บทที่ 2

แนวคิดและทฤษฎี

การวิจัยครั้งนี้เป็นการศึกษาและเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าองค์ประกอบความแปรปรวนสำหรับตัวแบบซ้อนสองขั้น 3 วิธี คือ วิธีคลาสสิก (Classical method) วิธีบูตสแตรป (Bootstrap method) และวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum likelihood estimation method) เมื่อความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบปกติ

แผนแบบการทดลองแบบซ้อนสองขั้น (Two-stage nested design)

แผนแบบการทดลองแบบซ้อนสองขั้นเป็นแผนการทดลองที่ประกอบด้วยปัจจัย 2 ปัจจัย โดยให้ปัจจัยหนึ่งเป็นปัจจัย A มี a ระดับ และอีกปัจจัยหนึ่งเป็นปัจจัย B มี b ระดับ ซึ่งระดับของปัจจัย B ซ้อนอยู่ภายใต้ระดับปัจจัย A

ในการวิจัยครั้งนี้กำหนดให้ระดับของปัจจัย B ที่ซ้อนอยู่ภายใต้ระดับของปัจจัย A มีจำนวนเท่ากัน ถ้าจำนวนหน่วยทดลองของแต่ละระดับของปัจจัย B ที่ซ้อนอยู่ภายใต้แต่ละระดับของปัจจัย A เท่ากันจะเรียกว่า แผนการทดลองซ้อนสองขั้นที่มีลักษณะสมดุล (Balance two-stage nested design) ถ้าจำนวนหน่วยทดลองไม่เท่ากัน จะเรียกว่า แผนการทดลองซ้อนสองขั้นที่มีลักษณะไม่สมดุล (Unbalance two-stage nested design)

ตัวแบบสำหรับแผนการทดลองแบบซ้อนสองขั้นสามารถแสดงได้ดังนี้

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{ijk}$$

โดยที่

$i = 1,2,\ldots,a$

$j = 1,2,\ldots,b_i$

$k = 1,2,\ldots,n_{ij}$

เมื่อ

Y_{ijk} แทน ค่าสังเกตที่ k ภายใต้ระดับที่ j ของปัจจัย B ซึ่งซ้อนอยู่ภายใต้ระดับที่ i ของปัจจัย A

μ แทน ค่าเฉลี่ยรวม

α_i แทน อิทธิพลของระดับที่ i ของปัจจัย A

$\beta_{j(i)}$ แทน อิทธิพลของระดับที่ j ของปัจจัย B ซึ่งซ้อนอยู่ภายใต้ระดับที่ i ของปัจจัย A

ε_{ijk} แทน ความคลาดเคลื่อนสุ่มของค่าสังเกตที่ k ภายใต้ระดับที่ j ของปัจจัย B ซึ่งซ้อนอยู่ภายใต้ระดับที่ i ของปัจจัย A

a แทน จำนวนระดับของปัจจัย A

b แทน จำนวนระดับของปัจจัย B

n_{ij} แทน ขนาดหน่วยทดลอง ในระดับที่ j ของปัจจัย B ซึ่งซ้อนอยู่ภายใต้ระดับที่ i ของปัจจัย A

n แทน ขนาดหน่วยทดลอง

ข้อกำหนดของตัวแบบ

ข้อกำหนดของตัวแบบในแผนแบบการทดลองซ้อนสองขั้นกรณีที่ปัจจัย A และ B เป็นอิทธิพลสุ่มทั้งคู่ ประกอบด้วย (สุพล ดุรงค์วัฒนา, 2541. หน้า 822-880)

1. อิทธิพลของปัจจัย A แทนด้วย α_i ถูกกำหนดให้เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระกันและมีการแจกแจงแบบปกติเหมือนกัน นั่นคือ

$$\alpha_i \sim NID\left(0, \sigma_\alpha^2\right)$$

โดยที่ $i = 1,2,\ldots,a$

เมื่อ σ_α^2 แทน องค์ประกอบความแปรปรวนของปัจจัย A

2. ผลกระทบของปัจจัย B ซึ่งซ้อนอยู่ภายใต้ระดับของปัจจัย A แทนด้วย $\beta_{j(i)}$ ถูกกำหนดให้เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระกันและมีการแจกแจงแบบปกติเหมือนกัน นั่นคือ

$$\beta_{j(i)} \sim NID\left(0, \sigma_\beta^2\right)$$

โดยที่ $i = 1,2,\ldots,a$

$j = 1,2,\ldots,b_i$

เมื่อ σ_β^2 แทน องค์ประกอบความแปรปรวนของปัจจัย B

3. ความคลาดเคลื่อนสุ่มของการทดลองถูกกำหนดให้เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระกันและมีการแจกแจงแบบปกติเหมือนกัน นั่นคือ

$$\varepsilon_{ijk} \sim NID\left(0,\sigma_{\varepsilon}^{2}\right)$$

โดยที่ $i = 1,2,\ldots,a$

$j = 1,2,\ldots,b_i$

$k = 1,2,\ldots,n_{ij}$

เมื่อ σ_{ε}^{2} แทน องค์ประกอบความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน

4. พารามิเตอร์ $\alpha_i, \beta_{j(i)}$ และ ε_{ijk} เป็นตัวแปรสุ่ม (Random variables) ที่มีการแจกแจงเป็นอิสระกัน

จากข้อกำหนดของตัวแบบ กล่าวได้ว่าค่าองค์ประกอบความแปรปรวนของแผนแบบซ้อนสองขั้น คือ $\sigma_{\alpha}^{2}, \sigma_{\beta}^{2}$ และ σ_{ε}^{2} ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

แผนการทดลองแบบซ้อนสองขั้นที่มีปัจจัย 2 ปัจจัย คือ ปัจจัย A และปัจจัย B โดยระดับของปัจจัย B ซ้อนอยู่ภายใต้ระดับของปัจจัย A ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย B(A) มีรูปแบบทั่วไปดังแสดงในตาราง 3

ตาราง 3 แสดงลักษณะข้อมูลในแผนการทดลองแบบซ้อนสองขั้นที่มีปัจจัย 2 ปัจจัย คือ ปัจจัย A มี a ระดับ และปัจจัย B มี b ระดับ ดังนี้

ปัจจัย A	1				2				…	i						…	a			
ปัจจัย B	1	2	…	b	1	2	…	b	…	1	2	…	j	…	b	…	1	2	…	b
	y_{111} y_{112} $\vdots$ $y_{11n_{11}}$	y_{121} y_{122} $\vdots$ $y_{12n_{12}}$	… … $\vdots$ …	y_{1b1} y_{1b2} $\vdots$ $y_{1bn_{1b}}$	y_{211} y_{212} $\vdots$ $y_{21n_{21}}$	y_{221} y_{222} $\vdots$ $y_{22n_{22}}$	… … $\vdots$ …	y_{2b1} y_{2b2} $\vdots$ $y_{2bn_{2b}}$	… … $\vdots$ …	y_{i11} y_{i12} $\vdots$ $y_{i1n_{i1}}$	y_{i21} y_{i22} $\vdots$ $y_{i2n_{i2}}$	… … …	y_{ij1} y_{ij2} $\vdots$ $y_{ijn_{ij}}$	… … …	y_{ib1} y_{ib2} $\vdots$ $y_{ibn_{ib}}$	… … $\vdots$ …	y_{a11} y_{a12} $\vdots$ $y_{a1n_{a1}}$	y_{a21} y_{a22} $\vdots$ $y_{a2n_{a2}}$	… … $\vdots$ …	y_{ab1} y_{ab2} $\vdots$ $y_{abn_{ab}}$
ผลรวมของปัจจัย B	$y_{11.}$	$y_{12.}$	…	$y_{1b.}$	$y_{21.}$	$y_{22.}$	…	$y_{2b.}$	…	$y_{i1.}$	$y_{i2.}$	…	$y_{ij.}$	…	$y_{ib.}$	…	$y_{a1.}$	$y_{a2.}$	…	$y_{ab.}$
ผลรวมของปัจจัย A	$y_{1..}$				$y_{2..}$				…	$y_{i..}$						…	$y_{a..}$			
รวม	$y_{...}$																			

เมื่อ

y_{ijk} แทน ค่าสังเกตที่ k ภายใต้ระดับที่ j ของปัจจัย B ซึ่งซ้อนอยู่ภายใต้ระดับที่ i ของปัจจัย A ($i = 1,2,\ldots,a$; $j = 1,2,\ldots,b_i$ และ $k = 1,2,\ldots,n_{ij}$)

$y_{ij.}$ แทน ผลรวมของค่าสังเกตในระดับที่ j ของปัจจัย B ซึ่งซ้อนอยู่ภายใต้ระดับ ที่ i ของปัจจัย A

$y_{i..}$ แทน ผลรวมของค่าสังเกตในระดับที่ i ของปัจจัย A

$y_{...}$ แทน ผลรวมของค่าสังเกตในทุกระดับของปัจจัย B ซึ่งซ้อนอยู่ภายใต้ระดับของปัจจัย A

วิธีการประมาณค่าองค์ประกอบความแปรปรวน

การวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าองค์ประกอบความแปรปรวนสำหรับตัวแบบซ้อนสองขั้นในรูปแบบอิทธิพลสุ่ม 3 วิธี คือ วิธีคลาสสิก วิธีบูตสแตรป และวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ซึ่งมีรายละเอียดดังแสดงในหัวข้อต่อไปนี้

1. **การประมาณค่าองค์ประกอบความแปรปรวนด้วยวิธีคลาสสิก** (Estimation of variance components for classical method)

การคำนวณค่า $E\left(MS_A\right)$, $E\left(MS_{B(A)}\right)$ และ $E\left(MS_E\right)$ ของตัวแบบซ้อนสองขั้นในรูปแบบอิทธิพลสุ่มด้วยวิธีคลาสสิก (Sahai & Ojeda, 2004) สามารถพิจารณาได้จากตาราง 4

ตาราง 4 แสดงการวิเคราะห์ความแปรปรวนด้วยวิธีคลาสสิก (Analysis of variance for classical method)

Source of variation	df	SS	MS	$E(MS)$
A	$a-1$	$SS_A=\sum_{i=1}^{a} n_{i.}\left(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...}\right)^2$	MS_A	$\sigma_\varepsilon^2+r_1\sigma_\alpha^2+r_2\sigma_\beta^2$
$B(A)$	$b.-a$	$SS_{B(A)}=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i} n_{ij}\left(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}\right)^2$	$MS_{B(A)}$	$\sigma_\varepsilon^2+r_3\sigma_\beta^2$
Error	$N-b.$	$SS_E=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\left(y_{ijk}-\bar{y}_{ij.}\right)^2$	MS_E	σ_ε^2
Total	$N-1$	$SS_T=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\left(y_{ijk}-\bar{y}_{...}\right)^2$		

โดยที่

$$b.=\sum_{i=1}^{a} b_i$$

$$n_{i.}=\sum_{j=1}^{b_i} n_{ij}\ ,\quad N=\sum_{i=1}^{a} n_{i.}$$

$$y_{ij.}=\sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk}\ ,\quad \bar{y}_{ij.}=\frac{y_{ij.}}{n_{ij}}$$

$$y_{i..}=\sum_{j=1}^{b_i} y_{ij.}\ ,\quad \bar{y}_{i..}=\frac{y_{i..}}{n_{i.}}$$

$$y_{...}=\sum_{i=1}^{a} y_{i..}\ ,\quad \bar{y}_{...}=\frac{y_{...}}{N}$$

$$r_1=\frac{N-k_1}{a-1},\quad r_2=\frac{k_{12}-k_2}{a-1},\quad r_3=\frac{N-k_{12}}{b.-a}$$

$$k_1=\frac{\sum_{i=1}^{a} n_i^2}{N},\quad k_2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i} n_{ij}^2\ ,\quad k_{12}=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\frac{n_{ij}^2}{n_{i.}}$$

$$SS_A = \sum_{i=1}^{a} n_{i.}\left(\overline{y}_{i..} - \overline{y}_{...}\right)^2 = \sum_{i=1}^{a} \frac{y_{i..}^2}{n_{i.}} - \frac{y_{...}^2}{N}$$

$$SS_{B(A)} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i} n_{ij}\left(\overline{y}_{ij.} - \overline{y}_{i..}\right)^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i} \frac{y_{ij.}^2}{n_{ij}} - \sum_{i=1}^{a} \frac{y_{i..}^2}{n_{i.}}$$

$$SS_E = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\left(y_{ijk} - \overline{y}_{ij.}\right)^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk}^2 - \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i} \frac{y_{ij.}^2}{n_{ij}}$$

เมื่อ

SS_A แทน ผลรวมกำลังสองของปัจจัย A

$SS_{B(A)}$ แทน ผลรวมกำลังสองของปัจจัย B ซึ่งซ้อนอยู่ภายใต้ปัจจัย A

SS_E แทน ผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อน

SS_T แทน ผลรวมกำลังสองทั้งหมด

MS_A แทน ค่าเฉลี่ยกำลังสองของปัจจัย A

$MS_{B(A)}$ แทน ค่าเฉลี่ยกำลังสองของปัจจัย B ซึ่งซ้อนอยู่ภายใต้ปัจจัย A

MS_E แทน ค่าเฉลี่ยกำลังสองของความคลาดเคลื่อน

จากข้อกำหนดของตัวแบบในแผนการทดลองซ้อนสองขั้น จะได้ว่า

$$E\left(\alpha_i\right) = E\left(\beta_{j(i)}\right) = E\left(\varepsilon_{ijk}\right) = 0$$

ดังนั้น $$E\left(\alpha_i^2\right) = \sigma_\alpha^2,\ E\left(\beta_{j(i)}^2\right) = \sigma_\beta^2,\ E\left(\varepsilon_{ijk}^2\right) = \sigma_\varepsilon^2$$

ให้ $T_A=\sum_{i=1}^{a}\frac{y_{i..}^2}{n_{i.}}$

พิจารณา

$$E(T_A)=\sum_{i=1}^{a}E\left(\frac{y_{i..}^2}{n_{i.}}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{a}n_{i.}^{-1}E\left[\sum_{j=1}^{b_i}y_{ij.}\right]^2$$

$$=\sum_{i=1}^{a}n_{i.}^{-1}E\left[\sum_{j=1}^{b_i}\left(\sum_{k=1}^{n_{ij}}y_{ijk}\right)\right]^2$$

$$=\sum_{i=1}^{a}n_{i.}^{-1}E\left[\sum_{j=1}^{b_i}\left(\sum_{k=1}^{n_{ij}}\left(\mu+\alpha_i+\beta_{j(i)}+\varepsilon_{ijk}\right)\right)\right]^2$$

$$=\sum_{i=1}^{a}n_{i.}^{-1}E\left[\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}(\mu+\alpha_i)+\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\beta_{j(i)}+\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\varepsilon_{ijk}\right]^2$$

$$=\sum_{i=1}^{a}n_{i.}^{-1}E\left[n_{i.}(\mu+\alpha_i)+\sum_{j=1}^{b_i}n_{ij}\beta_{j(i)}+\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\varepsilon_{ijk}\right]^2$$

$$=\sum_{i=1}^{a}n_{i.}^{-1}E\left[2n_{i.}(\mu+\alpha_i)\sum_{j=1}^{b_i}n_{ij}\beta_{j(i)}+2n_{i.}(\mu+\alpha_i)\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\varepsilon_{ijk}\right.$$
$$+2\left(\sum_{j=1}^{b_i}n_{ij}\beta_{j(i)}\right)\left(\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\varepsilon_{ijk}\right)+n_{i.}^2(\mu^2+\alpha_i^2)+\left(\sum_{j=1}^{b_i}n_{ij}\beta_{j(i)}\right)^2$$
$$\left.+\left(\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\varepsilon_{ijk}\right)^2\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{a}n_{i.}^{-1}\left[n_{i.}^2(\mu^2+\sigma_\alpha^2)+\sigma_\beta^2\sum_{j=1}^{b_i}n_{ij}^2+n_{i.}\sigma_\varepsilon^2\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{a}\left[n_{i.}(\mu^2+\sigma_\alpha^2)+\sigma_\beta^2\sum_{j=1}^{b_i}\frac{n_{ij}^2}{n_{i.}}+\sigma_\varepsilon^2\right]$$

$$=N(\mu^2+\sigma_\alpha^2)+k_{12}\sigma_\beta^2+a\sigma_\varepsilon^2$$

เมื่อ $k_{12} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\frac{n_{ij}^2}{n_{i.}}$

ให้ $T_\mu = \frac{y_{...}^2}{N}$

พิจารณา

$$E\left(T_\mu\right) = E\left(\frac{y_{...}^2}{N}\right)$$

$$= N^{-1}E\left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk}\right]^2$$

$$= N^{-1}E\left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\left(\mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{ijk}\right)\right]^2$$

$$= N^{-1}E\left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\mu + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\alpha_i + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\beta_{j(i)} + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\varepsilon_{ijk}\right]^2$$

$$= N^{-1}E\left[N\mu + \sum_{i=1}^{a} n_{i.}\alpha_i + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i} n_{ij}\beta_{j(i)} + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\varepsilon_{ijk}\right]^2$$

$$= N^{-1}E\left[2N\mu\sum_{i=1}^{a} n_{i.}\alpha_i + 2N\mu\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i} n_{ij}\beta_{j(i)} + 2N\mu\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\varepsilon_{ijk}\right]$$

$$+ N^{-1}E\left[2\left(\sum_{i=1}^{a} n_{i.}\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i} n_{ij}\beta_{j(i)}\right) + 2\left(\sum_{i=1}^{a} n_{i.}\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\varepsilon_{ijk}\right)\right]$$

$$+ N^{-1}E\left[2\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i} n_{ij}\beta_{j(i)}\right)\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\varepsilon_{ijk}\right) + \left(N\mu\right)^2\right]$$

$$+ N^{-1}E\left[\left(\sum_{i=1}^{a} n_{i.}\alpha_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i} n_{ij}\beta_{j(i)}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\varepsilon_{ijk}\right)^2\right]$$

$$=N^{-1}\left[N^2\mu^2+\sigma_\alpha^2\sum_{i=1}^{a}n_{i.}^2+\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}n_{ij}^2\sigma_\beta^2+N\sigma_\varepsilon^2\right]$$

$$=N\mu^2+\sigma_{\alpha}^2\frac{\sum_{i=1}^{a}n_{i.}^2}{N}+\sigma_\beta^2\frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}n_{ij}^2}{N}+\sigma_\varepsilon^2$$

$$=N\mu^2+k_1\sigma_\alpha^2+k_2\sigma_\beta^2+\sigma_\varepsilon^2$$

เมื่อ $k_1=\frac{\sum_{i=1}^{a}n_i^2}{N}$, $k_2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}n_{ij}^2$

ให้ $T_B=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\frac{y_{ij.}^2}{n_{ij}}$

พิจารณา

$$E\left(T_B\right)=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}E\left(\frac{y_{ij.}^2}{n_{ij}}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}n_{ij}^{-1}E\left(\sum_{k=1}^{n_{ij}}y_{ijk}\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}n_{ij}^{-1}E\left[\sum_{k=1}^{n_{ij}}\left(\mu+\alpha_i+\beta_{j(i)}+\varepsilon_{ijk}\right)\right]^2$$

$$=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}n_{ij}^{-1}E\left[\sum_{k=1}^{n_{ij}}\left(\mu+\alpha_i+\beta_{j(i)}\right)+\sum_{k=1}^{n_{ij}}\varepsilon_{ijk}\right]^2$$

$$=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}n_{ij}^{-1}E\left[2\left(\sum_{k=1}^{n_{ij}}\left(\mu+\alpha_i+\beta_{j(i)}\right)\right)\left(\sum_{k=1}^{n_{ij}}\varepsilon_{ijk}\right)+\left(\sum_{k=1}^{n_{ij}}\varepsilon_{ijk}\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{n_{ij}}\left(\mu+\alpha_i+\beta_{j(i)}\right)\right)^2\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i} n_{ij}^{-1}\left[n_{ij}^2\left(\mu^2+\sigma_\alpha^2+\sigma_\beta^2\right)+n_{ij}\sigma_\varepsilon^2\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\left[n_{ij}\left(\mu^2+\sigma_\alpha^2+\sigma_\beta^2\right)+\sigma_\varepsilon^2\right]$$

$$=N\left(\mu^2+\sigma_\alpha^2+\sigma_\beta^2\right)+b.\sigma_\varepsilon^2$$

ให้ $T_0=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk}^2$

พิจารณา

$$E\left(T_0\right)=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}} E\left(y_{ijk}^2\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}} E\left(\mu+\alpha_i+\beta_{j(i)}+\varepsilon_{ijk}\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}} E\left(2\mu\alpha_i+2\mu\beta_{j(i)}+2\alpha_i\beta_{j(i)}+2\mu\varepsilon_{ijk}+2\alpha_i\varepsilon_{ijk}+2\beta_{j(i)}\varepsilon_{ijk}\right.$$

$$\left.+\mu^2+\alpha_i^2+\beta_{j(i)}^2+\varepsilon_{ijk}^2\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\left(\mu^2+\sigma_\alpha^2+\sigma_\beta^2+\sigma_\varepsilon^2\right)$$

$$=N\left(\mu^2+\sigma_\alpha^2+\sigma_\beta^2+\sigma_\varepsilon^2\right)$$

พิจารณาค่าคาดหวังของผลรวมกำลังสองของแต่ละปัจจัยต่อไปนี้

$$E\left(SS_A\right)=E\left(T_A-T_\mu\right)$$

$$=\left[N\left(\mu^2+\sigma_\alpha^2\right)+k_{12}\sigma_\beta^2+a\sigma_\varepsilon^2\right]-\left[N\mu^2+k_1\sigma_\alpha^2+k_2\sigma_\beta^2+\sigma_\varepsilon^2\right]$$

$$=N\mu^2+N\sigma_\alpha^2+k_{12}\sigma_\beta^2+a\sigma_\varepsilon^2-N\mu^2-k_1\sigma_\alpha^2-k_2\sigma_\beta^2-\sigma_\varepsilon^2$$

$$=\left(N-k_1\right)\sigma_\alpha^2+\left(k_{12}-k_2\right)\sigma_\beta^2+(a-1)\sigma_\varepsilon^2$$

$$E\left(SS_{B(A)}\right)=E\left(T_B-T_A\right)$$

$$=\left[N\left(\mu^2+\sigma_\alpha^2+\sigma_\beta^2\right)+b.\sigma_\varepsilon^2\right]-\left[N\left(\mu^2+\sigma_\alpha^2\right)+k_{12}\sigma_\beta^2+a\sigma_\varepsilon^2\right]$$
$$=N\mu^2+N\sigma_\alpha^2+N\sigma_\beta^2+b.\sigma_\varepsilon^2-N\mu^2-N\sigma_\alpha^2-k_{12}\sigma_\beta^2-a\sigma_\varepsilon^2$$
$$=\left(N-k_{12}\right)\sigma_\beta^2+(b.-a)\sigma_\varepsilon^2$$

$$E\left(SS_E\right)=E\left(T_0-T_B\right)$$
$$=\left[N\left(\mu^2+\sigma_\alpha^2+\sigma_\beta^2+\sigma_\varepsilon^2\right)\right]-\left[N\left(\mu^2+\sigma_\alpha^2+\sigma_\beta^2\right)+b.\sigma_\varepsilon^2\right]$$
$$=N\mu^2+N\sigma_\alpha^2+N\sigma_\beta^2+N\sigma_\varepsilon^2-N\mu^2-N\sigma_\alpha^2-N\sigma_\beta^2-b.\sigma_\varepsilon^2$$
$$=(N-b.)\sigma_\varepsilon^2$$

พิจารณาค่าคาดหวังกำลังสองเฉลี่ยของแต่ละปัจจัยต่อไปนี้

$$E\left(MS_A\right)=\frac{1}{a-1}E\left(SS_A\right)$$
$$=\frac{\left(N-k_1\right)\sigma_\alpha^2+\left(k_{12}-k_2\right)\sigma_\beta^2+(a-1)\sigma_\varepsilon^2}{a-1}$$
$$=\frac{\left(N-k_1\right)\sigma_\alpha^2}{a-1}+\frac{\left(k_{12}-k_2\right)\sigma_\beta^2}{a-1}+\sigma_\varepsilon^2$$
$$=r_1\sigma_\alpha^2+r_2\sigma_\beta^2+\sigma_\varepsilon^2$$

เมื่อ $r_1=\dfrac{N-k_1}{a-1}$

$$r_2=\frac{k_{12}-k_2}{a-1}$$

$$E\left(MS_{B(A)}\right)=\frac{1}{b.-a}E\left(SS_{B(A)}\right)$$
$$=\frac{\left(N-k_{12}\right)\sigma_\beta^2+(b.-a)\sigma_\varepsilon^2}{b.-a}$$
$$=\frac{\left(N-k_{12}\right)\sigma_\beta^2}{b.-a}+\sigma_\varepsilon^2$$
$$=r_3\sigma_\beta^2+\sigma_\varepsilon^2$$

เมื่อ $r_3=\dfrac{N-k_{12}}{b.-a}$

$$E\left(MS_E\right)=\frac{1}{N-b.}E\left(SS_E\right)$$
$$=\sigma_\varepsilon^2$$

โดยที่

$$N=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}n_{ij}$$

$$k_1=\frac{\sum_{i=1}^{a}n_{i}^2}{N},\quad k_2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}n_{ij}^2,\quad k_{12}=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\frac{n_{ij}^2}{n_{i.}}$$

วิธีประมาณค่าองค์ประกอบความแปรปรวนด้วยวิธีคลาสสิกได้จากการสร้างสมการของค่าคาดหวังผลรวมกำลังสองของปัจจัย A , B และความคลาดเคลื่อน (Searle, Casella & Mcculloch, 1992) ดังนี้

พิจารณาตัวประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนของ σ_ε^2

จาก $$E\left(MS_E\right)=\frac{1}{N-b.}E\left(SS_E\right)=\sigma_\varepsilon^2$$

ดังนั้นตัวประมาณแบบจุดของ σ_ε^2 คือ $\widehat{\sigma^2_{\varepsilon_{CL}}}=\frac{SS_E}{N-b.}$

เมื่อ $\widehat{\sigma^2_{\varepsilon_{CL}}}$ แทน ตัวประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนที่ได้จากวิธีคลาสสิก

พิจารณาตัวประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนของ σ_β^2

จาก $$E\left(MS_{B(A)}\right)-E\left(MS_E\right)=\left(\sigma_\varepsilon^2+r_3\sigma_\beta^2\right)-\sigma_\varepsilon^2$$

จะได้ $$\frac{1}{b.-a}E\left(T_B-T_A\right)-\frac{1}{N-b.}E\left(T_o-T_B\right)=\left(\frac{N-k_{12}}{b.-a}\right)\sigma_\beta^2$$

$$E\left(T_B - T_A\right) - \frac{E\left(T_o - T_B\right)(b. - a)}{N - b.} = \left(N - k_{12}\right)\sigma_\beta^2$$

$$\sigma_\beta^2 = \frac{E\left(T_B - T_A\right) - \dfrac{E\left(T_o - T_B\right)}{N - b.}(b. - a)}{N - k_{12}}$$

$$= \frac{E\left(T_B - T_A\right) - \dfrac{(N - b.)\sigma_\varepsilon^2}{N - b.}(b. - a)}{N - k_{12}}$$

$$= \frac{E\left(T_B - T_A\right) - (b. - a)\sigma_\varepsilon^2}{N - k_{12}}$$

ดังนั้นตัวประมาณแบบจุดของ σ_β^2 คือ $\widehat{\sigma_{\beta_{CL}}^2} = \dfrac{SS_{B(A)} - (b. - a)\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{N - k_{12}}$

เมื่อ $\widehat{\sigma_{\beta_{CL}}^2}$ แทน ตัวประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนของปัจจัย B ซึ่งซ้อนอยู่ภายใต้ปัจจัย A ที่ได้จากวิธีคลาสสิก

พิจารณาตัวประมาณขององค์ประกอบความแปรปรวนของ σ_α^2

จาก $E\left(MS_A\right) - E\left(MS_E\right) = \left(\sigma_\varepsilon^2 + r_1\sigma_\alpha^2 + r_2\sigma_\beta^2\right) - \sigma_\varepsilon^2$

$$\frac{1}{a-1}E\left(T_A - T_\mu\right) - \sigma_\varepsilon^2 = r_1\sigma_\alpha^2 + r_2\sigma_\beta^2$$

จะได้ $\dfrac{1}{a-1}E\left(T_A - T_\mu\right) - \sigma_\varepsilon^2 = \left(\dfrac{N - k_1}{a-1}\right)\sigma_\alpha^2 + \left(\dfrac{k_{12} - k_2}{a-1}\right)\sigma_\beta^2$

$$E\left(T_A - T_\mu\right) - (a-1)\sigma_\varepsilon^2 = \left(N - k_1\right)\sigma_\alpha^2 + \left(k_{12} - k_2\right)\sigma_\beta^2$$

$$E\left(T_A - T_\mu\right) - (a-1)\sigma_\varepsilon^2 - \left(k_{12} - k_2\right)\sigma_\beta^2 = \left(N - k_1\right)\sigma_\alpha^2$$

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{E\left(T_A - T_\mu\right) - \left(k_{12} - k_2\right)\sigma_\beta^2 - (a-1)\sigma_\varepsilon^2}{N - k_1}$$

ดังนั้นตัวประมาณแบบจุดของ σ_α^2 คือ $\widehat{\sigma_{\alpha_a}^2} = \dfrac{SS_A - (k_{12} - k_2)\widehat{\sigma_\beta^2} - (a-1)\widehat{\sigma_\varepsilon^2}}{N - k_1}$

เมื่อ $\widehat{\sigma_{\alpha_a}^2}$ แทน ตัวประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนของปัจจัย A ที่ได้จากวิธีคลาสสิก

2. **การประมาณค่าองค์ประกอบความแปรปรวนด้วยวิธีบูตสแตรป** (Estimation of variance components for bootstrap method)

วิธีบูตสแตรปมีหลักเกณฑ์ที่สำคัญ คือ จะพิจารณาตัวอย่างที่เก็บรวบรวมมาจากประชากรเปรียบเสมือนเป็นประชากร แล้วทำการสุ่มตัวอย่างจากตัวอย่างที่มีอยู่แบบใส่คืน (Resampling with replacement) หลาย ๆ ครั้ง เพื่อใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่สนใจ หรือสร้างการแจกแจงของตัวสถิติ (Sampling distribution) โดยมีหลักดังนี้ (Efron, 1979 อ้างใน มนชยา, 2543)

2.1 สุ่มค่าสังเกต Y_{ijk}^* แบบใส่คืนขนาด n_{ij} จากสมการ $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{ijk}$

โดยที่ $i = 1,\ldots,a$

$j = 1,\ldots,b_i$

$k = 1,\ldots,n_{ij}$

2.2 คำนวณค่า $SS_A, SS_{B(A)}$ และ SS_E ด้วยวิธีคลาสสิก

2.3 หาตัวประมาณค่าองค์ประกอบความแปรปรวนด้วยวิธีคลาสสิก จะได้ว่า

$$\widehat{\sigma_\varepsilon^{*2}} = \frac{SS_E}{(N - b.)}$$

$$\widehat{\sigma_\beta^{*2}} = \frac{SS_{B(A)} - (b. - a)\widehat{\sigma_\varepsilon^2}}{N - k_{12}}$$

$$\widehat{\sigma_\alpha^{*2}} = \frac{SS_A - (k_{12} - k_2)\widehat{\sigma_\beta^2} - (a-1)\widehat{\sigma_\varepsilon^2}}{N - k_1}$$

4.2.4 จากนั้นทำซ้ำในข้อ 4.2.1 - 4.2.3 จำนวน B ครั้ง จะได้ค่าประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนดังนี้

ค่าประมาณแบบจุดของ σ_{α}^{2} คือ $\widehat{\sigma_{\alpha_{Bt}}^{*2}} = \frac{\sum_{i=1}^{B}\widehat{\sigma_{\alpha}^{2(i)}}}{B}$

ค่าประมาณแบบจุดของ σ_{β}^{2} คือ $\widehat{\sigma_{\beta_{Bt}}^{*2}} = \frac{\sum_{i=1}^{B}\widehat{\sigma_{\beta}^{2(i)}}}{B}$

ค่าประมาณแบบจุดของ σ_{ε}^{2} คือ $\widehat{\sigma_{\varepsilon_{Bt}}^{*2}} = \frac{\sum_{i=1}^{B}\widehat{\sigma_{\varepsilon}^{2(i)}}}{B}$

เมื่อ

$\widehat{\sigma_{\alpha_{Bt}}^{*2}}$ แทน ค่าประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนของปัจจัย A ที่ได้จากวิธีบูตสแตรป

$\widehat{\sigma_{\beta_{Bt}}^{*2}}$ แทน ค่าประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนของปัจจัย B ซึ่งซ้อนอยู่ภายใต้ปัจจัย A ที่ได้จากวิธีบูตสแตรป

$\widehat{\sigma_{\varepsilon_{Bt}}^{*2}}$ แทน ค่าประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนที่ได้จากวิธีบูตสแตรป

B แทน จำนวนรอบในการสุ่มตัวอย่างแบบใส่คืน ในที่นี้กำหนดให้ $B = 100$

3. **การประมาณค่าองค์ประกอบความแปรปรวนด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด** (Estimation of variance components for maximum likelihood estimation method : MLE)

การประมาณค่าด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดเป็นวิธีการประมาณที่มีมานานและเป็นที่ยอมรับแพร่หลาย หลักการของวิธีนี้คือหาตัวประมาณพารามิเตอร์ที่ทำให้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นมีค่าสูงสุด (Searle, Casella & McCulloch, 1992) สามารถแสดงได้ดังนี้

พิจารณาตัวแบบสำหรับแผนการทดลองซ้อนสองขั้น

$$y = X\mu + Zu + \varepsilon \qquad (1)$$

เมื่อ y แทน เวกเตอร์ของค่าสังเกตขนาด $n_{ij} \times 1$

X แทน เวกเตอร์ที่มีสมาชิกเป็น 1 ทั้งหมด หรือ $\underset{\sim}{1}$

μ แทน ค่าเฉลี่ย

Z แทน เมตริกซ์ของค่าคงที่

u แทน เวกเตอร์ของปัจจัย A และ B

ε แทน เวกเตอร์ของค่าความคลาดเคลื่อนที่มีขนาด $n_{ij} \times 1$

โดย $\varepsilon \sim \mathrm{N}\left(0, \sigma_\varepsilon^2 \mathrm{I}_{n_{ij}}\right)$

- พิจารณาค่าคาดหวังของ y

$$\begin{aligned} y &= X\mu + Zu + \varepsilon \\ &= X\mu + Z_1u_1 + Z_2u_2 + \varepsilon \end{aligned}$$

$$E(y) = E\left[X\mu + Z_1u_1 + Z_2u_2 + \varepsilon\right] = X\mu$$

โดย $u_1 \sim NID\left(0, \sigma_\alpha^2 \mathrm{I}_\alpha\right)$

$u_2 \sim NID\left(0, \sigma_\beta^2 \mathrm{I}_\beta\right)$

เมื่อ Z_1, Z_2 แทน เมตริกซ์ขนาด $n_{ij} \times n_{ij}$

u_1 แทน ปัจจัย A $\left(\sigma_\alpha^2\right)$

u_2 แทน ปัจจัย B $\left(\sigma_\beta^2\right)$

- พิจารณาความแปรปรวนของ y Searle (1970. pp. 505-524)

$$\begin{aligned} V = Var(y) &= \left[\sigma_\alpha^2 \mathrm{I}_\alpha 1_{n_{ij}} 1'_{n_{ij}}\right] + \left[\sigma_\beta^2 \mathrm{I}_\beta 1_{n_{ij}} 1'_{n_{ij}}\right] + \sigma_\varepsilon^2 \mathrm{I}_{n_{ij}} \\ &= \left(\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2\right) 1_{n_{ij}} 1'_{n_{ij}} + \sigma_\varepsilon^2 \mathrm{I}_{n_{ij}} \\ &= \left(\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2\right) \mathrm{J}_{n_{ij}} + \sigma_\varepsilon^2 \mathrm{I}_{n_{ij}} \end{aligned}$$

โดยที่ $\alpha, \beta, \varepsilon$ เป็นอิสระกัน

ดังนั้น

$$y \sim NID\left(1_{n_{ij}} \mu, \left\{\sigma_\varepsilon^2 \mathrm{I}_{n_{ij}} + \left(\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2\right) \mathrm{J}_{n_{ij}}\right\}\right)$$

จะได้ V^{-1} (Searle, Casella & McCulloch, 1992)

$$V^{-1} = \left(\sigma_\varepsilon^2 \mathrm{I}_{n_{ij}} + \left(\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2\right) \mathrm{J}_{n_{ij}}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}\left(\mathrm{I}_{n_{ij}} - \frac{\left(\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2\right)}{\sigma_\varepsilon^2 + n_{ij}\left(\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2\right)} \mathrm{J}_{n_{ij}} \right)$$

ให้ $\omega_{ij} = \sigma_\varepsilon^2 + n_{ij}\left(\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2\right)$

จะได้

$$V^{-1} = \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}\left(\mathrm{I}_{n_{ij}} - \frac{\left(\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2\right)}{\omega_{ij}} \mathrm{J}_{n_{ij}} \right)$$

กำหนดค่า $|V|$ (Searle, Casella & McCulloch, 1992)

จะได้

$$|V| = \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b_i} \sigma_\varepsilon^{2(N-1)} \left(\sigma_\varepsilon^2 + n_{ij}\left(\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2\right)\right)$$

$$|V|^{\frac{1}{2}} = \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b_i} \sigma_\varepsilon^{2\left(\frac{1}{2}(N-1)\right)} \left(\sigma_\varepsilon^2 + n_{ij}\left(\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b_i} \sigma_\varepsilon^{2\left(\frac{1}{2}(N-1)\right)} \left(\omega_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ดังนั้นฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood function) คือ

$$\ell(\mathrm{y}) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(\mathrm{y}-\underset{\sim}{1}\mu)' V^{-1}(\mathrm{y}-\underset{\sim}{1}\mu)}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}N}\,|\mathrm{V}|^{\frac{1}{2}}} \qquad (2)$$

การคำนวณหาค่าภาวะน่าจะเป็นของแผนแบบซ้อนสองขั้น พิจารณาได้ดังนี้

จาก (2) จะได้

$$\ell(\mathrm{y}) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}(y-\mu)' V^{-1}(y-\mu)\right]}{(2\pi)^{\frac{1}{2}N}\,|\mathrm{V}|^{\frac{1}{2}}}$$

แทนค่า V^{-1} และ $|V|^{\frac{1}{2}}$ จะได้

$$\ell(\mathrm{y})=\frac{\exp\left[-\frac{1}{2}(\mathrm{y}-\mu)'\frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}\left(\mathrm{I}_{n_{ij}}-\frac{\left(\sigma_\alpha^2+\sigma_\beta^2\right)}{\omega_{ij}}\mathrm{J}_{n_{ij}}\right)(\mathrm{y}-\mu)\right]}{(2\pi)^{\frac{1}{2}N}\sigma_\varepsilon^{2\left(\frac{1}{2}(N-1)\right)}\prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b_i}\left(\omega_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\left\{(\mathrm{y}-\mu)'(\mathrm{y}-\mu)-\frac{\left(\sigma_\alpha^2+\sigma_\beta^2\right)}{\omega_{ij}}(\mathrm{y}-\mu)'\mathrm{J}_{n_{ij}}(\mathrm{y}-\mu)\right\}\right]}{(2\pi)^{\frac{1}{2}N}\sigma_\varepsilon^{2\left(\frac{1}{2}(N-1)\right)}\prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b_i}\left(\omega_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\left\{\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\left(y_{ijk}-\mu\right)^2\right)-\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\frac{\left(\sigma_\alpha^2+\sigma_\beta^2\right)\left(y_{ijk}-\mu\right)^2}{\omega_{ij}}\right\}\right]}{(2\pi)^{\frac{1}{2}N}\sigma_\varepsilon^{2\left(\frac{1}{2}(N-1)\right)}\prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b_i}\left(\omega_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\left\{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\left(y_{ijk}-\overline{y}_{ij.}+\overline{y}_{ij.}-\mu\right)^2-\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\frac{\left(\sigma_\alpha^2+\sigma_\beta^2\right)\left(y_{ijk}-\mu\right)^2}{\omega_{ij}}\right\}\right]}{(2\pi)^{\frac{1}{2}N}\sigma_\varepsilon^{2\left(\frac{1}{2}(N-1)\right)}\prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b_i}\left(\omega_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\left\{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\left(y_{ijk}-\overline{y}_{ij.}\right)^2+n_{ij}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\left(\overline{y}_{ij}-\mu\right)^2-\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\frac{\left(\sigma_\alpha^2+\sigma_\beta^2\right)\left(y_{ijk}-\mu\right)^2}{\omega_{ij}}\right\}\right]}{(2\pi)^{\frac{1}{2}N}\sigma_\varepsilon^{2\left(\frac{1}{2}(N-1)\right)}\prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b_i}\left(\omega_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

ใส่ log ทั้งสองข้างจะได้ว่า

$$\ln\ell(y)=-\frac{1}{2}N\ln 2\pi-\frac{1}{2}(N-1)\ln\sigma_\varepsilon^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\ln\omega_{ij}-\frac{SS_E}{2\sigma_\varepsilon^2}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}n_{ij}\left(\overline{y}_{ij.}-\mu\right)^2$$

$$+\frac{1}{2\sigma_{\varepsilon}^{2}}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\frac{\left(\sigma_{\alpha}^{2}+\sigma_{\beta}^{2}\right)\left(y_{ijk}-\mu\right)^{2}}{\omega_{ij}}$$

หาอนุพันธ์อันดับที่ 1 ของ $\ln\ell(y)$ เทียบกับ $\sigma_{\alpha}^{2},\sigma_{\beta}^{2}$ และ σ_{ε}^{2} ตามลำดับ

$$\ell'_{\sigma_{\alpha}^{2}}=\frac{\partial\ln\ell}{\partial\sigma_{\alpha}^{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\frac{n_{ij}}{\omega_{ij}}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\frac{\left(y_{ijk}-\mu\right)^{2}}{\omega_{ij}^{2}}$$

$$\ell'_{\sigma_{\beta}^{2}}=\frac{\partial\ln\ell}{\partial\sigma_{\beta}^{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\frac{n_{ij}}{\omega_{ij}}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\frac{\left(y_{ijk}-\mu\right)^{2}}{\omega_{ij}^{2}}$$

$$\ell'_{\sigma_{\varepsilon}^{2}}=\frac{\partial\ln\ell}{\partial\sigma_{\varepsilon}^{2}}=-\frac{N-1}{2\sigma_{\varepsilon}^{2}}-\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\frac{1}{2\omega_{ij}}+\frac{SS_{E}}{2\sigma_{\varepsilon}^{4}}+\frac{1}{2\sigma_{\varepsilon}^{4}}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}n_{ij}\left(\overline{y}_{ij.}-\mu\right)^{2}$$
$$-\frac{1}{2\sigma_{\varepsilon}^{4}}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\frac{\left(\sigma_{\alpha}^{2}+\sigma_{\beta}^{2}\right)\left(2\sigma_{\varepsilon}^{2}+n_{ij}\left(\sigma_{\alpha}^{2}+\sigma_{\beta}^{2}\right)\right)\left(y_{ijk}-\mu\right)^{2}}{\omega_{ij}^{2}}$$

หาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ $\ln\ell(y)$

ให้
$$\ell''_{\sigma_{\alpha}^{2},\sigma_{\alpha}^{2}}=\frac{\partial^{2}\ln\ell}{\partial\sigma_{\alpha}^{2}\partial\sigma_{\alpha}^{2}},\quad \ell''_{\sigma_{\beta}^{2},\sigma_{\beta}^{2}}=\frac{\partial^{2}\ln\ell}{\partial\sigma_{\beta}^{2}\partial\sigma_{\beta}^{2}}$$
$$\ell''_{\sigma_{\alpha}^{2},\sigma_{\beta}^{2}}=\frac{\partial^{2}\ln\ell}{\partial\sigma_{\alpha}^{2}\partial\sigma_{\beta}^{2}},\quad \ell''_{\sigma_{\beta}^{2},\sigma_{\alpha}^{2}}=\frac{\partial^{2}\ln\ell}{\partial\sigma_{\beta}^{2}\partial\sigma_{\varepsilon}^{2}}$$

จะได้
$$\ell''_{\sigma_{\alpha}^{2},\sigma_{\alpha}^{2}}=\ell''_{\sigma_{\beta}^{2},\sigma_{\beta}^{2}}=\ell''_{\sigma_{\alpha}^{2},\sigma_{\beta}^{2}}=\ell''_{\sigma_{\beta}^{2},\sigma_{\alpha}^{2}}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\frac{n_{ij}^{2}}{\omega_{ij}^{2}}-\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\frac{n_{ij}\left(y_{ijk}-\mu\right)^{2}}{\omega_{ij}^{3}}$$

ให้
$$\ell''_{\sigma_{\alpha}^{2},\sigma_{\varepsilon}^{2}}=\frac{\partial^{2}\ln\ell}{\partial\sigma_{\alpha}^{2}\partial\sigma_{\varepsilon}^{2}},\quad \ell''_{\sigma_{\varepsilon}^{2},\sigma_{\alpha}^{2}}=\frac{\partial^{2}\ln\ell}{\partial\sigma_{\varepsilon}^{2}\partial\sigma_{\alpha}^{2}}$$
$$\ell''_{\sigma_{\beta}^{2},\sigma_{\varepsilon}^{2}}=\frac{\partial^{2}\ln\ell}{\partial\sigma_{\beta}^{2}\partial\sigma_{\varepsilon}^{2}},\quad \ell''_{\sigma_{\varepsilon}^{2},\sigma_{\beta}^{2}}=\frac{\partial^{2}\ln\ell}{\partial\sigma_{\varepsilon}^{2}\partial\sigma_{\beta}^{2}}$$

จะได้ $\ell''_{\sigma_\alpha^2,\sigma_\varepsilon^2} = \ell''_{\sigma_\varepsilon^2,\sigma_\alpha^2} = \ell''_{\sigma_\beta^2,\sigma_\varepsilon^2} = \ell''_{\sigma_\varepsilon^2,\sigma_\beta^2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\frac{n_{ij}}{\omega_{ij}^2} - \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\frac{\left(y_{ijk}-\mu\right)^2}{\omega_{ij}^3}$

และ

$$
\begin{aligned}
\ell''_{\sigma_\varepsilon^2,\sigma_\varepsilon^2} &= \frac{\partial^2 \ln \ell}{\partial\sigma_\varepsilon^2 \partial\sigma_\varepsilon^2} \\
&= \frac{N-1}{2\sigma_\varepsilon^4} + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\frac{1}{2\omega_{ij}^2} - \frac{SS_E}{2\sigma_\varepsilon^6} - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^6}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i} n_{ij}\left(\overline{y}_{ij.}-\mu\right)^2 \\
&\quad + \frac{\left(\sigma_\alpha^2+\sigma_\beta^2\right)^2}{\sigma_\varepsilon^6}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\frac{\left(y_{ijk}-\mu\right)^2\left(2\sigma_\varepsilon^2+n_{ij}\left(\sigma_\alpha^2+\sigma_\beta^2\right)\right)}{\omega_{ij}^3} \\
&= \frac{N-1}{2\sigma_\varepsilon^4} + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\frac{1}{2\omega_{ij}^2} - \frac{SS_E}{2\sigma_\varepsilon^6} - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^6}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i} n_{ij}\left(\overline{y}_{ij.}-\mu\right)^2 \\
&\quad + \frac{\left(\sigma_\alpha^2+\sigma_\beta^2\right)^2}{\sigma_\varepsilon^6}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\frac{\left(y_{ijk}-\overline{y}_{ij.}\right)^2\left(2\sigma_\varepsilon^2+n_{ij}\left(\sigma_\alpha^2+\sigma_\beta^2\right)\right)}{\omega_{ij}^3} \\
&= \frac{N-1}{2\sigma_\varepsilon^4} + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\frac{1}{2\omega_{ij}^2} - \frac{SS_E}{\sigma_\varepsilon^6} - \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i} n_{ij}\left(\overline{y}_{ij.}-\mu\right)^2}{2\sigma_\varepsilon^6} \\
&\quad + \frac{\left(\sigma_\alpha^2+\sigma_\beta^2\right)^2}{\sigma_\varepsilon^6}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b_i}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\frac{SS_E\left(2\sigma_\varepsilon^2+n_{ij}\left(\sigma_\alpha^2+\sigma_\beta^2\right)\right)}{\omega_{ij}^3}
\end{aligned}
$$

เมื่อ

$\ell'_{\sigma_\alpha^2}$ แทน ค่าอนุพันธ์อันดับที่ 1 ของ $\ln\ell$ เมื่อเทียบกับ σ_α^2

$\ell'_{\sigma_\beta^2}$ แทน ค่าอนุพันธ์อันดับที่ 1 ของ $\ln\ell$ เมื่อเทียบกับ σ_β^2

$\ell'_{\sigma_\varepsilon^2}$ แทน ค่าอนุพันธ์อันดับที่ 1 ของ $\ln\ell$ เมื่อเทียบกับ σ_ε^2

$\ell'_{\sigma_\alpha^2,\sigma_\alpha^2}$ แทน ค่าอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ $\ln\ell$ เมื่อเทียบกับ σ_α^2 และ σ_α^2 ตามลำดับ

$\ell'_{\sigma_\beta^2,\sigma_\beta^2}$ แทน ค่าอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ $\ln\ell$ เมื่อเทียบกับ σ_β^2 และ σ_β^2 ตามลำดับ

$\ell'_{\sigma_\varepsilon^2,\sigma_\varepsilon^2}$ แทน ค่าอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ $\ln\ell$ เมื่อเทียบกับ σ_ε^2 และ σ_ε^2 ตามลำดับ

$\ell'_{\sigma_\alpha^2,\sigma_\beta^2}$ แทน ค่าอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ $\ln\ell$ เมื่อเทียบกับ σ_α^2 และ σ_β^2 ตามลำดับ

$\ell'_{\sigma_\alpha^2,\sigma_\varepsilon^2}$ แทน ค่าอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ $\ln\ell$ เมื่อเทียบกับ σ_α^2 และ σ_ε^2 ตามลำดับ

$\ell'_{\sigma_\beta^2,\sigma_\alpha^2}$ แทน ค่าอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ $\ln\ell$ เมื่อเทียบกับ σ_β^2 และ σ_ε^2 ตามลำดับ

$\ell'_{\sigma_\beta^2,\sigma_\varepsilon^2}$ แทน ค่าอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ $\ln\ell$ เมื่อเทียบกับ σ_β^2 และ σ_ε^2 ตามลำดับ

$\ell'_{\sigma_\varepsilon^2,\sigma_\alpha^2}$ แทน ค่าอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ $\ln\ell$ เมื่อเทียบกับ σ_ε^2 และ σ_α^2 ตามลำดับ

$\ell'_{\sigma_\varepsilon^2,\sigma_\beta^2}$ แทน ค่าอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ $\ln\ell$ เมื่อเทียบกับ σ_ε^2 และ σ_β^2 ตามลำดับ

ในการหาค่าประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของปัจจัย A, B และความคลาดเคลื่อน ไม่สามารถทำได้โดยตรงต้องอาศัยกระบวนการทำซ้ำ (Iterative procedure) ในที่นี้วิธีนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson) ในการประมาณค่า ซึ่งใช้หลักดังนี้ (สุกัญญา, 2548 อ้างใน ปาริฉัตร, 2539)

1. กำหนดค่าเริ่มต้นของ $\sigma_\alpha^{2(0)}$,$\sigma_\beta^{2(0)}$ และ $\sigma_\varepsilon^{2(0)}$ ในที่นี้ใช้ค่าประมาณที่ได้จากวิธีคลาสสิก

2. คำนวณค่าอนุพันธ์อันดับที่ 1 และ 2 ของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น

3. คำนวณค่าประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนของ σ_α^2 ,σ_β^2 และ σ_ε^2 จากความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} \sigma_\alpha^{2(i+1)} \\ \sigma_\beta^{2(i+1)} \\ \sigma_\varepsilon^{2(i+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_\alpha^{2(i)} \\ \sigma_\beta^{2(i)} \\ \sigma_\varepsilon^{2(i)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ell''_{\sigma_\alpha^2,\sigma_\alpha^2} & \ell''_{\sigma_\alpha^2,\sigma_\beta^2} & \ell''_{\sigma_\alpha^2,\sigma_\varepsilon^2} \\ \ell''_{\sigma_\beta^2,\sigma_\alpha^2} & \ell''_{\sigma_\beta^2,\sigma_\beta^2} & \ell''_{\sigma_\beta^2,\sigma_\varepsilon^2} \\ \ell''_{\sigma_\varepsilon^2,\sigma_\alpha^2} & \ell''_{\sigma_\varepsilon^2,\sigma_\beta^2} & \ell''_{\sigma_\varepsilon^2,\sigma_\varepsilon^2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \ell'_{\sigma_\alpha^2} \\ \ell'_{\sigma_\beta^2} \\ \ell'_{\sigma_\varepsilon^2} \end{bmatrix}$$

4. พิจารณาผลต่างของค่าประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนที่ได้จากรอบที่ $i+1$ และรอบที่ i โดยการหยุดการทำซ้ำเมื่อ

$$\left|\sigma_\alpha^{2(i+1)} - \sigma_\alpha^{2(i)}\right| < 0.0001$$

และ $$\left|\sigma_\beta^{2(i+1)} - \sigma_\beta^{2(i)}\right| < 0.0001$$

และ $$\left|\sigma_\varepsilon^{2(i+1)} - \sigma_\varepsilon^{2(i)}\right| < 0.0001$$