วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh 62(693) Sep–Dec, 2017
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
http://MathThai.Org MathThaiOrg@gmail.com

ทฤษฎีบทการส่งสเปกตรัมจุดสำหรับทวินาม
Point Spectrum Mapping Theorem for Binomial

พุทธพร วานิชกร ศรัญญา จอกสุวรรณ์ สิรณรงค์ พิลา และ สุพรรษา จันทร์สุกปลั่ง
Buddhaporn Vanishkorn[1] Sarunya Choksuwan[2] Siranarong Pila[3] and Suphansa Chansukplang[4]

[1-4]Department of Mathematics,
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok, 10520
[1]Center of Excellence in Mathematics, CHE, Si Ayutthaya road, Bangkok, 10400

Email: [1]buddhaporn.va@kmitl.ac.th

บทคัดย่อ

บทความวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาเกี่ยวกับการส่งของสเปกตรัมจุดสำหรับฟังก์ชันทวินามโดยใช้ความรู้พื้นฐานที่ประกอบด้วยปริภูมิฮิลเบิร์ต ตัวดำเนินการเชิงเส้น ค่าลักษณะเฉพาะ และสเปกตรัมจุด ผลจากการศึกษา คือสเปกตรัมจุดของทวินามของตัวดำเนินการเชิงเส้นจะเท่ากับภาพของสเปกตรัมจุดของตัวดำเนินการเชิงเส้น โดยทวินาม

คำสำคัญ: การส่ง ตัวดำเนินการเชิงเส้น ทวินาม ภาพของสเปกตรัมจุด สเปกตรัมจุด

ABSTRACT

This research has an objective to study about the point spectrum mapping for binomial function by using fundamental knowledge including Hilbert space, linear operator, eigenvalue and point spectrum. The special problem result is the point spectrum of binomial of a linear operator equal to the image of point spectrum of a linear operator by binomial.

Keywords: Mapping, Linear Operator, Binomial, Image of Point Spectrum, Point Spectrum

1. บทนำ

ในหลายสาขาของคณิตศาสตร์การส่งเชิงเส้น และค่าลักษณะเฉพาะมักจะถูกนำไปใช้แก้ปัญหาต่างๆ ทั้งในเชิงวิทยาศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตร์อย่างแพร่หลาย บทความวิจัยนี้จะใช้ความรู้ในเรื่องของตัวดำเนินการเชิงเส้นและค่าลักษณะเฉพาะ เพื่อศึกษาการส่งสเปกตรัมจุดบนปริภูมิฮิลเบิร์ตสำหรับฟังก์ชันทวินาม

วัตถุประสงค์ของงานวิจัยเพื่อศึกษาเกี่ยวกับนิยามของปริภูมิฮิลเบิร์ต ตัวดำเนินการเชิงเส้น และค่าลักษณะเฉพาะ เพื่อศึกษาถึงขั้นตอน กระบวนการซึ่งนำไปสู่การหาสเปกตรัมจุดสำหรับฟังก์ชันทวินาม และเพื่อศึกษาการส่งสเปกตรัมจุดสำหรับทวินาม

2. ข้อมูลที่เกี่ยวข้อง

2.1 ตัวดำเนินการเชิงเส้น (Linear Operator)

บทนิยาม 2.1.1 ให้ V และ W เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และ $\mathrm{T}: V \to W$ จะเรียกว่า การส่งเชิงเส้น (Linear Operation) เมื่อ

1. $\mathrm{T}(x+y) = \mathrm{T}(x) + \mathrm{T}(y)$ สำหรับทุก $x, y \in V$ และ
2. $\mathrm{T}(kx) = k\mathrm{T}(x)$ สำหรับทุก $x \in V$ และ $k \in \mathbb{C}$ [1]

2.2 ค่าลักษณะเฉพาะ (Eigenvalue)

บทนิยาม 2.2.1 ให้ $\mathrm{T}: V \to V$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นบนปริภูมิเวกเตอร์ V จำนวนเชิงซ้อน $\lambda \in \mathbb{C}$ จะกล่าวว่าเป็นค่าลักษณะเฉพาะของตัวดำเนินการเชิงเส้น T ก็ต่อเมื่อ มีแต่ละเวกเตอร์ที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ $v \in V$ ที่ทำให้ $\mathrm{T}v = \lambda v$ ในกรณีนี้เราเรียกเวกเตอร์ v ว่าเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของตัวดำเนินการเชิงเส้น T ที่สอดคล้องกับ λ [2]

2.3 สเปกตรัมจุด (Point Spectrum)

บทนิยาม 2.3.1 ให้ $X \neq \{\vec{0}\}$ เป็นปริภูมินอร์มเชิงซ้อนและ $T: D(T) \longrightarrow X$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น โดย $D(T) \subseteq X$ สเปกตรัมจุดหรือสเปกตรัมไม่ต่อเนื่อง $\sigma_0(T)$ คือ เซตที่ซึ่งไม่มี $(T-\lambda I)^{-1}$ และ $\lambda \in \sigma_0(T)$ เรียกว่า ค่าลักษณะเฉพาะของ

ตัวดำเนินการเชิงเส้น T ซึ่ง λ เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ I เป็นตัวดำเนินการเอกลักษณ์บน $D(T)$ [3]

ทฤษฎีบท 2.3.2 ถ้า λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ (Eigenvalue) ของตัวดำเนินการเชิงเส้น T แล้วตัวดำเนินการเชิงเส้น $T-\lambda I$ จะไม่เป็นการส่งแบบ 1–1 ดังนั้นจะไม่มีตัวผกผัน (Inverse) [4]

2.4 ฟังก์ชันทวินาม (Binomial Function)

$\hat{b}(\theta) = (\theta+a)^n$ สำหรับทุกจำนวนนับ n และค่าคงที่ a

3. วิธีการดำเนินงานวิจัย

ทฤษฎีบท 3.1 ให้ $X \neq \{\bar{0}\}$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตเชิงซ้อนและตัวดำเนินการเชิงเส้น $T \in B(X,X)$ ให้ $\hat{b}(\theta) = (\theta+a)^n$ สำหรับทุกจำนวนนับ n และค่าคงที่ a กำหนด $b(T) = (T+aI)^n$ แล้ว $\sigma_0(b(T)) = \hat{b}(\sigma_0(T))$

พิสูจน์ ให้ μ_0 เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ T เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น

($\Rightarrow$) ให้ $\mu_0 \in \sigma_0(b(T))$

โดยนิยามของสเปกตรัมจุด จะได้ว่า $b(T)x = \mu_0 x$

เมื่อ μ_0 คือค่าลักษณะเฉพาะของ $b(T)$

จะได้ว่า $b(T) - \mu_0 I$ ไม่เป็นการส่งแบบ 1–1

เนื่องจาก

$$\hat{b}(\theta) = (\theta+a)^n$$
$$= \theta^n + aC_{n,1}\theta^{n-1} + \ldots + a^r C_{n,r}\theta^{n-r} + \ldots + a^{n-1}C_{n,n-1}\theta + a^n$$

สำหรับทุกจำนวนนับ n และค่าคงที่ a

ให้

$$q(\theta) = \hat{b}(\theta) - \mu_0$$
$$= \theta^n + aC_{n,1}\theta^{n-1} + \ldots + a^r C_{n,r}\theta^{n-r} + \ldots + a^{n-1}C_{n,n-1}\theta + a^n - \mu_0$$
$$= (\theta-\lambda_1)^{k_1}(\theta-\lambda_2)^{k_2}\ldots(\theta-\lambda_s)^{k_s}$$

โดยที่ λ_i เป็นรากของ q, $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ และ $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$

จะเขียนได้ว่า

$$q(T) = b(T) - \mu_0 I$$
$$= T^n + aC_{n,1}T^{n-1} + \ldots + a^r C_{n,r}T^{n-r} + \ldots + a^{n-1}C_{n,n-1}T +$$

$a^n I - \mu_0 I$
$= (T-\lambda_1 I)^{k_1}(T-\lambda_2 I)^{k_2} \ldots (T-\lambda_s I)^{k_s}$

เนื่องจาก $b(T) - \mu_0 I$ ไม่เป็นการส่งแบบ 1–1

ดังนั้น $T - \lambda_i I$ ไม่เป็นการส่งแบบ 1–1 สำหรับบาง $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$

นั่นหมายความว่า $\lambda_i \in \sigma_0(T)$ แต่ λ_i เป็นรากของ q

ดังนั้น $q(\lambda_i) = \hat{b}(\lambda_i) - \mu_0 = 0$ นั่นคือ $\mu_0 = \hat{b}(\lambda_i)$

จะได้ว่า $\hat{b}(\lambda_i) \in \hat{b}(\sigma_0(T))$ นั่นหมายความว่า $\mu_0 \in \hat{b}(\sigma_0(T))$

ดังนั้น $\sigma_0(b(T)) \subseteq \hat{b}(\sigma_0(T))$

($\Leftarrow$) ให้ $\lambda_0 \in \sigma_0(T)$ เมื่อ $\hat{b}(\lambda_0) \in \hat{b}(\sigma_0(T))$

โดยนิยามของสเปกตรัมจุด จะได้ว่า $Tx = \lambda_0 x$

เมื่อ λ_0 คือค่าลักษณะเฉพาะของตัวดำเนินการเชิงเส้น T โดยที่ $x \neq \vec{0}$

เนื่องจาก $Tx = \lambda_0 x$ ดังนั้น $T^n x = \lambda_0{}^n x$

เนื่องจาก

$b(T) = (T+aI)^n$
$= T^n + aC_{n,1}T^{n-1} + \ldots + a^r C_{n,r} T^{n-r} + \ldots + a^{n-1}C_{n,n-1}T + a^n I$

สำหรับทุกจำนวนนับ n และค่าคงที่ a โดยที่ $b(T) \in B(X,X)$

จาก $b(T)x = (T^n + aC_{n,1}T^{n-1} + \ldots + a^r C_{n,r}T^{n-r} + \ldots + a^{n-1}C_{n,n-1}T + a^n I)x$

$= T^n x + aC_{n,1}T^{n-1}x + \ldots + a^r C_{n,r}T^{n-r}x + \ldots + a^{n-1}C_{n,n-1}Tx + a^n Ix$

$= \lambda_0{}^n x + aC_{n,1}\lambda_0{}^{n-1}x + \ldots + a^r C_{n,r}\lambda_0{}^{n-r}x + \ldots + a^{n-1}C_{n,n-1}\lambda_0 x + a^n x$

$= (\lambda_0{}^n + aC_{n,1}\lambda_0{}^{n-1} + \ldots + a^r C_{n,r}\lambda_0{}^{n-r} + \ldots + a^{n-1}C_{n,n-1}\lambda_0 + a^n)x$

$= \hat{b}(\lambda_0)x$

จะได้ว่า $\hat{b}(\lambda_0) \in \sigma_0(b(T))$

ดังนั้น $\hat{b}(\sigma_0(T)) \subseteq \sigma_0(b(T))$

สรุป $\sigma_0(b(T)) = \hat{b}(\sigma_0(T))$

4. ผลการวิจัยและการอภิปรายผล

ในส่วนผลการวิจัยของบทความวิจัยนี้ ทางคณะผู้วิจัยได้ศึกษารวมทั้งเข้าใจถึงงานวิจัยที่เกี่ยวกับการส่งสเปกตรัมจุดสำหรับพหุนามในปริภูมิบานาค ซึ่งทำให้คณะผู้วิจัยได้เล็งเห็นถึงการส่งสเปกตรัมจุดสำหรับทวินามที่มีพจน์คล้ายคลึงกับพหุนาม โดยจะศึกษาเกี่ยวกับฟิลด์ ปริภูมิเวกเตอร์ ปริภูมิเมตริก ปริภูมินอร์มปริภูมิบานาค ปริภูมิผลคูณภายใน ปริภูมิฮิลเบิร์ต ตัวดำเนินการเชิงเส้น ค่าลักษณะเฉพาะ สเปกตรัมจุด และฟังก์ชันทวินาม ซึ่งจะนำทฤษฎีบทการส่งสเปกตรัมจุดสำหรับพหุนาม [5] มาเป็นแนวทางในการพิสูจน์ของบทความวิจัยนี้ (ทฤษฎีบท 3.1) และผลที่ได้จากทฤษฎีบท 3.1 คือ สเปกตรัมจุดของทวินามของตัวดำเนินการเชิงเส้น T จะเท่ากับภาพของสเปกตรัมจุดของตัวดำเนินการเชิงเส้น T โดยทวินาม ซึ่งจะใช้การพิสูจน์แบบตรง (Direct Proof) ซึ่งการเป็นเซตย่อยซึ่งกันและกันของสเปกตรัมจุดของทวินามของตัวดำเนินการเชิงเส้น T และ ภาพของสเปกตรัมจุดของตัวดำเนินการเชิงเส้น T โดยทวินาม โดยสังเกตได้ว่ารูปแบบของทวินามจะคล้ายคลึงกับพหุนาม ซึ่งสามารถแยกตัวประกอบเพื่อหาค่ารากได้ จึงทำให้พิสูจน์คล้ายกับทฤษฎีบทการส่งสเปกตรัมจุดสำหรับพหุนาม [5] ได้ ทำให้ได้ทฤษฎีบทการส่งสเปกตรัมจุดสำหรับทวินาม นั่นหมายความว่า ให้ $X \neq \{\vec{0}\}$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตเชิงซ้อน และ $T \in B(X,X)$ โดย $\hat{b}(\theta) = (\theta+a)^n$ สำหรับทุกจำนวนนับ n และค่าคงที่ a กำหนด $b(T) = (T+aI)^n$ แล้ว $\sigma_0(b(T)) = \hat{b}(\sigma_0(T))$

5. สรุป

บทความวิจัยนี้จัดทำขึ้นเพื่อศึกษาทฤษฎีบทการส่งสเปกตรัมจุดสำหรับทวินาม โดยนำเรื่องปริภูมิฮิลเบิร์ต ตัวดำเนินการเชิงเส้น และค่าลักษณะเฉพาะ เข้ามาเกี่ยวข้อง จากทฤษฎีบท 3.1 ผลที่น่าสนใจคือ สเปกตรัมจุดของทวินามของตัวดำเนินการเชิงเส้น T จะเท่ากับภาพของสเปกตรัมจุดของตัวดำเนินการเชิงเส้น T โดยทวินาม $\hat{b}$ และปัญหาที่เกิดจากการศึกษาบทความวิจัยนี้คือ เนื้อหาทฤษฎีบทเกี่ยวกับสเปกตรัมจุดนั้น ไม่มีอยู่ในระดับปริญญาตรี จึงทำให้ค่อนข้างยากและเสียเวลาในการศึกษาค้นคว้า

6. กิตติกรรมประกาศ

บทความวิจัยนี้ได้รับการสนับสนุนทุนวิจัยจากศูนย์ความเป็นเลิศด้านคณิตศาสตร์ สำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา โดยสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี เนื่องจากได้รับความกรุณาอย่างสูงและดูแลอย่างใกล้ชิดมาตลอดจาก ผศ.ดร. อาทิตย์ แข็งธัญการ และอาจารย์จินดา ไชยช่วย ที่กรุณาให้คำแนะนำและให้ความช่วยเหลือตลอดจนปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆด้วยความเอาใจใส่อย่างดียิ่ง คณะผู้วิจัยตระหนักถึงความตั้งใจจริงและความทุ่มเทของอาจารย์ และขอมอบความกตัญญูกตเวทิตาคุณ แด่บิดา มารดา และผู้มีพระคุณทุกท่าน ซึ่งเปิดโอกาสให้ได้รับการศึกษาเล่าเรียน ตลอดจนคอยช่วยเหลือ ให้กำลังใจคณะผู้วิจัยเสมอมาจนสำเร็จการศึกษา รวมถึงเพื่อน ๆในกลุ่มที่เป็นกำลังใจ และให้ความช่วยเหลือในการทำบทความวิจัยนี้

เอกสารอ้างอิง

[1] ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม, *เอกสารประกอบการสอนวิชาทฤษฎีเมทริกซ์*, กทม., 2558.
P. Chansangiam, *Teaching Document for Matrix Theory*, Bangkok, 2015 (in Thai).

[2] E. W. Weisstein, *Eigenvalue*. Retrieved 9 November 2016 from http://mathworld.wolfram.com/Eigenvalue.html

[3] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, New Jersey, USA: John Wiley & Sons Inc., 1978.

[4] Wikipedia. 2001. *Spectrum (functional analysis)*. Retrieved 24 January 2017 from https://en.wikipedia.org/wiki/Spectrum_(functional_analysis)

[5] พุทธพร วานิชกร, “ทฤษฎีการส่งสเปกตรัมสำหรับพหุนามและฟังก์ชันอื่นบางฟังก์ชัน,” วิทยานิพนธ์นักศึกษาปริญญาโทสาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี, กทม., 2547.
B. Vanishkorn, “Spectral Mapping Theory for Polynomials and Some Other Fungtions,” A Master’s Thesis in Applied Mathematics, King Mongkut’s University of Technology Thonburi, Bangkok, 2004 (in Thai).