

บทที่ 3

จลนศาสตร์การผ่อนคลายพลังงานของอิเล็กตรอน

สำหรับเนื้อหาในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีสำคัญ ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาจลนศาสตร์การผ่อนคลายพลังงานของอิเล็กตรอน (Kinetics of electron relaxation) และการคำนวณค่าอัตราการเพิ่มพูนของแสง (Spectral density of gain) ในหน่วยให้กำเนิดแสงของแหล่งกำเนิดเลเซอร์แบบควอนตัมคาสเคด โดยในส่วนแรกจะกล่าวถึงคำจำกัดความและความสำคัญของฟังก์ชันการแจกแจงพลังงานของอนุภาคนิตต่าง ๆ แล้วตามด้วยหลักการของการให้กำเนิดเลเซอร์ และกฎทองของเฟอร์มี (Fermi's golden rule) จากนั้นจึงจะกล่าวถึงการจำลองแบบเชิงจลนของการผ่อนคลายพลังงานของอิเล็กตรอน และหลักการคำนวณค่าอัตราการเพิ่มพูนแสงของอิเล็กตรอน (หรือโฮล) ในหน่วยให้กำเนิดแสงของแหล่งกำเนิดเลเซอร์แบบควอนตัมคาสเคด

3.1 ฟังก์ชันการแจกแจงพลังงานจลน์ (Kinetic energy distribution function)

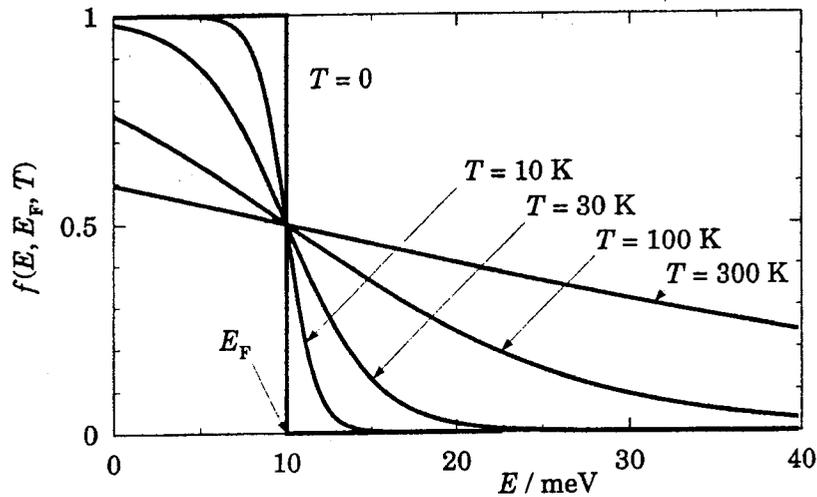
ฟังก์ชันการแจกแจงพลังงานจลน์ของอนุภาค คือความน่าจะเป็นที่จะพบอนุภาค ณ สถานะพลังงานจลน์ใด ๆ หรือพูดอีกนัยหนึ่งก็คือปริมาณที่ใช้ในการบ่งบอกถึงจำนวนอนุภาค โดยเฉลี่ยที่สามารถอยู่ในสถานะพลังงานจลน์ใด ๆ นั้นเอง โดยทั่วไปฟังก์ชันการแจกแจงของอนุภาคจะขึ้นอยู่กับธรรมชาติของอนุภาคนั้น ๆ ตัวอย่างเช่นอนุภาคเฟอร์มิออน (Fermion) ซึ่งเป็นอนุภาคที่มีสปิน (Spin) เป็นจำนวนครึ่งของจำนวนเต็ม (Half-integer) และเป็นไปตามหลักกีดกันของเพาลี (Pauli exclusion principle) โดยฟังก์ชันการแจกแจงของอนุภาคกลุ่มนี้จะมีลักษณะเป็นฟังก์ชันการแจกแจงแบบเฟอร์มี-ดิแรก (Fermi-Dirac distribution) [20] นั่นคือ

$$f(E; E_F, T) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right) + 1} \quad (3.1)$$

โดยที่ k_B คือ ค่าคงของโบลทซ์มาน (Boltzmann constant)
 E_F คือ ระดับพลังงานเฟอร์มี¹ (Fermi level)
 T คือ อุณหภูมิสัมบูรณ์ มีหน่วยเคลวิน (K)

¹ ระดับพลังงานเฟอร์มี (E_F) คือ ระดับพลังงานสูงสุดที่อิเล็กตรอนอยู่ได้ ณ อุณหภูมิ $T = 0\text{ K}$ และที่อุณหภูมิสูงขึ้น ($T \rightarrow \infty$) ฟังก์ชันการแจกแจงพลังงาน หรือความน่าจะเป็นที่จะพบอิเล็กตรอนที่ระดับ E_F จะมีค่าเป็น 0.5

สมการ (3.1) ใช้สำหรับอธิบายถึงค่าความน่าจะเป็นในการที่จะพบอนุภาคซึ่งมีสถานะพลังงานเป็น E ในระบบที่มีอุณหภูมิ $T > 0\text{ K}$



ภาพที่ 3.1 แผนภาพแสดงลักษณะฟังก์ชันการแจกแจงแบบเฟอร์มี-ดิแรก ณ อุณหภูมิ 0, 10, 30, 100 และ 300 K ที่มีระดับพลังงานเฟอร์มีคงตัวที่ $E_F = 10\text{ meV}$ [20]

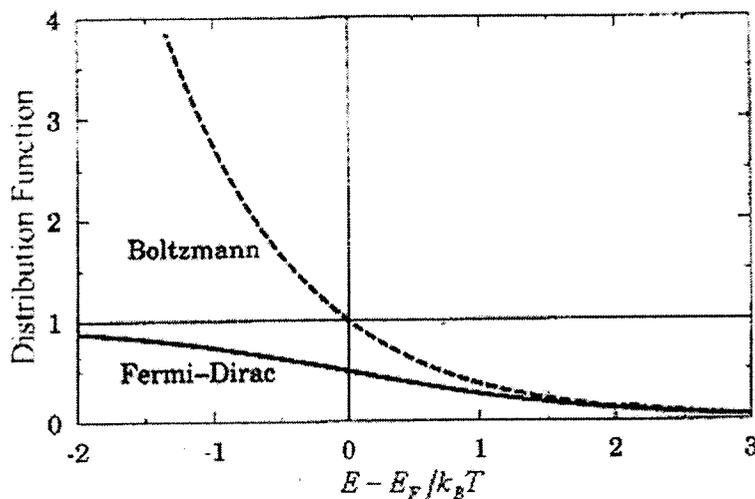
สำหรับในกรณีที่ระบบมีอุณหภูมิ $T = 0\text{ K}$ ฟังก์ชันการแจกแจงแบบเฟอร์มี-ดิแรก; $f(E; E_F, T = 0\text{ K})$ จะเขียนอยู่ในรูปของสมการ

$$f(E; E_F, T = 0\text{ K}) = \Theta(E_F^0 - E) \quad (3.2)$$

เมื่อพิจารณาจากภาพที่ 3.1 จะเห็นได้ว่ากรณีที่ระบบมีอุณหภูมิต่ำมาก ๆ กล่าวคือ $T \approx 0\text{ K}$ อิเล็กตรอนเกือบทั้งหมดจะครอบครองสถานะพลังงานที่มีค่าต่ำกว่า E_F ในขณะที่สถานะพลังงานที่สูงกว่า E_F เกือบจะว่างเปล่า และเนื่องจาก $\frac{E - E_F}{k_B T} \gg 1$ เมื่อ $T \approx 0\text{ K}$ ดังนั้นสมการ (3.1) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$f(E; E_F, T) \approx \exp\left(-\frac{E - E_F}{k_B T}\right) \quad (3.3)$$

ฟังก์ชันการแจกแจงพลังงานในสมการ (3.3) เรียกว่า ฟังก์ชันการแจกแจงแบบโบลทซ์มาน (Boltzmann distribution function) หรือฟังก์ชันการแจกแจงแบบแมกเวลล์เลียน (Maxwellian distribution function) ดังแสดงในภาพที่ 3.2 ซึ่งเป็นฟังก์ชันการแจกแจงพลังงานที่ใช้สำหรับอธิบายธรรมชาติของอนุภาคเชิงคลาสสิก (Classical particle) ตัวอย่างเช่นฟังก์ชันการแจกแจงพลังงานจลน์ของก๊าซ ชนิดต่าง ๆ เป็นต้น



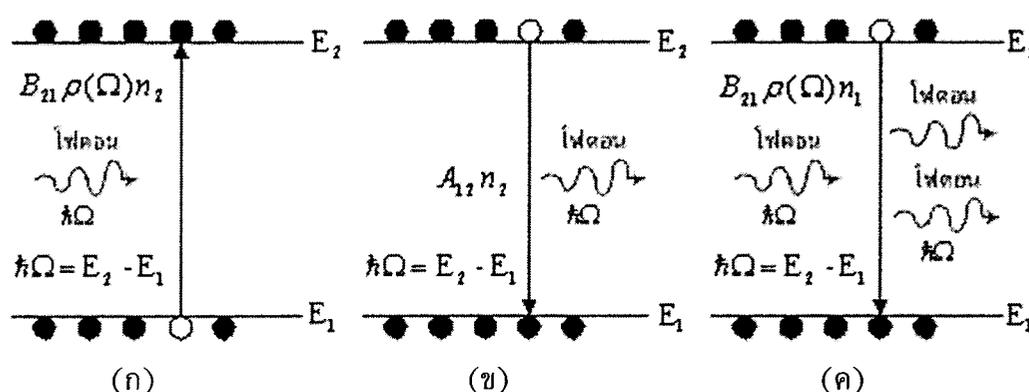
ภาพที่ 3.2 แผนภาพแสดงการเปรียบเทียบลักษณะฟังก์ชันการแจกแจงแบบเฟอร์มิ-ดิแรก กับฟังก์ชันการแจกแจงแบบแมกเวลเลียน ณ อุณหภูมิห้อง [20]

3.2 หลักการพื้นฐานของการให้กำเนิดเลเซอร์ [20]

คำว่า เลเซอร์ มาจากภาษาอังกฤษ คือ LASER ซึ่งเป็นคำย่อของ Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation หมายถึงการกำเนิดแสงแบบการขยายสัญญาณแสงโดยกระบวนการเปล่งแสงแบบถูกเร้า ดังนั้นกลไกพื้นฐานของเลเซอร์จึงได้แก่ การเปล่งแสงแบบถูกเร้า (Stimulated emission) และการขยายสัญญาณแสง (Light amplification) อย่างไรก็ตามในหัวข้อนี้จะกล่าวเฉพาะฟิสิกส์ของกระบวนการเปล่งแสงแบบถูกเร้าเท่านั้น

พิจารณาระบบอิเล็กตรอนที่อยู่ในสถานะพลังงาน 2 ระดับพลังงานที่แตกต่างกัน ดังแสดงในภาพที่ 3.3 ซึ่งโดยปกติอิเล็กตรอนส่วนใหญ่จะอยู่ที่สถานะพลังงานต่ำ (E_1) เพราะมีความเสถียรสูงกว่าเมื่ออยู่ที่สถานะพลังงานสูง (E_2) เมื่อมีการให้พลังงานแก่ระบบ ตัวอย่างเช่น โดยการฉายแสงที่มีพลังงานไม่น้อยกว่าผลต่างระหว่างระดับพลังงานทั้งสอง ($\hbar\Omega \geq E_2 - E_1$) อิเล็กตรอนจำนวนหนึ่งจะถูกกระตุ้นให้เปลี่ยนสถานะไปอยู่ที่ระดับพลังงาน E_2 ปรากฏการณ์เช่นนี้เรียกว่า การดูดกลืนแสง (Absorption) เมื่ออิเล็กตรอนอยู่ที่สถานะพลังงาน E_2 ซึ่งเป็นสถานะพลังงานที่ไม่เสถียร หลังจากเวลาผ่านไปช่วงระยะเวลาหนึ่งอิเล็กตรอนจะเปลี่ยนสถานะกลับมาอยู่ที่ระดับพลังงาน E_1 พร้อมกับคายพลังงานในรูปของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า หรือเปล่งแสงออกมา ปรากฏการณ์การเปล่งแสงในลักษณะเช่นนี้เรียกว่า การเปล่งแสงแบบเกิดขึ้นเอง (Spontaneous emission) ซึ่งโดยทั่วไปจะเกิดขึ้นได้ในอัตราที่ค่อนข้างต่ำ หรือมีกำลังงานต่ำ การคายพลังงานในรูปของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า หรือเปล่งแสงออกมานั้นยังมีอีกกระบวนการที่น่าสนใจคือ กระบวนการเปล่งแสงแบบถูกเร้า (Stimulated emission) ซึ่งเป็นกลไกสำคัญของแหล่งกำเนิดเลเซอร์ โดยกระบวนการนี้จะเกิดจากการที่อิเล็กตรอน ณ สถานะพลังงาน E_2 ถูกเร้า

ด้วยแสงซึ่งมีพลังงาน $\hbar\Omega$ ที่ฉายเข้าไปในระบบเป็นผลทำให้อิเล็กตรอนเกิดการคายพลังงานหรือเปล่งแสงออกมา โดยแสงที่เปล่งออกมาเนื่องจากกระบวนการนี้จะมีลักษณะเหมือนกับแสงเร้าทุกประการ กล่าวคือมีพลังงานเท่ากัน มีเฟสเหมือนกัน และเคลื่อนที่ในทิศทางเดียวกัน ซึ่งเป็นลักษณะพิเศษที่สำคัญของการให้กำเนิดแสงในแหล่งกำเนิดเลเซอร์โดยทั่วไป



ภาพที่ 3.3 แผนภาพแสดงกระบวนการให้กำเนิดแสงของอิเล็กตรอนระหว่างระดับพลังงาน E_1 และ E_2 (ก) การดูดกลืนแสง (ข) การเปล่งแสงแบบเกิดขึ้นเอง และ (ค) การเปล่งแสงแบบถูกเร้า

กระบวนการดูดกลืนแสง และกระบวนการเปล่งแสงดังที่กล่าวในข้างต้นสามารถอธิบายในเชิงฟิสิกส์ได้ด้วยวิธีของไอน์สไตน์ (Einstein method) ดังนี้คือ อัตราของการเปล่งแสงแบบถูกเร้าเป็นปฏิภาคโดยตรงกับความหนาแน่นของโฟตอนที่มีพลังงาน $\hbar\Omega$ ซึ่งในที่นี้จะแทนด้วย $\rho(\Omega)$ และเป็นปฏิภาคโดยตรงกับความหนาแน่นของอิเล็กตรอน ณ สถานะพลังงาน E_2 ในที่นี้แทนด้วย n_2 ดังนั้นอัตราของการเปล่งแสงแบบถูกเร้าของอิเล็กตรอนจึงมีค่าเป็น $B_{12}\rho(\Omega)n_2$ เมื่อ B_{12} คือค่าคงที่ของการเปล่งแสงแบบถูกเร้า ในทำนองเดียวกันอัตราของการดูดกลืนแสงของอิเล็กตรอนสามารถเขียนได้ในรูปของสมการ $B_{21}\rho(\Omega)n_1$ เมื่อ n_1 คือความหนาแน่นของอิเล็กตรอน ณ สถานะพลังงาน E_1 และ B_{21} คือค่าคงที่ของการดูดกลืนแสง ในส่วนของการเปล่งแสงแบบเกิดขึ้นเองนั้นค่าการเปล่งแสงจะเป็นปฏิภาคโดยตรงกับความหนาแน่นประชากรของอิเล็กตรอนในระดับพลังงาน E_2 เท่านั้น ดังนั้นสามารถเขียนอัตราของการเปล่งแสงแบบเกิดขึ้นเองได้เป็น $A_{12}n_2$ เมื่อ A_{12} คือค่าคงที่ของการเปล่งแสงแบบเกิดขึ้นเอง

ณ สถานะคงตัว (Steady state) ผลรวมอัตราของการเปล่งแสงแบบเกิดขึ้นเอง กับอัตราของการเปล่งแสงแบบถูกเร้ามีค่าเท่ากับอัตราของการดูดกลืนแสงของอิเล็กตรอน นั่นคือ

$$B_{21}\rho(\Omega)n_1 = A_{12}n_2 + B_{12}\rho(\Omega)n_2 \quad (3.4)$$

โดยที่ค่า A_{12} B_{12} และ B_{21} ในข้างต้นนี้ เรียกว่า สัมประสิทธิ์ไอน์สไตน์ (Einstein coefficients)

สำหรับที่สภาวะสมดุลทางความร้อน (Thermal equilibrium) อิเล็กตรอนมีฟังก์ชันการแจกแจงพลังงานเป็นแบบของโบลทซ์มาน และสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่าง n_1 กับ n_2 ได้ดังนี้

$$\frac{n_2}{n_1} = \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{k_B T}\right) = \exp\left(-\frac{\hbar\Omega}{k_B T}\right) \quad (3.5)$$

ในกรณีของโฟตอน จากกฎของพลังค์สามารถเขียนสมการเพื่อหาความหนาแน่นของแสงหรือโฟตอนได้ดังนี้

$$\rho(\Omega) = \left(\frac{2\hbar\Omega^3}{\pi c^3}\right) \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\Omega}{k_B T}\right) - 1} \quad (3.6)$$

ในที่นี้ c คือ อัตราเร็วของแสง

เมื่อทำการแทนค่าสมการ (3.5) และ (3.6) ลงในสมการ (3.4) จะได้ว่า

$$\left(\frac{\pi c^3}{2\hbar\Omega^3}\right) \frac{A_{12}}{B_{21}} \left[\exp\left(\frac{\hbar\Omega}{k_B T}\right) - 1\right] + \frac{B_{12}}{B_{21}} = \exp\left(\frac{\hbar\Omega}{k_B T}\right) \quad (3.7)$$

และเนื่องจากสมการ (3.7) เป็นจริงสำหรับทุกค่าอุณหภูมิ T ใด ๆ แสดงว่า

$$\left(\frac{\pi c^3}{2\hbar\Omega^3}\right) \frac{A_{12}}{B_{21}} = 1 \quad \text{และ} \quad \frac{B_{12}}{B_{21}} = 1 \quad (3.8)$$

และได้ว่า

$$\frac{\text{Stimulated emission rate}}{\text{Spontaneous emission rate}} = \frac{B_{12}\rho(\Omega)}{A_{12}} = \left(\frac{2\hbar\Omega^3}{\pi c^3}\right)\rho(\Omega) \quad (3.9)$$

$$\frac{\text{Stimulated emission rate}}{\text{Absorption rate}} = \frac{B_{12}\rho(\Omega)n_2}{B_{21}\rho(\Omega)n_1} = \frac{n_2}{n_1} \quad (3.10)$$

จากสมการ (3.10) ซึ่งให้เห็นว่าอัตราการเปล่งแสงแบบถูกเร้าจะมีค่าสูงกว่าอัตราของการดูดกลืนแสงก็ต่อเมื่อจำนวนอิเล็กตรอน ณ สถานะพลังงานสูง (n_2) มีค่ามากกว่าจำนวนอิเล็กตรอน ณ สถานะพลังงานต่ำ (n_1) ปรากฏการณ์ดังกล่าวนี้เรียกว่า *ปรากฏการณ์ประชากรผกผัน (Population inversion)* และจากสมการ (3.9) แสดงให้เห็นว่าอัตราการเปล่งแสงแบบถูกเร้าจะมีค่าสูงกว่าอัตราการเปล่งแสงแบบเกิดขึ้นเอง เมื่อมีการเพิ่มความหนาแน่นของโฟตอน $\rho(\Omega)$ ที่ใช้ในการกระตุ้น หลักการดังกล่าวนี้ถือเป็นหลักการสำคัญขั้นมูลฐาน (*Fundamental principle of lasing operation*) ของการให้กำเนิดเลเซอร์ ซึ่งถือได้ว่าเป็นปัจจัยสำคัญที่สุดต่อการพัฒนา และปรับปรุงประสิทธิภาพของแหล่งกำเนิดเลเซอร์ประเภทต่าง ๆ

3.3 กฎทองของเฟอร์มี [16] (Fermi's Golden Rule)

จากสมการชโรดิงเงอร์ที่ขึ้นกับเวลา (Time-dependent Schrödinger equation)

$$\hat{H}\Psi(\vec{r},t) = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t) \quad (3.11)$$

โดยที่ $\Psi(\vec{r},t)$ คือ ฟังก์ชันคลื่นของอิเล็กตรอนที่ขึ้นกับเวลา

\hat{H} คือ ฮามิลโตเนียน (Hamiltonian) ของระบบซึ่งสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'(\vec{r},t) \quad (3.12)$$

เมื่อ $\hat{H}'(\vec{r},t)$ คือ ฮามิลโตเนียนที่มีการรบกวน (Perturbed Hamiltonian) ซึ่งขึ้นกับเวลา และมีค่าน้อย ส่วน \hat{H}_0 คือฮามิลโตเนียนที่ไม่มีการรบกวน (Unperturbed Hamiltonian) ซึ่งไม่ขึ้นกับเวลา สำหรับฮามิลโตเนียนที่ไม่มีการรบกวน เรามี

$$\hat{H}_0\Phi_n(\vec{r},t) = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\Phi_n(\vec{r},t) \quad (3.13)$$

โดยที่

$$\Phi_n(\vec{r},t) = \phi_n(\vec{r})e^{-iE_n t/\hbar} \quad (3.14)$$

เมื่อ $\Phi_n(\vec{r},t)$ คือ ผลเฉลยของฟังก์ชันคลื่นที่ไม่มีการรบกวน

$\phi_n(\vec{r})$ คือ ฟังก์ชันเจาะจง (Eigen function)

และฮามิลโตเนียนที่มีการรบกวนที่ขึ้นกับเวลา สามารถเขียนได้ในรูป

$$\hat{H}'(\vec{r},t) = \begin{cases} \hat{H}'(\vec{r})e^{-i\omega t} + \hat{H}'(\vec{r})e^{+i\omega t} & ; \quad t \geq 0 \\ 0 & ; \quad t < 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการชโรดิงเงอร์ที่ขึ้นกับเวลาในสมการ (3.11) สามารถกระจายได้ในเทอมของ $\Phi_n(\vec{r},t)$ ได้ดังนี้

$$\Psi(\vec{r},t) = \sum_n a_n(t)\Phi_n(\vec{r},t) = \sum_n a_n(t)\phi_n(\vec{r})e^{-iE_n t/\hbar} \quad (3.16)$$

เมื่อ $|a_n(t)|^2$ คือ ความน่าจะเป็นที่จะพบอิเล็กตรอน ณ สถานะพลังงาน E_n ขณะเวลา t

แทนค่า $\Psi(\vec{r},t)$ จากสมการ (3.16) ลงในสมการ (3.15) แล้วใช้คุณสมบัติออร์โธนอร์มอลของ $\phi_n(r)$ กล่าวคือ $\int \phi_m^*(\vec{r})\phi_n(\vec{r})d^3r = \delta_{mn}$ จะได้ว่า

$$\sum_n \frac{da_n(t)}{dt} \phi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar} = -\frac{i}{\hbar} \sum_n \hat{H}'(\vec{r}, t) a_n(t) \phi_n(\vec{r}) e^{-iE_n t/\hbar} \quad (3.17)$$

$$\frac{da_n(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \sum_n a_n(t) H'_{mn}(t) e^{i\omega_{mn} t} \quad (3.18)$$

โดยที่

$$H'_{mn}(t) = \langle m | \hat{H}'(\vec{r}, t) | n \rangle = \int \phi_m^*(\vec{r}) \hat{H}'(\vec{r}, t) \phi_n(\vec{r}) d^3\vec{r} \quad (3.19)$$

$$= H'_{mn}^- e^{-i\omega_{mn} t} + H'_{mn}^+ e^{+i\omega_{mn} t} \quad (3.20)$$

$$\omega_{mn} = \frac{E_m - E_n}{\hbar} \quad (3.21)$$

และสามารถเขียนเมตริกซ์อิลิเมนต์ (Matrix element) ของ $\hat{H}'(\vec{r})$ ได้เป็น

$$H'_{mn} = \int \phi_m^*(\vec{r}) \hat{H}'(\vec{r}) \phi_n(\vec{r}) d^3\vec{r} \quad (3.22)$$

โดยอาศัยการประมาณด้วยวิธีเพอร์เทอเบชัน (Perturbation Method) จะได้ผลเฉลยอันดับศูนย์ (Zeroth order) เป็นค่าคงที่ กล่าวคือจะมีอิเล็กตรอนอยู่ในสถานะพลังงานเริ่มต้น E_i ที่ยังไม่มีการถูกรบกวน นั่นคือ

$$\left. \begin{aligned} a_i^{(0)}(t) &= 1 \\ a_m^{(0)}(t) &= 0 \quad m \neq i \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

และผลเฉลยอันดับหนึ่ง (First order) สามารถหาได้จาก

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} a_m^{(1)}(t) &= -\frac{i}{\hbar} H'_{mi}(t) e^{i\omega_{mi} t} \\ &= -\frac{i}{\hbar} \left(H'_{mi}^- e^{i(\omega_{mi}-\omega)t} + H'_{mi}^+ e^{i(\omega_{mi}+\omega)t} \right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

ถ้าให้ $m = f$ เป็นสถานะพลังงานของอิเล็กตรอนหลังการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากผลของการรบกวน ผลเฉลยของสมการ (3.24) และ $|a_f^{(1)}(t)|^2$ มีค่าดังนี้

$$a_f^{(1)}(t) = -\frac{1}{\hbar} \left(H'_{fi} e^{i(\omega_{fi}-\omega)t} \frac{-1}{\omega_{fi}-\omega} + H'_{fi}^+ e^{i(\omega_{fi}+\omega)t} \frac{-1}{\omega_{fi}+\omega} \right) \quad (3.25)$$

$$|a_f^{(1)}(t)|^2 = \frac{4|H'_{fi}|^2 \sin^2[(\omega_{fi}-\omega)t/2]}{\hbar^2 (\omega_{fi}-\omega)^2} + \frac{4|H'_{fi}|^2 \sin^2[(\omega_{fi}+\omega)t/2]}{\hbar^2 (\omega_{fi}+\omega)^2} \quad (3.26)$$

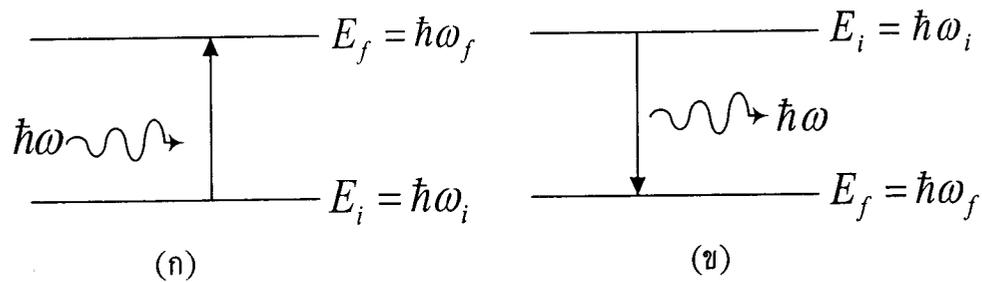
ในกรณีที่ $t \rightarrow \infty$ จะได้ว่า $\frac{\sin^2(tx/2)}{x^2} \rightarrow \frac{\pi}{2} \delta(x)$ ดังนั้นสมการ (3.26) สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$|a_f^{(1)}(t)|^2 = \frac{2\pi}{\hbar^2} |H'_{fi}|^2 \delta(\omega_{fi} - \omega) + \frac{2\pi}{\hbar^2} |H'_{fi}|^2 \delta(\omega_{fi} + \omega) \quad (3.27)$$

ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนสถานะ (Transition rates) ของอิเล็กตรอน $W_{i \rightarrow f} = \frac{d}{dt} |a_f^{(1)}(t)|^2$ สามารถเขียนได้เป็น

$$W_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |H'_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i - \hbar\omega) + \frac{2\pi}{\hbar} |H'_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i + \hbar\omega) \quad (3.28)$$

สมการ (3.28) เราเรียกว่า “กฎทองของเฟอร์มี (Fermi's Golden Rule)” [33] โดยเทอมแรก หมายถึงการเปลี่ยนสถานะของอิเล็กตรอนจากสถานะ E_i ไปยังสถานะ $E_f = E_i + \hbar\omega$ โดยการดูดกลืนพลังงาน ส่วนเทอมที่สอง หมายถึงการเปลี่ยนสถานะของอิเล็กตรอนจากสถานะ E_i ไปยังสถานะ $E_f = E_i - \hbar\omega$ โดยการคายพลังงาน ดังภาพที่ 3.4



ภาพที่ 3.4 แผนภาพแสดงการเปลี่ยนสถานะของอิเล็กตรอนจากสถานะ E_i ไปยังสถานะ E_f
 (ก) การดูดกลืนโฟตอนที่มีค่าพลังงาน $\hbar\omega$
 (ข) การปลดปล่อยโฟตอนที่มีค่าพลังงาน $\hbar\omega$

3.4 จลนศาสตร์การผ่อนคลายพลังงานของอิเล็กตรอน (Kinetics energy of electron relaxation)

การผ่อนคลายพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอน หมายถึง การเปลี่ยนสถานะพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนโดยการผ่อนคลายพลังงานของอิเล็กตรอนด้วยกระบวนการกระเจิงในรูปแบบต่าง ๆ โดยในงานวิจัยได้ศึกษากระบวนการกระเจิงที่สำคัญ ๆ ดังจะอธิบายได้ด้วยสมการเชิงจลน์ [21] ดังนี้

$$\frac{\partial f_i(\varepsilon_i)}{\partial t} = S_{LO}(\varepsilon_i) + C_{ee}(\varepsilon_i) + R_i(\varepsilon_i) + G_i(\varepsilon_i) \quad (3.29)$$

เมื่อ $f_i(\varepsilon_i)$ คือ ฟังก์ชันการแจกแจงพลังงานของอิเล็กตรอนที่มีพลังงานจลน์ ε_i
ในระดับพลังงานย่อย E_i

$S_{LO}(\varepsilon_i)$ คือ การกระเจิงของอิเล็กตรอนโดยโฟนอนในระดับพลังงานย่อย E_i

$C_{ee}(\varepsilon_i)$ คือ การกระเจิงระหว่างอิเล็กตรอนกับอิเล็กตรอนในระดับพลังงานย่อย E_i

$R_i(\varepsilon_i)$ คือ การหนีออกจากระดับพลังงานย่อย E_i ของอิเล็กตรอน

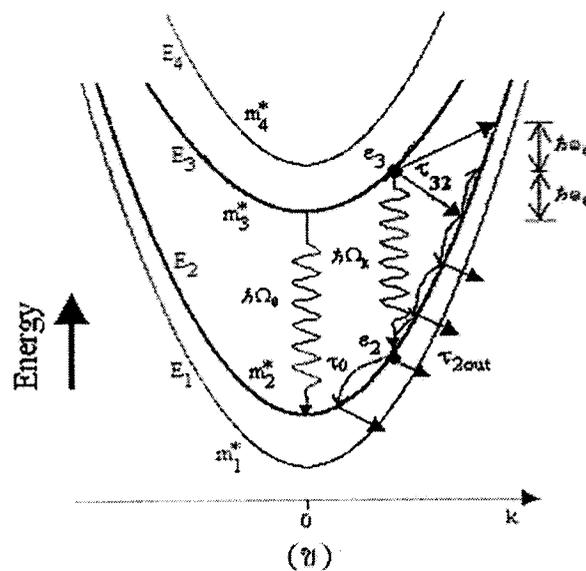
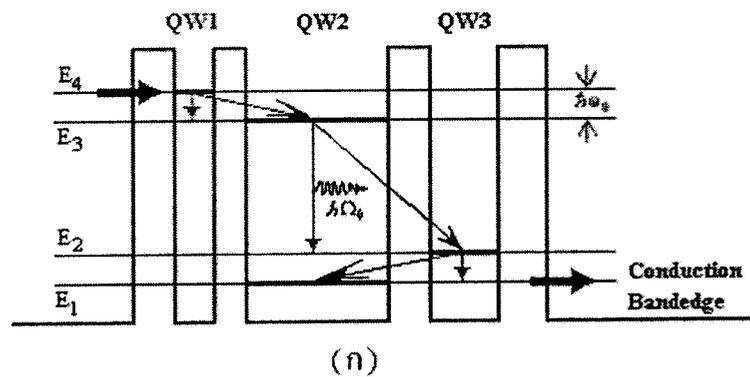
$G_i(\varepsilon_i)$ คือ การกำเนิดขึ้นของอิเล็กตรอนในระดับพลังงานย่อย E_i

$\varepsilon_i(k)$ คือ สถานะพลังงานจลน์ในระดับพลังงานย่อย E_i

พิจารณากรณีที่ $\varepsilon_i(k)$ ในระดับพลังงานย่อย E_i มีค่าเป็นดังนี้

$$\varepsilon_i(k) = E_i(k) - E_i(0) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_i^*} \quad (3.30)$$

ในที่นี้ $k \equiv |\vec{k}_{xy}| = |k_x \hat{e}_x + k_y \hat{e}_y|$ คือ ขนาดของเวกเตอร์คลื่นของอิเล็กตรอนในระนาบ xy
 m_i^* คือ มวลยังผลของอิเล็กตรอนในระดับพลังงานย่อย E_i



ภาพที่ 3.5 (ก) แผนภาพแสดงโครงสร้างที่ประกอบด้วยสามบ่อศักย์ ที่มี 4 ระดับพลังงานย่อยในแถบความนำไฟฟ้า

(ข) แผนภาพแสดงการผ่อนคลายพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอน

พิจารณาภาพที่ 3.5 (ก) แสดงโครงสร้างที่ประกอบด้วยสามบ่อศักย์ ที่มี 4 ระดับพลังงานย่อยในแถบความนำไฟฟ้าของระบบวัสดุสารกึ่งตัวนำ GaAs/AlGaAs และได้แสดงหน้าที่สำคัญหลัก ๆ ของแต่ละระดับพลังงานย่อย โดยที่ระดับพลังงานย่อย E_4 มีลักษณะเป็นแบบสถานะที่ไม่เสถียร (*Unstable states*) ทำหน้าที่หลักในการรับอิเล็กตรอนที่ได้จากการอัดฉีด (Pumping) อาจจะใช้กระบวนการทางแสง (Optical pumping) หรือโดยกระบวนการทางไฟฟ้า (Electrical pumping) ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับลักษณะการออกแบบเพื่อการนำไปใช้งานจริง โดยทั่วไปจะพยายามออกแบบโครงสร้างโดยรวม เพื่อให้ได้ช่วงชีวิต (Life time) ของอิเล็กตรอนในระดับพลังงานนี้สั้น ดังนั้นในกรณีนี้จึงออกแบบให้ระดับพลังงานย่อย E_4 มีพลังงานต่างจากระดับพลังงานย่อย E_3 ประมาณเท่ากับพลังงานของโฟนอนของโฟนอน $\hbar\omega_0$ ทั้งนี้เพื่อให้ให้อิเล็กตรอนในระดับพลังงานย่อย E_4 สามารถผ่อนคลายพลังงานโดยอาศัยโฟนอนเป็นตัวให้

หรือรับพลังงานแล้วเปลี่ยนสถานะมาอยู่ในระดับพลังงานย่อย E_3 โดยสถานะพลังงานย่อย E_3 นี้จะถูกออกแบบให้อยู่ใน *สภาวะกึ่งเสถียร* (Quasi-stable states) ทำหน้าที่หลักในการสะสมอิเล็กตรอนในช่วงเวลาหนึ่งจนกระทั่งระบบอยู่ในสภาวะประชากรผกผัน จึงมีการปลดปล่อยพลังงานออกมาในรูปของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า หรือแสง แล้วเปลี่ยนสถานะมาอยู่ที่ระดับพลังงาน E_2 หรือ E_1 ซึ่งถูกออกแบบให้อยู่ในสภาวะที่ไม่เสถียร เพื่อให้ง่ายต่อการที่จะทำให้สถานะพลังงานย่อยดังกล่าวมีที่ว่างพอที่จะให้อิเล็กตรอนที่ถูกสะสมไว้ในสถานะพลังงานย่อย E_3 สามารถปลดปล่อยแสงออกมาภายใต้กระบวนการผ่อนคลายพลังงานจลน์ หรือการเปลี่ยนสถานะพลังงานมาที่ระดับพลังงานย่อยต่ำสุดทั้งสองนี้ได้เป็นจังหวะอย่างต่อเนื่อง และระดับพลังงานย่อย E_1 มีหน้าที่หลักในการส่งผ่านอิเล็กตรอนที่ให้อำนาจแล้ว ไปยังหน่วยส่งผ่านอิเล็กตรอนที่อยู่ถัดกันไป ดังได้กล่าวในหัวข้อ 1.1

พิจารณาโครงสร้างแถบพลังงานของแหล่งกำเนิดเลเซอร์แบบ 4 ระดับพลังงานย่อย ดังแสดงภาพที่ 3.5 (ข) เมื่ออิเล็กตรอนที่ถูกอัดฉีดเข้าสู่ระบบ อิเล็กตรอนจะเปลี่ยนสถานะพลังงานโดยการแข่งขันด้วยกระบวนการกระเจิงแบบต่าง ๆ พิจารณาอิเล็กตรอนในระดับพลังงานย่อย E_3 ดังภาพที่ 3.5 (ข) อิเล็กตรอนจะสามารถเปลี่ยนระดับพลังงานโดยการรับ หรือคายพลังงานให้กับโฟนอนไปยังระดับพลังงาน E_2 โดยใช้เวลาเฉลี่ยในการเปลี่ยนระดับพลังงาน τ_{32} และเปลี่ยนสถานะพลังงานโดยการรับ หรือคายพลังงานให้กับโฟนอนในระดับพลังงาน E_2 ด้วยกัน โดยใช้เวลาเฉลี่ยในการเปลี่ยนสถานะพลังงาน τ_0 หรือหนีออกจากระดับพลังงาน E_2 โดยจะได้กล่าวรายละเอียดลำดับต่อไป

3.4.1 การกระเจิงระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอน (Electron-phonon scattering)

พิจารณาอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอน กับโฟนอน ซึ่งมีฮามิลโตเนียนของระบบ (\hat{H}) เป็นดังนี้คือ

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{ph} + \hat{H}_{e-ph} \quad (3.31)$$

เมื่อ \hat{H}_0 คือ ฮามิลโตเนียนของอิเล็กตรอนในโครงสร้างบ่อศักย์ดังภาพที่ 3.5 (ก)

\hat{H}_{ph} คือ ฮามิลโตเนียนของโฟนอนเมื่ออยู่ในสภาวะสมดุลทางความร้อน

\hat{H}_{e-ph} คือ ฮามิลโตเนียนของอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอน กับโฟนอน

โดยที่ \hat{H}_0 , \hat{H}_{ph} และ \hat{H}_{e-ph} สามารถเขียนแทนได้ด้วยสมการดังต่อไปนี้

$$\hat{H}_0 = \frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 + U(\vec{r}) \quad (3.32)$$

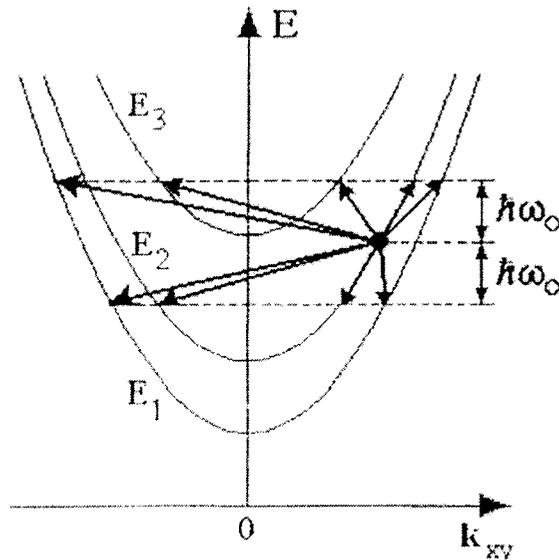
เมื่อ $U(\vec{r})$ คือ พลังงานศักย์ที่เกิดจากการออกแบบโครงสร้างในแถบนำไฟฟ้า

$m^*(\vec{r})$ คือ มวลยังผลของอิเล็กตรอน ณ ตำแหน่ง \vec{r} ใด ๆ

$$\hat{H}_{ph} = \sum_{\vec{q}} \hbar \omega_{\vec{q}} \left(a_{\vec{q}}^+ a_{\vec{q}} + \frac{1}{2} \right) \quad (3.33)$$

$$\hat{H}_{e-ph} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{q}} \alpha(\vec{q}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \left(a_{\vec{q}} e^{-i\omega t} + a_{-\vec{q}}^+ e^{i\omega t} \right) \quad (3.34)$$

ในที่นี้ $\vec{q} = \vec{Q} + \vec{q}_z$ คือ เวกเตอร์คลื่นของโฟนอน เมื่อ \vec{Q} และ \vec{q}_z คือ เวกเตอร์คลื่นของโฟนอนในระนาบ xy และเวกเตอร์คลื่นของโฟนอนในทิศทาง z ตามลำดับ
 $a_{\vec{q}}$ และ $a_{-\vec{q}}^+$ คือ ตัวดำเนินการหักล้าง และตัวดำเนินการเสริมสร้าง ตามลำดับ
 $\alpha(\vec{q})$ คือ ความแรงของการเปลี่ยนสถานะของอิเล็กตรอนเนื่องจากโฟนอน
 ω คือ ความถี่เชิงมุมของโฟนอน
 V คือ ปริมาตรสุทธิที่ใช้ในการนอร์มอลไลซ์



ภาพที่ 3.6 แผนภาพแสดงกระบวนการกระเจิงของอิเล็กตรอนกับโฟนอนภายใต้เงื่อนไขของการอนุรักษ์พลังงาน และโมเมนตัมในระนาบ xy [20]

พิจารณาการกระเจิงของอิเล็กตรอน 1 ตัว จากสถานะเริ่มต้น $|m, k_{xy}^i\rangle$ ในระดับพลังงานที่ m ไปยังทุกสถานะสุดท้าย $|n, k_{xy}^f\rangle$ ในระดับพลังงานที่ n โดยการรับ หรือคายพลังงาน ($\hbar\omega_0$) ให้กับโฟนอน ดังที่แสดงในภาพที่ 3.6 จากกฎทองของเฟอร์มีจะได้อัตราการกระเจิงของอิเล็กตรอนเนื่องจากโฟนอนในกรณีดังกล่าวนี้มีค่าเป็น [20]

$$W_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} \int \left| \langle n, k_{xy}^f | \hat{H}_{e-ph} | m, k_{xy}^i \rangle \right|^2 \delta(E_i - E_f \pm \hbar\omega) dN_f \quad (3.35)$$

ดังนั้นเทอม $S_{LO}(\varepsilon_i)$ ในสมการ (3.29) ซึ่งหมายถึงการกระเจิงระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอนในระดับพลังงานย่อย E_i จึงสามารถเขียนได้ในรูปสมการ

$$S_{LO}(\varepsilon_i) = \left. \begin{aligned} &+W_{ii}(\varepsilon'_i \rightarrow \varepsilon_i)_{\text{absorption}} + W_{ii}(\varepsilon'_i \rightarrow \varepsilon_i)_{\text{emission}} \\ &-W_{ii}(\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon'_i)_{\text{absorption}} - W_{ii}(\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon'_i)_{\text{emission}} \\ &+W_{ij}(\varepsilon'_j \rightarrow \varepsilon_i)_{\text{absorption}} + W_{ij}(\varepsilon'_j \rightarrow \varepsilon_i)_{\text{emission}} \\ &-W_{ji}(\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon'_j)_{\text{absorption}} - W_{ji}(\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon'_j)_{\text{emission}} \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

โดยที่

$$W_{ii}(\varepsilon'_i \rightarrow \varepsilon_i)_{\text{absorption}} = \frac{1}{\tau_0} \times N_0 \cdot \Theta(\varepsilon_i - \hbar\omega_0) \cdot f_i(\varepsilon_i - \hbar\omega_0) \cdot [1 - f_i(\varepsilon_i)] \quad (\text{ก})$$

$$W_{ii}(\varepsilon'_i \rightarrow \varepsilon_i)_{\text{emission}} = \frac{1}{\tau_0} \times (N_0 + 1) \cdot f_i(\varepsilon_i + \hbar\omega_0) \cdot [1 - f_i(\varepsilon_i)] \quad (\text{ข})$$

$$W_{ii}(\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon'_i)_{\text{absorption}} = \frac{1}{\tau_0} \times N_0 \cdot f_i(\varepsilon_i) \cdot [1 - f_i(\varepsilon_i + \hbar\omega_0)] \quad (\text{ค})$$

$$W_{ii}(\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon'_i)_{\text{emission}} = \frac{1}{\tau_0} \times (N_0 + 1) \cdot \Theta(\varepsilon_i - \hbar\omega_0) \cdot f_i(\varepsilon_i) \cdot [1 - f_i(\varepsilon_i - \hbar\omega_0)] \quad (\text{ง})$$

$$W_{ij}(\varepsilon'_j \rightarrow \varepsilon_i)_{\text{absorption}} = \sum_{j \neq i} \frac{1}{\tau_{ij}} \times N_0 \cdot [1 - f_i(\varepsilon_i)] \cdot \left\{ f_j(\varepsilon_i + \Delta_{ij} - \hbar\omega_0) \cdot \Theta(i - j) + f_j(\varepsilon_i - \Delta_{ij} - \hbar\omega_0) \cdot \Theta(\varepsilon_i - \Delta_{ij} - \hbar\omega_0) \cdot \Theta(j - i) \right\} \quad (\text{จ})$$

$$W_{ij}(\varepsilon'_j \rightarrow \varepsilon_i)_{\text{emission}} = \sum_{j \neq i} \frac{1}{\tau_{ij}} \times (N_0 + 1) \cdot [1 - f_i(\varepsilon_i)] \cdot \left\{ f_j(\varepsilon_i + \Delta_{ij} + \hbar\omega_0) \cdot \Theta(i - j) + f_j(\varepsilon_i - \Delta_{ij} + \hbar\omega_0) \cdot \Theta(\varepsilon_i - \Delta_{ij} + \hbar\omega_0) \cdot \Theta(j - i) \right\} \quad (\text{ฉ})$$

$$W_{ji}(\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon'_j)_{\text{absorption}} = \sum_{j \neq i} \frac{1}{\tau_{ij}} \times N_0 \cdot f_i(\varepsilon_i) \cdot \left\{ [1 - f_j(\varepsilon_i + \Delta_{ij} + \hbar\omega_0)] \cdot \Theta(i - j) + [1 - f_j(\varepsilon_i - \Delta_{ij} + \hbar\omega_0)] \cdot \Theta(\varepsilon_i - \Delta_{ij} + \hbar\omega_0) \cdot \Theta(j - i) \right\} \quad (\text{ช})$$

$$W_{ji}(\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon'_j)_{\text{emission}} = \sum_{j \neq i} \frac{1}{\tau_{ij}} \times (N_0 + 1) \cdot f_i(\varepsilon_i) \cdot \left\{ [1 - f_j(\varepsilon_i + \Delta_{ij} - \hbar\omega_0)] \cdot \Theta(i - j) + [1 - f_j(\varepsilon_i - \Delta_{ij} - \hbar\omega_0)] \cdot \Theta(\varepsilon_i - \Delta_{ij} - \hbar\omega_0) \cdot \Theta(j - i) \right\} \quad (\text{ซ})$$

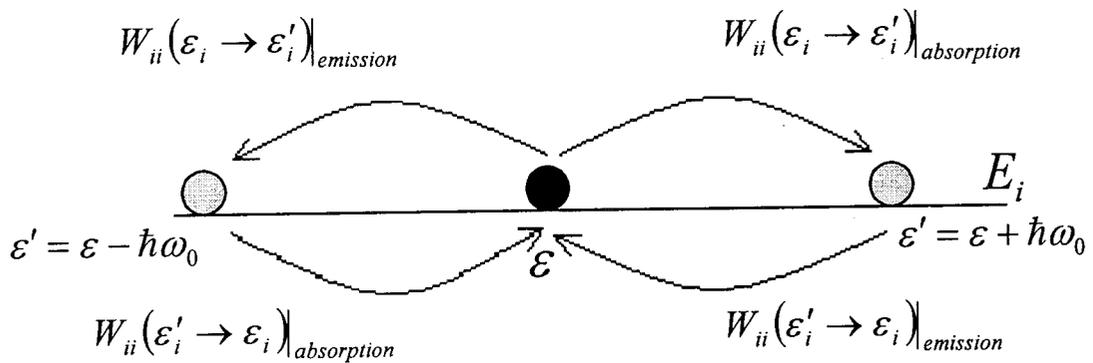
ในที่นี้ τ_0 คือ เวลาเฉลี่ยของการให้ หรือรับพลังงานของอิเล็กตรอนจากโฟนอนในระดับพลังงานย่อยเดียวกัน

τ_{ij} คือ เวลาเฉลี่ยของการให้ หรือรับพลังงานของอิเล็กตรอนจากโฟนอนระหว่างระดับพลังงานย่อยที่ i กับ j

N_0 คือ ฟังก์ชันการแจกแจงพลังงานของโฟนอนที่สภาวะสมดุลเชิงความร้อน

$$\Delta_{ij} = |E_i(0) - E_j(0)|$$

$$\text{และ } \Theta(x) = \begin{cases} 1 & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$$



ภาพที่ 3.7 แผนภาพแสดงการกระเจิงระหว่างอิเล็กตรอนที่อยู่ ณ สถานะพลังงาน ε ในระดับพลังงานย่อย E_i กับโฟนอนที่มีพลังงาน $\hbar\omega_0$ ทำให้อิเล็กตรอนเปลี่ยนสถานะพลังงานไปยัง ε' ในระดับพลังงานย่อย E_i เดียวกัน

พิจารณาอิเล็กตรอนที่อยู่ ณ สถานะพลังงานจลน์ ε ในระดับพลังงานย่อย E_i ดังภาพที่ 3.7 อิเล็กตรอนจะมีโอกาสเปลี่ยนสถานะพลังงานจลน์ไปยังสถานะพลังงานจลน์ ε' ในระดับพลังงานย่อย E_i เดียวกัน ได้โดยการรับพลังงานจากโฟนอน $\hbar\omega_0$ ด้วยอัตราการกระเจิง $W_{ii}(\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon'_i)_{absorption}$ ดังสมการ (3.36ค) ซึ่งจะทำให้อิเล็กตรอนอยู่ในสภาวะที่ไม่เสถียร จึงทำให้อิเล็กตรอนมีโอกาสดูดพลังงานให้กับโฟนอนมาอยู่สถานะพลังงานจลน์ ε เดิมด้วยอัตราการกระเจิง $W_{ii}(\varepsilon'_i \rightarrow \varepsilon_i)_{emission}$ ดังสมการ (3.36ข) สำหรับกรณีที่อิเล็กตรอนมีพลังงานจลน์สะสมเท่ากับพลังงานของโฟนอน $\hbar\omega_0$ ในสถานะพลังงานจลน์ ε อิเล็กตรอนจะคายพลังงานให้กับโฟนอนแล้วเปลี่ยนสถานะพลังงานไปยังสถานะพลังงานจลน์ ε' ที่มีสถานะพลังงานจลน์ต่ำกว่า ε ในระดับพลังงานย่อย E_i เดียวกันด้วยอัตราการกระเจิง $W_{ii}(\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon'_i)_{emission}$ ดังสมการ (3.36ง) และอธิบายได้ในทำนองเดียวกันสำหรับการเปลี่ยนสถานะพลังงานจลน์ ε' ที่มีสถานะพลังงานจลน์ต่ำกว่า ε มายังสถานะพลังงานจลน์ ε ดังสมการ (3.36ก)

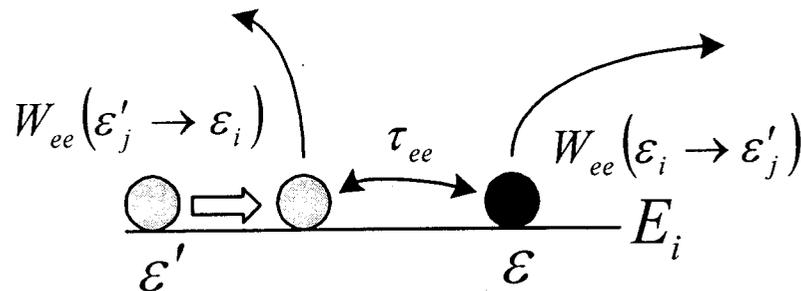
สำหรับกรณีที่มีอิเล็กตรอนเปลี่ยนสถานะพลังงานจลน์ ε ในระดับพลังงานย่อย E_i ไปยังสถานะพลังงานจลน์ ε' ในระดับพลังงานย่อย E_j ดังสมการ (3.36จ-ข) สามารถอธิบายได้ในทำนองเดียวกันกับการเปลี่ยนสถานะพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนในระดับพลังงานย่อยเดียวกัน แต่อิเล็กตรอนจะต้องได้รับ หรือคายพลังงานที่มีค่าเท่ากับผลต่างของพลังงานในแต่ละระดับพลังงานที่มีการเปลี่ยนสถานะพลังงาน ซึ่งจะปรากฏเทอมของ Δ_{ij} ดังในสมการ (3.36จ-ข)

3.4.2 การกระเจิงระหว่างอิเล็กตรอนกับอิเล็กตรอน (Electron-electron scattering)

พิจารณาเทอม $C_{ee}(\varepsilon_i)$ ซึ่งเป็นการกระเจิงระหว่างอิเล็กตรอนกับอิเล็กตรอน และสามารถเขียนแทนได้ด้วยสมการทั่วไปในรูปของอินทิกรัล [21] ดังนี้

$$C_{ee}(\varepsilon_i) = \int d\varepsilon'_j \rho_j(\varepsilon'_j) [W_{ee}(\varepsilon'_j \rightarrow \varepsilon_i) f_i(\varepsilon'_j) - W_{ee}(\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon'_j) f_i(\varepsilon_i)] \quad (3.37)$$

โดยที่ $\rho_j(\varepsilon_j) = \frac{m_j^*}{\pi \hbar^2}$ คือ ความหนาแน่นสถานะในระดับพลังงานย่อย E_j



ภาพที่ 3.8 แผนภาพแสดงการกระเจิงระหว่างอิเล็กตรอนที่อยู่ ณ สถานะพลังงาน ε กับอิเล็กตรอนที่เคลื่อนที่มาจากสถานะพลังงาน ε' โดยใช้เวลาเฉลี่ย τ_{ee} ในการผ่อนคลายพลังงาน

ภาพที่ 3.8 อธิบายเหตุการณ์ในสมการ (3.37) โดยพิจารณาอิเล็กตรอนที่อยู่ ณ สถานะพลังงาน ε ในระดับพลังงานย่อย E_i เมื่อมีอิเล็กตรอนจากสถานะพลังงาน ε' ในระดับพลังงานย่อย E_j พอดีจะผ่อนคลายพลังงานกับอิเล็กตรอนที่อยู่ ณ สถานะพลังงาน ε ด้วยอัตราการกระเจิง $W_{ee}(\varepsilon'_j \rightarrow \varepsilon_i)$ โดยใช้เวลาเฉลี่ย τ_{ee} ในการผ่อนคลายพลังงาน ทำให้อิเล็กตรอนที่อยู่ ณ สถานะพลังงาน ε เปลี่ยนสถานะพลังงานด้วยอัตราการกระเจิง $W_{ee}(\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon'_j)$ ไปยังสถานะพลังงาน ε' ใด ๆ ในระดับพลังงานย่อยเดียวกัน (สำหรับกรณี $i = j$) หรือระดับพลังงานย่อยอื่น ๆ (สำหรับกรณี $i \neq j$)

สำหรับการคำนวณจำเป็นต้องทำการแปลงสมการ (3.37) ให้อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ดังเช่นสมการเชิงจลน์ (3.29) โดยใช้การประมาณของ Fökker-Plack-Landau (FPL) จะได้ว่า

$$C_{ee}(\varepsilon_i) = -\frac{1}{\rho_i(\varepsilon_i)} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_i} [\rho_i(\varepsilon_i) J_{ee}(\varepsilon_i)] = -\frac{\partial}{\partial \varepsilon_i} J_{ee}(\varepsilon_i) \quad (3.38)$$

เมื่อ $J_{ee}(\varepsilon_i)$ คือ ฟลักซ์พลังงาน (Energy flux) ของอิเล็กตรอน

โดยที่

$$J_{ee}(\varepsilon_i) = -\left[A_{ee}(\varepsilon_i) + D_{ee}(\varepsilon_i) \frac{\partial}{\partial \varepsilon_i} \right] f_i(\varepsilon_i) \quad (3.39)$$

$$A_{ee}(\varepsilon_i) = \int_0^{\infty} d\varepsilon'_i \rho_i(\varepsilon'_i) (\varepsilon_i - \varepsilon'_i) W_{ee}(\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon'_i) \quad (3.40)$$

$$D_{ee}(\varepsilon_i) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\varepsilon'_i \rho_i(\varepsilon'_i) (\varepsilon_i - \varepsilon'_i)^2 W_{ee}(\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon'_i) \quad (3.41)$$

ในที่นี้ $A_{ee}(\varepsilon_i)$ คือ สัมประสิทธิ์ความเสียดทานเชิงพลวัต (Dynamic friction coefficients)

$D_{ee}(\varepsilon_i)$ คือ สัมประสิทธิ์การแพร่ของพลังงาน (Energy diffusion coefficients)

จากสมการ (3.37)-(3.41) สามารถเขียน $C_{ee}(\varepsilon_i)$ ให้อยู่ในรูปแบบที่สะดวกต่อการนำไปใช้งานได้ [21] ดังนี้

$$C_{ee}(\varepsilon_i) = \frac{\hbar \omega_0}{\tau_{ee}} \cdot \left[\frac{d}{d\varepsilon_i} + k_B T_e \frac{d^2}{d\varepsilon_i^2} \right] \cdot f_i(\varepsilon_i) \quad ; \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.42)$$

ในที่นี้ $T_e = \frac{D_{ee}(\varepsilon_i)}{k_B A_{ee}(\varepsilon_i)}$ คือ อุณหภูมิของอิเล็กตรอน (โดยทั่วไปมีค่าประมาณเท่ากับ

อุณหภูมิของโฟนอน หรืออุณหภูมิใช้งานของแหล่งกำเนิดเลเซอร์)

พิจารณาการกระเจิงของอิเล็กตรอนกับอิเล็กตรอนในบริเวณที่มีขนาดของเวกเตอร์คลื่นของอิเล็กตรอนมีค่าน้อย ($k \rightarrow 0$) พบว่าอัตราการกระเจิงระหว่างอิเล็กตรอนกับอิเล็กตรอนมีค่าน้อยมาก หรืออาจกล่าวได้ว่าสำหรับอิเล็กตรอนที่มีขนาดของเวกเตอร์คลื่น $k < k_{\min}$ จะไม่เกิดการกระเจิงเนื่องจากอิเล็กตรอนกับอิเล็กตรอนด้วยกัน ในที่นี้ k_{\min} คือ ขนาดของเวกเตอร์คลื่นที่น้อยที่สุดที่มีการกระเจิงของอิเล็กตรอนกับอิเล็กตรอนด้วยกัน แต่ในกรณีที่ $k > k_{\min}$ จะพบการกระเจิงของอิเล็กตรอนเนื่องจากอิเล็กตรอนกับอิเล็กตรอน แล้วมีการเปลี่ยนสถานะพลังงานได้ด้วยอัตราการกระเจิงที่สูงขึ้น ในกรณีที่ระดับพลังงานย่อยของระบบมีค่าแตกต่างกันมากพอ

พบว่า อัตราการกระเจิงระหว่างอิเล็กตรอนกับอิเล็กตรอนแล้วทำให้อิเล็กตรอนดังกล่าวมีการเปลี่ยนสถานะไปอยู่ที่ระดับพลังงานย่อยอันใหม่ (Inter-subband electron-electron scattering) มีค่าต่ำกว่าอัตราการกระเจิงระหว่างอิเล็กตรอนกับอิเล็กตรอนแล้วทำให้อิเล็กตรอนดังกล่าวยังคงอยู่ที่ระดับพลังงานย่อยเดิม (Intra-subband electron-electron scattering) จากผลดังกล่าวนี้จึงทำให้สามารถละทิ้งผลที่เกิดจากกระบวนการกระเจิงระหว่างอิเล็กตรอน กับอิเล็กตรอนแล้ว ทำให้อิเล็กตรอนเปลี่ยนระดับพลังงานออกไปได้ และเนื่องจากที่สถานะพลังงานจลน์สูง ๆ ($\varepsilon_i \gg T_e$) ค่าสัมประสิทธิ์ $A_{ee}(\varepsilon_i)$ จะมีค่าคงตัว และมีค่าประมาณได้ดังสมการ

$$A_{ee}(\varepsilon_i) \equiv A_{ee} = \left(\frac{e^4}{32\hbar^2 \varepsilon_0^2 \kappa_\infty^2} \right) n_s = \frac{\hbar \omega_0}{\tau_{ee}} \quad (3.43)$$

เมื่อ $n_s = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ คือ ความหนาแน่นของอิเล็กตรอนที่เกิดจากการอัดฉีดอิเล็กตรอนเข้าสู่ระบบ (Pumping)

τ_{ee} คือ เวลาเฉลี่ยของการให้ หรือรับพลังงานระหว่างอิเล็กตรอน กับ อิเล็กตรอน

สำหรับในโครงสร้างควอนตัมเวลล์ของระบบวัสดุ GaAs/AlGaAs พบว่าอัตราส่วนของเวลาเฉลี่ยที่ใช้สำหรับกระบวนการกระเจิงระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอน กับเวลาเฉลี่ยที่ใช้สำหรับกระบวนการกระเจิงระหว่างอิเล็กตรอนกับอิเล็กตรอน มีค่าประมาณได้ดังสมการ [20]

$$\frac{\tau_0}{\tau_{ee}} = \left(\frac{\tau_0 e^4}{32\hbar^2 \omega_0 \varepsilon_0^2 \kappa_\infty^2} \right) n_s = \frac{n_s}{3.84 \times 10^{11} \text{ cm}^{-2}} \quad (3.44)$$

สำหรับงานวิจัยนี้ จะทำการศึกษาระบบที่มีความหนาแน่นของอิเล็กตรอนซึ่งมีค่าไม่เกิน $5.0 \times 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ เนื่องจากในการจำลองแบบที่ใช้ในการคำนวณนี้ไม่ได้คำนึงถึงผลเนื่องจากการบังกันของอิเล็กตรอน (Screen-coulomb effect) ในระบบ [14]

3.4.3 การหนีออกจากระดับพลังงานย่อยของอิเล็กตรอน (Electron escape from the subband)

สำหรับเทอม $R_i(\varepsilon_i)$ ในสมการ (3.29) ซึ่งหมายถึง อัตราการหนีออกจากระดับพลังงานย่อย E_i ของอิเล็กตรอน (ดูภาพที่ 3.3 ประกอบ) โดยทั่วไปสามารถเขียนแทนได้ด้วยสมการ

$$R_i(\varepsilon_i) = -\frac{f_i(\varepsilon_i)}{\tau_{out}} \quad \text{โดยที่ } i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.45)$$

ในที่นี้ τ_{out} คือช่วงเวลาที่อิเล็กตรอนหนีออกจากระดับพลังงานย่อยใด ๆ ซึ่งมีค่าขึ้นอยู่กับลักษณะของการกระเจิงในรูปแบบต่าง ๆ โดยในงานวิจัยนี้จะพิจารณากรณีที่อิเล็กตรอนหนีออก

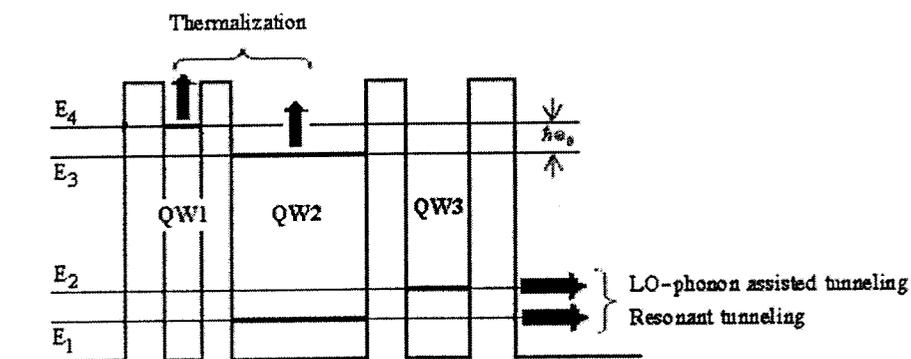
จากแต่ละระดับพลังงานย่อยเนื่องจากกระบวนการเรโซแนนซ์ทันเนลลิง (Resonant tunneling), กระบวนการทันเนลลิงโดยอาศัยโฟนอน (LO-phonon assisted tunneling) และกระบวนการเทอร์มอลไลเซชัน (Thermalization process) ดังแสดงในภาพที่ 3.9 ซึ่งเมื่อทำการรวมผลของการหนี้ออกจากระดับพลังงานย่อยเนื่องจากกระบวนการกระเจิงทั้งหมดที่เป็นไปได้ดังกล่าวนี้ จะได้ว่า

$$R_i(\varepsilon_i) = - \left[\left(\frac{(2N_0 + 1)}{\tau_{LO-tunneling}} \right)_i + \frac{1}{\tau_{res-tunneling}} \right] \cdot (\delta_{i,1} + \delta_{i,2}) + \frac{1}{\tau_{thermalization}} \cdot (\delta_{i,3} + \delta_{i,4}) \cdot f_i(\varepsilon_i) \quad (3.46)$$

เมื่อ $\tau_{Lo-tunneling}$ คือ ช่วงเวลาที่อิเล็กตรอนทะลุผ่านระหว่างบ่อศักย์เนื่องจากการให้ หรือ รับพลังงานจากโฟนอน

$\tau_{res-tunneling}$ คือ ช่วงเวลาที่อิเล็กตรอนทะลุผ่านระหว่างบ่อศักย์เนื่องจากมีระดับพลังงานที่ตรงกัน

$\tau_{thermalization}$ คือ ช่วงเวลาที่อิเล็กตรอนหนี้ออกจากบ่อศักย์เนื่องจากได้รับพลังงานจากความร้อน



ภาพที่ 3.9 แผนภาพแสดงการที่อิเล็กตรอนหนี้ออกจากระดับพลังงานย่อย E_1 กับ E_2 ด้วยกระบวนการทันเนลลิงโดยอาศัยโฟนอน และกระบวนการเรโซแนนซ์ทันเนลลิง พร้อมทั้งการที่อิเล็กตรอนหนี้ออกจากระดับพลังงานย่อย E_3 กับ E_4 ด้วยกระบวนการเทอร์มอลไลเซชัน

โดยทั่วไปค่า $\tau_{Lo-tunneling}$ และ $\tau_{res-tunneling}$ จะมีค่าขึ้นกับลักษณะของโครงสร้างควอนตัมเวลล์ ตัวอย่างเช่นในโครงสร้างควอนตัมเวลล์ของระบบวัสดุ $GaAs/Al_xGa_{1-x}As$ ค่าของ $\tau_{Lo-tunneling}$ มีค่าอยู่ในช่วง 0.4-1.0 ps ในขณะที่ $\tau_{res-tunneling}$ อยู่ในช่วง 0.1-0.4 ps สำหรับ $\tau_{thermalization}$ มีค่าอยู่ในช่วง 6.0-10.0 ps ขึ้นอยู่กับความแตกต่างของระดับพลังงานย่อยในบ่อศักย์กับสถานะพลังงานที่ต่อเนื่อง [26-27] (Continuum states ซึ่งเป็นสถานะพลังงานที่อยู่สูงกว่าบ่อศักย์)

3.4.4 การกำเนิดขึ้นของอิเล็กตรอน

(Electron generation process)

สำหรับเทอม $G_i(\varepsilon_i)$ ในสมการ (3.29) ซึ่งหมายถึงอัตราการกำเนิดขึ้นของอิเล็กตรอนแรกเริ่มในระดับพลังงานย่อย E_i โดยเกิดจากการอัดฉีดอิเล็กตรอนจากภายนอก ดังที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อ 3.4 ในงานวิจัยนี้จะพิจารณาเฉพาะกรณีที่มีการกำเนิดขึ้นของอิเล็กตรอนแรกเริ่มในระดับพลังงานย่อย E_4 ดังแสดงในภาพที่ 3.5 (ก) ซึ่งอิเล็กตรอนที่กำเนิดขึ้นในระดับพลังงานย่อย E_3 , E_2 และ E_1 นั้น เกิดจากการเปลี่ยนสถานะพลังงานจากระดับพลังงาน E_4 ดังนั้น สามารถเขียนสมการอัตราการกำเนิดขึ้นของอิเล็กตรอนในระดับพลังงานย่อย E_4 ได้ดังนี้

$$G_4(\varepsilon_4) = -\frac{G_0}{\rho_4} \delta(\varepsilon_4 - \varepsilon_0) \quad (3.47)$$

โดยที่ $\rho_4(\varepsilon_4) = \frac{m_4^*}{\pi \hbar^2}$ คือ ความหนาแน่นสถานะในระดับพลังงานย่อย E_4

G_0 คือ อัตราการกำเนิดขึ้นของอิเล็กตรอนแรกเริ่มที่มีพลังงาน ε_0

หมายเหตุ: ในงานวิจัยนี้กำหนดให้ $G_i(\varepsilon_i) = 0$ สำหรับ $i = 1, 2, 3$

สมการ (3.47) เป็นการจำลองแบบระบบในอุดมคติเพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณ และการวิเคราะห์ผลในเชิงทฤษฎี อย่างไรก็ตามเราสามารถขยายผลของการคำนวณไปยังระบบซึ่งมีลักษณะของการกำเนิดขึ้นของอิเล็กตรอนแรกเริ่มแบบอื่นได้

3.5 สมการจลนศาสตร์ภายใต้สถานะคงตัว

(Kinetic equation at the steady state)

เมื่อทำการแทนค่าอัตราการกระเจิงของอิเล็กตรอนเนื่องจากกระบวนการต่าง ๆ ดังที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อ (3.4) ซึ่งได้แก่ $S_{LO}(\varepsilon_i)$, $C_{ee}(\varepsilon_i)$, $R_i(\varepsilon_i)$ และ $G_i(\varepsilon_i)$ จากสมการ (3.36ก-ข), (3.37), (3.46) และ (3.47) ตามลำดับ ลงในสมการจลนศาสตร์ภายใต้สถานะคงตัว คือ $\frac{\partial f_i(\varepsilon_i)}{\partial t} = 0$ ซึ่งหมายความว่า อิเล็กตรอนไม่มีการเปลี่ยนสถานะพลังงาน ณ เวลาที่พอดีให้กำเนิดโฟตอน

ทำให้สมการ (3.29) ภายใต้สถานะคงตัว [21] ได้ว่า

$$\frac{\hbar \omega_0}{\tau_{ee}} \left[\frac{d}{d\varepsilon_i} + k_B T_e \frac{d^2}{d\varepsilon_i^2} \right] f_i(\varepsilon_i) + S_{LO}(\varepsilon_i) + R_i(\varepsilon_i) + G_i(\varepsilon_i) = 0 \quad (3.48)$$

สมการ (3.48) เป็นสมการที่ใช้สำหรับคำนวณฟังก์ชันการแจกแจงพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนที่ระดับพลังงานย่อย E_i ใด ๆ ที่ $\hbar\omega_0$ คือ หนึ่งหน่วยพลังงานของโฟนอน ซึ่งมีความสำคัญในการจัดสมการให้อยู่ในรูปไม่มีหน่วย โดยสามารถดูรายละเอียดในภาคผนวก ข

สำหรับงานวิจัยนี้จะเน้นการวิเคราะห์ผลของลักษณะโครงสร้างควอนตัมเวลล์ ดังที่แสดงในภาพที่ 3.5 รวมถึงผลของความหนาแน่นของอิเล็กตรอนในระบบต่อลักษณะของฟังก์ชันการแจกแจงพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนในระบบ โดยมีวัตถุประสงค์หลักเพื่อหาลักษณะโครงสร้างที่เหมาะสมต่อการเกิดสภาวะประชากรผกผันซึ่งเป็นเงื่อนไขสำคัญต่อการให้กำเนิดเลเซอร์

3.6 อัตราการเพิ่มพูนของแสง (Spectral density of gain)

อัตราการเพิ่มพูนของแสง จะบอกถึงพลังงานของโฟตอนที่ได้จากโครงสร้าง ในงานวิจัยนี้ได้ทำการออกแบบระบบให้กำเนิดเลเซอร์แบบ 4 ระดับพลังงานย่อย ดังที่แสดงในภาพที่ 3.5 โดยเลเซอร์ที่เกิดขึ้นนั้นเกิดจากการเปลี่ยนสถานะของอิเล็กตรอนจากระดับพลังงานย่อย E_3 มายังระดับพลังงานย่อย E_2 ดังที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น ดังนั้นในการออกแบบโครงสร้างควอนตัมเวลล์เพื่อให้ได้เลเซอร์ดังกล่าว จำเป็นต้องคำนึงถึงลักษณะของโครงสร้างที่สามารถทำให้เกิดสภาวะประชากรผกผันระหว่างระดับพลังงานย่อย E_2 และ E_3 ถ้าพิจารณาการให้กำเนิดเลเซอร์ ณ สถานะคงตัว อัตราการเพิ่มพูนของแสง (Spectral density of gain) สามารถคำนวณได้จากค่าฟังก์ชันการแจกแจงพลังงานของอิเล็กตรอนซึ่งได้จากการคำนวณดังที่กล่าวไว้ข้างต้น ดังนี้ [21]

$$g(\Omega) = \frac{4e^2 |z_{23}|^2 m_3^* \Omega}{\hbar^3 L_2 c \sqrt{\epsilon_0 \kappa_\infty}} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\gamma(\varepsilon) [f_3(\varepsilon) - f_2(\varepsilon_2)]}{[\Omega - \Omega_k(\varepsilon)]^2 + [\gamma(\varepsilon)]^2} \quad (3.49)$$

เมื่อ	e	คือ ประจุของอิเล็กตรอน
	z_{23}	คือ ค่าไดโพลโมเมนต์ทางไฟฟ้า ซึ่งแสดงถึงความแรงในการเปลี่ยนสถานะของอิเล็กตรอน (Oscillation or transition strength) ระหว่างสถานะพลังงาน E_3 กับ E_2
	m_3^*	คือ มวลยังผลของอิเล็กตรอนในระดับพลังงานย่อย E_3
	κ_∞	คือ ค่าคงตัวไดอิเล็กตริกของวัสดุ
	ϵ_0	คือ ค่าเพอร์มิติวิตีของสุญญากาศ (Vacuum permittivity)
	L_2	คือ ความกว้างของ QW2

$\gamma(\varepsilon)$ คือ อัตราการผ่อนคลายพลังงานของอิเล็กตรอนในระดับพลังงานย่อย
 เดียวกันโดยในที่นี้จะคำนึงถึงเฉพาะผลอันเนื่องมาจากอันตรกิริยา
 ระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอน หรือที่เรียกว่า กระบวนการกระเจิง
 ระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอนในระดับพลังงานย่อยเดียวกัน
 (Intrasubband electron-LO-phonon scattering)

Ω คือ ความถี่เชิงมุมของโฟตอน
 (มีค่าอยู่ในช่วง $0 \text{ meV} < \hbar\Omega < 300 \text{ meV}$)

โดยที่

$$\hbar\Omega_k(\varepsilon) = \hbar\Omega_0 + \varepsilon - \varepsilon_2 = \hbar\Omega_0 - \varepsilon \left(\frac{m_3^*}{m_2^*} - 1 \right) \quad (3.50)$$

ในที่นี้กำหนดให้ $\hbar\Omega_0 = E_3(0) - E_2(0) = 155 \text{ meV}$

ในงานวิจัยนี้ ได้ทำการคำนวณค่าอัตราการเพิ่มพูนของแสงของโครงสร้างควอนตัมเวลล์
 ซึ่งเป็นส่วนประกอบของหน่วยให้กำเนิดเลเซอร์ที่มีสมบัติเฉพาะตัว กล่าวคือเป็นลักษณะ
 โครงสร้างที่สามารถกำหนดให้เทอม $\frac{4e^2|z_{23}|^2 m_3^* \Omega}{\hbar^3 L_2 c \sqrt{\varepsilon_0 \kappa_\infty}}$ ในสมการ (3.49) เป็นค่าคงตัว ดังนั้น
 สมการ (3.49) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$g(\Omega) = \int_0^\infty d\varepsilon \frac{[f_3(\varepsilon) - f_2(\varepsilon_2)]}{[\Omega - \Omega_k(\varepsilon)]^2 + [\gamma(\varepsilon)]^2} \quad (\text{Arbitrary Units}) \quad (3.51)$$

สำหรับขั้นตอน และระเบียบวิธีการคำนวณแสดงไว้ในภาคผนวก ข