วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh 62(693) Sep–Dec, 2017
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
http://MathThai.Org MathThaiOrg@gmail.com

ทฤษฎีบทเซวา
Ceva's Theorem

ภัคคินี ชิตสกุล
Pakkinee Chitsakul

Retired Associate Professor
Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang
Chalongkrung Rd., Bangkok, 10520

Email: jimreivat99@gmail.com

บทคัดย่อ

บทความนี้แสดงการพิสูจน์ทฤษฎีบทเซวาโดยใช้ความรู้เกี่ยวกับเส้นขนานและสามเหลี่ยมคล้าย และนำทฤษฎีบทเซวาใช้ในการพิสูจน์ความรู้ทางเรขาคณิต เกี่ยวกับเซนทรอยด์ และออร์โทเซนเตอร์ของสามเหลี่ยม รวมถึงการหาจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบในและล้อมรอบสามเหลี่ยม

คำสำคัญ: ทฤษฎีบทเซวาเซนทรอยด์ ออร์โทเซนเตอร์ จุดศูนย์กลางวงกลมแนบในสามเหลี่ยม จุดศูนย์กลางวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม

ABSTRACT

This article shows how to prove Ceva's theorem by using the knowledge concern on parallel lines and similar triangles. We employ Ceva's theorem for proving centroid and orthocenter and also finding incenter and circumcenter of a triangle.

Keywords: Ceva's Theorem, Centroid, Orthocenter, Incenter of a Triangle, Circumcenter of a Triangle

1. บทนำ

ทฤษฎีบทเซวา ถ้า ΔABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ ที่มี D E และ F เป็นจุดบนด้าน BC CA และ AB ตามลำดับ แล้ว AD BE และ CF ตัดกันที่จุดเดียวกันก็ต่อเมื่อ

$$\frac{AF}{FB}\bullet\frac{BD}{DC}\bullet\frac{CE}{EA} = 1$$

ทฤษฎีบทเซวาเป็นทฤษฎีบทที่มีความสำคัญในการศึกษาเรขาคณิต เนื่องจากสามารถนำทฤษฎีบทเซวาใช้ในการพิสูจน์ความรู้ทางเรขาคณิตเกี่ยวกับเซนทรอยด์และออร์โทเซนเตอร์ของสามเหลี่ยม รวมถึงการหาจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบใน และการหาจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม

บทความนี้แสดงการพิสูจน์ทฤษฎีบทเซวาโดยใช้ความรู้เกี่ยวกับเส้นขนานและสามเหลี่ยมคล้าย และนำทฤษฎีบทเซวาพิสูจน์ความรู้ทางเรขาคณิตต่อไปนี้

- เส้นที่ลากจากมุมของสามเหลี่ยมไปแบ่งครึ่งด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมหรือมัธยฐานจะตัดกันที่จุดจุดหนึ่งภายในสามเหลี่ยม เรียกจุดนี้ว่า เซนทรอยด์ ซึ่งจุดนี้จะเป็นจุดศูนย์กลางของสามเหลี่ยมด้วย
- เส้นที่ลากจากมุมของสามเหลี่ยมไปตั้งฉากกับด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมหรือเส้นที่แทนส่วนสูงของสามเหลี่ยมจะตัดกันที่จุดจุดหนึ่ง เรียกจุดนี้ว่า ออร์โทเซนเตอร์
- เส้นที่แบ่งครึ่งมุมทุกมุมของสามเหลี่ยมจะตัดกันที่จุดจุดหนึ่งภายในสามเหลี่ยม ซึ่งจุดตัดนี้จะเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบในสามเหลี่ยม
- เส้นที่ตั้งฉากและแบ่งครึ่งด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมจะตัดกันที่จุดจุดหนึ่ง ซึ่งจุดตัดนี้จะเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม

2. การพิสูจน์ทฤษฎีบทเซวา

บทตั้ง 1 ให้ ΔABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ ที่มี D E และ F เป็นจุดบนด้าน BC, CA และ AB ตามลำดับ ถ้า AD, BE และ CF ตัดกันที่จุด K เดียวกันแล้ว

$$\frac{AF}{FB}\bullet\frac{BD}{DC}\bullet\frac{CE}{EA} = 1$$

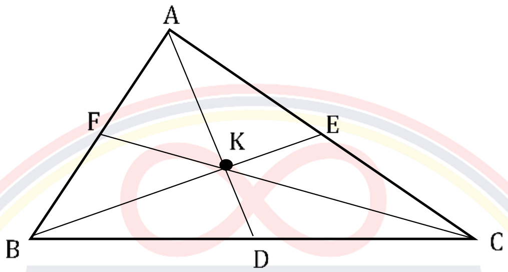
สิ่งที่กำหนดให้ 1. ให้ ΔABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ

2. ให้ D เป็นจุดบนด้าน BC

3. ให้ E เป็นจุดบนด้าน CA

4. ให้ AD และ BE ตัดกันที่ K

5. ให้ CK ต่อไปตัดด้าน AB ที่ F ดังรูปที่ 1



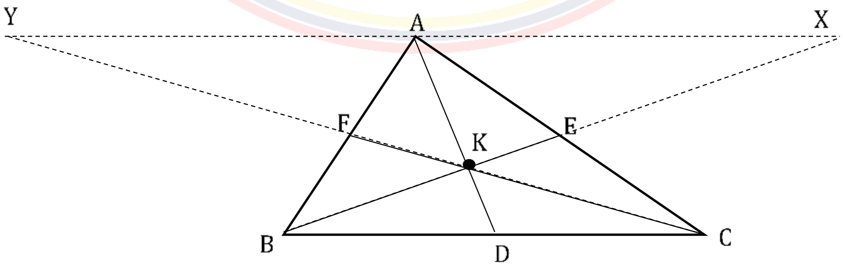
รูปที่ 1 สิ่งที่กำหนดให้ตามบทตั้ง 1

สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ $\frac{AF}{FB} \bullet \frac{BD}{DC} \bullet \frac{CE}{EA} = 1$

สร้างเพื่อการพิสูจน์ 1. ลากเส้นตรง XY ผ่านจุด A ให้ขนานกับ BC

2. จากจุด B ต่อ BE ออกไปทาง E ให้ตัดเส้นขนานกับ BC ที่ X

3. จากจุด C ต่อ CF ออกไปทาง F ให้ตัดเส้นขนานกับ BC ที่ Y ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2 สร้างเพื่อการพิสูจน์ตามบทตั้ง 1

พิสูจน์

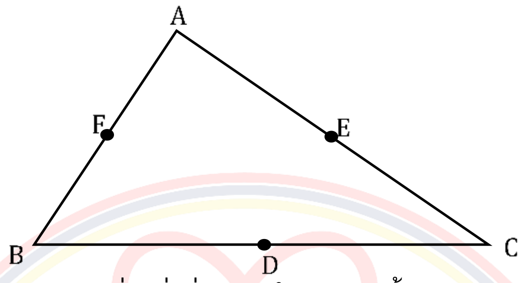
ข้อความพิสูจน์	เหตุผล
1. $F\hat{A}Y = F\hat{B}C$	1. มุมแย้ง (YX // BC มี AB เป็นเส้นตัดขวาง)
2. $A\hat{Y}F = B\hat{C}F$	2. มุมแย้ง (YX // BC มี YC เป็นเส้นตัดขวาง)
3. $A\hat{F}Y = B\hat{F}C$	3. มุมตรงข้าม (AB ตัดกับ YC ที่ F)
4. $\Delta AFY \sim \Delta BFC$	4. จาก 1 2 และ 3 สามเหลี่ยมคล้าย คือ สามเหลี่ยมที่มีมุมเท่ากันทุกมุม มุมต่อมุม
5. $\frac{AF}{BF} = \frac{AY}{BC}$	5. จาก 4 ด้านที่อยู่ในลำดับเดียวกันของสามเหลี่ยมคล้าย จะเป็นสัดส่วนที่เท่ากัน
6. $\frac{CE}{AE} = \frac{CB}{AX}$	6. ในทำนองเดียวกันกับ 5 ($\Delta CEB \sim \Delta AEX$)
7. $\frac{AX}{DB} = \frac{AK}{DK}$	7. ในทำนองเดียวกันกับ 5 ($\Delta AXK \sim \Delta DBK$)
8. $\frac{AY}{DC} = \frac{AK}{DK}$	8. ในทำนองเดียวกันกับ 5 ($\Delta YAK \sim \Delta CDK$)
9. $\frac{AX}{DB} = \frac{AY}{DC}$	9. จาก 7 และ 8
10. $\frac{BD}{DC} = \frac{AX}{AY}$	10. จาก 9
11. $\frac{AF}{BF} \bullet \frac{BD}{DC} \bullet \frac{CE}{AE} = \frac{AY}{BC} \bullet \frac{AX}{AY} \bullet \frac{CB}{AX}$	11. จาก 5 10 และ 6
12. $\frac{AF}{BF} \bullet \frac{BD}{DC} \bullet \frac{CE}{AE} = 1$	12. จาก 11

บทตั้ง 2 ให้ ΔABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ ที่มี D E และ F เป็นจุดบนด้าน BC, CA และ AB ตามลำดับ ถ้า $\frac{AF}{FB} \bullet \frac{BD}{DC} \bullet \frac{CE}{EA} = 1$ แล้ว AD, BE และ CF ตัดกันที่จุด K เดียวกัน

<u>สิ่งที่กำหนดให้</u> 1. ให้ ΔABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ

2. ให้ D E และ F เป็นจุดบนด้าน BC, CA และ AB ตามลำดับ

3. ให้ $\frac{AF}{FB} \bullet \frac{BD}{DC} \bullet \frac{CE}{EA} = 1$ ดังรูปที่ 3

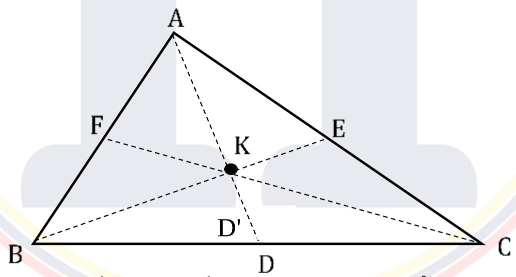


รูปที่ 3 สิ่งที่กำหนดให้ตามบทตั้ง 2

<u>สิ่งที่ต้องการพิสูจน์</u> เส้น AD, BE และ CF ตัดกันที่จุด K เดียวกัน

<u>สร้างเพื่อการพิสูจน์</u> 1. ลาก BE และ CF ตัดกันที่จุด K

2. จาก AK ต่อไปตัด BC ที่จุด D' ดังรูปที่ 4



รูปที่ 4 สร้างเพื่อการพิสูจน์ตามบทตั้ง 2

พิสูจน์

ข้อความพิสูจน์	เหตุผล
1. $\frac{AF}{BF} \bullet \frac{BD}{DC} \bullet \frac{CE}{AE} = 1$	1. กำหนดให้
2. $\frac{AF}{BF} \bullet \frac{BD'}{D'C} \bullet \frac{CE}{AE} = 1$	2. สร้างและบทตั้ง 1
3. $\frac{BD}{DC} = \frac{BD'}{D'C}$	3. จาก 1 และ 2

4. $\frac{BD}{DC}+1=\frac{BD'}{D'C}+1$ $\frac{BD+DC}{DC}=\frac{BD'+D'C}{D'C}$ $\frac{BC}{DC}=\frac{BC}{D'C}$	4. จาก 3
5. $D = D'$ หรือ AD, BE และ CF ตัดกันที่จุด K เดียวกัน	5. จาก 4

จากบทตั้ง 1 ถ้า AD, BE และ CF ตัดกันที่จุด K เดียวกัน แล้ว $\frac{AF}{FB}\bullet\frac{BD}{DC}\bullet\frac{CE}{EA}=1$

จากบทตั้ง 2 ถ้า $\frac{AF}{FB}\bullet\frac{BD}{DC}\bullet\frac{CE}{EA}=1$ แล้ว AD, BE และ CF ตัดกันที่จุด K เดียวกัน

ดังนั้นจากบทตั้ง 1 และบทตั้ง 2 จะได้ทฤษฎีบทเซวา

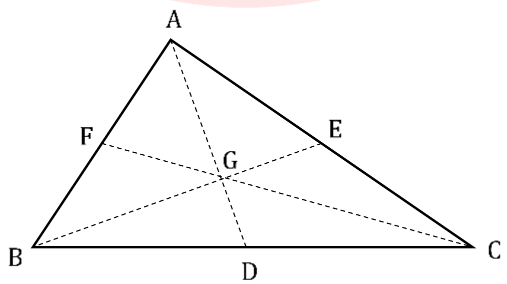
AD, BE และ CF ตัดกันที่จุด K เดียวกัน ก็ต่อเมื่อ $\frac{AF}{FB}\bullet\frac{BD}{DC}\bullet\frac{CE}{EA}=1$

3. เซนทรอยด์และออร์โทเซนเตอร์

บทแทรก 1 เส้นที่ลากจากมุมของสามเหลี่ยมไปแบ่งครึ่งด้านที่อยู่ตรงข้ามมุม ตัดกันที่จุดเดียวกันภายในสามเหลี่ยม เรียกว่า จุดเซนทรอยด์

<u>สิ่งที่กำหนดให้</u> 1. ให้ ΔABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ

2. D E และ F เป็นจุดแบ่งครึ่งด้าน BC, CA และ AB ดังรูปที่ 5



รูปที่ 5 สิ่งที่กำหนดให้ตามบทแทรก 1

<u>สิ่งที่ต้องการพิสูจน์</u> เส้น AD, BE และ CF ตัดกันที่จุด G เดียวกัน

พิสูจน์

ข้อความพิสูจน์	เหตุผล
1. BD = DC	1. กำหนดให้ (D เป็นจุดกึ่งกลาง BC)
2. CE = EA	2. กำหนดให้ (E เป็นจุดกึ่งกลาง CA)
3. AF = FB	3. กำหนดให้ (F เป็นจุดกึ่งกลาง AB)
4. $\frac{AF}{FB} \bullet \frac{BD}{DC} \bullet \frac{CE}{EA} = 1$	4. จาก 3, 1 และ 2
5. AD, BE และ CF ตัดกันที่จุด G เดียวกัน	5. จาก 4 และทฤษฎีบทเซวา

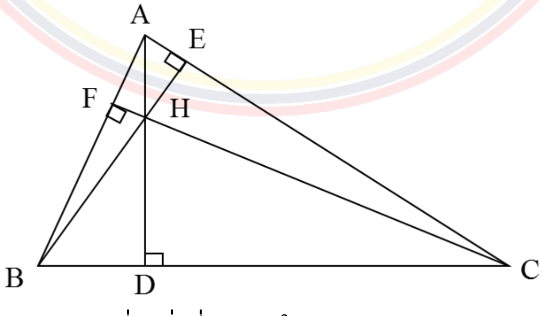
บทแทรก 2 เส้นที่แทนส่วนสูงเมื่อเทียบกับด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมใดๆ ตัดกันที่จุดเดียวกัน

<u>สิ่งที่กำหนดให้</u> 1. ให้ ΔABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ

2. ให้ $AD \perp BC$ ที่ D

ให้ $BE \perp CA$ ที่ E

ให้ $CF \perp AB$ ที่ F ดังรูปที่ 6



รูปที่ 6 สิ่งที่กำหนดให้ตามบทแทรก 2

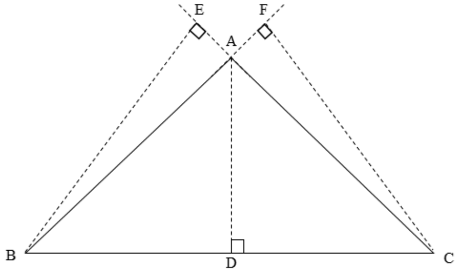
<u>สิ่งที่ต้องการพิสูจน์</u> เส้น AD, BE และ CF ตัดกันที่จุด H เดียวกัน

พิสูจน์

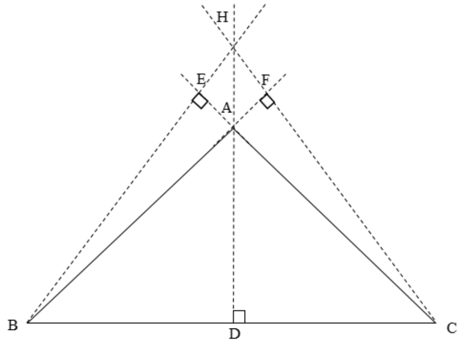
ข้อความพิสูจน์	เหตุผล
1. $B\hat{E}C = A\hat{D}C = 90^\circ$	1. กำหนดให้ ($BE \perp CA$ และ $AD \perp BC$)
2. $B\hat{C}E = A\hat{C}D$	2. มุมร่วม
3. $E\hat{B}C = D\hat{A}C$	3. มุมภายในของสามเหลี่ยมรวมกันมีค่า 180° เมื่อมุมภายในของสามเหลี่ยมมีค่าเท่ากันสองมุม มุมต่อมุม แล้วมุมที่เหลือย่อมมีค่าเท่ากัน จาก 1 และ 2
4. $\Delta BCE \sim \Delta ACD$	4. จาก 1 2 และ 3 สามเหลี่ยมคล้าย คือ สามเหลี่ยมที่มีมุมเท่ากันทุกมุม มุมต่อมุม
5. $\frac{CE}{CD} = \frac{BE}{AD}$	5. จาก 4 ด้านที่อยู่ในลำดับเดียวกันของสามเหลี่ยมคล้ายจะเป็นสัดส่วนที่เท่ากัน
6. $\frac{AF}{AE} = \frac{CF}{BE}$	6. ในทำนองเดียวกับ 5 ($\Delta CAF \sim \Delta BAE$)
7. $\frac{BD}{BF} = \frac{AD}{CF}$	7. ในทำนองเดียวกับ 5 ($\Delta ABD \sim \Delta CBF$)
8. $\frac{AF}{AE} \bullet \frac{CE}{CD} \bullet \frac{BD}{BF} = \frac{CF}{BE} \bullet \frac{BE}{AD} \bullet \frac{AD}{CF}$	8. จาก 6 5 และ 7
9. $\frac{AF}{FB} \bullet \frac{BD}{DC} \bullet \frac{CE}{EA} = 1$	9. จาก 8
10. AD, BE และ CF ตัดกันที่จุด H เดียวกัน	10. จาก 9 และทฤษฎีบทเซวา

<u>ข้อสังเกต</u> ออร์โทเซนเตอร์อาจจะอยู่ภายในหรือภายนอกสามเหลี่ยม ถ้าสามเหลี่ยมเป็นสามเหลี่ยมมุมป้านแล้วออร์โทเซนเตอร์จะอยู่ภายนอกสามเหลี่ยม

ให้ ΔABC เป็นสามเหลี่ยมที่มี $B\hat{A}C > 90^\circ$ โดย $AD \perp BC$ ที่ D $BE \perp$ ส่วนต่อ CA ที่ E และ $CF \perp$ ส่วนต่อ BA ที่ F ดังรูปที่ 7(ก) แล้ว BE, DA และ CF ตัดกันที่จุดเดียวกัน H ดังรูปที่ 7(ข) ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้โดยใช้ทฤษฎีบทเซวาในทำนองเดียวกับบทแทรก 2



(ก)



(ข)

รูปที่ 7 ออร์โทเซนเตอร์อยู่ภายนอกสามเหลี่ยม

4. จุดศูนย์กลางของวงกลมแนบในและล้อมรอบสามเหลี่ยม

นิยาม วงกลมแนบในสามเหลี่ยม คือวงกลมซึ่งบรรจุอยู่ภายในสามเหลี่ยมโดยด้านทั้งสามด้านของสามเหลี่ยมเป็นเส้นสัมผัสกับวงกลมนั้น เรียกจุดศูนย์กลางของวงกลมว่า จุดของวงกลมแนบใน

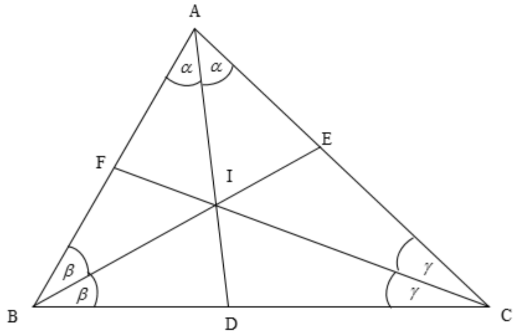
บทแทรก 3 เส้นแบ่งครึ่งมุมทุกมุมของสามเหลี่ยมตัดกันที่จุดเดียวกันซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบในสามเหลี่ยม

<u>สิ่งที่กำหนดให้</u> 1. ให้ ΔABC เป็นสามเหลี่ยมใด ๆ

2. ให้ D E และ F เป็นจุดบนด้าน BC, CA และ AB ตามลำดับ

3. ให้ด้าน AD, BE และ CF แบ่งครึ่ง $\hat{A}$ $\hat{B}$ และ $\hat{C}$ ตามลำดับ

4. ให้ $\alpha = \frac{1}{2}\hat{A}$ $\beta = \frac{1}{2}\hat{B}$ และ $\gamma = \frac{1}{2}\hat{C}$ ดังรูปที่ 8



รูปที่ 8 สร้างรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ตามบทแทรก 3

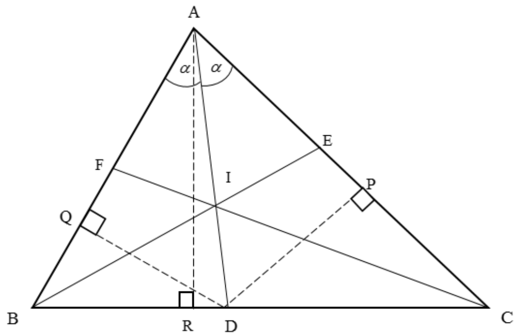
<u>สิ่งที่ต้องการพิสูจน์</u> 1) เส้น AD, BE และ CF ตัดกันที่จุด I เดียวกัน

2) I เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบในสามเหลี่ยม

<u>สร้างเพื่อการพิสูจน์ 1)</u> 1. จาก D ลากเส้น $DP \perp AC$ และ $DQ \perp AB$ แล้ว

$AD\sin\alpha$ คือ ส่วนสูงของ ΔADC และ ΔADB

2. จาก A ลาก $AR \perp BC$ แล้ว AR คือส่วนสูงของ ΔADB และ ΔADC ดังรูปที่ 9



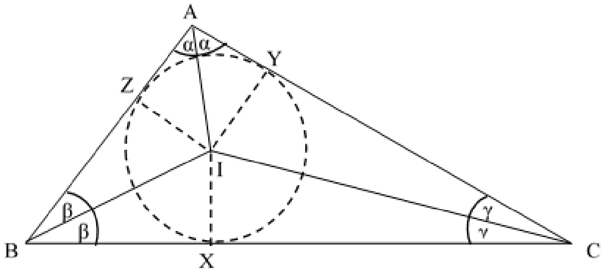
รูปที่ 9 สร้างเพื่อการพิสูจน์ 1) ตามบทแทรก 3

<u>ข้อกำหนด</u> ให้ (ABC) แทนพื้นที่ของ ΔABC

พิสูจน์ 1)

ข้อความพิสูจน์	เหตุผล
1. $(ABD) = \frac{1}{2} \times BD \times AR$	1. สูตรการหาพื้นที่ของสามเหลี่ยม คือ $\frac{1}{2}$ × ฐาน × สูง
2. $(ACD) = \frac{1}{2} \times CD \times AR$	2. ในทำนองเดียวกับ 1
3. $(ABD) = \frac{1}{2} \times AB \times AD\sin\alpha$	3. ในทำนองเดียวกับ 1 และสร้างเพื่อการพิสูจน์
4. $(ACD) = \frac{1}{2} \times AC \times AD\sin\alpha$	4. ในทำนองเดียวกับ 1 และสร้างเพื่อการพิสูจน์
5. $\frac{(ABD)}{(ACD)} = \frac{BD}{CD}$	5. จาก 1 และ 2
6. $\frac{(ABD)}{(ACD)} = \frac{AB}{AC}$	6. จาก 3 และ 4
7. $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$	7. จาก 5 และ 6
8. $\frac{AF}{FB} = \frac{AC}{BC}$	8. ในทำนองเดียวกับ 7
9. $\frac{CE}{EA} = \frac{BC}{AB}$	9. ในทำนองเดียวกับ 7
10. $\frac{AF}{FB} \bullet \frac{BD}{CD} \bullet \frac{CE}{EA} = \frac{AC}{BC} \bullet \frac{AB}{AC} \bullet \frac{BC}{AB}$	10. จาก 8 7 และ 9
11. $\frac{AF}{FB} \bullet \frac{BD}{CD} \bullet \frac{CE}{EA} = 1$	11. จาก 10
12. AD, BE และ CF ตัดกันที่จุด I เดียวกัน	12. จาก 11 และทฤษฎีบทเซวา

<u>สร้างเพื่อการพิสูจน์ 2)</u> จาก I ลาก IX, IY และ IZ ตั้งฉากกับ BC, CA และ AB ตามลำดับ ดังรูปที่ 10



รูปที่ 10 สร้างเพื่อการพิสูจน์ 2) ตามบทแทรก 3

พิสูจน์ 2)

ข้อความพิสูจน์	เหตุผล
1. $Z\hat{A}I = Y\hat{A}I$	1. กำหนดให้ (AI แบ่งครึ่ง $\hat{A}$)
2. $A\hat{Z}I = A\hat{Y}I = 90^\circ$	2. สร้างเพื่อการพิสูจน์ ($IY \perp AC$ และ $IZ \perp AB$)
3. $A\hat{I}Z = A\hat{I}Y$	3. มุมภายในของสามเหลี่ยมรวมกันมีค่า 180° เมื่อมุมภายในของสามเหลี่ยมมีค่าเท่ากันสองมุม มุมต่อมุม แล้วมุมที่เหลือย่อมมีค่าเท่ากัน จาก 1 และ 2
4. $\Delta AZI \cong \Delta AYI$	4. มุม-ด้าน-มุม จาก 1 4 และ AI เป็นด้านร่วม
5. IZ = IY	5. จาก 4
6. IZ = IX	6. ในทำนองเดียวกับ 5
7. IX = IY = IZ หรือ I เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบใน ΔABC	7. จาก 5 และ 6

<u>ข้อสังเกต</u> จากบทแทรก 3 จะได้ว่า

1. ถ้า r เป็นรัศมีของวงกลมแนบใน ΔABC แล้ว IX = IY = IZ = r
2. รัศมีของวงกลมตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลม ณ จุดสัมผัสเนื่องจาก $IX \perp BC$ $IY \perp CA$ และ $IZ \perp AB$ ที่ X Y และ Z ตามลำดับ

3. จากจุดหนึ่งจุดภายนอกวงกลมสามารถลากเส้นสัมผัสวงกลมได้สองเส้นที่มีความยาวเท่ากัน เนื่องจาก $\Delta AZI \perp \Delta AYI$ แล้ว $AZ = AY$ ในทำนองเดียวกัน $CX = CY$ และ $BX = BZ$

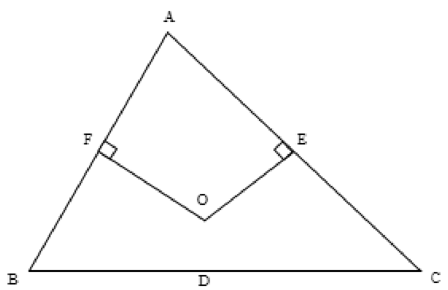
นิยาม วงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม (Circumcircle of Triangle) คือวงกลมที่มีเส้นรอบวงของวงกลมผ่านจุดยอดของมุมทุกมุมของรูปสามเหลี่ยม

บทแทรก 4 เส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมตัดกันที่จุดเดียวกันซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม

<u>สิ่งที่กำหนดให้</u> 1. ให้ ΔABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ

2. ให้ D E และ F เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC, CA และ AB ตามลำดับ

3. ให้ $OE \perp AC$ และ $OF \perp AB$ ดังรูปที่ 11



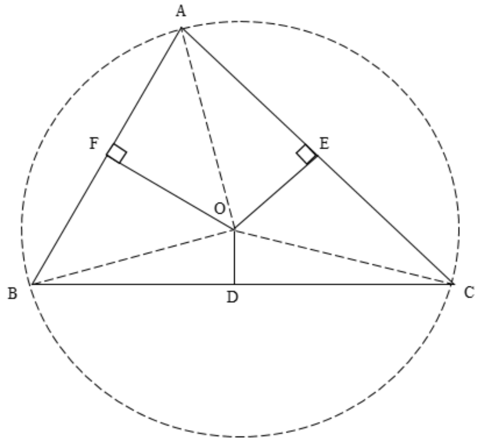
รูปที่ 11 สิ่งที่กำหนดให้ตามบทแทรก 4

<u>สิ่งที่ต้องการพิสูจน์</u> 1) $OD \perp BC$

2) O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม

<u>สร้างเพื่อการพิสูจน์</u> 1. ลาก OD

2. ลากด้าน OA, OB และ OC ดังรูปที่ 12



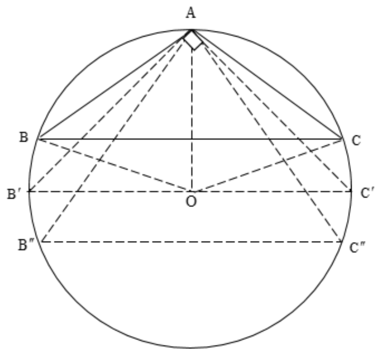
รูปที่ 12 สร้างเพื่อการพิสูจน์ตามบทแทรก 4

พิสูจน์

ข้อความพิสูจน์	เหตุผล
1. AF = BF	1. กำหนดให้ (F เป็นจุดกึ่งกลาง AB)
2. $A\hat{F}O = B\hat{F}O = 90^\circ$	2. กำหนดให้ ($OF \perp AB$)
3. $\Delta AFO \cong \Delta BFO$	3. ด้าน-มุม-ด้าน จาก 1 2 และ OF เป็นด้านร่วม
4. AO = BO	4. จาก 3
5. AO = CO	5. ในทำนองเดียวกับ 4 ($\Delta AEO \simeq \Delta CEO$)
6. AO = BO = CO หรือ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมรอบ ΔABC	6. จาก 4 และ 5
7. BD = CD	7. กำหนดให้ (D เป็นจุดกึ่งกลาง BC)
8. $\Delta BDO \cong \Delta CDO$	8. ด้าน-ด้าน-ด้าน จาก 6 7 และ DO เป็นด้านร่วม

9. $B\hat{D}O = C\hat{D}O$	9. จาก 8
10. $B\hat{D}O + C\hat{D}O = 180^\circ$	10. เส้นตรงเส้นหนึ่งตั้งอยู่บนเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งมุมประชิดรวมกันมีค่า 180°
11. $B\hat{D}O = C\hat{D}O = 90^\circ$	11. จาก 9 และ 10
12. $OD \perp BC$	12. จาก 11

ข้อสังเกต จุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยมอาจจะอยู่ภายในหรือภายนอกสามเหลี่ยม ถ้าสามเหลี่ยมเป็นสามเหลี่ยมมุมป้านแล้วศูนย์กลางวงกลมล้อมรอบจะอยู่ภายนอกสามเหลี่ยม ดังรูปที่ 13



รูปที่ 13 จุดศูนย์กลางวงกลมล้อมรอบ ΔABC อยู่ภายนอกสามเหลี่ยม เมื่อ ΔABC เป็นสามเหลี่ยมมุมป้าน

5. บทสรุป

การพิสูจน์ทฤษฎีบทเซวา และการนำทฤษฎีบทเซวาไปใช้ในการหาเซนทรอยด์ ออร์โทเซนเตอร์ จุดศูนย์กลางของวงกลมแนบในสามเหลี่ยม และจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม เป็นหัวข้อที่มีความสำคัญในการศึกษาสมบัติทางเรขาคณิตบางประการของสามเหลี่ยม เช่น จุดทั้งสี่จุดดังกล่าวจะเป็นจุดเดียวกัน ก็ต่อเมื่อสามเหลี่ยมเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า จุดทั้งสี่จุดนี้จะอยู่บนเส้นตรง

เดียวกัน ก็ต่อเมื่อสามเหลี่ยมเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว สำหรับสามเหลี่ยมใดๆ ที่ไม่ใช่สามเหลี่ยมด้านเท่า เซนทรอยด์ ออร์โทเซนเตอร์ และจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยมจะอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน เรียกเส้นตรงนี้ว่า เส้นออยเลอร์ (Euler Line) เป็นต้น

เอกสารอ้างอิง

[1] H. S. M. Coxeter & S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, United States of America, Washington D. C.: The Mathematical Association of America, 1967.

[2] ทศวรรษ วงศ์วัฒนอนันต์ ธนกฤต กวินสังคม และสุพัตรา อินซุ่ม. “การศึกษาสมบัติบางประการของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมที่มีวงกลมล้อมรอบ.” ปัญหาพิเศษนักศึกษาคณิตศาสตร์ประยุกต์. สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง. กทม. 2559.