก แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของหุ่นยนต์สองล้อ
สัญญาณอ้างอิงสำหรับการออกแบบระบบควบคุม

```
%control design.....
[K,S,e]=lqr(A,B,diag([0.1 10 0.1 10 0.1 0.1]),1*eye(2));    %gain K design

x1(1)=0; x2(1)=0; x3(1)=0; x4(1)=0; x5(1)=0; x6(1)=0; %initial states
for i=1:length(t)
    u(:,i) = -K*[x1(i);x2(i);x3(i);x4(i);x5(i);x6(i)]... %LQR controller
```

```

+ K(:,1)*ref_theta(i)...
+ K(:,2)*ref_psi(i)...
+ K(:,5)*ref_phi(i);

xdot = A*[x1(i);x2(i);x3(i);x4(i);x5(i);x6(i)]+B*u(:,i); %CL system
x1(i+1) = x1(i) + xdot(1)*ts;
x2(i+1) = x2(i) + xdot(2)*ts;
x3(i+1) = x3(i) + xdot(3)*ts;
x4(i+1) = x4(i) + xdot(4)*ts;
x5(i+1) = x5(i) + xdot(5)*ts;
x6(i+1) = x6(i) + xdot(6)*ts;
end

```

ระบบควบคุมอาศัยตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุดที่มีตัวอินทิกรัล (LQR with Integrator)

ต่อจาก แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของหุ่นยนต์สองล้อ
สัญญาณอ้างอิงสำหรับการออกแบบระบบควบคุม

```

%control design.....
Ahat=[A,zeros(6,3);-C,zeros(3,3)]; %augment integrators
Bhat=[B;zeros(3,2)];

[K,S,e]=lqr(Ahat,Bhat,diag([0.1 10 0.1 10 0.1 0.1 10 10 10]),1*eye(2)); %gain K design
KK = K(:,1:6)
Ki = -K(:,7:9)

x1(1)=0; x2(1)=0; x3(1)=0; x4(1)=0; x5(1)=0; x6(1)=0; %initial states
x7(1)=0; x8(1)=0; x9(1)=0; %initial augmented states
for i=1:length(t)
    u(:,i) = -KK*[x1(i);x2(i);x3(i);x4(i);x5(i);x6(i)]... %LQR controller
    + Ki*[x7(i);x8(i);x9(i)];

```

```

xdot = A*[x1(i);x2(i);x3(i);x4(i);x5(i);x6(i)]+B*u(:,i); %CL system
xidot = [ref_theta(i);ref_psi(i);ref_phi(i)]-C*[x1(i);x2(i);x3(i);x4(i);x5(i);x6(i)];

x1(i+1) = x1(i) + xdot(1)*ts;
x2(i+1) = x2(i) + xdot(2)*ts;
x3(i+1) = x3(i) + xdot(3)*ts;
x4(i+1) = x4(i) + xdot(4)*ts;
x5(i+1) = x5(i) + xdot(5)*ts;
x6(i+1) = x6(i) + xdot(6)*ts;
x7(i+1) = x7(i) + xidot(1)*ts;
x8(i+1) = x8(i) + xidot(2)*ts;
x9(i+1) = x9(i) + xidot(3)*ts;

end

```

ระบบควบคุมอาศัยตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุดที่มีตัวอินทิกรัลและตัวสังเกตแบบอันดับเต็ม (LQR with Integrator and full-order state observer)

ต่อจาก แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของหุ่นยนต์สองล้อ
 สัญญาอ้างอิงสำหรับการออกแบบระบบควบคุม

```

%control design.....
Ahat=[A,zeros(6,3);-C,zeros(3,3)]; %augment integrators
Bhat=[B;zeros(3,2)];

[K,S,e]=lqr(Ahat,Bhat,diag([0.1 10 0.1 10 0.1 0.1 10 10 10]),1*eye(2)); %gain K design
KK = K(:,1:6)
Ki = -K(:,7:9)

Ke = place(A',C',[-10 -20 -30 -40 -50 -60])

x1(1)=0; x2(1)=0; x3(1)=0; x4(1)=0; x5(1)=0; x6(1)=0; %initial states

```

```

x1h(1)=0; x2h(1)=0; x3h(1)=0; x4h(1)=0; x5h(1)=0; x6h(1)=0;    %initial estimated states
x7(1)=0; x8(1)=0; x9(1)=0;    %initial augmented states
for i=1:length(t)
    u(:,i) = -KK*[x1h(i);x2h(i);x3h(i);x4h(i);x5h(i);x6h(i)]...
        + Ki*[x7(i);x8(i);x9(i)];    %LQR controller

    xdot = A*[x1(i);x2(i);x3(i);x4(i);x5(i);x6(i)]+B*u(:,i);    %CL system
    xidot = [ref_theta(i);ref_psi(i);ref_phi(i)]-C*[x1(i);x2(i);x3(i);x4(i);x5(i);x6(i)]; %integrator
    xhdot = (A-Ke'*C)*[x1h(i);x2h(i);x3h(i);x4h(i);x5h(i);x6h(i)]+B*u(:,i)...
        +Ke'*C*[x1(i);x2(i);x3(i);x4(i);x5(i);x6(i)];    % observer

    x1(i+1) = x1(i) + xdot(1)*ts;
    x2(i+1) = x2(i) + xdot(2)*ts;
    x3(i+1) = x3(i) + xdot(3)*ts;
    x4(i+1) = x4(i) + xdot(4)*ts;
    x5(i+1) = x5(i) + xdot(5)*ts;
    x6(i+1) = x6(i) + xdot(6)*ts;
    x7(i+1) = x7(i) + xidot(1)*ts;
    x8(i+1) = x8(i) + xidot(2)*ts;
    x9(i+1) = x9(i) + xidot(3)*ts;

    x1h(i+1) = x1h(i) + xhdot(1)*ts;
    x2h(i+1) = x2h(i) + xhdot(2)*ts;
    x3h(i+1) = x3h(i) + xhdot(3)*ts;
    x4h(i+1) = x4h(i) + xhdot(4)*ts;
    x5h(i+1) = x5h(i) + xhdot(5)*ts;
    x6h(i+1) = x6h(i) + xhdot(6)*ts;
end

```

ระบบควบคุมอาศัยตัวคุมค่ากำลังสองน้อยที่สุดที่มีตัวอินทิกรัลและตัวสังเกตแบบอันดับน้อยที่สุด
(LQR with Integrator and minimum-order state observer)

ต่อจาก แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของหุ่นยนต์สองล้อ
สัญญาณอ้างอิงสำหรับการออกแบบระบบควบคุม

```
%plant model.....
A = [A1,zeros(4,2);zeros(2,4),A2];

%reorder states.....
A = [A(:,1),A(:,5),A(:,3),A(:,6),A(:,2),A(:,4)]; %reorder columns
A = [A(1,:);A(5,:);A(3,:);A(6,:);A(2,:);A(4,:)]; %then reorder rows
B = [B(1,:);B(5,:);B(3,:);B(6,:);B(2,:);B(4,:)];
C=[1,0,0,0,0,0;0,1,0,0,0,0];

%control design.....
Ahat=[A,zeros(6,2);-C,zeros(2,2)]; %augment integrators
Bhat=[B;zeros(2,2)];

[K,S,e]=lqr(Ahat,Bhat,diag([0.1 10 0.1 10 0.1 0.1 10 10 10]),1*eye(2)); %gain K design
KK = K(:,1:6)
Ki = -K(:,7:8)

Aaa = A(1:2,1:2);
Aab = A(1:2,3:6);
Aba = A(3:6,1:2);
Abb = A(3:6,3:6);

Ba = B(1:2,:);
Bb = B(3:6,:);
```

```
Ke = place(Abb',Aab',[-10 -20 -30 -40]) %observer gain design by pole placement
```

```
x1(1)=0; x2(1)=0; x3(1)=0; x4(1)=0; x5(1)=0; x6(1)=0; %initial states
```

```
x7(1)=0; x8(1)=0; %initial augmented states
```

```
x1h(1)=0; x2h(1)=0; x3h(1)=0; x4h(1)=0; %initial estimated states
```

```
eta1(1)=0; eta2(1)=0; eta3(1)=0; eta4(1)=0; %initial transformed states
```

```
for i=1:length(t)
```

```
u(:,i) = -KK*[x1(i);x2(i);x1h(i);x2h(i);x3h(i);x4h(i)]...
```

```
          + Ki*[x7(i);x8(i)];    %LQR controller
```

```
xdot = A*[x1(i);x2(i);x3(i);x4(i);x5(i);x6(i)]+B*u(:,i); %CL system
```

```
xidot = [ref_theta(i);ref_phi(i)]-C*[x1(i);x2(i);x3(i);x4(i);x5(i);x6(i)]; %integrator
```

```
Ahat2 = Abb-Ke'*Aab;
```

```
Bhat2 = Ahat2*Ke'+Aba-Ke'*Aaa;
```

```
Fhat2 = Bb-Ke'*Ba;
```

```
etadot = Ahat2*[eta1(i);eta2(i);eta3(i);eta4(i)]...
```

```
          +Bhat2*C*[x1(i);x2(i);x3(i);x4(i);x5(i);x6(i)]+Fhat2*u(:,i);
```

```
x1(i+1) = x1(i) + xdot(1)*ts;
```

```
x2(i+1) = x2(i) + xdot(2)*ts;
```

```
x3(i+1) = x3(i) + xdot(3)*ts;
```

```
x4(i+1) = x4(i) + xdot(4)*ts;
```

```
x5(i+1) = x5(i) + xdot(5)*ts;
```

```
x6(i+1) = x6(i) + xdot(6)*ts;
```

```
x7(i+1) = x7(i) + xidot(1)*ts;
```

```
x8(i+1) = x8(i) + xidot(2)*ts;
```

$$\text{eta1}(i+1) = \text{eta1}(i) + \text{etadot}(1)*\text{ts};$$

$$\text{eta2}(i+1) = \text{eta2}(i) + \text{etadot}(2)*\text{ts};$$

$$\text{eta3}(i+1) = \text{eta3}(i) + \text{etadot}(3)*\text{ts};$$

$$\text{eta4}(i+1) = \text{eta4}(i) + \text{etadot}(4)*\text{ts};$$

$$\text{xh} = [\text{eta1}(i+1);\text{eta2}(i+1);\text{eta3}(i+1);\text{eta4}(i+1)]...$$

$$+\text{Ke}'*\text{C}*[x1(i+1);x2(i+1);x3(i+1);x4(i+1);x5(i+1);x6(i+1)];$$

$$\text{x1h}(i+1) = \text{xh}(1);$$

$$\text{x2h}(i+1) = \text{xh}(2);$$

$$\text{x3h}(i+1) = \text{xh}(3);$$

$$\text{x4h}(i+1) = \text{xh}(4);$$

end

ตัวสังเกตสถานะความเอียงแบบลูเอนเบอร์เกอร์ (Luenberger Observer for Tilt Measurement)

ต่อจาก การหาเอกลักษณ์ของตัวตรวจรู้วัดความเอียง Inclinometer

%parameter values $x(1)=J/c$, $x(2)=ml/c$

$$a1 = 1/x(1);$$

$$a2 = x(2)/x(1)*9.81;$$

$$g1 = a2/g;$$

$$b0 = 1;$$

$$b1 = 0;$$

$$b2 = a2;$$

%observer.....

$$A = [0 \ 0 \ 0; b1-b0*a1 \ -a1 \ 1; b2-b0*a2 \ -a2 \ 0];$$

$$\text{alpha} = 1.212;$$

$$B = [\text{alpha};0;0];$$

$$C = [b0 \ 1 \ 0];$$

```

        % Control Design for Observer - pole placement.....
K = place(A',C',[-15 -30 -300]);

z1hat(1) = 0;
z2hat(1) = 0;
z3hat(1) = 0;

for i = 1: length(theta_gyr)-1
    zhat = [z1hat(i);z2hat(i);z3hat(i);];
    zhatdot = A*zhat+K'*(theta_til(i)-C*zhat)+B*thetad_gyr(i);
    %zhatdot = A*zhat+K'*(theta_til(i)-C*zhat)+B*thetad_gyrft(i);
    z1hat(i+1) = z1hat(i)+zhatdot(1)*ts;
    z2hat(i+1) = z2hat(i)+zhatdot(2)*ts;
    z3hat(i+1) = z3hat(i)+zhatdot(3)*ts;
end

```

ประวัติการศึกษา และการทำงาน

ชื่อ –นามสกุล	นายกิตติพงษ์ เขาวาจา
วัน เดือน ปี ที่เกิด	22 มิถุนายน พ.ศ. 2527
สถานที่เกิด	กรุงเทพมหานคร
ประวัติการศึกษา	ปริญญาตรี วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ (บางเขน) พ.ศ. 2549
ตำแหน่งหน้าที่การงานปัจจุบัน	วิศวกรเครื่องกล
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	บริษัท ไทย-เยอรมัน ปีโตรเลียมและเคมี จำกัด
ทุนการศึกษาที่ได้รับ	ทุนอุดหนุนและส่งเสริมวิทยานิพนธ์ระดับปริญญาโท บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ประจำปี งบประมาณ 2551