

บทที่ 2

แหล่งกำเนิดเลเซอร์แบบควอนตัมคาสเคด

ในบทนี้จะกล่าวถึงประวัติความเป็นมาของการวิจัย และการพัฒนาแหล่งกำเนิดเลเซอร์แบบควอนตัมคาสเคด (Quantum Cascade Laser; QCL) ทั้งในเชิงทฤษฎี และเชิงปฏิบัติ รวมถึงความรู้พื้นฐานเชิงควอนตัมที่นำมาใช้ในการอธิบายพฤติกรรมของอนุภาคในโครงสร้างควอนตัมเวลล์ ซึ่งถือว่าเป็นโครงสร้างที่มีลักษณะพิเศษหลายอย่างที่เป็ประโยชน์ต่อการนำไปประยุกต์ใช้กับสิ่งประดิษฐ์สารกึ่งตัวนำที่มีระดับขนาดเล็กมาก (Microelectronic devices) โดยเฉพาะอย่างยิ่งในแหล่งกำเนิดเลเซอร์แบบควอนตัมคาสเคด เป็นสำคัญ

2.1 ประวัติ และความเป็นมาของแหล่งกำเนิดเลเซอร์แบบควอนตัมคาสเคด

Kazarinov และ Suris [1] ได้เสนอแนวความคิดเชิงทฤษฎีเกี่ยวกับแหล่งกำเนิดเลเซอร์สารกึ่งตัวนำชนิดใหม่ ซึ่งประกอบด้วยโครงสร้างควอนตัมเวลล์ที่มีความเป็นระเบียบยาวดิ่ง โดยมีหลักการสำคัญดังนี้คือการให้กำเนิดแสง หรือคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในแหล่งกำเนิดเลเซอร์ซึ่งประกอบด้วยโครงสร้างควอนตัมเวลล์นี้เกิดจากการที่อิเล็กตรอน (หรือโฮล) มีการเปลี่ยนสถานะพลังงานจากระดับพลังงานย่อยหนึ่ง (Subband energy) ไปยังอีกระดับพลังงานย่อยหนึ่งพร้อมกับปลดปล่อยพลังงานออกมาในรูปของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ซึ่งมีความยาวคลื่นไม่ขึ้นกับค่าช่องว่างระหว่างแถบพลังงาน แต่มีค่าขึ้นกับความแตกต่างระหว่างระดับพลังงานย่อยของอิเล็กตรอน (หรือโฮล) ในโครงสร้างบ่อศักย์นั้น ๆ และเนื่องจากเลเซอร์ดังกล่าวเกิดจากการเปลี่ยนสถานะระหว่างระดับพลังงานย่อยของอิเล็กตรอนในแถบความนำไฟฟ้า หรือโฮลในแถบวาเลนซ์เพียงชนิดใดชนิดหนึ่งเท่านั้น ดังนั้นจึงนิยมเรียกแหล่งกำเนิดเลเซอร์ชนิดใหม่นี้ว่า แหล่งกำเนิดเลเซอร์สารกึ่งตัวนำชนิดขั้วเดียว (Unipolar Lasers) อย่างไรก็ตามนับตั้งแต่ Kazarinov และ Suris ได้เสนอแนวความคิดเชิงทฤษฎีดังกล่าวก็ได้มีการวิจัย และพัฒนาเชิงทดลองอย่างต่อเนื่อง แต่ก็ไม่ประสบความสำเร็จในการประดิษฐ์แหล่งกำเนิดเลเซอร์ชนิดใหม่นี้ได้

จนกระทั่งปี ค.ศ. 1994 Faist และคณะ [3-5] สามารถประดิษฐ์แหล่งกำเนิดเลเซอร์แบบใหม่ได้เป็นผลสำเร็จ และเรียกแหล่งกำเนิดเลเซอร์ชนิดนี้ว่า แหล่งกำเนิดเลเซอร์แบบควอนตัมคาสเคด แหล่งกำเนิดเลเซอร์ที่ประดิษฐ์โดยนักวิจัยกลุ่มนี้ประกอบด้วยโครงสร้าง $Al_{0.48}In_{0.52}As/Ga_{0.47}In_{0.53}As$ ซึ่งทำหน้าที่เป็นหน่วยให้กำเนิดแสง และให้เลเซอร์ที่มีพลังงานประมาณ 295 meV (หรือมีความยาวคลื่นประมาณ 4.2 ไมโครเมตร) นอกจากนี้ยังสามารถปรับค่าความยาวคลื่นของเลเซอร์ดังกล่าวโดยการใส่สนามไฟฟ้าภายนอกให้กับโครงสร้างดังกล่าว ทำให้สามารถปรับค่าความคลื่นได้ถึง 8.4 ไมโครเมตร ซึ่งนับเป็นลักษณะพิเศษที่สำคัญอีกอย่างหนึ่ง

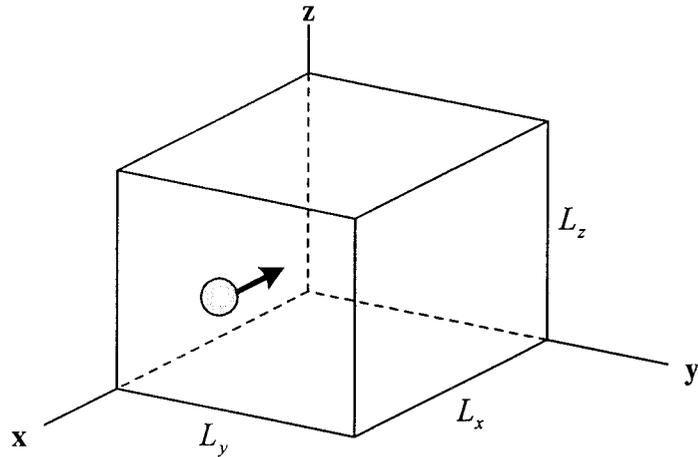
ของเลเซอร์ชนิดนี้ที่ทำให้ได้รับความสนใจอย่างกว้างขวาง ซึ่งได้นำไปสู่การศึกษาวิจัย และพัฒนา แหล่งกำเนิดเลเซอร์ชนิดใหม่นี้อย่างต่อเนื่อง ตัวอย่างเช่นการประดิษฐ์แหล่งกำเนิดเลเซอร์แบบควอนตัมคาสเคดที่มีความยาวคลื่น 14 ไมโครเมตร (88.6 meV) [8] โดยทำการปลูกฟิล์มบาง GaAs/AlGaAs ซึ่งประกอบเป็นโครงสร้างบ่อศักย์คู่ควบ ที่มี 3 ระดับพลังงานย่อย (E_1 , E_2 และ E_3) ในแถบความนำไฟฟ้า โดยมีการออกแบบระดับพลังงานย่อยดังกล่าว เพื่อให้ อิเล็กตรอนมีการเปลี่ยนสถานะจากระดับพลังงานย่อย E_3 ไปยังระดับพลังงานย่อย E_2 พร้อมกับปลดปล่อยโฟตอนออกมา ถ้าผลต่างพลังงานระหว่างระดับพลังงาน E_2 กับ E_1 (ΔE_{21}) มีค่าประมาณเท่ากับพลังงานของโฟนอน ตัวอย่างเช่นให้มีค่าเท่ากับ 36 meV ซึ่งเป็นค่าพลังงานของโฟนอนในวัสดุ GaAs จะสามารถทำให้อิเล็กตรอนเกิดการผ่อนคลายพลังงานไปยังสถานะพลังงานย่อย E_1 ได้เร็วขึ้น เป็นผลทำให้เกิดสภาพประชากรผกผันระหว่าง E_3 กับ E_2 ได้ดี แต่อย่างไรก็ตามพบว่าในโครงสร้างดังกล่าวนี้การผ่อนคลายพลังงานของอิเล็กตรอนในสถานะพลังงาน E_2 ยังเกิดขึ้นได้ช้า สาเหตุสำคัญอย่างหนึ่งคือการทำให้อิเล็กตรอนจะต้องมีการผ่อนคลายพลังงานโดยอาศัยกระบวนการถ่ายเทพลังงานให้กับโฟนอนหรือที่เรียกว่า *ปรากฏการณ์คอขวด (Bottleneck effect)* จึงเป็นผลทำให้ยากต่อการเกิดสภาพประชากรผกผัน ดังนั้นจึงได้มีการเสนอแนวทางในการแก้ปัญหานี้โดยการใช้แหล่งกำเนิดเลเซอร์ที่ประกอบด้วย 4 ระดับพลังงานย่อย ซึ่งคาดว่าจะสามารถทำให้เกิดสภาพประชากรผกผันระหว่างระดับพลังงานย่อย E_3 กับระดับพลังงานย่อย E_2 ได้ดียิ่งขึ้น ตัวอย่างเช่นงานวิจัยของ Harrison และ Kelsall [10-11] ได้ทำการศึกษาเชิงทฤษฎีเพื่อเปรียบเทียบผลของการชนกันระหว่างอิเล็กตรอนกับอิเล็กตรอนกับการชนกันระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอนในโครงสร้างแบบ 3 ระดับพลังงานย่อยซึ่งประกอบด้วยโครงสร้างควอนตัมเวลล์แบบ 3 บ่อศักย์ (ซึ่งมีความกว้างของบ่อศักย์เป็น 56.50 Å, 96.05 Å และ 84.75 Å โดยมีกำแพงศักย์หนา 56.50 Å) ณ อุณหภูมิ 300 K ที่ความหนาแน่นของอิเล็กตรอนมีค่าต่างกัน พบว่าในโครงสร้างที่ความหนาแน่นของอิเล็กตรอนมีค่ามากกว่า $5 \times 10^{10} \text{ cm}^{-2}$ อัตราการกระเจิงของอิเล็กตรอนจากระดับพลังงาน E_2 ไปยัง E_1 โดยกระบวนการชนกันระหว่างอิเล็กตรอนกับอิเล็กตรอนมีค่ามากกว่าอัตราการกระเจิงระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอน

นอกจากยังมีกลุ่มวิจัยอีกหลายกลุ่มได้ทำการศึกษาวิจัยเกี่ยวกับกระบวนการกระเจิงของอิเล็กตรอนในหน่วยให้กำเนิดแสงของแหล่งกำเนิดเลเซอร์แบบควอนตัมคาสเคด ตัวอย่างเช่นในงานวิจัยของ Anwar และ Lefebvre [13] ได้ทำการเปรียบเทียบอัตราการทลเนลลิงของอิเล็กตรอนโดยอาศัยโฟนอน (Phonon-assisted tunnelling) กับอัตราการเปลี่ยนสถานะของอิเล็กตรอนจากระดับพลังงานย่อยในควอนตัมเวลล์ไปยังสถานะพลังงานที่ต่อเนื่อง (Continuous states) เหนือบ่อศักย์ภายใต้การให้สนามไฟฟ้าภายนอกแก่โครงสร้างดังกล่าว พบว่ากรณีให้สนามไฟฟ้าภายนอกมีค่าต่ำกว่า 20 kV/cm อัตราการเปลี่ยนสถานะจากระดับพลังงานย่อยในควอนตัมเวลล์ไปยังสถานะพลังงานที่ต่อเนื่องเหนือบ่อศักย์มีค่าสูงกว่าอัตราการทลเนลลิงของ

อิเล็กตรอนโดยอาศัยโฟนอน นอกจากนี้ยังพบว่าเมื่ออุณหภูมิสูงขึ้น อัตราการกระเจิงของอิเล็กตรอนโดยกระบวนการทั้งสองนี้มีค่าเพิ่มขึ้น ซึ่งเป็นผลทำให้การเกิดสภาพประชากรผกผันเป็นไปได้ยาก ดังนั้นจึงได้มีการศึกษาวิจัยเพื่อปรับปรุง และแก้ไขปัญหาดังกล่าวโดยกลุ่มวิจัยของ Yang [12] ซึ่งได้ศึกษาเชิงทฤษฎีเพื่อหาค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างบ่อศักย์ในหน่วยให้กำเนิดแสงของแหล่งกำเนิดเลเซอร์แบบควอนตัมคาสเคดที่เหมาะสมต่อการเกิดสภาพประชากรผกผัน โดยเน้นการพิจารณาผลของความหนาของกำแพงศักย์ ความกว้าง และลึกของบ่อศักย์ต่ออัตราการกระเจิงของอิเล็กตรอน ในขณะที่กลุ่มวิจัยของ Lee [14] ได้สนใจ และทำการศึกษาลักษณะเนื่องจากการบังของประจุ (Screen coulomb interaction) ต่ออัตราการกระเจิงของอิเล็กตรอนในโครงสร้าง GaAs/AlGaAs โดยพบว่าในกรณีที่มีความหนาแน่นของอิเล็กตรอนมีค่ามากกว่า $5 \times 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ ผลเนื่องจากการบังของประจุจะมีอิทธิพลต่อกระบวนการกระเจิงของอิเล็กตรอนมาก ดังนั้นในออกแบบโครงสร้างหน่วยให้กำเนิดแสงเพื่อการพัฒนา และปรับปรุงประสิทธิภาพของแหล่งกำเนิดแสงแบบควอนตัมคาสเคด ณ สภาวะของการใช้งานที่กระแสเริ่มต้นที่มีค่าสูง จำเป็นต้องคำนึงถึงผลอันเนื่องมาจากการบังของประจุด้วย นอกจากนี้กลุ่มวิจัยของ Kempa [15] ได้ทำการทดลองวัดอัตราการผ่อนคลายพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนเนื่องจากการกระเจิงระหว่างอิเล็กตรอนกับอิเล็กตรอนในโครงสร้างควอนตัมเวลล์ของหน่วยให้กำเนิดแสงของแหล่งกำเนิดเลเซอร์แบบควอนตัมคาสเคด จากผลการทดลองที่ได้แสดงให้เห็นว่ากระบวนการกระเจิงระหว่างอิเล็กตรอน กับโฟนอนจะมีความเด่นชัดในช่วงอุณหภูมิทำงาน (Operating temperature) ระหว่าง 10 K ถึง 30 K ในขณะที่ ณ อุณหภูมิต่ำกว่า 10 K จะพบผลของกระเจิงเนื่องจากโฟนอนแบบอคูสติก (Acoustic phonon) มีความเด่นชัดมากที่สุด และที่อุณหภูมิสูงกว่า 30 K จะพบผลของกระเจิงเนื่องจากโฟนอนแบบออปติคัล (Longitudinal optical phonon) มีความเด่นชัดมากที่สุด

2.2 บ่อศักย์แบบสี่เหลี่ยม (Square well potential)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานเชิงควอนตัม และการออกแบบโครงสร้างบ่อศักย์แบบสี่เหลี่ยมเพื่อให้ได้สถานะพลังงานของอิเล็กตรอน (หรือโฮล) ตามที่ต้องการ พร้อมทั้งพิจารณาความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนในโครงสร้างบ่อศักย์แบบสี่เหลี่ยม



ภาพที่ 2.1 แผนภาพแสดงอิเล็กตรอนเคลื่อนที่อิสระในกล่อง 3 มิติ ขนาด $L_x \cdot L_y \cdot L_z$ โดยที่ $V(x, y, z) = 0$ ที่บริเวณในกล่อง และ $V(x, y, z) = \infty$ ที่บริเวณผิวกล่อง และนอกกล่อง

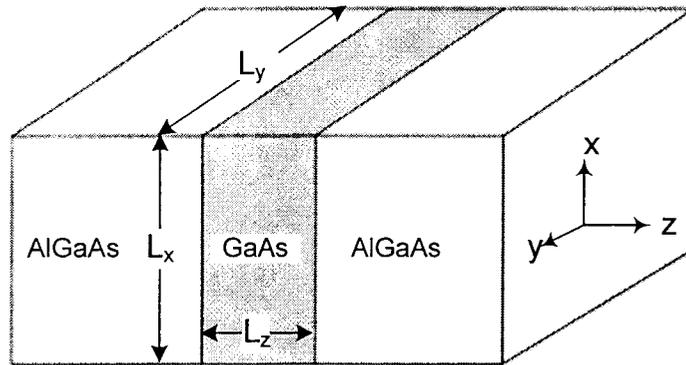
โดยเริ่มพิจารณาสมการชโรดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา (Time-independent Schrödinger equation) ของอิเล็กตรอนในกล่อง 3 มิติ ดังภาพที่ 2.1 [16]

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 + V(x, y, z) \right] \Psi(x, y, z) = E \Psi(x, y, z) \quad (2.1)$$

- เมื่อ m^* คือ มวลยังผล (Effective mass) ของอิเล็กตรอนในกล่อง 3 มิติ
 L_x, L_y, L_z คือ ขนาดของกล่อง 3 มิติ ในแนวแกน x, y, z ตามลำดับ
 $V(x, y, z)$ คือ พลังงานศักย์ในกล่อง 3 มิติ
 E คือ สถานะพลังงานในกล่อง 3 มิติ
 $\Psi(x, y, z)$ คือ ฟังก์ชันคลื่นของอิเล็กตรอน ณ สถานะพลังงาน E

2.2.1 กรณีที่บ่อศักย์มีกำแพงศักย์สูงมาก (Infinite-barrier quantum wells)

โดยทั่วไปหน่วยให้กำเนิดแสงของแหล่งกำเนิดเลเซอร์แบบควอนตัมคาสเคดมักจะประกอบด้วยโครงสร้างบ่อศักย์ในลักษณะต่าง ๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่งกรณีที่เป็นบ่อศักย์แบบสี่เหลี่ยม ซึ่งในกรณีนี้อิเล็กตรอนสามารถเคลื่อนที่ได้อิสระใน 2 มิติ บนระนาบ xy โดยอิเล็กตรอนจะถูกกักกันในแนวแกน z ซึ่งเป็นแกนของการปลูกผลึก (Growth-direction axis) ดังแสดงในภาพที่ 2.2



ภาพที่ 2.2 แสดงการปลูกผลึกของ GaAs/AlGaAs ที่ L_x และ $L_y \gg L_z$

ในงานวิจัยนี้ได้พิจารณารณีที่โครงสร้างบ่อศักย์แบบสี่เหลี่ยมที่มีกำแพงศักย์สูงมาก ($V_0 \rightarrow \infty$; ดูภาพที่ 2.3 ประกอบ) จะได้ผลเฉลยของสมการชโรดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาของอิเล็กตรอนในโครงสร้างดังกล่าวเป็นดังนี้

$$\Psi(x, y, z) = \frac{e^{ik_x x + ik_y y}}{\sqrt{L_x L_y}} \phi_n(z) \quad (2.2)$$

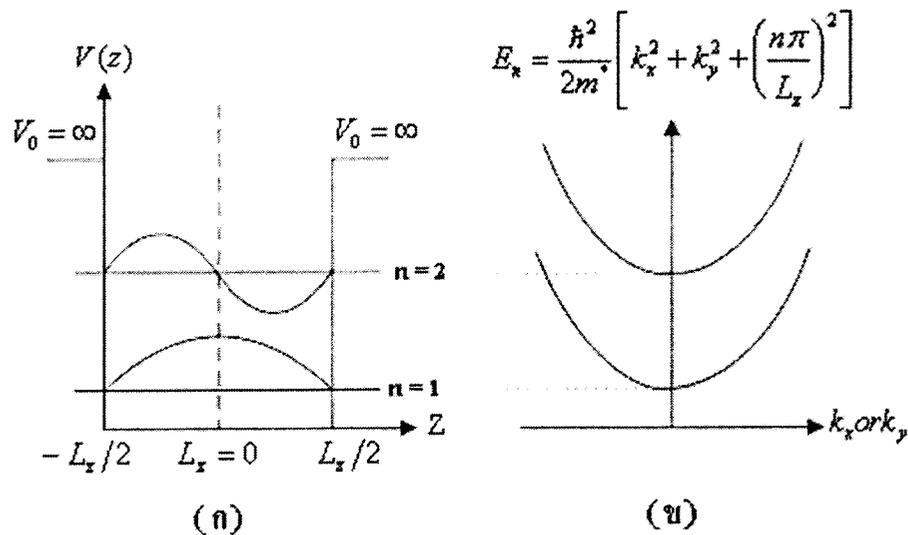
โดยที่

$$\phi_n(z) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L_z}} \sin\left(\frac{n\pi}{L_z} z\right) & ; n \text{ even} \\ \sqrt{\frac{2}{L_z}} \cos\left(\frac{n\pi}{L_z} z\right) & ; n \text{ odd} \end{cases} \quad (2.3)$$

และ

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m^*} \left[k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{L_z}\right)^2 \right] \quad ; n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.4)$$

จากสมการ (2.4) จะเห็นได้ว่าสถานะพลังงานของอิเล็กตรอนในโครงสร้างบ่อศักย์ที่มีกำแพงสูงมากมีค่าไม่ต่อเนื่อง และมีค่าขึ้นกับความกว้างของบ่อศักย์ดังกล่าว สำหรับฟังก์ชันคลื่น $\phi_n(z)$ ที่สอดคล้องกับสถานะพลังงาน E_n ในกรณีที่ $n=1$ และ $n=2$ แสดงไว้ในภาพที่ 2.3



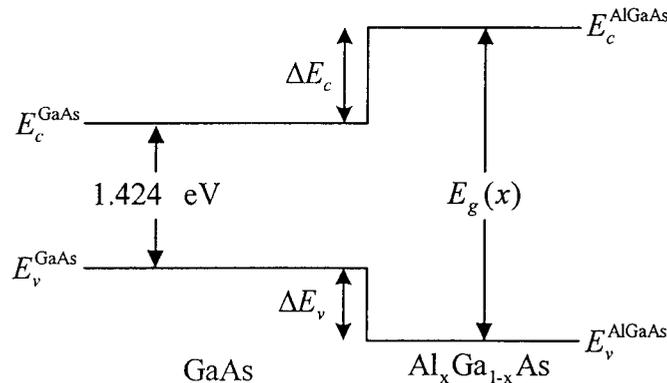
ภาพที่ 2.3 (ก) แสดงลักษณะฟังก์ชันคลื่นที่ $n=1$ และ $n=2$ ในบ่อศักย์สี่เหลี่ยมกว้าง L_x ที่มีความสูงของกำแพงศักย์สูงมาก ($V_0 \rightarrow \infty$)
 (ข) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงาน E_n กับ k_x หรือ k_y

สำหรับในงานวิจัยนี้เรากำหนดให้ $\left(\frac{\hbar^2}{2m_w}\right)\left(\frac{\pi}{L_x}\right)^2 \ll V_0$ นั่นคือ บ่อศักย์มีความลึกมากพอ โดยใช้โครงสร้างบ่อศักย์ที่เกิดจากการปลูกฟิล์มของ GaAs ซึ่งมีค่าช่องว่างแถบพลังงาน E_g^{GaAs} (เท่ากับ 1.424 eV) สลับกับฟิล์มของ AlGaAs ที่มีค่าช่องว่างแถบพลังงาน E_g^{AlGaAs} (ดูค่าในภาคผนวก ก) โดยกรณีนี้ GaAs จะเป็นบริเวณบ่อศักย์ ส่วนของ AlGaAs เป็นบริเวณของกำแพงศักย์ แสดงดังภาพที่ 2.4 ซึ่งโครงสร้างดังกล่าวนี้จะมีค่าช่องว่างระหว่างแถบพลังงาน (ΔE_g) ของแถบความนำไฟฟ้า กับ แถบวาเลนซ์ ของ GaAs กับ AlGaAs ดังนี้

$$\Delta E_g = E_g^{AlGaAs} - E_g^{GaAs} = \Delta E_C + \Delta E_V \quad (2.5)$$

เมื่อ $\Delta E_C = \Delta E_C^{AlGaAs} - \Delta E_C^{GaAs}$ คือ ผลต่างของแถบความนำไฟฟ้า AlGaAs และ GaAs

$\Delta E_V = \Delta E_V^{AlGaAs} - \Delta E_V^{GaAs}$ คือ ผลต่างของแถบวาเลนซ์ AlGaAs และ GaAs



ภาพที่ 2.4 แผนภาพแสดงลักษณะแถบพลังงานที่เกิดจากการปลูกฟิล์มของ GaAs สลับกับฟิล์มของ AlGaAs

สำหรับโครงสร้างของ GaAs/Al_xGa_{1-x}As ค่าของ ΔE_c จะมีค่าประมาณ 67% ของ ΔE_g [16] และสามารถดูค่าพารามิเตอร์ของสารกึ่งตัวนำ GaAs และ Al_xGa_{1-x}As ได้ในภาคผนวก ก

2.2.2 ความหนาแน่นสถานะในกึ่ง 2 มิติ

(Quasi-2 dimensional density of state)

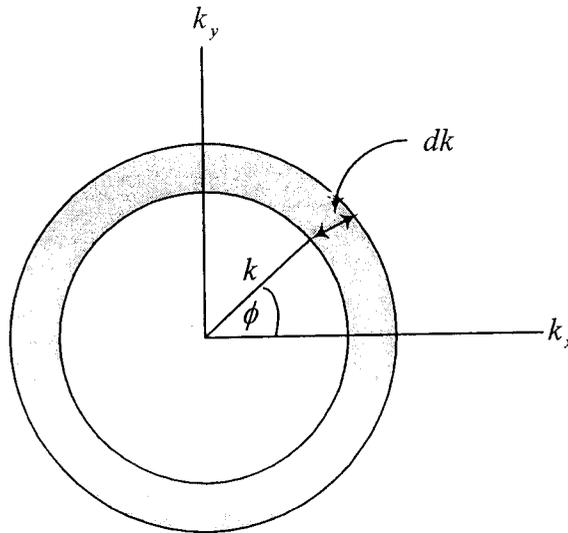
อิเล็กตรอนที่สามารถเคลื่อนที่ได้อิสระใน 2 มิติ สามารถหาความหนาแน่นของอิเล็กตรอน (n_s) ได้จากการรวมสถานะที่เป็นไปได้ในทุกระดับพลังงานย่อย เนื่องจากพลังงานของอิเล็กตรอนถูกควอนไทซ์ (Quantize) ในแนว k_z [16] ทำให้ได้

$$n_s = \frac{2}{V} \sum_n \sum_{k_x} \sum_{k_y} f(E) \quad (2.6)$$

เมื่อ $f(E)$ คือ ฟังก์ชันการแจกแจงพลังงานของอิเล็กตรอน
 V คือ ปริมาตรของโครงสร้างบอศักย์ซึ่งมีค่าเท่ากับ $L_x L_y L_z$
 n คือ เลขควอนตัมหลัก

โดยที่แฟคเตอร์ 2 ในสมการ (2.6) เป็นผลของสปินของอิเล็กตรอน และทำให้ได้ความหนาแน่นสถานะในกรณีที่อิเล็กตรอนเคลื่อนที่ได้อิสระใน 2 มิติ (ρ_{2D}) บนระนาบ xy

$$\rho_{2D} = \frac{2}{V} \sum_{k_x} \sum_{k_y} = \frac{2}{V} \int \frac{dk_x}{2\pi/L_x} \int \frac{dk_y}{2\pi/L_y} = \frac{2}{L_z} \iint \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2} \quad (2.7)$$



ภาพที่ 2.5 แผนภาพแสดงพื้นที่ในปริภูมิ k (k -space) ที่ใช้ในการคำนวณหาความหนาแน่นสถานะในกึ่ง 2 มิติ บนระนาบ xy

จากภาพที่ 2.5 และสมการ (2.7) ทำให้ได้ $dk_x dk_y = k dk d\phi$ ในพิกัดเชิงขั้ว (Polar coordinate) ของปริภูมิ k , $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ และ $dE = \hbar^2 k dk / m^*$

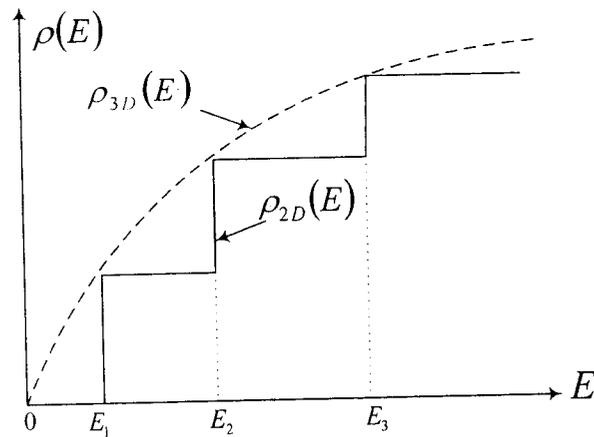
$$\rho_{2D} = \frac{2}{V} \sum_{k_x} \sum_{k_y} = \frac{2}{L_z} \int \frac{2\pi k dk}{(2\pi)^2} = \frac{m_n^*}{\pi \hbar^2 L_z} \int_{E_n}^{\infty} dE \quad (2.8)$$

ดังนั้น จากสมการ (2.8) เราสามารถหาความหนาแน่นสถานะในกึ่ง 2 มิติ ได้ว่า

$$\rho_{2D}(E) = \frac{m_n^*}{\pi \hbar^2 L_z} \sum_n \Theta(E - E_n) \quad (2.9)$$

เมื่อ $\Theta(x)$ คือ Heaviside step function

$$\text{โดยที่} \quad \Theta(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \geq 0 \\ 0 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$



ภาพที่ 2.6 แผนภาพแสดงความหนาแน่นสถานะในกึ่ง 2 มิติ (-เส้นทึบ) ของโครงสร้างบ่อศักย์ เปรียบเทียบกับความหนาแน่นสถานะใน 3 มิติ (--เส้นปะ)

จากสมการ (2.9) เมื่อพิจารณาทุกสถานะพลังงาน ทำให้ได้ความหนาแน่นอิเล็กตรอนใน 2 มิติ [33]

$$n_s = \int \rho_{2D}(E) f(E) dE \quad (2.10)$$

ความหนาแน่นสถานะใน 2 มิติ จะมีลักษณะเป็น Heaviside step function ในแต่ละระดับพลังงาน และมีค่าเท่ากับความหนาแน่นสถานะใน 3 มิติ ที่ $E = E_n$ ดังภาพที่ 2.6