

บทที่ 2

วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยครั้งนี้เป็นงานวิจัยเชิงคุณภาพ ที่มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาการแสดงแทนจำนวนเต็มของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 โดยใช้เรื่องราวและแผนภาพ ซึ่งผู้วิจัยได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ปีการศึกษา 2549 ดังมีเอกสารและผลงานที่เกี่ยวข้องต่อไปนี้

- 1 ความหมายของการแสดงแทน
- 2 จำนวนเต็ม
- 3 การสอนคณิตศาสตร์โดยใช้เรื่องราวและแผนภาพ
- 4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
 - 4.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแสดงแทน
 - 4.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับจำนวนเต็ม
 - 4.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสอนโดยใช้เรื่องราวและแผนภาพ
- 5 กรอบทฤษฎีที่ใช้ในการวิจัย

1. ความหมายของการแสดงแทน

มีนิยามหลายแบบเกี่ยวกับการแสดงแทนพบอยู่ในวรรณกรรมต่าง ๆ เช่น

Kaput (1985) อธิบายคำจำกัดความของทฤษฎีทั่วไปเกี่ยวกับสัญลักษณ์และเครื่องหมายในการ representation บางอย่างของมัน เกี่ยวกับมาตรฐานของสิ่งอื่น ๆ และยังคงต้องมีอยู่อย่างถาวร รวมทั้งบางอย่างเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างสัญลักษณ์และสิ่งที่อ้างอิง อย่างไรก็ตามตัวมันเองแต่ละตัวอาจจะประกอบด้วยสิ่งที่มีอยู่จริง รายละเอียดที่ถูกต้องที่สุด เกี่ยวกับการแสดงแทนควรรวมถึงข้อสันนิษฐาน ที่มีอยู่จริง

- โลกได้ถูกการแสดงแทนที่มีอยู่แล้ว
- โลกเป็นตัวสร้างการแสดงแทน
- อะไรเป็นลักษณะของการแสดงแทนของโลกที่เป็นอยู่
- อะไรเป็นลักษณะของการที่โลกสร้างการแสดงแทน
- ความสอดคล้องกันระหว่าง 2 โลก

Lesh, Post, and Behr (1987) ให้คำจำกัดความเกี่ยวกับคำแนะนําที่เชื่อมกันระหว่างการแสดงแทนและผู้สร้างสิ่งนั้น “คำว่า การแสดงแทน ในที่นี้ อธิบายอย่างง่าย ๆ และถูกจำกัดความรู้สึกเช่นเดียวกับภายนอก การแสดงให้เห็นเป็นรูปธรรมเกี่ยวกับความคิดรวบยอดภายในของนักเรียน ถึงแม้ว่า จะมีความแตกต่างในการสร้าง external กับ internal”

Pimm (1995) แสดงถึง การแสดงแทน ว่า “การนำเสนอซ้ำๆ เกี่ยวกับวิชาการใช้สิ่งอื่นๆ” ร่องรอยการทำงานในการทำงานในกระตาดที่อ้างถึงแนวทางที่นำไปสู่การนำไปสู่การนำเสนอ ปัญหาที่ไม่น้อยกว่าการทำให้เป็นรูปภาพ การจัดการ ตาราง กราฟ และ การแสดงแทน แต่ละอย่างเกี่ยวกับนามธรรม สิ่งที่มีอยู่จริงในโลกบางระดับ ตัวอย่างเช่น การใช้เครื่องหมาย 4 นำไปสู่การแสดงแทน แอปเปิ้ล 2 ผล รวมกับ แอปเปิ้ล 2 ผล สรุปการดำเนินการของสิ่งที่มีอยู่จริงในโลก การวาดภาพป้ายเครื่องหมาย 4 เครื่องหมาย เป็นขั้นส่งเสริมจาก “สภาพที่เป็นจริง” เพราะพวกเขาไม่ได้จัดการเช่นเดียวกับเครื่องหมาย การเขียน $2 + 2 = 4$ เป็นสิ่งที่ทำให้สมดุลเพิ่มขึ้นจากการแสดงแทนนามธรรม การแสดงแทนบางอย่างอ้างถึง รูปภาพ ของสิ่งที่มีอยู่จริงบนโลก

Brinker (1996) ได้เสนอความหมายในแง่ของนิยามในเชิงวัตถุ ในเชิงที่เอา object เป็นตัวตั้ง เชิงรูปธรรม โดยนิยามว่า การแสดงแทน หมายถึง สัญลักษณ์ หรือรูปภาพที่นักเรียนได้วาดขึ้นแล้วตัวอย่างเช่น การทำวัตถุให้มีโครงสร้างเป็นชั้น ๆ ตัวอย่างเช่นการวาดตารางของเศษส่วน และการทำเศษส่วนเป็นท่อน ๆ ก็ถือว่าเป็น การแสดงแทนที่นักเรียนทำมา คำว่าโครงสร้างในที่นี้หมายถึง การที่นักเรียนได้ออกแบบสำหรับคำสั่งที่เฉพาะ Concept ทางคณิตศาสตร์ จากนิยามจะเห็นเกี่ยวกับเรื่องการแยกแยะของการแสดงแทน การแสดงแทนเป็นผลผลิตออกมา เป็นตัววัตถุออกมาเพื่อแสดงแทน ตัว materials มีอยู่แล้ว คือ ตัวสี่เหลี่ยม แผ่น แท่ง มีอยู่แล้ว แต่การที่เด็กนำมาจัดกลุ่ม ถือว่าเป็นการแสดงแทน อีกมุมมองหนึ่ง การแสดงแทน จะถูกทำโดยแต่ละบุคคล นักเรียนที่เขียนรูปเขียนสัญลักษณ์ขึ้นมาเป็นการให้ความหมายของแต่ละคน เป็นการให้ความหมายของนักเรียนเองหรือกลุ่มย่อย ๆ เพื่อใช้สำหรับคำตอบ หรือปัญหาบางอย่าง นิยามของ Brinker ได้ตัดความตั้งใจของผู้สร้างตัวแทนนี้ออกไป คือเกี่ยวกับ การสื่อสารเชื่อมโยง (idiosyncratic)

Goldin (2001) นิยามเกี่ยวกับ การแสดงแทน ว่า การจัดกลุ่มสัญลักษณ์ คุณลักษณะ รูปสัญลักษณ์หรือ ตัววัตถุที่บางอย่างแสดงถึงหรือแทนถึงสิ่งที่เราพูดถึงอยู่ ถ้าพูดถึงธรรมชาติ คำว่า การแสดงแทนตีความหมายได้หลายทาง รวมถึงสิ่งต่อไปนี้ด้วย ตัวอย่างเช่น คำว่า การแสดงแทน คือ สัมพันธ์ แสดงแทน ดึงออกมา กลั่นออกมาจากสิ่งนั้น รหัสเป็นสิ่งแสดงแทนกลั่นไว้ในสัญลักษณ์นั้น ทำให้แจ้ง การระบุ ความหมาย การผลิตออกมา อ้างถึง แนะนำ ทำให้เป็นเชิงสัญลักษณ์ (Stephen P. Smith, 2003)

2. จำนวนเต็ม (Integer) ประกอบด้วย

จำนวนเต็มบวก ได้แก่ 1, 2, 3, 4, 5, ...

จำนวนเต็มลบ ได้แก่ -1, -2, -3, -4, 5, ...

จำนวนเต็มศูนย์ ได้แก่ 0

ในการเปรียบเทียบจำนวนเต็มสองจำนวนที่ไม่เท่ากัน เพื่อดูว่าจำนวนใดน้อยกว่าหรือจำนวนใดมากกว่าเราจะเห็นได้ง่ายโดยใช้เส้นจำนวน บนเส้นจำนวน จำนวนเต็มที่อยู่ทางขวาจะมากกว่าจำนวนเต็มที่อยู่ทางซ้ายเสมอ เช่น

5 มากกว่า 4 ใช้สัญลักษณ์ $5 > 4$ หรือ 4 น้อยกว่า 5 ใช้สัญลักษณ์ $4 < 5$

3 มากกว่า 1 ใช้สัญลักษณ์ $3 > 1$ หรือ 1 น้อยกว่า 3 ใช้สัญลักษณ์ $1 < 3$

0 มากกว่า -1 ใช้สัญลักษณ์ $0 > -1$ หรือ -1 น้อยกว่า 0 ใช้สัญลักษณ์ $-1 < 0$

2.1 การบวกจำนวนเต็ม

2.1.1 ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็ม

ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มใด ๆ จะหาได้จากระยะที่จำนวนเต็มนั้นอยู่ห่างจาก 0 บนเส้นจำนวน ตัวอย่างเช่น

ค่าสัมบูรณ์ของ 8 เท่ากับ 8 เนื่องจาก 8 อยู่ห่างจาก 0 เป็นระยะ 8 หน่วย

ค่าสัมบูรณ์ของ -8 เท่ากับ 8 เนื่องจาก -8 อยู่ห่างจาก 0 เป็นระยะ 8 หน่วย

ค่าสัมบูรณ์ของ 1 เท่ากับ 1 เนื่องจาก 1 อยู่ห่างจาก 0 เป็นระยะ 1 หน่วย

ค่าสัมบูรณ์ของ -1 เท่ากับ 1 เนื่องจาก -1 อยู่ห่างจาก 0 เป็นระยะ 1 หน่วย

ค่าสัมบูรณ์ของ 0 เท่ากับ 0 เนื่องจาก 0 อยู่ห่างจาก 0 เป็นระยะ 0 หน่วย

2.1.2 การบวกจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มบวกและการบวกจำนวนเต็มลบด้วยจำนวนเต็มลบ

การบวกจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มบวก

เช่น $3 + 2 = 5$

พิจารณาการหาผลบวก $3+2$ โดยใช้ค่าสัมบูรณ์ จะเห็นว่าถ้านำค่าสัมบูรณ์ของ 3 บวกด้วยค่าสัมบูรณ์ของ 2 จะได้ผลลัพธ์เท่ากับ 5

การบวกจำนวนเต็มลบด้วยจำนวนเต็มลบ

เช่น $(-3) + (-2) = -5$

พิจารณาการหาผลบวก $(-3) + (-2)$ โดยใช้ค่าสัมบูรณ์ดังนี้

ค่าสัมบูรณ์ของ -3 เท่ากับ 3

ค่าสัมบูรณ์ของ -2 เท่ากับ 2

จะเห็นว่าถ้านำค่าสัมบูรณ์ของ -3 บวกด้วยค่าสัมบูรณ์ของ -2 แล้วคำตอบเป็นจำนวนเต็มลบ จะได้ผลลัพธ์เท่ากับ -5 เช่นเดียวกับการหาผลบวกโดยใช้เส้นจำนวน

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลบวกของ $9 + 5$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลบวก $(-9) + (-5)$

วิธีทำ $9 + 5 = 14$

วิธีทำ $(-9) + (-5) = -14$

ตอบ 14

ตอบ - 14

2.1.3 การบวกจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มลบและการบวกจำนวนเต็มลบด้วยจำนวนเต็มบวก

การบวกจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มลบในกรณีที่จำนวนเต็มบวกมีค่าสัมบูรณ์มากกว่า เช่น $6 + (-4) = 2$ พิจารณาการหาผลบวก $6 + (-4)$ โดยใช้ค่าสัมบูรณ์ ดังนี้

ค่าสัมบูรณ์ของ 6 เท่ากับ 6

ค่าสัมบูรณ์ของ -4 เท่ากับ

จะเห็นว่าถ้านำค่าสัมบูรณ์ของ 6 ลบด้วยค่าสัมบูรณ์ของ -4 จะได้ผลลัพธ์ เท่ากับ 2

การบวกจำนวนเต็มลบด้วยจำนวนเต็มบวก ในกรณีที่จำนวนเต็มบวกมีค่าสัมบูรณ์มากกว่า เช่น $(-4) + 7$ สามารถแสดงการหาผลบวกโดยใช้ค่าสัมบูรณ์ จะเห็นว่าถ้านำค่าสัมบูรณ์ของ 7 ลบด้วยค่าสัมบูรณ์ของ -4 จะได้ผลลัพธ์เท่ากับ 3

การบวกจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มลบ ในกรณีที่จำนวนเต็มลบมีค่าสัมบูรณ์มากกว่า เช่น $3 + (-8) = -5$ พิจารณาการหาผลบวก $3 + (-8)$ โดยใช้ค่าสัมบูรณ์ จะเห็นว่าถ้านำค่าสัมบูรณ์ของ -8 ลบด้วยค่าสัมบูรณ์ของ 3 แล้วตอบเป็นจำนวนเต็มลบจะได้ผลลัพธ์เท่ากับ -5

การบวกจำนวนเต็มลบด้วยจำนวนเต็มบวก ในกรณีที่จำนวนเต็มลบมีค่าสัมบูรณ์มากกว่า เช่น $(-8) + 5 = -3$ พิจารณาการหาผลบวก $(-8) + 5$ โดยใช้ค่าสัมบูรณ์ จะเห็นว่าถ้านำค่าสัมบูรณ์ของ -8 ลบด้วยค่าสัมบูรณ์ของ 5 แล้วตอบเป็นจำนวนเต็มลบ จะได้ผลลัพธ์เท่ากับ -3

การบวกระหว่างจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ ในกรณีที่จำนวนเต็มทั้งสองมีค่าสัมบูรณ์เท่ากัน เช่น $5 + (-5) = 0$ พิจารณาการหาผลบวกของ $5 + (-5)$ โดยใช้ค่าสัมบูรณ์ จะเห็นว่าถ้านำค่าสัมบูรณ์ของ 5 ลบด้วยค่าสัมบูรณ์ของ -5 หรือนำ ค่าสัมบูรณ์ของ -5 ลบด้วยค่าสัมบูรณ์ของ 5 จะได้ผลลัพธ์เท่ากับ 0

2.1.4 หลักเกณฑ์การบวกจำนวนเต็ม มีดังนี้

1. การบวกจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มบวก ให้นำค่าสัมบูรณ์มาบวกกันแล้วตอบเป็นจำนวนเต็มบวก

2. การบวกจำนวนเต็มลบด้วยจำนวนเต็มลบ ให้นำค่าสัมบูรณ์มาบวกกันแล้วตอบเป็นจำนวนเต็มลบ

3. การบวกระหว่างจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบที่มีค่าสัมบูรณ์ไม่เท่ากัน ให้นำค่าสัมบูรณ์ที่มากกว่าลบด้วยค่าสัมบูรณ์ที่น้อยกว่า แล้วตอบเป็นจำนวนเต็มบวกหรือจำนวนเต็มลบตามจำนวนที่มีค่าสัมบูรณ์มากกว่า

4. การบวกระหว่างจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบที่มีค่าสัมบูรณ์เท่ากับผลบวกเท่ากับ 0

สำหรับการบวกจำนวนเต็มใด ๆ ด้วยศูนย์ หรือการบวกศูนย์ด้วยจำนวนเต็มใด ๆ จะได้ผลบวกเท่ากับจำนวนเต็มนั้นเสมอ

2.2 การลบจำนวนเต็ม

ในการลบจำนวนเต็มนั้นต้องอาศัยการบวกตามข้อตกลงดังนี้

$$\text{ตัวตั้ง} - \text{ตัวลบ} = \text{ตัวตั้ง} + \text{จำนวนตรงข้ามของตัวลบ}$$

ตัวอย่าง เช่น

$$4 - 2 = 4 + (-2)$$

$$2 - 4 = 2 + (-4)$$

$$(-5) - (-1) = (-5) + 1$$

เมื่อเขียนการลบให้อยู่ในรูปการบวกแล้วจึงหาผลบวกของจำนวนเต็มตามวิธีที่กล่าวมาดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงหาผลลบ 7-15

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ } 7 - 15 &= 7 + (-15) \\ &= -8\end{aligned}$$

ตอบ -8

3. การสอนคณิตศาสตร์โดยใช้เรื่องราวและแผนภาพ

ปาสสัน กงตาล (2547) ได้กล่าวถึง การสอนคณิตศาสตร์โดยใช้เรื่องราวและแผนภาพ (Teaching Mathematics by Stories and Diagrams) ว่าเป็นรูปแบบการสอนคณิตศาสตร์โดยใช้เรื่องราวและแผนภาพเป็นสื่อการเรียนการสอน ซึ่งโดยปกติ เมื่อมีการพูดสนทนาในเรื่องเดียวกันก็จะเกิดการคิดเพิ่มและขยายออกไป ทั้งนี้เพราะนักเรียนแต่ละคนมีตัวตนที่แตกต่างกันเนื่องจากประสบการณ์และภูมิหลังรวมถึงความสนใจและความถนัดที่แตกต่างกัน นั่นคือ ถ้าครูนำเรื่องราวมาขึ้นต้นก่อน เป็นการวางบริบทที่นักเรียนทุกคนสามารถเข้าร่วมได้ ถึงแม้ว่านักเรียนจะมีระดับความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์แตกต่างกัน แต่กฎเกณฑ์ที่มาพร้อมกับเรื่องราวจะทำหน้าที่เป็นส่วนของ “กำหนดให้” อย่างแนบเนียนดังนั้นเมื่อถึงขั้นสอนครูก็ใช้สถานการณ์ของเรื่องราวเป็นสถานการณ์ปัญหา ซึ่งจะเป็นปัญหาร่วมกันของทั้งครูและนักเรียน เพราะทุกคนอยู่ในบริบทเดียวกัน การไม่มีส่วนร่วมในการรับรู้จึงมีน้อยลงทำให้นักเรียนเข้ามาอยู่ในกระบวนการของการคิดแก้ปัญหาด้วยตนเอง สำหรับในกิจกรรมที่นักเรียนต้องต่อเติมเสริมแต่งภาพจากเรื่องราว

ด้วยการวาดและระบายสีภาพ หรือการเล่าเรื่องราวของตนเองที่จินตนาการขึ้นมานั้น เราสามารถเทียบเคียงได้กับการสร้างสรรค์สิ่งใหม่ขึ้นมา ซึ่งเกิดจากการใช้พลังสร้างสรรค์ ถ้าได้ทำสิ่งใดบ่อย ๆ ก็จะมีการพัฒนาความสามารถในการกระทำสิ่งนั้นและ/หรือคงทนขึ้นจนกลายเป็นทักษะของนักเรียน รูปแบบทั่วไปของการจัดทำแผนการสอน ดังนี้

ชั้นนำ

1) ครูเป็นคนเล่าเรื่องราวที่ได้เตรียมมา พร้อมกับรูปภาพประกอบที่มีสีสันสดใส เป็นชั้นนำเข้าสู่บทเรียน จุดมุ่งหมายของเนื้อเรื่อง เพื่อให้นักเรียนนั้น สามารถรับรู้ไปได้พร้อม ๆ กัน ดังนั้น เรื่องราวจึงควรเน้นความแปลกใหม่ ความสดใส หรือความสวยงาม หรือเป็นเรื่องที่อาจพลิกไปจากความคาดหมายเป็นเรื่องราวที่ครูสร้างสรรค์ขึ้นเพื่อให้นักเรียนทุกคน ไม่ควรมีคณิตศาสตร์อยู่มากเกินไป หากจะมีคณิตศาสตร์อยู่บ้าง ก็ควรเป็นแง่มุมเชิงคุณภาพมากกว่าเชิงปริมาณ จะต้องเป็นเรื่องราวที่แม้แต่เด็กที่นิ่งอยู่ไกลสุด และมีผลการเรียนทางด้านคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ต่ำสุดก็ยังสามารถรับรู้ได้ ครูจะใช้เวลาส่วนนี้ประมาณ 5 นาที เป็นชั้นนำเข้าสู่บทเรียน

ชั้นสอน

2) โครงสร้างในชั้นสอนจะประกอบด้วย“ปัญหา 8 ข้อ” โดยที่ปัญหา 2 ข้อแรกจะทำหน้าที่เป็นตัวอย่าง ที่ 1 และตัวอย่างที่ 2 ตามลำดับ โดยครูใช้เรื่องราวที่ได้เล่ามาแล้วสร้างเป็นสถานการณ์ปัญหา บริบทของปัญหาจะเป็นไปตามสภาพแวดล้อมของเรื่องราวนั้น ๆ ซึ่งกฎเกณฑ์ต่าง ๆ จะถูกส่งผ่านมาจากเนื้อ เรื่อง อันเป็นสถานการณ์ที่นักเรียนทุกคนสามารถรับรู้ได้ในการแก้ปัญหาของตัวอย่างทั้งสอง ครูและนักเรียนจะพูดถึง “เรื่องราว” เดียวกัน ดังนั้น จึงเป็นการจำลองสภาพแวดล้อมให้ทั้งครูและนักเรียนอยู่ในสถานการณ์เดียวกัน พูดถึงสิ่งเดียวกันและเป็นปัญหา “เดียวกัน” ไม่ใช่เป็นปัญหาของครูฝ่ายเดียว แต่เป็นปัญหาของนักเรียนด้วยเพราะว่านักเรียนและครูฟังได้ยิน “เรื่องราว” แบบนี้เป็น “ครั้งแรก” ด้วยกัน จึงตกอยู่ในบริบทเดียวกัน เมื่อพบว่าปัญหาในตัวอย่างเป็นปัญหาร่วมกัน นักเรียนก็จะพยายามคิดแก้ปัญหา นั้น จะแก้ปัญหา นั้นสำเร็จหรือไม่ก็ตาม นักเรียนจะผลอตัว “คิด” แก้ปัญหานั้น โดยพลังขับเคลื่อนจากตัวจินตนาการเป็นหลัก ซึ่งถ้าหากนักเรียนได้ใช้พลังจากตรรกะและการคิดวิเคราะห์เข้ามาเสริม ก็จะช่วยให้กระบวนการคิดแตกฉานยิ่งขึ้นครูจะใช้เวลากับตัวอย่างแรกนี้ประมาณ 5 นาที แต่ถ้าครูคิดว่าแผนการสอนที่เหมาะสมกับเนื้อหาเรื่องนี้หรือนักเรียนห้องนี้ ต้องรวมตัวอย่างทั้งสองไว้ด้วยกัน และใช้เวลาประมาณ 10 นาที ก็ย่อมทำได้

3) สำหรับตัวอย่างที่ 3 และตัวอย่างที่ 4 จะเป็นแผนภาพ “แผนภาพ” ที่ถอดแบบมาจากสาระของเรื่องราว แต่ไม่เอารายละเอียดมาพิจารณาทั้งหมด จะดูโครงสร้างหลักที่เกี่ยวข้องกับปัญหาในตัวอย่างนี้เท่านั้น เป็นการทำให้เป็น “นามธรรม” มากขึ้น แต่ไม่ใช่เปลี่ยนเป็นนามธรรมทันที ยังคงมีรูปร่างอยู่บ้าง แต่ไม่มีรายละเอียดเหมือนกับเรื่องราว ดังนั้นแผนภาพจึงเป็นลายเส้นหรือเป็นรูปที่วาดได้ง่าย ๆ แต่มีลักษณะสำคัญตามเงื่อนไขของปัญหา การที่ครูสื่อสารกับนักเรียน

ด้วยภาษาแผนภาพในสถานการณ์ของตัวอย่างนี้ เป็นการจัดการให้นักเรียนได้ใช้พลังงานด้านการคิดวิเคราะห์เพิ่มเติมเข้ามา ซึ่งถือว่านักเรียนอาจจะไม่ประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหาแต่ นักเรียนก็ได้มีโอกาสใช้การคิดวิเคราะห์ที่ไปโดยอัตโนมัติ เพราะว่าแผนภาพเป็นลักษณะ

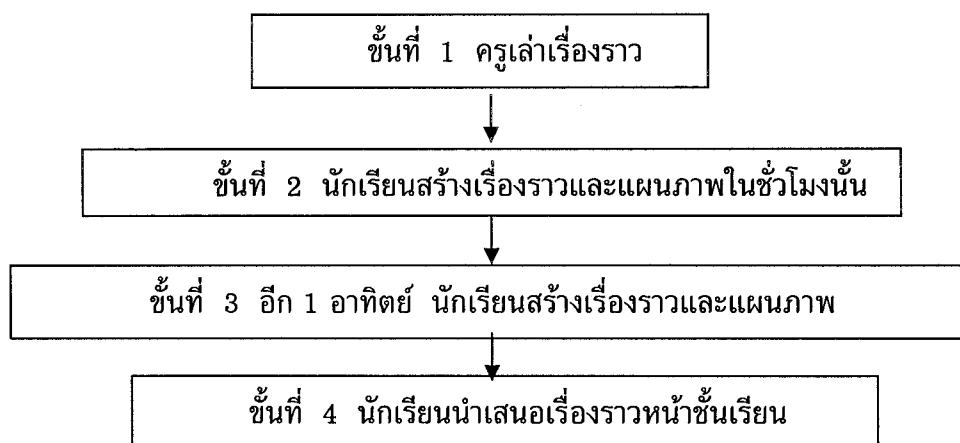
“กึ่งนามธรรม” นักเรียนต้องเชื่อมโยงกับเรื่องราวจึงจะเข้าใจแผนภาพนั้น เป็นการสร้างสถานการณ์ให้นักเรียนสร้างระบบการตีความจากแผนภาพไปสู่เรื่องราว และจากเรื่องราวไปสู่แผนภาพขึ้นเองในกระบวนการคิดของนักเรียน ครูจะใช้เวลากับตัวอย่างนี้ประมาณ 5 นาที หรือครูอาจจะรวมตัวอย่างเข้าด้วยกันโดยขยายเวลาเป็น 10 นาทีก็ได้

4) สำหรับตัวอย่างที่ 5 และตัวอย่างที่ 6 จะเป็น “สัญลักษณ์” ทางคณิตศาสตร์ที่ถอดแบบมาจากแผนภาพ โดยเอาสาระที่เป็นนามธรรมมากยิ่งขึ้น เช่น “ความเหมือนกันและความไม่เหมือนกัน” “ความคงที่และความแปรค่า” โดยสัญลักษณ์จะเป็นข้อสรุปของแผนภาพที่เป็นคุณสมบัติหลักของปัญหานี้ ในขั้นตอนนี้อาจสร้างความยากลำบากให้กับนักเรียนบางคน ครูอาจจำเป็นต้องชี้แนะให้นักเรียนใช้แผนภาพเข้ามาช่วยคิดหรือในบางกรณีครูอาจต้องอ้างอิงกับเรื่องราวที่ได้เล่ามาแล้วเพื่อให้นักเรียนได้รู้สึก “เหมือนอยู่บ้าน” กล่าวคือรู้สึกคุ้นเคยกับสิ่งที่ “รู้จัก” มาก่อนแล้ว จะใช้เวลากับตัวอย่างนี้ประมาณ 5 นาที หรือครูอาจจะรวมตัวอย่างเข้าด้วยกันโดยขยายเวลาเป็น 10 นาที ก็ได้

5) สำหรับตัวอย่างที่ 7 และตัวอย่างที่ 8 จะเป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้สร้างสรรค์เองโดยจะนำสถานการณ์ของเรื่องราวมามองผ่านมุมมองของนักเรียนเอง หรือโดยการเพิ่มเติมเสริมแต่งเรื่องราวให้มี “สี” มากขึ้นด้วยการวาดรูป และระบายสีประกอบ หรือโดยการเล่าเรื่องใหม่เองหรืออาจจะดัดแปลงมาจากเรื่องอื่น หรือ สร้างขึ้นมาเองทั้งหมดตามความสนใจ หรือ “แนว” ของนักเรียนแต่ละคน ปัญหาในตัวอย่างนี้เป็นปัญหาที่เปิดกว้าง นักเรียนจะเลือกทำเพียงปัญหาเดียวก็ได้ เวลาที่ใช้ประมาณ 10 นาที นอกจากนี้ ครูอาจขยายผลโดยการให้นักเรียนไปคิดเรื่องราวและวาดภาพประกอบมาเป็นงานกลุ่ม ให้เวลาประมาณ 2 – 4 สัปดาห์ เพื่อส่งชิ้นงาน กระบวนการนี้เปิดโอกาสให้นักเรียนได้ใช้พลังสร้างสรรค์และพลังจินตนาการ ผสมผสานกับความรู้ทางคณิตศาสตร์นำเสนอให้คนทั่วไปได้รับรู้ เป็นการสร้างตัวตนของนักเรียนขึ้นมาในสังคม ซึ่งนักเรียนสามารถทำได้ทุกคนเพราะว่าไม่มีความถูกผิด มีแต่ความแปลกตามจินตนาการ

ขั้นสรุป

6) ขั้นตอนสุดท้ายเป็นการสรุป โดยครูใช้แผนภาพเป็นเครื่องมือ และอาจใช้สัญลักษณ์เข้ามาเสริมเพิ่มความเป็นสากลให้มากขึ้น นักเรียนอาจเป็นผู้ช่วยการสรุปหรืออาจเป็นผู้นำการสรุปก็ได้ขึ้นอยู่กับบรรยากาศและสถานการณ์ในห้องเรียนขณะนั้นเวลาที่ใช้ประมาณ 5 นาทีจากการสอนคณิตศาสตร์โดยใช้เรื่องราวและแผนภาพข้างต้นซึ่ง ผู้วิจัยได้นำเรื่องราวและแผนภาพเพื่อใช้ในการวิจัยการแสดงแทนจำนวนเต็มของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 สิ่งที่ผู้วิจัยทำเป็นการสอนโดยขั้นตอนที่ทำวิจัยเกี่ยวกับการแสดงแทนนั้นผู้วิจัยได้จัดลำดับขั้นตอน 4 ขั้นตอนดังแผนภาพต่อไปนี้



ภาพที่ 1 แผนภาพแสดงขั้นตอนการเรียนรู้โดยวิธีการเรื่องราวและแผนภาพ

สวลี ปัญญา (2548) ได้ศึกษาความคิดสร้างสรรค์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ที่ผ่านการเรียนเรื่องทศนิยม โดยใช้เรื่องราวและแผนภาพ ผลการวิจัยพบว่า การสอนทศนิยมโดยใช้เรื่องราวและแผนภาพ เป็นการสอนที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้ฝึกกระบวนการคิด นักเรียนได้มีโอกาสคิดเรื่องราวและวาดภาพที่แปลกใหม่ เป็นการพัฒนาความคิดสร้างสรรค์ของนักเรียน

สุพรรณิการ์ จันทร์ชมพู และ ศรัณญา ทองคำ (2546) ศึกษาการสอน ท.ร.ม. และ ค.ร.น. โดยใช้เรื่องราวและแผนภาพ กรณีศึกษา ชั้น ม.1/7 และ ม.1/8 โรงเรียนสามแก่นนคร ผลการวิจัยพบว่านักเรียนมีความสุขในการเรียนคณิตศาสตร์ เมื่อได้เรียนโดยใช้เรื่องราวและแผนภาพ เป็นการเรียนการสอนที่สนุกไม่น่าเบื่อ นักเรียนมีอิสระในการคิด เนื่องจากเป็นสถานการณ์ปัญหาในเรื่องราวที่ครูสร้างขึ้น การเรียนจึงเป็นเหมือนการช่วยเหลือตัวละคร ไม่กดดัน และนักเรียนสามารถเสนอความคิดของตนเองออกมาโดยที่ครูไม่กดดัน

4. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

4.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแสดงแทน

Owen & CLEMENTS (1998) ได้สังเกตนักเรียนประถมแก้ปัญหาสมมติสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ ทำให้ได้ข้อมูลการแบ่งกลุ่มและการแปลผลของกระบวนการคิดของนักเรียนสร้างโมเดลที่มีความสัมพันธ์ในการคิดของนักเรียนและการสะท้อนของนักเรียนในระหว่างการแก้ปัญหา บทบาทของการสะท้อน (responsiveness) คือ การคิดเชิงจินตนาการ การเลือกเฉพาะเจาะจง การคิดจินตนาการเชิงรูปธรรม การคิดเป็นพลวัตร การคิดเชิง แบบรูปการปฏิบัติ ถูกใช้ในการแก้ปัญหาของนักเรียน อีกตัวหนึ่งคือใช้ในด้านสายตา ส่วนต่าง ๆ ที่ถูกแยกแยะจะช่วยในการวิเคราะห์ ประสพการณ์ก่อน กระบวนการเหล่านี้ทำให้เกิดความสนใจเฉพาะเจาะจง การรวมการใช้สายตา นอกจากนี้มุมมองที่มีอิทธิพลต่อความสนใจคือ ความคาดหวัง และ

ประสบการณ์เดิม การมีปฏิสัมพันธ์กับคนอื่น ๆ การทำให้เห็นภาพพจน์จะง่ายต่อการที่เด็กจะสร้างความหมายด้วยตัวของเด็กเอง

GOLDIN (1998) บทความนี้เป็นการศึกษาแนวคิดเกี่ยวกับโมเดลทางจิตวิทยาสำหรับการเรียน และการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ บนพื้นฐานของระบบเกี่ยวกับการแสดงแทนที่มีมากมายหลากหลาย และได้ผ่านการพัฒนาเป็นขั้น ๆ ซึ่งมีเป้าหมายเพื่อที่จะเข้าถึงทฤษฎีทางวิทยาศาสตร์ที่เหมาะสม บางความคิดเห็นเกี่ยวกับการแสดงแทนได้ถูกอภิปรายและอธิบายถึงการองค์ประกอบของโมเดล ในความสัมพันธ์ของความคิด รวมทั้งการคิดแบบจินตนาการ heuristics และ strategies และบทบาทพื้นฐานเกี่ยวกับความไม่ชัดเจน

Cifarelli (1998) ผู้เขียนได้นำเสนอผลการวิจัยทางด้าน กระบวนการของการแสดงแทนที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาโดยตรง โดยนำเสนอมุมมองใหม่ของการวิเคราะห์กระบวนการคิดเกี่ยวกับการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ผ่านการพัฒนารอบการวิเคราะห์ตามแนวคิดของกลุ่ม Constructivist เป้าหมายของการศึกษานี้คือเพื่อที่จะทราบถึงความเข้าใจเกี่ยวกับกระบวนการที่ผู้เรียนใช้ในการสร้างและ/หรือปรับการแสดงแทนภายใน ในสถานการณ์การแก้ปัญหา โดยมุ่งไปที่กิจกรรมการสร้าง โดยการสังเกตผู้แก้ปัญหาในขณะที่เขากำลังประสบ และปัญหากลุ่มของสถานการณ์ที่เกิดขึ้นในช่วงของการกระทำกิจกรรมของเขานั้น และเพื่อจัดลักษณะของการสร้างความรู้ในเชิงความคิดรวบยอดที่ตามมา

Jinfa Cai a.*, Frank K. Lester Jr. b (2005) ได้สำรวจความสัมพันธ์ระหว่างชนิดของการใช้การแสดงแทนของการหาคำตอบของเด็กชาวจีนและชาวสหรัฐอเมริกา และชนิดของการแสดงแทนในเชิงวิธีการสอนที่ครูชาวจีนและชาวสหรัฐอเมริกาใช้ในระหว่างการสอน ผลของการค้นหาเสนอไว้ว่าการแสดงแทนที่ครูใช้มีอิทธิพลต่อการแสดงแทนที่นักเรียนใช้ และพบว่าครูชาวจีนของการศึกษาในครั้งนี้ใช้การแสดงแทนด้วยสัญลักษณ์มากกว่ากันอย่างเห็นได้ชัดในงานสอนเกี่ยวกับการหาคำตอบ แต่ทว่าครูชาวสหรัฐอเมริกาอาศัยการแสดงแทนที่อาศัยการอธิบายด้วยวาจาและรูปภาพ ซึ่งก็ชี้ให้เห็นแล้วว่าการปฏิบัติในเชิงวิธีการสอนนั้นถูกบังคับโดยปัจจัยทางสังคมและวัฒนธรรม

4.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับจำนวนเต็ม

ร่ำพิง สอนสุภี (2548) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนอุบลรัตน์พิทยาคม จังหวัดขอนแก่น เรื่องจำนวนเต็ม ที่ได้รับการสอนที่เน้นกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ตามแนวคิดทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์ กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ได้จากกลุ่มเป็นกลุ่มแบบง่าย (Simple Cluster sampling) จากจำนวนประชากร 4 ห้องเรียน ได้กลุ่มตัวอย่าง 2 ห้องเรียน เป็นจำนวนนักเรียนทั้งหมด 104 คน ผลการวิจัยพบว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน ที่ได้รับการสอนที่เน้นกระบวนการทางคณิตศาสตร์ตามแนวคิดทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์ สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

4.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสอนโดยใช้เรื่องราวและแผนภาพ

สวลี ปัญญา (2548) ได้ศึกษาความคิดสร้างสรรค์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ที่ผ่านการเรียนเรื่องทศนิยม โดยใช้เรื่องราวและแผนภาพ ผลการวิจัยพบว่า การสอนทศนิยมโดยใช้เรื่องราวและแผนภาพ เป็นการสอนที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้ฝึกกระบวนการคิด นักเรียนได้มีโอกาสคิดเรื่องราวและวาดภาพที่แปลกใหม่ เป็นการพัฒนาความคิดสร้างสรรค์ของนักเรียน

สุพรรณิการ์ จันทร์ชมพู่ และ ศรัณญา ทองคำ (2546) ศึกษาการสอน ห.ร.ม. และ ค.ร.น. โดยใช้เรื่องราวและแผนภาพ กรณีศึกษา ชั้น ม.1/7 และ ม.1/8 โรงเรียนขามแก่นนคร ผลการวิจัยพบว่านักเรียนมีความสุขในการเรียนคณิตศาสตร์เมื่อได้เรียนโดยใช้เรื่องราวและแผนภาพ เป็นการเรียนการสอนที่สนุกไม่น่าเบื่อ นักเรียนมีอิสระในการคิดเนื่องจากเป็นสถานการณ์ปัญหาในเรื่องราวที่ครูสร้างขึ้น การเรียนจึงเป็นเหมือนการช่วยเหลือตัวละคร ไม่กดดัน และนักเรียนสามารถเสนอความคิดของตนเองออกมาโดยที่ครูไม่กดดัน

5. กรอบทฤษฎีที่ใช้ในการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ดำเนินการวิเคราะห์ข้อมูล โดยอาศัยแนวคิดเชิงทฤษฎีของ Goldin (1998) ที่กล่าวถึงส่วนประกอบของระบบของการแสดงแทนภายใน ซึ่งมีด้วยกัน 5 ระบบ คือ ระบบของคำพูดและการสร้างประโยค (verbal/syntactic systems) ระบบในเชิงการจินตนาการ (imagistic systems) ระบบของรูปแบบสัญลักษณ์ที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ (formal notational systems of mathematics) ระบบการวางแผนที่เป็นระบบการตรวจสอบ และการปฏิบัติการ (a system of planning, monitoring, and executive control) ระบบเกี่ยวกับการแสดงแทนอารมณ์ ความรู้สึก (a systems of affective representation)

ซึ่งผู้วิจัยได้พัฒนาระบบของการแสดงแทนภายใน ตามแนวคิดของGoldin (1998)

2 ระบบ คือ ระบบของคำพูดและการสร้างประโยค กับ ระบบในเชิงการจินตนาการ และเกณฑ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ลักษณะของจำนวนเต็มที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น 4 ลักษณะตามโครงสร้างของจำนวนเต็ม เนื่องจากในการศึกษานี้เนื้อหาที่ใช้ เป็นเนื้อหาในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 1 แต่กลุ่มเป้าหมายคือนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ซึ่งจะเป็นการศึกษาการแสดงแทนจำนวนเต็มโดยเรื่องราวและแผนภาพ ซึ่งใช้ภาพเป็นส่วนที่ช่วยส่งเสริมให้นักเรียนได้เกิดการเรียนรู้ที่ดี ดังคำกล่าวของ Kay D. Owen & M.A. (KEN) Clements (1998) ที่ว่าการทำให้เห็นภาพพจน์จะง่ายต่อการที่เด็กจะสร้างความหมายด้วยตัวของเด็กเอง จึงศึกษาระบบของการแสดงแทนภายใน 2 ระบบคือ ระบบของคำพูดและการสร้างประโยค ซึ่งจะพบจากการสร้างเรื่องราวของจำนวนเต็มและการเล่าเรื่องราว ส่วนระบบในเชิงการจินตนาการจะพบจากการใช้แผนภาพในการแสดงแทนจำนวนเต็ม ระบบของการแสดงแทนภายใน ที่ผู้วิจัยไม่ใช้เป็นกรอบในการวิเคราะห์ข้อมูล คือ ระบบของรูปแบบสัญลักษณ์ที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ ระบบการวางแผนที่เป็นระบบการตรวจสอบและการปฏิบัติการ ระบบเกี่ยวกับการแสดงแทนอารมณ์ ความรู้สึก เนื่องจากกลุ่มเป้าหมายยังไม่ได้

เรียนเนื้อหาเรื่องจำนวนเต็ม และการวิจัยในครั้งนี้ไม่มีสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ของจำนวนเต็ม เหมือนกับหลักสูตร หรือเนื้อหาที่ใช้ในหนังสือแบบเรียน แต่จะเป็นเรื่องราวและแผนภาพที่นักเรียนสร้างขึ้นเพื่อใช้แสดงแทนจำนวนเต็มประเภทต่าง ๆ ดังนั้นระบบของรูปแบบสัญลักษณ์ที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ ระบบการวางแผนที่เป็นระบบการตรวจสอบ และการปฏิบัติการ และระบบเกี่ยวกับการแสดงแทนอารมณ์ ความรู้สึกจึงไม่ได้ใช้เพื่อเป็นกรอบในการวิเคราะห์ข้อมูล กรอบที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลทั้ง 2 ระบบของมีดังนี้

1. ระบบของคำพูดและการสร้างประโยค

ระบบของคำพูดและการสร้างประโยคของการแสดงแทนระบุถึงประสิทธิภาพของการดำเนินการทางภาษาของตัวบุคคลในเรื่องการใช้ภาษาอย่างเป็นธรรมชาติเกี่ยวกับ คำ วลี และประโยคเท่านั้น แนวทาง Input ระบบเช่นนี้รวมไปถึงการได้ยินและการอ่าน แนวทาง Output รวมไปถึงการพูดและการเขียน ความสามารถที่อยู่ภายในระบบนี้อาจจะรวมไปถึงคำศัพท์ในเชิงคำพูด เช่น คำนิยามทั่ว ๆ ไปและคำอธิบายต่าง ๆ ในเชิงคำพูด

2. ระบบในเชิงการจินตนาการ

ระบบในเชิงการรู้อะไรก็ตามที่ไม่ใช่คำพูดหรือที่ไม่ใช่การบันทึก สิ่งสำคัญที่สุดในทางคณิตศาสตร์ศึกษา ระบบของการแสดงแทนในเชิง การนึกภาพหรือในเชิงปริภูมิ (visual/spatial) เกี่ยวกับการฟัง/มีจังหวะ (auditory/rhythmic) และ การสัมผัส/เกี่ยวกับการเคลื่อนไหว ซึ่งเป็นระบบของการแสดงแทน แนวทาง input สำหรับระบบในเชิงการจินตนาการของการแสดงแทนมาจากการอธิบายความรู้สึกประสบการณ์ แนวทางการ output รวมอยู่ในการอธิบายถึงการกระทำ การประดิษฐ์ หรือการมีอิทธิพลภายนอก ซึ่งประกอบด้วยคน สัตว์ สิ่งของ หรือใช้การแสดงแทน

จากนั้นผู้วิจัยสร้างกรอบเพื่อเป็นเกณฑ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ลักษณะของจำนวนเต็มขึ้น ซึ่งมีทั้งหมด 4 ลักษณะ คือ

1. ความเป็นทวิลักษณะของจำนวนเต็ม (Duality of Integers) คือ เรื่องราวและแผนภาพจะต้องประกอบด้วย 2 ลักษณะที่เด่นซึ่งบอกถึงความหมายของจำนวนเต็มบวก และจำนวนเต็มลบ โดยลักษณะหมายถึง องค์ประกอบต่าง ๆ ของแผนภาพ เช่น คือ สี รูปแบบภาพ เช่น สีแดงกับสีน้ำเงิน หมาป่ากับหมาบ้าน

2. ความเป็นจำนวนเต็ม 0 (The 0 integrality) คือ เรื่องราวและแผนภาพจะต้องประกอบด้วยลักษณะเด่นที่ 3 ซึ่งเพิ่มขึ้นจาก 2 ลักษณะเด่นซึ่งลักษณะเด่นที่ 3 นี้ เกิดจากความสัมพันธ์ที่เกิดขึ้นระหว่างจำนวนเต็มบวกที่มีจำนวนเท่ากับจำนวนเต็มลบ ที่มาดำเนินการบวกกันแล้วเกิดลักษณะเด่นที่ 3 ขึ้น หรืออาจเป็นคำพูดที่บอกถึงการไม่มี เช่น ไม่เหลือเลยหมดไป สีแดงหนึ่งอันเจอกับสีน้ำเงินหนึ่งอันจะกลายเป็นสีม่วง

3. ความเป็น 1 ต่อ 1 (The one-to-one correspondence) คือ เรื่องราวและแผนภาพแสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ ที่จะเหลือความ

เป็น 0 แต่จำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ ไม่จำเป็นต้องเท่ากัน โดยความสัมพันธ์อาจแสดงในรูปของการลากเส้นเชื่อมโยงจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบแบบหนึ่งต่อหนึ่ง หรืออาจเป็นคำพูดที่บอกถึงเหตุการณ์การเกิดจำนวนเต็ม 0 เช่น ผึ้งตึงหนึ่งตัวกับผึ้งรังหนึ่งตัวมาเจอกันก็สลายหายไป มีค่าเท่ากันทั้งสอง

4. ผลของการแสดงแทนที่เกิดจากการดำเนินการของจำนวนเต็ม (the operation of the integer) คือ เรื่องราวแลแผนภาพจะมีลักษณะที่เด่นชัดใดอย่างหนึ่ง หรือไม่มีเลยซึ่งแสดงความเป็นจำนวนเต็ม 0 ที่เกิดขึ้นจากการดำเนินการของจำนวนเต็ม เช่น มดดำหนึ่งตัวเจอกับมดดำสองตัวจะได้มดดำสามตัว หรือ มดดำสามตัวกับมดแดงสามตัวมาเจอกันก็สลายไปไม่เหลือมดสักตัว