วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh 62(693) Sep–Dec, 2017
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
http://MathThai.Org MathThaiOrg@gmail.com

สมบัติบางประการของกราฟเคย์เลย์ผลบวก
Some Properties of Addition Cayley Graphs

ชานนท์ พรมสกล
Chanon Promsakon

Department of Mathematic, Faculty of Applied Science,
King Mongkul's University of Technology North Bangkok
Bangsue, Bangkok 10800

Email: chanon.p@sci.kmutnb.ac.th

บทคัดย่อ

ในบทความนี้จะกล่าวถึงกราฟที่สร้างจากจำนวนเต็มมอดุโล *n* ที่เรียกว่า กราฟเคย์เลย์ผลบวก พร้อมกับศึกษาสมบัติพื้นฐานของมันโดยมุ่งเน้นไปที่ความเชื่อมโยง ผลลัพธ์จะกล่าวถึงเงื่อนไขที่ทำให้กราฟผลบวกเคย์เลย์เป็นกราฟแฮมมิลตันและกราฟออยเลอร์ในบางกรณี

คำสำคัญ: กราฟผลบวกเคย์เลย์ กราฟแฮมมิลตัน กราฟออยเลอร์

ABSTRACT

In this article, we study graph created from integer modulo, say Addition Cayley graphs, and study basic properties emphasizing their connectivity. Our results are about conditions to make them as Hamiltonian and Eulerian in some cases.

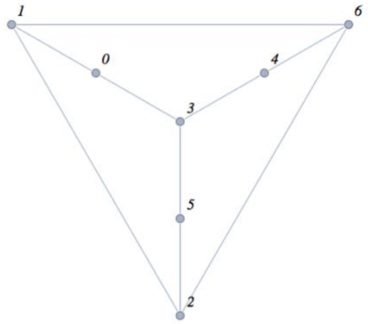
Keywords: Addition Cayley graph, Hamilton graph, Euler graph

1. บทนำ

กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 1 และ Z_n แทนจำนวนเต็มมอดุโล n และ A เป็นเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างของ Z_n กราฟเคย์เลย์ผลบวกของ Z_n เขียนแทน

ด้วย $Cay^{+}(Z_n , A)$ คือกราฟที่มีจุดยอดเป็นสมาชิกใน Z_n และจุด x และจุด y จะประชิดกันก็ต่อเมื่อ $x+y$ เป็นสมาชิกใน A

ยกตัวอย่างเช่นรูปที่ 1 กราฟผลบวกเคย์เลย์ของ $Cay^{+}(Z_7 , \{0,1,3\})$ จะได้กราฟดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 1 กราฟผลบวกเคย์เลย์ของ $Cay^{+}(Z_7 , \{0,1,3\})$

กราฟเคย์เลย์ผลบวกถูกศึกษาโดย Deepa Sinha, Pravin Garg และ Anjali Singh ในบทความที่ชื่อว่า Some Properties of Unitary Addition Cayley Graph [1] ซึ่งได้ศึกษาสมบัติพื้นฐานของกราฟเคย์เลย์ผลบวกบนเซตย่อยที่บรรจุยูนิตทั้งหมดของ สมบัติที่ศึกษาได้แก่ จำนวนจุด จำนวนเส้น ดีกรี การเป็นกราฟปกติ การเป็นกราฟสองส่วน การเป็นกราฟระนาบ รวมถึงการเป็นกราฟแฮมมิลตันด้วย จึงเป็นที่มาให้ผู้เขียนสนใจศึกษากราฟผลบวกเคย์เลย์ แต่สำหรับบนเซตย่อยใด ๆ โดยจะทำการศึกษาสมบัติพื้นฐาน เพื่อต้องการหาเงื่อนไขที่จะทำให้กราฟเคย์เลย์ผลบวกเป็นกราฟแฮมมิลตันและเป็นกราฟออยเลอร์

ในงานชิ้นนี้ จะใช้ความรู้พื้นฐานและสัญลักษณ์ทางด้านทฤษฎีกราฟตามหนังสือของ Douglas, B. W. [2] และพื้นฐานทางด้านพีชคณิตนามธรรมตามหนังสือของ Dummit, David Steven and Richard M. Foote [3]

2. สมบัติพื้นฐานของกราฟเคย์เลย์ผลบวก

ก่อนอื่นจะกล่าวถึงทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับดีกรีของแต่ละจุดยอดในกราฟเคย์เลย์ผลบวก

ทฤษฎีบทที่ 1 สำหรับกราฟผลบวกเคย์เลย์ $Cay^{+}(Z_n, A)$ ที่มี x เป็นจุดยอดจะได้ว่า ดีกรีของ x มีค่าเท่ากับ |A|-1 เมื่อ $2x$ เป็นสมาชิกของ A ไม่เช่นนั้น ดีกรีของ x มีค่าเท่ากับ |A|

พิสูจน์ สมมติให้ $2x \in A$ ดังนั้นทุก a ที่เป็นสมาชิกของ A ที่ไม่ใช่ $2x$ จะได้ว่า x ประชิดกับ a-x นั่นเอง จึงสรุปได้ว่าดีกรีของ x มีค่าเท่ากับ |A|-1

ในทางกลับกันสมมติว่า $2x$ ไม่เป็นสมาชิกใน A ดังนั้นทุก a ที่เป็นสมาชิกของ A จะได้ว่า x ประชิดกับ a-x นั่นเอง จึงสรุปได้ว่าดีกรีของ x มีค่าเท่ากับ |A| □

จากทฤษฎีบทที่ผ่านมา ทำให้ทราบถึงดีกรีของแต่ละจุดยอด เราจึงสามารถหาจำนวนเส้นเชื่อมได้จากความสัมพันธ์ที่ว่า ผลรวมดีกรีของทุกจุดยอดในกราฟมีค่าเป็นสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อม ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 2 จำนวนเส้นของกราฟเคย์เลย์ผลบวก $Cay^{+}(Z_n, A)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่มีค่าเท่ากับ $\frac{|A|(n-1)}{2}$ แต่ถ้า n เป็นจำนวนคู่ จำนวนเส้นเชื่อมจะมีค่าเท่ากับ $\frac{n|A|-2s}{2}$ เมื่อ s แทนจำนวนสมาชิกใน A ที่เป็นจำนวนเต็มคู่

พิสูจน์ สมมติ n เป็นจำนวนเต็มคี่ จะได้ว่า $(2,n) = 1$ จึงทำให้สำหรับทุก a ที่เป็นสมาชิกใน A สมการสมภาค $2x \equiv a \pmod{n}$ มีคำตอบเสมอและมีเพียงคำตอบเดียวเท่านั้น จึงสรุปได้ว่ามีทั้งหมด |A| จุดยอดที่มีดีกรีเป็น |A|-1 และอีก n-|A| จุดยอดที่มีดีกรีเป็น |A| จึงได้จำนวนเส้นเชื่อมทั้งหมดเป็น

$$\frac{|A|(|A|-1)+(n-|A|)|A|}{2} = \frac{|A|(n-1)}{2}$$ เส้น

สำหรับกรณีที่ n เป็นจำนวนเต็มคู่ จะได้ว่า $(2,n) = 2$ จึงทำให้สมการสมภาค $2x \equiv a \pmod{n}$ มีคำตอบและมีเพียงสองคำตอบเมื่อ $2|a$ โดยที่ a ที่เป็นสมาชิกใน A ให้ s แทนจำนวนสมาชิกใน A ที่เป็นจำนวนเต็มคู่จึงสรุปได้ว่ามีทั้งหมด $2s$ จุดยอดที่มีดีกรีเป็น |A|-1 และอีก n-$2s$ จุดยอดที่มีดีกรีเป็น |A| จึงได้จำนวนเส้นเชื่อมทั้งหมดเป็น $\frac{2s(|A|-1)+(n-2s)|A|}{2} = \frac{|A|n-2s}{2}$ เส้น □

ในทฤษฎีบทต่อไปจะแสดงเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอในการทำให้ $Cay^{+}(Z_n, A)$ เป็นกราฟปกติ หรือกราฟที่ทุกจุดยอดมีดีกรีเท่ากันนั่นเอง

ทฤษฎีบทที่ 3 กราฟเคย์เลย์ผลบวก Cay$^+$(Z_n , A) เป็นกราฟปกติ ก็ต่อเมื่อ $A \cap 2Z_n = \varnothing$ หรือ $2Z_n \subseteq A$

พิสูจน์ ต่อไปเป็นการพิสูจน์การเป็นเงื่อนไขจำเป็น สมมติ Cay$^+$(Z_n , A) เป็นกราฟปกติ ดังนั้นจึงมีความเป็นไปได้อยู่สองกรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 ดีกรีทุกจุดเท่ากับ |A|-1 ดังนั้น $2x \in A$ ทุก $x \in Z_n$ จะได้ว่า $2Z_n \subseteq A$

กรณีที่ 2 ดีกรีทุกจุดเท่ากับ |A| ดังนั้น $2x \notin A$ ทุก $x \in Z_n$ จะได้ว่า $A \cap 2Z_n = \varnothing$

สำหรับการพิสูจน์เงื่อนไขเพียงพอจะพิสูจน์โดยแบ่งเป็นสองกรณีดังนี้

กรณีที่ 1 สมมติ $2Z_n \subseteq A$ ดังนั้นสำหรับทุก $x \in Z_n$ จะได้ว่า $2x \in A$ ดังนั้น $d(x) = |A| - 1$ จึงสรุปได้ว่า Cay$^+$(Z_n , A) เป็นกราฟปกติ

กรณีที่ 2 สมมติ $A \cap 2Z_n = \varnothing$ ดังนั้นสำหรับทุก $x \in Z_n$ จะได้ว่า $2x \notin A$ ดังนั้น $d(x) = |A|$ จึงสรุปได้ว่า Cay$^+$(Z_n , A) เป็นกราฟปกติ

เพราะฉะนั้นกราฟเคย์เลย์ผลบวก Cay$^+$(Z_n , A) เป็นกราฟปกติ □

จากทฤษฎีบทที่ 3 สามารถสรุปได้ทันทีว่า Cay$^+$(Z_n , $2Z_n$) เป็นกราฟปกติที่ทุกจุดมีดีกรีเท่ากับ $|2Z_n|$ - 1 ทุกจำนวนนับ *n*

สำหรับกราฟใดๆ จะเรียกว่า **กราฟระนาบ** เมื่อกราฟดังกล่าวสามารถวาดบนระนาบโดยที่ไม่มีเส้นเชื่อมใดตัดกันเลย สมบัติกราฟระนาบที่ใช้สำหรับงานวิจัยชิ้นนี้แสดงในทฤษฎีบทต่อไป

ทฤษฎีบทที่ 4 [2] สำหรับกราฟระนาบใดๆ ที่จำนวนจุดยอดเท่ากับ *n* และจำนวนเส้นเชื่อมเท่ากับ *m* จะได้ว่า $m \leq 3n - 6$

ต่อไปเป็นเงื่อนไขจำเป็นของการเป็นกราฟระนาบของกราฟเคย์เลย์ ซึ่งเงื่อนไขดังกล่าวเกี่ยวข้องกับจำนวนสมาชิกของ A

ทฤษฎีบทที่ 5 กำหนด *n* เป็นจำนวนเต็ม ถ้า |A| > 6 แล้ว Cay$^+$(Z_n , A) ไม่เป็นกราฟระนาบ

พิสูจน์ สมมติ $|A| > 6$

ในกรณีที่ n เป็นจำนวนเต็มคี่ จะได้ว่า

$$\text{จำนวนเส้น } = \frac{|A|(n-1)}{2} > \frac{6(n-1)}{2} > 3n-6$$

จึงสรุปได้ว่า $Cay^{+}(Z_n, A)$ ไม่เป็นกราฟระนาบ

ในกรณีที่ n เป็นจำนวนเต็มคู่ จะได้ว่า

$$\text{จำนวนเส้น } = \frac{|A|n-2s}{2} > \frac{|A|n-2|A|}{2} = \frac{|A|(n-2)}{2} > 3n-6$$

จึงสรุปได้ว่า $Cay^{+}(Z_n, A)$ ไม่เป็นกราฟระนาบด้วยเช่นกัน □

สำหรับกราฟผลบวกเคย์เลย์ $Cay^{+}(Z_n, A)$ ที่ $|A| \le 6$ เป็นกราฟระนาบหรือไม่นั้น เราแสดงให้เห็น 2 กรณีว่าเป็นกราฟระนาบแน่นอน คือ กรณีที่ $|A| = 1$, 2 โดยเริ่มต้นพิจารณา

กรณี $|A| = 1$ จะได้ว่ากราฟ $Cay^{+}(Z_n, \{a\})$ มีจำนวนเส้นน้อยกว่า $n-1$ ทำให้กราฟ $Cay^{+}(Z_n, \{a\})$ ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง จึงเป็นกราฟระนาบ

กรณี $|A| = 2$ จะได้ว่ากราฟ $Cay^{+}(Z_n, \{a,b\})$ มีจำนวนเส้นเชื่อมเท่ากับ $n-1$ ในกรณีที่ n เป็นจำนวนเต็มคี่และเท่ากับ $n-s$ ในกรณีที่ n เป็นจำนวนเต็มคู่ ซึ่งทั้งสองกรณีสามารถสรุปได้ว่า $Cay^{+}(Z_n, \{a\})$ เป็นกราฟระนาบ

ในหัวข้อถัดไปเป็นทฤษฎีบทหลักของงานชิ้นนี้ แสดงถึงสมบัติการเป็นกราฟแฮมมิลตันและกราฟออยเลอร์ โดยการหาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอ พร้อมทั้งยกตัวอย่างให้เห็นชัด

3. สมบัติแฮมมิลตันและออยเลอร์

จะเรียกกราฟ G ว่า**กราฟเชื่อมโยง** เมื่อทุกคู่จุด u และ v ใดๆ ใน G จะต้องมีวิถีเชื่อมโยงระหว่างจุดทั้งสองเสมอ **กราฟแฮมมิลตัน** คือกราฟเชื่อมโยง G ที่มีกราฟวัฏจักรที่มีจุดยอดทุกจุดใน G เป็นกราฟย่อย โดยวัฏจักรดังกล่าวเรียกว่าวัฏจักรแฮมมิลตัน สมบัติพื้นฐานของกราฟแฮมมิลตันที่ใช้ในงานวิจัยนี้แสดงต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 6 [2] ถ้ากราฟ G เป็นกราฟที่มีจำนวนจุดมากกว่า 2 และ $d(x) \geq \frac{n}{2}$ สำหรับทุกจุด x ใน G แล้ว G เป็นกราฟแฮมมิลตัน

จากทฤษฎีบทที่ 6 สามารถนำมาประยุกต์เพื่อหาเงื่อนไขเพียงพอสำหรับสรุปว่ากราฟเคย์เลย์ผลบวกเป็นกราฟแฮมมิลตัน ซึ่งแสดงในทฤษฎีบทต่อไป

ทฤษฎีบทที่ 7 ถ้า A เป็นเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างของ Z_n ที่ $|A| \geq \frac{n}{2}+1$ แล้ว $Cay^+(Z_n , A)$ เป็นกราฟแฮมมิลตัน

พิสูจน์ สมมติ A เป็นเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างของ Z_n ที่ $|A| \geq \frac{n}{2}+1$ เนื่องจากสำหรับจุด x ใดๆ ใน Z_n มีดีกรีมากกว่าหรือเท่ากับ $|A| - 1$ ดังนั้น $d(x) \geq |A|-1 \geq \frac{n}{2}$ จึงสรุปได้ว่า $Cay^+(Z_n , A)$ เป็นกราฟแฮมมิลตัน

สำหรับบทกลับไม่จริง ดังตัวอย่างต่อไปนี้ กำหนด A = {1, 3, 5, 7, 9} ซึ่งเห็นได้ชัดว่าเป็นเซตย่อยของ Z_{10} และ $2Z_{10}$ = {2, 6, 0, 4, 8} และ $2Z_{10} \cap A = \varnothing$ ดังนั้น $Cay^+(Z_{10} , A)$ เป็นกราฟปกติที่มีดีกรีของทุกจุดเท่ากับ 5 ดังนั้นจากทฤษฎีบทที่ 6 จึงสรุปไดว่า $Cay^+(Z_{10} , A)$ เป็นกราฟแฮมมิลตัน และยังมีกราฟในลักษณะนี้อีกมากมาย สามารถสรุปได้เป็นทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 8 กราฟ $Cay^+(Z_{2n} , Z_{2n} \setminus 2Z_{2n})$ เป็นกราฟแฮมมิลตันสำหรับทุกจำนวนนับ n ที่มากกว่า 1

พิสูจน์ เห็นได้ชัดว่า $2Z_n \cap (Z_{2n} \setminus 2Z_n) = \varnothing$ ดังนั้น $Cay^+(Z_{2n} , Z_{2n} \setminus 2Z_{2n})$ เป็นกราฟปกติที่มีดีกรีของทุกจุดเท่ากับ $| Z_{2n} \setminus 2Z_{2n} | = n$ เพราะฉะนั้นจึงสรุปได้ว่า $Cay^+(Z_{2n} , Z_{2n} \setminus 2Z_{2n})$ เป็นกราฟแฮมมิลตัน □

กราฟออยเลอร์คือกราฟที่สามารถหาวงจรปิดที่บรรจุทุกเส้นในกราฟดังกล่าวได้ ดังนั้นเห็นได้ชัดว่ากราฟออยเลอร์เป็นกราฟเชื่อมโยง เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอของการเป็นกราฟออยเลอร์แสดงในทฤษฎีบทต่อไป

ทฤษฎีบทที่ 9 [2] กำหนดให้ G เป็นกราฟเชื่อมโยง จะได้ว่า G เป็นกราฟออยเลอร์ ก็ต่อเมื่อ ทุกจุดในกราฟ G มีดีกรีเป็นจำนวนคู่

ต่อไปจะศึกษาการเป็นกราฟออยเลอร์ของกราฟเคย์เลย์ผลบวกสำหรับจำนวนนับใดๆ โดยเริ่มต้นจากบทตั้งดังต่อไปนี้

บทตั้งที่ 10 ถ้า $Cay^{+}(Z_n , A)$ เป็นกราฟออยเลอร์แล้ว $Cay^{+}(Z_n , A)$ เป็นกราฟปกติ

พิสูจน์ สมมติ $Cay^{+}(Z_n , A)$ ไม่เป็นกราฟปกติ ดังนั้นมีจุด x และ y ที่ $d(x) = |A|$ และ $d(y) = |A| - 1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ที่จะเป็นจำนวนเต็มคู่ทั้งคู่ จึงสรุปได้ว่า $Cay^{+}(Z_n , A)$ เป็นกราฟออยเลอร์ □

ทฤษฎีบทที่ 11 กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับ กราฟ $Cay^{+}(Z_{2n} , Z_{2n} \setminus 2Z_{2n})$ เป็นออยเลอร์ ก็ต่อเมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคู่

พิสูจน์ จากทฤษฎีบทที่ 8 จะพบว่า $Cay^{+}(Z_{2n} , Z_{2n} \setminus 2Z_{2n})$ เป็นกราฟแฮมมิลตัน แสดงว่า $Cay^{+}(Z_{2n} , Z_{2n} \setminus 2Z_{2n})$ เป็นกราฟเชื่อมโยง เห็นได้ชัดว่า $Cay^{+}(Z_{2n} , Z_{2n} \setminus 2Z_{2n})$ เป็นกราฟปกติที่มีดีกรีของทุกจุดเท่ากับ $| Z_{2n} \setminus 2Z_{2n} | = n$ ดังนั้นกราฟ $Cay^{+}(Z_{2n} , Z_{2n} \setminus 2Z_{2n})$ เป็นออยเลอร์ ก็ต่อเมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคู่นั่นเอง □

ในทฤษฎีบทต่อไปแสดงเงื่อนไขจำเป็นและเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับกราฟเคย์เลย์ผลบวกที่มีจำนวนจุดเป็นจำนวนเต็มคี่

ทฤษฎีบทที่ 12 กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มคี่ จะได้ว่ากราฟ $Cay^{+}(Z_n , A)$ เป็นกราฟออยเลอร์ ก็ต่อเมื่อ $A = Z_n$

พิสูจน์ สมมติ $A = Z_n$ ดังนั้น $Cay^{+}(Z_n , Z_n)$ เป็นกราฟเชื่อมโยงปกติที่ทุกจุดมีดีกรีเท่ากับ $n – 1$ แต่เนื่องจาก n เป็นจำนวนเต็มคี่ จึงทำให้ $n – 1$ เป็นจำนวนเต็มคู่ จึงสรุปได้ว่ากราฟ $Cay^{+}(Z_n , Z_n)$ เป็นกราฟออยเลอร์

ในทางกลับกันสมมติให้ $A \subset Z_n$ ดังนั้นจึงมีสมาชิก z ใน $Z_n \setminus A$ แต่เนื่องจาก n เป็นจำนวนเต็มคี่ จึงทำให้ $(2, n) = 1$ และสมการสมภาค

$2x \equiv z(\bmod n)$ มีคำตอบเพียงหนึ่งเดียว ซึ่งสมมติให้เป็น x_0 เพราะฉะนั้น $d(x_0) = |A|$ ในขณะที่มีจุด x_1 ที่ $2x_1 \in A$ ดังนั้น $d(x_1) = |A| - 1$ จึงสรุปได้ว่าต้องมีจุดที่มีดีกรีเป็นจำนวนเต็มคี่ใน $Cay^+(Z_n , A)$ เพราะฉะนั้นกราฟ $Cay^+(Z_n , A)$ ไม่เป็นกราฟออยเลอร์

ในงานครั้งนี้ได้ศึกษาสมบัติพื้นฐานของกราฟเคย์เลย์ผลบวกของ Z_n ไม่ว่าจะเป็นจำนวนจุดยอด จำนวนเส้น ดีกรีของแต่ละจุดยอด นอกจากนั้นยังคงหาเงื่อนไขในการเป็นกราฟปกติ กราฟระนาบ กราฟแฮมมิลตัน และกราฟออยเลอร์ในบางกรณี พร้อมยกตัวอย่างกราฟเคย์เลย์ผลบวกบางตัวที่สอดคล้องกับสมบัติดังกล่าว

4. กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณคณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ เลขทุน 5942105

เอกสารอ้างอิง

[1] Deepa Sinha, Pravin Garg and Anjali Singh, "Some Properties of Unitary Addition Cayley Graphs," *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 17, no. 3, pp. 49-59, 2011.

[2] Douglas, B.W., *Introduction to graph theory*, Pentice – Hall Inc., 2001.

[3] Dummit, David Steven and Richard M. Foote, *Abstract Algebra*, Hoboken. NJ: Wiley, 2004