บทที่ 3
ทฤษฎีบทของการลู่เข้าของลำดับ
(CONVERGENCE THEOREMS OF SEQUENCES)

ในบทนี้เราจะศึกษาทฤษฎีบทพื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับการลู่เข้าของลำดับซึ่งใช้สำหรับการคำนวณลิมิตของลำดับหรือตรวจสอบการลู่เข้าของลำดับ นอกจากนี้จะศึกษาทฤษฎีบทที่ให้เงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการลู่เข้าของลำดับ โดยไม่กล่าวถึงลิมิตของลำดับ ได้แก่ การลู่เข้าของลำดับโมโนโทน เกณฑ์ของโคชีสำหรับการลู่เข้าของลำดับ และหลักการคอนแทรคชัน

3.1 ทฤษฎีบทพื้นฐานของการลู่เข้า (*Basic Theorems of Convergence*)

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาทฤษฎีบทพื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับการลู่เข้าของลำดับซึ่งใช้สำหรับการคำนวณลิมิตของลำดับ หรือตรวจสอบการลู่เข้าของลำดับ และเรากล่าวถึง *Bernoulli's Inequality* ในทฤษฎีบทประกอบ 3.1.1 ที่จะใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.1.2 โดยละการพิสูจน์

ทฤษฎีบทประกอบ 3.1.1 : Bernoulli's Inequality

ถ้า $a \in \boldsymbol{R}$ และ $a > -1$ แล้ว $(1+a)^n \geq 1+na$ สำหรับทุก $\in \boldsymbol{I}^+$

ทฤษฎีบท 3.1.2 : ถ้า $c \in \boldsymbol{R}$ ซึ่ง $|c| < 1$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} c^n = 0$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $c \in \boldsymbol{R}$ ซึ่ง $|c| < 1$ และให้ $\varepsilon > 0$

พิจารณา $d = \dfrac{1}{|c|} - 1 > 0$ จะได้ว่า

$$|c| = \frac{1}{1+d}$$

เลือกจำนวนเต็มบวก $N \geq \dfrac{1}{d\varepsilon}$ สำหรับทุก $n \geq N$ จะได้ว่า

$$\left| c^n - 0 \right| = \left| c^n \right| = \frac{1}{(1+d)^n} \leq \frac{1}{1+nd} < \frac{1}{nd} \leq \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} c^n = 0$ ■

ทฤษฎีบท 3.1.3 : ลำดับลู่เข้าเป็นลำดับมีขอบเขต

พิสูจน์ : กำหนดให้ลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ a และให้ $\varepsilon = 1$ ดังนั้น มี $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$|a_n - a| < 1 \quad \text{หรือ} \quad |a_n| - |a| \le |a_n - a| < 1$$

สำหรับทุก $n \ge N$ นั่นคือ

$$|a_n| \le 1 + |a| \qquad \text{สำหรับทุก } n \ge N$$

เลือก $M = max\left\{ |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|,\ 1+|a| \right\}$

ดังนั้น ทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ จะได้ว่า

$$|a_n| \le M$$

เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ มีขอบเขต ■

ทฤษฎีบท 3.1.4 : กำหนดให้ $a \in \boldsymbol{R}$ ซึ่ง $a \ne 0$ และลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ a แล้ว จะมี $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง $|a_n| > \frac{|a|}{2}$ สำหรับทุก $n \ge N$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $a \in \boldsymbol{R}$ ซึ่ง $a \ne 0$ และลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ a และให้ $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$

ดังนั้น มี $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$|a_n - a| < \frac{|a|}{2} \quad \text{หรือ} \quad |a| - |a_n| \le \frac{|a|}{2}$$

สำหรับทุก $n \ge N$ นั่นคือ

$$|a_n| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2} \qquad \text{สำหรับทุก } n \ge N$$

เพราะฉะนั้นการพิสูจน์ทฤษฎีบทสิ้นสุด ■

ทฤษฎีบท 3.1.5 : ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - a) = 0$

พิสูจน์ : $(\rightarrow)$ ให้ลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ a และให้ $\varepsilon > 0$ ดังนั้น มี $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{สำหรับทุก } n \ge N$$

และ

$$|a_n - a - 0| = |a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{สำหรับทุก } n \ge N$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - a) = 0$

($\leftarrow$) กำหนดให้ $\lim_{n\to\infty}(a_n - a) = 0$ และให้ $\varepsilon > 0$ ดังนั้น มี $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$|a_n - a - 0| = |a_n - a| < \varepsilon$$

สำหรับทุก $n \geq N$ และจะได้ว่า

$$|a_n - a| = |a_n - a - 0| = |a_n - a| < \varepsilon \quad \text{สำหรับทุก } n \geq N$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty}(a_n - a) = 0$ ■

ทฤษฎีบท 3.1.6 : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$

พิสูจน์ : ($\rightarrow$) กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ โดยที่ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ และให้ $\varepsilon > 0$ ดังนั้น มี $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$$

สำหรับทุก $n \geq N$ และจะได้ว่า

$$||a_n| - 0| = ||a_n|| = |a_n| < \varepsilon \quad \text{สำหรับทุก } n \geq N$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$

($\leftarrow$) กำหนดให้ $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ และให้ $\varepsilon > 0$ ดังนั้น มี $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$||a_n| - 0| = |a_n| < \varepsilon$$

สำหรับทุก $n \geq N$ และจะได้ว่า

$$|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon \quad \text{สำหรับทุก } n \geq N$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ■

ทฤษฎีบท 3.1.7 : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$

พิสูจน์ : ($\rightarrow$) ให้ลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ a โดยทฤษฎีบท 3.1.5 ได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - a) = 0$$

และดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.1.6 สรุปว่า

$$\lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$$

($\leftarrow$) พิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับข้างบน

ดังนั้น การพิสูจน์ทฤษฎีบทสมบูรณ์ ■

ทฤษฎีบท 3.1.8 : กำหนดให้ $a \in \boldsymbol{R}$ ซึ่ง $a \geq 0$ และให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับโดยที่ $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $a \in \boldsymbol{R}$ ซึ่ง $a \geq 0$ และให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับโดยที่ $\lim_{n\to\infty} a_n = a$
พิจารณา 2 กรณีต่อไปนี้

กรณีที่ 1 : $a = 0$

ให้ $\varepsilon > 0$ ดังนั้น มี $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$|a_n - 0| = |a_n| = a_n < \varepsilon^2 \qquad \text{สำหรับทุก } n \geq N$$

เพราะฉะนั้น

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{0}\right| = \left|\sqrt{a_n}\right| = \sqrt{a_n} < \varepsilon \qquad \text{สำหรับทุก } n \geq N$$

และสรุปได้ว่า $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$

กรณีที่ 2 : $a \neq 0$

ให้ $\varepsilon > 0$ ดังนั้น มี $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$|a_n - a| = \sqrt{a}\,\varepsilon \qquad \text{สำหรับทุก } n \geq N$$

และสำหรับทุก $n \geq N$ เราได้

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right| &= \left|\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right)\left[\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{a}\right)/\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{a}\right)\right]\right| \\ &= |a_n - a| / \left(\sqrt{a_n} + \sqrt{a}\right) \\ &\leq |a_n - a| / \sqrt{a} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$ ■

ทฤษฎีบท 3.1.9 : กำหนดให้ $a, b \in \boldsymbol{R}$ ให้ $\{b_n\}$ เป็นลำดับโดยที่ $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งสอดคล้องว่า จะมี $M \in \boldsymbol{R}$ และ $N_1 \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง $|a_n - a| \leq M|b_n - b|$ สำหรับทุก $n \geq N_1$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $a, b \in \boldsymbol{R}$ ให้ $\{b_n\}$ เป็นลำดับ โดยที่ $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งสอดคล้องว่า จะมี $M \in \boldsymbol{R}$ และ $N_1 \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$|a_n - a| \leq M|b_n - b|$$

สำหรับทุก $n \geq N_1$ เห็นได้ชัดว่า $M \geq 0$ ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ ดังนั้น

มี $N_2 \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$\left| b_n - b \right| = M \frac{\varepsilon}{M+1} \qquad \text{สำหรับทุก } n \geq N_2$$

เลือก $N = max\{N_1, N_2\}$ สำหรับทุก $n \geq N$ จะได้ว่า

$$\left| a_n - a \right| \leq M \left| b_n - b \right| < M \frac{\varepsilon}{M+1} < \varepsilon$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ■

บทนิยาม 3.1.11 : กำหนดให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับ นิยาม **ผลบวก ผลคูณ และผลหาร** ของลำดับ $\{a_n\}$ และลำดับ $\{b_n\}$ ว่าคือ ลำดับ $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n b_n\}$ และ $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ เมื่อ $b_n \neq 0$ ทุก n ตามลำดับ

ทฤษฎีบท 3.1.12 : กำหนดให้ $a, b \in \boldsymbol{R}$ ให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับ โดยที่ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ แล้ว

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$ เมื่อ $b_n \neq 0$ ทุก n และ $b \neq 0$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $a, b \in \boldsymbol{R}$ ให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับ โดยที่ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

(1) ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ดังนั้น จะมี $N_1 \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$\left| a_n - a \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{สำหรับทุก } n \geq N_1$$

และเนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ ดังนั้น จะมี $N_2 \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$\left| b_n - b \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{สำหรับทุก } n \geq N_2$$

เลือก $N = max\{N_1, N_2\}$ สำหรับทุก $n \geq N$ จะได้ว่า

$$\left|(a_n+b_n)-(a+b)\right| = \left|(a_n-a)+(b_n-b)\right|$$
$$\leq \left|a_n-a\right|+\left|b_n-b\right|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n+b_n) = a+b$

(2) ให้ $\varepsilon>0$ เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ โดยทฤษฎีบท 3.1.3 $\{b_n\}$เป็นลำดับมีขอบเขต นั่นคือ จะมี $M>0$ ซึ่ง $|b_n|\leq M$ ทุก n และโดยทฤษฎีบท 2.3.3 จะมี $N_1 \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$\left|b_n-b\right| < \frac{\varepsilon}{2(|a|+1)} \qquad \text{สำหรับทุก } n\geq N_1$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ดังนั้น จะมี $N_2 \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$\left|a_n-a\right| < \frac{\varepsilon}{2M} \qquad \text{สำหรับทุก } n\geq N_2$$

เลือก $N=max\{N_1,N_2\}$ สำหรับทุก $n\geq N$ จะได้ว่า

$$\left|a_nb_n-ab\right| = \left|a_nb_n+b_na-b_na-ab\right|$$
$$= \left|b_n(a_n-a) + a(b_n-b)\right|$$
$$\leq |b_n|\,|a_n-a| + |a|\,|b_n-b|$$
$$< M\frac{\varepsilon}{2M} + |a|\frac{\varepsilon}{2(|a|+1)}$$
$$< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n = ab$

(3) กำหนดให้ $\varepsilon>0$ และ $b\neq 0$ ให้ $n\in\boldsymbol{I}^+$และ $b_n\neq 0$ เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ โดยทฤษฎีบท 3.1.4 จะได้ว่า มี $N_1 \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$\left|b_n\right| > \frac{|b|}{2} \qquad \text{สำหรับทุก } n\geq N_1$$

และโดยทฤษฎีบท 2.3.3 จะมี $N_2 \in I^+$ ซึ่ง

$$\left|b_n-b\right| < \frac{|b|^2}{4(|a|+1)}\varepsilon \qquad \text{สำหรับทุก } n\geq N_2$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ดังนั้น จะมี $N_3 \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$\left|a_n-a\right| < \frac{|b|}{4}\varepsilon \qquad \text{สำหรับทุก } n\geq N_3$$

เลือก $N=max\{N_1,N_2,N_3\}$ สำหรับทุก $n\geq N$ จะได้ว่า

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}\right| = \left|\frac{b(a_n-a) + a(b-b_n)}{bb_n}\right|$$
$$\leq \frac{|b|\,|a_n-a| + |a|\,|b_n-b|}{|b||b_n|}$$
$$= \frac{|a_n-a|}{|b_n|} + \frac{|a|}{|b|}\frac{|b_n-b|}{|b_n|}$$
$$< \left(\frac{2}{|b|}\frac{|b|}{4}\varepsilon\right) + \left(\frac{|a|}{|b|}\frac{|b|^2\varepsilon}{4(|a|+1)}\frac{2}{|b|}\right)$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$ ■

จากทฤษฎีบท 3.1.12 จะได้ข้อสังเกตต่อไปนี้

ถ้า $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และ $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ แล้ว

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n + \beta \lim_{n\to\infty} b_n$$

ทฤษฎีบท 3.1.13 : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก แล้ว $\{a_n+b_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก สมมติให้ $\{a_n+b_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า เนื่องจาก $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า จะได้ว่า $\{-a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า
ดังนั้น $\{(a_n+b_n)+(-a_n)\}$ เป็นลำดับลู่เข้า หรือ $\{b_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ซึ่งขัดแย้งกับข้อกำหนด
เพราะฉะนั้น $\{a_n+b_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก ■

ถ้า $\{a_n^2\}$ เป็นลำดับลู่เข้า แล้วเราไม่สามารถสรุปได้ว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า หรือ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก เนื่องจากมีตัวอย่างของ $\{a_n\}$ ซึ่งเป็นลำดับลู่เข้า และ $\{a_n\}$ ซึ่งเป็นลำดับลู่ออก ซึ่งได้ $\{a_n^2\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ดังจะแสดงในตัวอย่าง 3.1.14 และ 3.1.15

ตัวอย่าง 3.1.14 : ให้ $\{a_n^2\}$ เป็นลำดับ ซึ่งนิยามดังนี้

$$a_n^2 = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \quad \text{สำหรับทุก } n \in I^+$$

จงแสดงว่า $\{a_n^2\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

พิสูจน์ : กำหนดให้ $n \in \boldsymbol{I}^+$ และ $\{a_n^2\}$ เป็นลำดับ ซึ่งนิยามดังนี้

$$a_n^2 = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$$

ประการแรกจะแสดงว่า $\{a_n^2\}$ ลู่เข้าสู่ 1

โดยทฤษฎีบท 3.1.12 และตัวอย่าง 2.3.4 สรุปได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 1$$

เพราะฉะนั้น $\{a_n^2\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

ต่อไปจะแสดงว่า $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ 1

เนื่องจาก

$$a_n^2 = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$$

ดังนั้น

$$a_n = 1 + \frac{1}{n}$$

สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ โดยทฤษฎีบท 3.1.12 และตัวอย่าง 2.3.4 สรุปได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ●

ตัวอย่าง 3.1.15 : ให้ $\{a_n^2\}$ เป็นลำดับ ซึ่งนิยามดังนี้

$$a_n^2 = (-1)^{2n} \quad \text{สำหรับทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

จงแสดงว่า $\{a_n^2\}$ เป็นลำดับลู่เข้า แต่ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

พิสูจน์ : กำหนดให้ $n \in \boldsymbol{I}^+$ และ $\{a_n^2\}$ เป็นลำดับ ซึ่งนิยามดังนี้

$$a_n^2 = (-1)^{2n}$$

ประการแรกจะแสดงว่า $\{a_n^2\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

เนื่องจาก

$$a_n^2 = (-1)^{2n} = 1 \quad \text{สำหรับทุก } n$$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 1$ เพราะฉะนั้น $\{a_n^2\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

ต่อไปจะแสดงว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

เนื่องจาก

$$a_n^2 = (-1)^{2n}$$

ดังนั้น

$$a_n = (-1)^n \text{ สำหรับทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

และโดยตัวอย่าง 2.3.6 ดังนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก ●

ต่อไปนี้เป็นการหาลิมิตของลำดับโดยใช้ทฤษฎีบท 3.1.12

ตัวอย่าง 3.1.16 : จงหาลิมิตของลำดับต่อไปนี้

(1) $a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{2}{n} - 6$

(2) $a_n = \frac{3n^2+n}{5n^2+2n}$

(3) $a_n = r + r^2 + \ldots + r^n$ เมื่อ $r \in \boldsymbol{R}$

วิธีทำ : (1) กำหนดให้ $n \in \boldsymbol{I}^+$ และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่งนิยามดังนี้

$$a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{2}{n} - 6$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{2}{n} - 6\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} - \lim_{n\to\infty} 6 \\
&= -6
\end{aligned}$$

(2) กำหนดให้ $n \in \boldsymbol{I}^+$ และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่งนิยามดังนี้

$$a_n = \frac{3n^2+n}{5n^2+2n}$$

ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{5n^2+2n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{5+\left(2/n\right)}$$
$$= \frac{\lim_{n\to\infty} 3}{\lim_{n\to\infty} 5+\lim_{n\to\infty}\left(2/n\right)}$$
$$= \frac{3}{5}$$

(3) กำหนดให้ $r \in \boldsymbol{R}$ และสำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่งนิยาม $\{a_n\}$ ดังนี้

$$a_n = r+r^2+\ldots+r^n$$

เนื่องจาก

$$r+r^2+\ldots+r^n = r\left(r+r^2+\ldots+r^{n-1}\right) = r\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} r\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$
$$= r\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$
$$= \frac{r}{1-r}$$

●

ทฤษฎีบท 3.1.17 : The Convergence of Cesaro Averages

กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งลู่เข้าสู่ a นิยามลำดับ $\{\sigma_n\}$ ดังนี้

$$\sigma_n = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \quad \text{สำหรับทุก } n\in\boldsymbol{I}^+$$

แล้ว $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = a$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งลู่เข้าสู่ a นิยามลำดับ $\{\sigma_n\}$ ดังนี้

$$\sigma_n = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \quad \text{สำหรับทุก } n\in\boldsymbol{I}^+$$

กำหนดให้ $b_n = a_n - a$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ โดยทฤษฎีบท 3.1.5 จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ โดยทฤษฎีบท 2.3.3 จะมีจำนวนเต็มบวก p ซึ่ง

$$|b_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{สำหรับทุก } n \ge p$$

เนื่องจาก $\{b_n\}$ มีขอบเขต ดังนั้น มี $M > 0$ ซึ่ง

$$|b_n| \le M \quad \text{สำหรับทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

และเลือกจำนวนเต็มบวก $k > \frac{2pM}{\varepsilon}$

ให้ $N = max\{p,k\}$ ดังนั้น สำหรับทุก $n \ge N$ เราได้ว่า

$$\begin{aligned}
\left| \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} \right| &= \left| \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_p + b_{p+1} + b_{p+2} + \ldots + b_n}{n} \right| \\
&\le \frac{|b_1 + b_2 + \ldots + b_p|}{n} + \frac{|b_{p+1} + b_{p+2} + \ldots + b_n|}{n} \\
&\le \frac{|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_p|}{n} + \frac{|b_{p+1}| + |b_{p+2}| + \ldots + |b_n|}{n} \\
&< \frac{pM}{n} + \frac{(n-p)\varepsilon}{2n} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{p\varepsilon}{2n} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ และเพราะว่า

$$\begin{aligned}
\sigma_n - a &= \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n - na}{n} \\
&= \frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \ldots + (a_n - a)}{n} \\
&= \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}
\end{aligned}$$

ดังนั้น สรุปได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = a$ ■

บทนิยาม 3.1.18 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่นิยามในอาณาเขตหนึ่งของ a และ l เป็นจำนวนจริง เรากล่าวว่า l เป็น**ลิมิตของ f เมื่อ x เข้าใกล้ a (*limit of f as x approaches a*)** และเขียนแทนโดย $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $|f(x) - l| < \varepsilon$ สำหรับทุก $0 < |x - a| < \delta$

ในกรณีของบทนิยาม 3.1.22 เรากล่าวว่า $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ **หาค่าได้ (*exist*)**

บทนิยาม 3.1.19 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาค่าได้ในบริเวณใกล้ ๆจำนวนจริง a และ l เป็นจำนวนจริง เรากล่าวว่า l เป็น**ลิมิตซ้ายของ f เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านซ้าย** (***limit of f as x approaches a from the left***) และเขียนแทนโดย $\lim_{x\to a^-} f(x) = l$ ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $|f(x)-l| < \varepsilon$ สำหรับทุก $a-\delta < x < a$

และจะกล่าวว่า l เป็นลิมิตขวาของ f เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านขวา (***limit of f as x approaches a from the right***) และเขียนแทนโดย $\lim_{x\to a^+} f(x) = l$ ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $|f(x)-l| < \varepsilon$ สำหรับทุก $a < x < a+\delta$

นอกจากนี้เรานิยาม $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $N > 0$ สำหรับทุก $x > N$ แล้ว $|f(x)-l| < \varepsilon$

และ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ ถ้า สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $N > 0$ สำหรับทุก $x < -N$ แล้ว $|f(x)-l| < \varepsilon$

บทนิยาม 3.1.20 : เรากล่าวว่าลำดับ $\{a_n\}$ มี**ลิมิตเป็นบวกอนันต์** (***positively infinite limit***) ถ้าสำหรับแต่ละ $M > 0$ จะมี N สำหรับทุก $n \ge N$ แล้ว $a_n > M$ และเขียนแทนโดย $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

และกล่าวว่า ลำดับ $\{a_n\}$ มี**ลิมิตเป็นลบอนันต์** (***negatively infinite limit***) ถ้าสำหรับแต่ละ $M > 0$ จะมี N สำหรับทุก $n \ge N$ แล้ว $a_n < -M$ และเขียนแทนโดย $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

ทฤษฎีบท 3.1.21 : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ และ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่นิยามบน $[b,\infty)$ ซึ่ง $f(n) = a_n$ สำหรับทุกจำนวน $n \in I^+$ เมื่อ $n \ge b$ ถ้า $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และ $\lim_{n\to\infty} a_n = l$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ และ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่นิยามบน $[b,\infty)$ ซึ่ง

$$f(n) = a_n \qquad \text{เมื่อ } n \in \boldsymbol{I}^+ \text{ และ } n \ge b$$

ให้ $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ กำหนด $\varepsilon > 0$ ดังนั้น มี $M > 0$ ซึ่ง $|f(x)-l| < \varepsilon$ สำหรับทุก $x > M$ เลือกจำนวนเต็มบวก $N \ge b$ และ $N > M$ สำหรับทุก $n \ge N$ จะได้ว่า

$$|a_n - l| = |f(n)-l| < \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าสู่ l ■

บทนิยาม 3.1.22 : กำหนดให้ $D \subset \boldsymbol{R}$ และ $f : D \to \boldsymbol{R}$ เป็นฟังก์ชัน ให้ $a \in D$ เรากล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันต่อเนื่องที่ a (*continuous function at* a)** ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $\left| f(x) - f(a) \right| < \varepsilon$ สำหรับทุก $|x - a| < \delta$

บทนิยาม 3.1.23 : เรากล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันต่อเนื่องทางซ้ายที่ a (*continuous from the left at* a)** ถ้า $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

และกล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันต่อเนื่องทางขวาที่ a (*continuous from the right at* a)** ถ้า $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

บทนิยาม 3.1.24 : เรากล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิด (a,b) (*continuous function on open interval* (a,b))** ถ้า f ต่อเนื่องที่ทุก $x \in (a,b)$

บทนิยาม 3.1.25 : เรากล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ (*continuous function on closed interval* $[a,b]$)** ถ้า f สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) f ต่อเนื่องบน (a,b)

(2) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทางขวาที่ $x = a$

(3) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทางซ้ายที่ $x = b$

บทนิยาม 3.1.26 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชัน เรากล่าวว่า f มี**อนุพันธ์ที่ a (*differentiable at* a)** ถ้า $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ หาค่าได้ และเรียกค่าลิมิตนี้ว่า**อนุพันธ์ของ f ที่ a (*derivative of* f *at* a)** ซึ่งจะเขียนแทนโดย $f'(a)$

บทนิยาม 3.1.27 : กำหนดให้ I เป็นช่วงเปิดใด ๆเรากล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันที่**หาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด I (*differentiable on* I)** ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ทุกจุดในช่วง I

บทนิยาม 3.1.28 : ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ และ $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ เรากล่าวว่า $\dfrac{f}{g}$ อยู่ใน**รูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$ (*indeterminate form* $\frac{0}{0}$)**และเขียนแทนอย่างสั้น ๆ โดย $I.F.\ \frac{0}{0}$

บทนิยาม 3.1.29 : ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ และ $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ เรากล่าวว่า $\frac{f}{g}$ อยู่ใน**รูปแบบไม่กำหนด** $\frac{\infty}{\infty}$ **(*indeterminate form*** $\frac{\infty}{\infty}$ **)** และเขียนแทนอย่างสั้น ๆ โดย $I.F.\ \frac{\infty}{\infty}$

สำหรับในกรณีทั่วไปเราใช้ทฤษฎีของลิมิตในการหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน แต่สำหรับกรณีที่ฟังก์ชันอยู่ในรูปแบบ $I.F.$ เราใช้กฎของโลปิตาล ในการหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน โดยละการพิสูจน์ สำหรับผู้สนใจสามารถศึกษารายละเอียดได้จาก [4]

ทฤษฎีบท 3.1.30 : กฎของโลปิตาล (*l'Hopital's Rule*)

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a,b) และ $g'(x) \neq 0$ สำหรับทุกค่า $x \in (a,b)$ ถ้ามี $x_0 \in (a,b)$ ซึ่ง $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x)$ และ $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ หาค่าได้ หรือมีค่าเท่ากับ $\pm\infty$ แล้ว $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

หมายเหตุ :

1) กฎของโลปิตาลยังใช้ได้กับเมื่อ $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty = \lim_{x\to x_0} g(x)$
2) กฎของโลปิตาลสามารถขยายไปถึงกรณี ที่ $x \to \pm\infty$ และกรณีที่ $x \to a^-$ และ $x \to b^+$
3) สำหรับรูปแบบของลิมิตที่จัดว่าเป็นรูปแบบไม่กำหนดนอกจากรูปแบบ $I.F.\ \frac{0}{0}$ และ $I.F.\ \frac{\infty}{\infty}$ ยังมีอีกหลายรูปแบบซึ่งสามารถจัดรูปให้อยู่ในรูปแบบ $I.F.\ \frac{0}{0}$ และ $I.F.\ \frac{\infty}{\infty}$ แล้วสามารถใช้กฎของโลปิตาลในการคำนวณหาค่าลิมิตได้เช่นเดียวกันซึ่งในที่นี้ไม่ได้กล่าวถึงสำหรับผู้สนใจสามารถศึกษารายละเอียดได้จาก [4]

ตัวอย่าง 3.1.31 : จงหาลิมิตของลำดับ $\{a_n\}$ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1) $a_n = ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

(2) $a_n = nr^n$ โดยที่ $0 < r < 1$

วิธีทำ : (1) กำหนดให้ $f : [\frac{1}{2},\infty) \to \boldsymbol{R}$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่งนิยามดังนี้

$$f(x) = ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \quad \text{สำหรับทุก } x \in [\tfrac{1}{2},\infty)$$

จะได้ว่า

$$f(x)=x\,ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{ln\left(1+\left(1/x\right)\right)}{1/x}$$

กำหนดให้ $g(x)=ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ และ $h(x)=\frac{1}{x}$ เมื่อ $x\in(\frac{1}{2},\infty)$

ดังนั้น g และ h เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[\frac{1}{2},\infty)$ และหาอนุพันธ์ได้บน$(\frac{1}{2},\infty)$

ให้ $x\in[\frac{1}{2},\infty)$ จะได้ว่า

$$h'(x)=-\frac{1}{x^2}\neq 0$$

เนื่องจาก

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\left[ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=ln\,1=0$$

และ

$$\lim_{x\to\infty} h(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

จะได้ว่า $\frac{g}{h}$ อยู่ในรูป $I.F.\ \frac{0}{0}$ เพราะว่า

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g'(x)}{h'(x)}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+\left(1/x\right)}\right)=1$$

โดยกฎของโลปิตาล จะได้ว่า

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{h(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{g'(x)}{h'(x)}=1$$

ดังนั้น $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$ และโดยทฤษฎีบท 3.1.21 สรุปได้ว่า $\lim_{n\to\infty} a_n=1$

(2) กำหนดให้ $f:[\frac{1}{2},\infty)\to \boldsymbol{R}$ เป็นฟังก์ชัน และ $0<r<1$ นิยาม f ดังนี้

$$f(x)=x\,r^x \quad \text{สำหรับทุก}\ x\in[\frac{1}{2},\infty)$$

เนื่องจาก

$$\lim_{x\to\infty} x=\infty \quad \text{และ} \quad \lim_{x\to\infty} r^x=0$$

แสดงว่าลิมิตอยู่ในรูป $I.F.\ 0\cdot\infty$ เราจึงเขียนนิพจน์ใหม่เพื่อหาค่าลิมิตดังนี้

$$f(x)=x\,r^x=\frac{x}{1/r^x}$$

กำหนดให้ $g(x)=x$ และ $h(x)=\frac{1}{r^x}$ เมื่อ $x\in(\frac{1}{2},\infty)$

ดังนั้น g และ h เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[\frac{1}{2},\infty)$ และหาอนุพันธ์ได้บน $[\frac{1}{2},\infty)$

ให้ $x\in[1,\infty)$ จะได้ว่า

$$h'(x)=r^{-x}ln\ r\neq 0$$

เนื่องจาก

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty} x=\infty$$

และ

$$\lim_{x\to\infty} h(x)=\lim_{x\to\infty} \frac{1}{r^x}=\infty$$

จะได้ว่า $\frac{g}{h}$ อยู่ในรูป $I.F.\ \frac{\infty}{\infty}$ เพราะว่า

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g'(x)}{h'(x)}=\lim_{x\to\infty} \frac{1}{r^{-x}lnr}=0$$

โดยกฎของโลปิตาล จะได้ว่า

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{h(x)}=\lim_{x\to\infty} \frac{g'(x)}{h'(x)}=0$$

ดังนั้น $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ และโดยทฤษฎีบท 3.1.21 สรุปได้ว่า $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ ●

ทฤษฎีบท 3.1.32 : ให้ $D\subset \boldsymbol{R}$ และ $f:D\to \boldsymbol{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $a\in D$ และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับใน D ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} a_n=a$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=f(a)$ นั่นคือ $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$

พิสูจน์ : ให้ $f:D\to \boldsymbol{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ a เมื่อ $a\in D$ และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับใน D ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} a_n=a$ ให้ $\varepsilon>0$ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ a ดังนั้น จะมี $\delta>0$ ซึ่ง

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon \qquad \text{สำหรับทุก } |x-a|<\delta$$

เพราะว่า $\lim_{n\to\infty} a_n=a$ ดังนั้น จะมี $N\in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$|a_n-a|<\delta \qquad \text{สำหรับทุก } n\geq N$$

ดังนั้น สำหรับทุก $n\geq N$ เราได้

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=f(a)$ ■

ตัวอย่าง 3.1.33 : จงหาค่าลิมิตของลำดับ $\{a_n\}$ ต่อไปนี้

(1) $a_n = ln\left(\dfrac{n^2+3}{n^2+1}\right)$

(2) $a_n = sin\left[\dfrac{\pi}{8}\left(\dfrac{2n+7}{n}\right)\right]$

วิธีทำ : (1) กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่งนิยามดังนี้

$$a_n = ln\left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right) \qquad \text{สำหรับทุก}\, n \in \boldsymbol{I}^+$$

ให้ $\{b_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่งนิยามดังนี้

$$b_n = \frac{n^2+3}{n^2+1} \qquad \text{สำหรับทุก}\, n \in \boldsymbol{I}^+$$

และ $f:[1,\infty) \to \boldsymbol{R}$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่งนิยามดังนี้

$$f(x) = ln\ x \qquad \text{สำหรับทุก}\ x \in [1,\infty)$$

เนื่องจาก $\{b_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{n^2}\right)\Big/\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right] = 1$$

เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ 1 โดยทฤษฎีบท 3.1.34 จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\left[ln\left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)\right] = f\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3}{n^2+1}\right) = ln\ 1 = 0$$

ดังนั้น ลิมิตของ $\{a_n\}$ เท่ากับ 0

(2) กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่งนิยามดังนี้

$$a_n = sin\left[\frac{\pi}{8}\left(\frac{2n+7}{n}\right)\right] \qquad \text{สำหรับทุก}\, n \in \boldsymbol{I}^+$$

ให้ $\{b_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่งนิยามดังนี้

$$b_n = \frac{2n+7}{n} \qquad \text{สำหรับทุก}\, n \in \boldsymbol{I}^+$$

และ $f:\boldsymbol{R} \to [-1,1]$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่งนิยามดังนี้

$$f(x) = sin\ x \qquad \text{สำหรับทุก}\ x \in R$$

เนื่องจาก $\{b_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+7}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{7}{n}\right) = 2$$

เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $\dfrac{\pi}{4}$ โดยทฤษฎีบท 3.1.34 จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sin\left(\frac{\pi}{8}\cdot\frac{2n+7}{n}\right)\right] = f\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2n+7}{n}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ดังนั้น ลิมิตของ $\{a_n\}$ เท่ากับ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ●

ในทฤษฎีบท 3.1.32 ไม่สามารถสรุปอะไรได้ ถ้า f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง เนื่องจากมีตัวอย่างของ $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$ และ $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$ เมื่อ f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังตัวอย่าง 3.1.34 และตัวอย่าง 3.1.35

ตัวอย่าง 3.1.34 : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่งนิยามดังนี้

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad \text{สำหรับทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

และ

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } x = 0 \\ 1 & \text{เมื่อ } x \neq 0 \end{cases}$$

แล้ว f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ 0 และ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ และ } f(a_n) = 1 \quad \text{ทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

แต่ $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 1$ เพราะฉะนั้น

$$f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$$

ตัวอย่าง 3.1.35 : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่งนิยามดังนี้

$$a_n = 1 - \frac{1}{n} \quad \text{สำหรับทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

และ $f : (0,2] \to \boldsymbol{R}$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่งนิยามดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } 0 < x \leq 1 \\ x & \text{เมื่อ } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

แล้ว f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ 1 และ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \quad \text{และ } f(a_n) = 0 \quad \text{ทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0$ เพราะฉะนั้น

$$f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = 0 = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$$ ●

ทฤษฎีบท 3.1.36 : กำหนดให้ $a \in \boldsymbol{R}$ และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ โดยที่ $a_n \geq 0$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ แล้ว $a \geq 0$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $a \in \boldsymbol{R}$ และ $n \in \boldsymbol{I}^+$ ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ โดยที่ $a_n \geq 0$ สมมติว่า $a < 0$ ให้ $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$ ดังนั้น จะมี $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่งสอดคล้องว่า

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{หรือ} \quad -\frac{|a|}{2} < a_n - a < \frac{|a|}{2}$$

สำหรับทุก $n \geq N$ และสามารถสรุปได้ว่า

$$\frac{3a}{2} < a_n < \frac{a}{2} < 0$$

ซึ่งขัดแย้งกับสิ่งที่กำหนดให้ ดังนั้น $a \geq 0$ ■

ทฤษฎีบท 3.1.37 : กำหนดให้ $a \in \boldsymbol{R}$ และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ โดยที่ $a_n \leq 0$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ แล้ว $a \leq 0$

พิสูจน์ : การพิสูจน์เป็นทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 3.1.36 ■

ทฤษฎีบท 3.1.38 : กำหนดให้ $a, b \in \boldsymbol{R}$ และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ โดยที่ $a_n \geq b$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ แล้ว $a \geq b$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $a, b \in \boldsymbol{R}$ และ $n \in \boldsymbol{I}^+$ ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ โดยที่ $a_n \geq b$ และให้ $b_n = a_n - b$ จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a - b$$

โดยทฤษฎีบท 3.1.36 ได้ว่า $a - b \geq 0$ ดังนั้น $a \geq b$ ■

ทฤษฎีบท 3.1.39 : กำหนดให้ $a, b \in \boldsymbol{R}$ และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ โดยที่ $a_n \leq b$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ แล้ว $a \leq b$

พิสูจน์ : การพิสูจน์เป็นทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 3.38 ■

ทฤษฎีบท 3.1.40 : ให้ $a,b,c \in \boldsymbol{R}$ และ $\{a_n\},\{b_n\}$และ $\{c_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$ ถ้า $a_n \le c_n \le b_n$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ แล้ว $a \le c \le b$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $a,b,c \in \boldsymbol{R}$ และ $n \in \boldsymbol{I}^+$ ให้ $\{a_n\},\{b_n\}$และ $\{c_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$ และ $a_n \le c_n \le b_n$ ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty} (c_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} c_n - \lim_{n\to\infty} a_n = c - a$$

และ

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - c_n) = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} c_n = b - c$$

เพราะว่า

$$a_n \le c_n$$

ดังนั้น

$$0 \le c_n - a_n$$

และ

$$c_n \le b_n$$

ดังนั้น

$$0 \le b_n - c_n$$

โดยทฤษฎีบท 3.1.36 จะได้ว่า

$$0 \le c - a \quad \text{และ} \quad 0 \le b - c$$

หรือ

$$a \le c \quad \text{และ} \quad c \le b$$

ดังนั้น $a \le c \le b$ ■

ทฤษฎีบท 3.1.41 : กำหนดให้ $a,b \in \boldsymbol{R}$ ซึ่ง $a < b$ และ $\{c_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$ ถ้า $a \le c_n \le b$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ แล้ว $a \le c \le b$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $a,b \in \boldsymbol{R}$ ซึ่ง $a < b$ และ $n \in \boldsymbol{I}^+$ ให้ $\{c_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c \quad \text{และ} \quad a \le c_n \le b$$

พิจารณา $a_n = a$ และ $b_n = b$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ โดยทฤษฎีบท 3.1.40 จะได้ว่า $a \le c \le b$ ■

ทฤษฎีบท 3.1.42 : The Squeezing Theorem

กำหนดให้ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ และ $\{c_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง $a_n \le c_n \le b_n$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n = l = \lim_{n\to\infty} b_n$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} c_n = l$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $l \in \boldsymbol{R}$ และ $n \in \boldsymbol{I}^+$ ให้ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ และ $\{c_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง

$$a_n \le c_n \le b_n$$

และ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l = \lim_{n\to\infty} b_n$$

ให้ $\varepsilon > 0$ ดังนั้น จะมี $N_1 \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$|a_n - l| < \varepsilon \qquad \text{สำหรับทุก } n \ge N_1$$

และจะได้ว่า

$$l - \varepsilon < a_n$$

เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} b_n = l$ ดังนั้น จะมี $N_2 \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$|b_n - l| < \varepsilon \qquad \text{สำหรับทุก } n \ge N_2$$

และจะได้ว่า

$$b_n < l + \varepsilon$$

เลือก $N = max\{N_1, N_2\}$ สำหรับทุก $n \ge N$ เราได้ว่า

$$l - \varepsilon < a_n \le c_n \le b_n < l + \varepsilon$$

ดังนั้น $|c_n - l| < \varepsilon$ เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} c_n = l$ ■

ตัวอย่าง 3.1.43 : กำหนดให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับ โดยที่ $\lim_{n\to\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = 0$ จงแสดงว่า $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับ โดยที่ $\lim_{n\to\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = 0$ ประการแรกจะแสดงว่า $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ เนื่องจาก

$$0 \le a_n^2 \le a_n^2 + b_n^2$$

และ

$$\lim_{n\to\infty} 0 = 0 = \lim_{n\to\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

โดย *The Squeezing Theorem* จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 0$$

โดยทฤษฎีบท 3.1.8 สรุปได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n^2} = \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

และทฤษฎีบท 3.1.6 จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

ในทำนองเดียวกันเราสามารถแสดงได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ ●

ตัวอย่าง 3.1.44 : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่งนิยามดังนี้

$$a_n = \sqrt[n]{n} \qquad \text{สำหรับทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

จงแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่งนิยามดังนี้

$$a_n = \sqrt[n]{n}$$

สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ และ $n > 1$ ให้ $x_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} n &= \left(1 + x_n\right)^n \\ &\geq 1 + nx_n + \frac{n(n-1)}{2} x_n^2 + \ldots + x^n \\ &\geq 1 + nx_n + \frac{n(n-1)}{2} x_n^2 \\ &\geq \frac{n(n-1)}{2} x_n^2 \end{aligned}$$

หรือ

$$0 < x_n^2 \leq \frac{2}{n-1} \qquad \text{สำหรับทุก } n > 1$$

ดังนั้น

$$x_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}$$

เนื่องจาก

$$1 \le \sqrt[n]{n} = 1 + x_n \le 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}$$

และ

$$\lim_{n\to\infty} 1 = 1 = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}\right)$$

โดย *The Squeezing Theorem* ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ●

ต่อไปในหัวข้อ 3.2 และหัวข้อ 3.3 เราจะศึกษาทฤษฎีบทที่ให้เงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการลู่เข้าของลำดับ โดยไม่กล่าวถึงลิมิตของลำดับ ได้แก่ การลู่เข้าของลำดับโมโนโทน เกณฑ์ของโคชีสำหรับการลู่เข้าของลำดับ และหลักการคอนแทรคชัน

3.2 ลำดับโมโนโทน (*Monotone Sequences*)

บทนิยาม 3.2.1 : เรากล่าวว่าลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ

(1) **โมโนโทนแบบเพิ่มขึ้น(*monotonically increasing*)** ถ้า $a_{n+1} \ge a_n$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$

(2) **โมโนโทนแบบลดลง(*monotonically decreasing*)** ถ้า $a_{n+1} \le a_n$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$

และเราเรียกลำดับ $\{a_n\}$ ว่า **ลำดับโมโนโทน (*monotone sequence*)** ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบเพิ่มขึ้นหรือลำดับโมโนโทนแบบลดลง

ตัวอย่าง 3.2.2 : จงตรวจสอบว่าลำดับ $\{a_n\}$ ต่อไปนี้เป็นลำดับโมโนโทนหรือไม่

(1) $a_n = \frac{1}{n}$

(2) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

(3) $a_n = (-1)^n$

(4) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$

วิธีทำ : (1) เพราะว่า $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n} = a_n$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$

ดังนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบลดลง

(2) เนื่องจาก

$$
\begin{aligned}
a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
&= 1+1+\frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2}+\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{n^3}+\ldots+\frac{n\,(n-1)\ldots\,(n-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\frac{1}{n^n} \\
&= 2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{2\cdot 3\cdots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

และ

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} \\
&= 1+1+\frac{n\,(n+1)}{1\cdot 2}\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{n\,(n-1)\ldots\,(n-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n+1)}\frac{1}{(n+1)^{n+1}} \\
&= 2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots+\frac{1}{2\cdot 3\cdots(n+1)}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)
\end{aligned}
$$

เพราะว่า $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$

จะได้ว่า

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) < \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

ดังนั้น $\quad a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}$

เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบเพิ่มขึ้น

(3) เนื่องจาก มี $a_1 = -1$ และ $a_2 = 1$ จะได้ว่า

$$a_1 = -1 < 1 = a_2$$

ดังนั้น $\{a_n\}$ ไม่เป็นลำดับโมโนโทนแบบลดลง

เนื่องจาก มี $a_2 = 1$ และ $a_3 = -1$ จะได้ว่า

$$a_3 = -1 < 1 = a_2$$

ดังนั้น $\{a_n\}$ ไม่เป็นลำดับโมโนโทนแบบเพิ่มขึ้น เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ ไม่เป็นลำดับโมโนโทน

(4) เนื่องจากสำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ เราได้

$$a_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} \quad \text{และ} \quad a_{n+1} = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$$

และ $\frac{1}{n+1} > 0$ ดังนั้น $a_n \le a_{n+1}$

เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบเพิ่มขึ้น ●

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทที่ให้เงื่อนไขที่เพียงพอและจำเป็นสำหรับการเป็นลำดับลู่เข้าของลำดับโมโนโทนซึ่งอาศัยสัจพจน์ความบริบูรณ์ (*The Completeness Axiom*) ดังจะกล่าวต่อไปนี้

สัจพจน์ความบริบูรณ์

ให้ $S \subset \boldsymbol{R}$ โดยที่ $S \neq \phi$ และ S มีขอบเขตบน แล้ว S มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด

ให้ $S \subset \boldsymbol{R}$ โดยที่ $S \neq \phi$ และ S มีขอบเขตล่าง แล้ว S มีขอบเขตล่างค่ามากสุด

ทฤษฎีบท 3.2.3 : การลู่เข้าของลำดับโมโนโทน(*The Monotone Convergence Theorem*)

ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทน แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ ลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทน

$(\rightarrow)$ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า โดยทฤษฎีบท 3.1.3 จะได้ว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต

$(\leftarrow)$ กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต พิจารณา 2 กรณีต่อไปนี้

กรณี 1 : $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบเพิ่มขึ้น

เนื่องจาก $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขตบน โดยสัจพจน์ความบริบูรณ์ จะได้ว่า $\{a_n\}$ มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด ให้ u เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $\{a_n\}$ ดังนั้น $u-\varepsilon$ ไม่เป็นขอบเขตบนของ $\{a_n\}$ นั่นคือ มี $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$a_N > u-\varepsilon$$

ดังนั้น

$$a_n > u-\varepsilon \quad \text{สำหรับทุก } n \ge N$$

เพราะฉะนั้น

$$u-\varepsilon < a_n \le u < u+\varepsilon \quad \text{สำหรับทุก } n \ge N$$

หรือ

$$|a_n - u| < \varepsilon \quad \text{สำหรับทุก } n \ge N$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = u$ เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

กรณี 2 : $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบลดลง

เนื่องจาก $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขตล่าง โดยสัจพจน์ความบริบูรณ์ จะได้ว่า $\{a_n\}$ มีขอบเขตล่างค่ามากสุด ให้ l เป็นขอบเขตล่างค่ามากสุดของ $\{a_n\}$ ดังนั้น $l+\varepsilon$ ไม่เป็นขอบเขตล่างของ $\{a_n\}$ นั่นคือ มี $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง $a_N < l+\varepsilon$ ดังนั้น

$$a_n < l+\varepsilon \qquad \text{สำหรับทุก } n \geq N$$

เพราะฉะนั้น

$$l-\varepsilon < l \leq a_n < l+\varepsilon \quad \text{สำหรับทุก } n \geq N$$

หรือ

$$|a_n - l| < \varepsilon \text{ สำหรับทุก } n \geq N$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ เพราะฉะนั้นการพิสูจน์ทฤษฎีสิ้นสุด ■

ตัวอย่าง 3.2.4 : ลำดับ $\{a_n\}$ ในตัวอย่าง 3.2.2(2) เป็นลำดับลู่เข้า

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งนิยามดังตัวอย่าง 3.2.2(2) จะได้ว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบเพิ่มขึ้น และในตัวอย่าง 2.2.5(1) เราได้แสดงว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต ซึ่ง

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq 2+\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-2}}\right] \\ &\leq 2+\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\Big/\left(1-\frac{1}{2}\right)\right] \\ &\leq 2+1 = 3 \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$2 < a_n \leq 3$$

โดยทฤษฎีบท 3.2.3 จะได้ว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ●

จะเขียนแทนค่าลิมิตของ $\{a_n\}$ ในตัวอย่าง 3.2.4 ด้วย e และจะเห็นว่า $2 < e \leq 3$ และเราสามารถประมาณค่าของ e ได้ สำหรับผู้ที่สนใจสามารถศึกษาจากบทที่ 8 ของ [2] ซึ่งได้ค่าประมาณของ e เท่ากับ 2.7182

ตัวอย่าง 3.2.5 : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งนิยามดังนี้

$$a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} \qquad \text{สำหรับทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

จงแสดงว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

วิธีทำ : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งนิยามดังนี้

$$a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} \qquad \text{สำหรับทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)(2n+2)} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} \\ &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\left(\frac{2n+1}{2n+2}-1\right) \\ &= \left(\frac{2n+1}{2n+2}-1\right)a_n < 0 \end{aligned}$$

และ $$0 < \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} \le 1 \quad \text{สำหรับทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

ดังนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบลดลงซึ่งมีขอบเขต

โดยทฤษฎีบท 3.2.3 จะได้ว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ●

ตัวอย่าง 3.2.6 : ลำดับ $\{a_n\}$ในตัวอย่าง 3.2.2(4) เป็นลำดับลู่ออก

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งนิยามดังตัวอย่าง 3.2.2(4) และในตัวอย่าง 2.2.5(2) เราได้แสดงว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับไม่มีขอบเขต ดังนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก ●

ตัวอย่าง 3.2.7 : ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบเพิ่มขึ้น ซึ่งไม่มีขอบเขตบน จงแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบเพิ่มขึ้น ซึ่งไม่มีขอบเขตบน ให้ $M>0$ เนื่องจาก M ไม่เป็นขอบเขตบนของ $\{a_n\}$ ดังนั้น มี $N \in I^+$ ซึ่ง $a_N > M$ แต่ $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบเพิ่มขึ้น ดังนั้น

$$a_n > M \text{ สำหรับทุก } n \ge N$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ●

บทนิยาม 3.2.8 : ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ และ $\{n_k\}$ เป็นลำดับของจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $n_1 < n_2 < \ldots$ นิยามลำดับ $\{b_k\}$ ดังนี้

$$b_k = a_{n_k} \quad \text{สำหรับทุก } k \in \boldsymbol{I}^+$$

แล้ว เราเรียก $\{b_k\}$ ว่า**ลำดับย่อย (*subsequence*)** ของ $\{a_n\}$

ตัวอย่างเช่น $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\ldots$ เป็นลำดับย่อยลำดับหนึ่งของลำดับ $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ldots$ โดยมี $n_k = 2k-1$ สำหรับทุก $k \in \boldsymbol{I}^+$

บทนิยาม 3.2.9 : ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ และ $m \in \boldsymbol{I}^+$ เรากล่าวว่า m เป็น ***peak index*** ของ $\{a_n\}$ ถ้า $a_n \le a_m$ สำหรับทุก $n \ge m$

ตัวอย่างเช่น $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots$ ทุกจำนวน $m \in \boldsymbol{I}^+$ เป็น *peak index*

$1,-1,2,-1,3,\ldots$ ไม่มี *peak index*

$1,-1,1,-1,\ldots$ ทุกจำนวนเต็มบวกคี่เป็น *peak index*

ทฤษฎีบท 3.2.10 : ทุกลำดับจะมีลำดับย่อยซึ่งเป็นลำดับโมโนโทน

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ พิจารณาตามจำนวน *peak index* ของ $\{a_n\}$ ดังนี้

กรณี 1 : $\{a_n\}$ ไม่มี *peak index*

เนื่องจาก 1 ไม่เป็น *peak index* ของ $\{a_n\}$ ดังนั้น มี $n_1 > 1$ ซึ่ง $a_{n_1} > a_1$

เนื่องจาก n_1 ไม่เป็น *peak index* ของ $\{a_n\}$ ดังนั้น มี $n_2 > n_1$ ซึ่ง $a_{n_2} > a_{n_1}$

ในทำนองเดียวกัน จะมี $n_3 > n_2$ ซึ่ง $a_{n_3} > a_{n_2}$

$\vdots$

ดังนั้น $a_{n_1} < a_{n_2} < a_{n_3} < \ldots < a_{n_k}$

นั่นคือ $\{a_{n_k}\}$ เป็นลำดับย่อยโมโนโทนแบบเพิ่มขึ้นของ $\{a_n\}$

เพราะฉะนั้น $\{a_{n_k}\}$ เป็นลำดับย่อยโมโนโทน

กรณี 2 : $\{a_n\}$ มี *peak index* จำนวนจำกัด

ให้ N เป็น *peak index* ที่มีค่ามากสุด

เนื่องจาก $N+1$ ไม่เป็น *peak index* ของ $\{a_n\}$ ดังนั้น มี $n_1 > N+1$ ซึ่ง $a_{n_1} > a_{N+1}$

เนื่องจาก n_1 ไม่เป็น *peak index* ของ $\{a_n\}$ ดังนั้น มี $n_2 > n_1$ ซึ่ง $a_{n_2} > a_{n_1}$

ในทำนองเดียวกัน จะมี $n_3 > n_2$ ซึ่ง $a_{n_3} > a_{n_2}$

$\vdots$

ดังนั้น $a_{n_1} < a_{n_2} < a_{n_3} < \ldots < a_{n_k}$

นั่นคือ $\{a_{n_k}\}$ เป็นลำดับย่อยโมโนโทนแบบเพิ่มขึ้นของ $\{a_n\}$

เพราะฉะนั้น $\{a_{n_k}\}$ เป็นลำดับย่อยโมโนโทน

กรณี 3 : $\{a_n\}$ มี *peak index* จำนวนอนันต์

ให้ $P = \{\, m \mid m$ เป็น *peak index* ของ $\{a_n\}\,\}$ จะได้ว่า P เป็นเซตอนันต์ และ $P \subset \boldsymbol{I}^+$

ให้ n_1 เป็น *peak index* ที่มีค่าน้อยสุดของ $\{a_n\}$ ดังนั้น $a_{n_1} \geq a_{n_2}$ เมื่อ $n_2 \geq n_1$

ในทำนองเดียวกัน $a_{n_2} \geq a_{n_3}$ เมื่อ $n_3 \geq n_2$

$\vdots$

จะได้ว่า $a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq a_{n_3} \geq \ldots \geq a_{n_k}$

นั่นคือ $\{a_{n_k}\}$ เป็นลำดับย่อยโมโนโทนแบบลดลงของ $\{a_n\}$

เพราะฉะนั้น $\{a_{n_k}\}$ เป็นลำดับย่อยโมโนโทน ■

ทฤษฎีบท 3.2.11 : ลำดับมีขอบเขตจะมีลำดับย่อยซึ่งเป็นลำดับลู่เข้า

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต

โดยทฤษฎีบท 3.2.10 จะได้ว่า $\{a_{n_k}\}$ เป็นลำดับย่อยโมโนโทนของ $\{a_n\}$

ดังนั้น $\{a_{n_k}\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต โดยทฤษฎีบท 3.2.3 จะได้ว่า $\{a_{n_k}\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

เพราะฉะนั้นการพิสูจน์ทฤษฎีบทสมบูรณ์ ■

ทฤษฎีบท 3.2.12 : The Bolzano–Weierstrass Theorem

ให้ a และ b เป็นจำนวนซึ่ง $a<b$ ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่ง $a_n \in [a,b]$ ทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ แล้ว ลำดับ $\{a_n\}$ มีลำดับย่อย $\{a_{n_k}\}$ ซึ่งลู่เข้าสู่ $x \in [a,b]$

พิสูจน์ : กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนซึ่ง $a<b$ ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่ง $a_n \in [a,b]$ แล้วได้ว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต โดยทฤษฎีบท 3.2.11 จะมีลำดับ $\{a_{n_k}\}$ ซึ่งเป็นลำดับย่อยของ $\{a_n\}$ และ $\{a_{n_k}\}$ ลู่เข้าสู่ x โดยทฤษฎีบท 3.1.41 สรุปได้ว่า $x \in [a,b]$ ■

ทฤษฎีบท 3.2.13 : ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าสู่ a แล้ว ทุกลำดับย่อยของ $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ a

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าสู่ a และ $\{a_{n_k}\}$ เป็นลำดับย่อยของ $\{a_n\}$

ให้ $\varepsilon > 0$ จะมี $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$\left|a_n - a\right| < \varepsilon \quad \text{สำหรับทุก } n \ge N$$

เนื่องจาก $\{n_k\}$ เป็นลำดับของจำนวนเต็มบวกซึ่งเป็นลำดับเพิ่มขึ้น จะได้ว่า

$$n_j \ge j \quad \text{สำหรับทุก } j \in \boldsymbol{I}^+$$

ดังนั้น

$$\left|a_{n_k} - a\right| < \varepsilon \quad \text{สำหรับทุก } k \ge N$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = a$ ■

จากทฤษฎีบท 3.2.12 สรุปได้ว่า ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$

ตัวอย่าง 3.2.14 : ให้ $c < 0$ และ $a_1 > 0$ ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับรีเคอซีฟ ซึ่งนิยามดังนี้

$$a_{n+1} = \sqrt{c + a_n} \qquad \text{สำหรับทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

จงแสดงว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนที่ลู่เข้าสู่ α เมื่อ $a_1 > 0$ และ α เป็นรากที่เป็นจำนวนจริงบวกของสมการ $x^2 - x - c = 0$ เมื่อ $x > 0$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $c < 0$ และ $a_1 > 0$ และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับรีเคอซีฟ ซึ่งนิยามดังนี้

$$a_{n+1} = \sqrt{c + a_n} \qquad \text{สำหรับทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

ประการแรกจะแสดงว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทน

ให้ $x > 0$ และ $x^2 - x - c = 0$ เป็นสมการกำลังสอง ดังนั้น $x^2 - x - c = 0$ มีรากของสมการ 2 รากโดยที่รากหนึ่งเป็นจำนวนจริงบวก และอีกรากหนึ่งเป็นจำนวนจริงลบ ให้ α และ β เป็นจำนวนจริงบวก ซึ่ง α และ $-\beta$ เป็นรากของสมการ $x^2 - x - c = 0$ เนื่องจาก

$$\alpha - \beta = 1 \quad \text{และ} \quad \alpha(-\beta) = -c$$

ดังนั้น

$$x^2 - x - c = (x - \alpha)(x + \beta)$$

พิจารณา

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = c + a_n - a_n^2 = (c + a_n) - (c + a_{n-1}) = a_n - a_{n-1}$$

ถ้า $a_n > a_{n-1}$ จะได้ว่า

$$a_{n+1} > a_n$$

และถ้า $a_n < a_{n-1}$ จะได้ว่า

$$a_{n+1} < a_n$$

ดังนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทน
ต่อไปจะแสดงว่า $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ α โดยแยกพิจารณาเป็น 3 กรณี ตามค่าของ a_1 ดังนี้

กรณีที่ 1 : $a_1 > \alpha$

เนื่องจาก

$$x^2 - x - c = (x-\alpha)(x+\beta)$$

ดังนั้น

$$a_1^2 - a_1 - c = (a_1 - \alpha)(a_1 + \beta)$$

และสรุปว่า

$$a_1^2 - a_1 - c > 0 \quad \text{หรือ} \quad a_2 = \sqrt{c + a_1} < a_1$$

เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบลดลง
เนื่องจาก

$$a_n^2 = c + a_{n-1} > c + a_n$$

ดังนั้น

$$a_n^2 - a_n - c > 0$$

จะได้ว่า $a_n > \alpha$ สำหรับทุก n ดังนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนแบบลดลงซึ่งมีขอบเขตล่าง
โดยทฤษฎีบท 3.2.3 สรุปได้ว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า
กำหนดให้ $a \in R$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ จะได้ว่า $a \ge \alpha$ เนื่องจาก

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{c + a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}(c + a_n)} = \sqrt{c + a}$$

ดังนั้น

$$a^2 = c + a \qquad \text{หรือ} \qquad a^2 - a - c = 0$$

เพราะฉะนั้น $a = \alpha$ เป็นคำตอบของสมการ $x^2 - x - c = 0$ และสรุปว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

กรณีที่ 2 : $a_1 < \alpha$

การพิสูจน์เป็นทำนองเดียวกันกับกรณีที่ 1

กรณีที่ 3 : $a_1 = \alpha$

ดังนั้น $a_n = \alpha$ สำหรับทุก n เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าสู่ α และ α เป็นรากของสมการ $x^2 - x - c = 0$ ดังนั้นการพิสูจน์สมบูรณ์ ●

ตัวอย่าง 3.2.15 : กำหนดให้ $a_1 = \sqrt{2}$ และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับรีเคอซีฟ ซึ่งนิยามดังนี้

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \qquad \text{สำหรับทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

จงแสดงว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนที่ลู่เข้า พร้อมทั้งหาลิมิตของ $\{a_n\}$

วิธีทำ : กำหนดให้ $a_1 = \sqrt{2}$ และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับรีเคอซีฟ ซึ่งนิยามดังนี้

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ และให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$a_n < 2$$

ประการแรกเราจะแสดงว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$

(i) $P(1)$ เป็นจริง เพราะว่า

$$a_1 = \sqrt{2} \text{ และ } \sqrt{2} < 2$$

ดังนั้น $a_1 < 2$

(ii) ให้ $k \in \boldsymbol{I}^+$ และ $P(k)$ จริง นั่นคือ $a_k < 2$ เราได้

$$a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} < \sqrt{2+2} = \sqrt{4} < 2$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง และโดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $a_n < 2$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$

ดังนั้น $0 < a_n < 2$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต

ต่อไปจะแสดงว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทน

เนื่องจาก

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

เมื่อยกกำลังสองเราได้

$$a_{n+1}^2 = 2 + a_n$$

หรือ

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = 2 + a_n - a_n^2 = (1 + a_n)(2 - a_n)$$

เพราะว่า $0 < a_n < 2$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ ดังนั้น

$$(1 + a_n)(2 - a_n) > 0$$

นั่นคือ $a_{n+1}^2 < a_n^2$ และสรุปได้ว่า

$$a_{n+1} < a_n \quad \text{สำหรับทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

ดังนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทนซึ่งมีขอบเขต โดยทฤษฎีบท 3.2.3 และ ทฤษฎีบท 3.1.36

$\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าสู่ $a \geq 0$

ประการสุดท้ายจะแสดงการหาลิมิตของ $\{a_n\}$

เนื่องจาก

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + a_n}$$

ดังนั้น

$$a = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(2 + a_n\right)} = \sqrt{2+a}$$

จะได้ว่า

$$a^2 = 2 + a \quad \text{หรือ} \quad a^2 - a - 2 = 0$$

ดังนั้น

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = 2, -1$$

เพราะฉะนั้น ลิมิตของ $\{a_n\}$ เท่ากับ 2 ●

3.3 การลู่เข้าของลำดับโคชี (*Convergence of Cauchy Sequence*)

บทนิยาม 3.3.1 : ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ เรากล่าวว่า $\{a_n\}$ เป็น**ลำดับโคชี *(Cauchy Sequence)*** ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง $|a_n - a_m| < \varepsilon$ สำหรับทุก $m \ge N$ และ $n \ge N$

ทฤษฎีบท 3.3.2 : ลำดับลู่เข้าเป็นลำดับโคชี

พิสูจน์ : ให้ $a \in R$ และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าสู่ a และให้ $\varepsilon > 0$ ดังนั้น มี $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{สำหรับทุก } n \ge N$$

พิจารณาจำนวนเต็ม $m \ge N$ และ $n \ge N$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |(a_n - a) + (a - a_m)| \\ &\le |a_n - a| + |a_m - a| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นการพิสูจน์ทฤษฎีบทสิ้นสุด ■

ทฤษฎีบท 3.3.3 : ลำดับโคชีเป็นลำดับมีขอบเขต

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับโคชี และให้ $\varepsilon > 0$ ดังนั้น มี $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{สำหรับทุก } m \ge N \text{ และ } n \ge N$$

กำหนดให้ $N = m$ จะได้ว่า

$$|a_n - a_N| < 1 \quad \text{สำหรับทุก } m \geq N \text{ และ } n \geq N$$

เลือก $M = max\{|a_N|+1, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|\}$

ดังนั้น

$$|a_n| < M \quad \text{สำหรับทุก } n \in \boldsymbol{I}^+$$

เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต ■

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทที่ให้เงื่อนไขที่เพียงพอและจำเป็นสำหรับการเป็นลำดับลู่เข้าของลำดับโคชี

ทฤษฎีบท 3.3.4 : เกณฑ์ของโคชีสำหรับการลู่เข้าของลำดับ (*The Cauchy Convergence Criterion for Sequences*)

$\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\{a_n\}$ เป็นลำดับโคชี

พิสูจน์ : $(\rightarrow)$ โดยทฤษฎีบท 3.3.2 ลำดับลู่เข้าเป็นลำดับโคชี

$(\leftarrow)$ กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับโคชี โดยทฤษฎีบท 3.3.3 จะได้ว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต โดย *Bolzano-Weierstrass Theorem* จะได้ว่า $\{a_{n_k}\}$ เป็นลำดับย่อยของ $\{a_n\}$ ซึ่งลู่เข้าสู่ a

ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $\{a_n\}$ เป็นลำดับโคชี ดังนั้น มี $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

สำหรับทุก $m \geq N$ และ $n \geq N$ เพราะว่า $\{a_{n_k}\}$ เป็นลำดับลู่เข้าสู่ a ดังนั้น จะมี $K \in I^+$ ซึ่ง

$$|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

สำหรับทุก $k \geq K$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= |(a_n - a_{n_k}) + (a_{n_k} - a)| \\ &\leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นการพิสูจน์ทฤษฎีบทสมบูรณ์ ■

ทฤษฎีบท 3.3.5 : หลักการคอนแทรคชัน (*The Contraction Principle*)

กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ ถ้า มี $r \in \boldsymbol{R}$ ซึ่ง $0 < r < 1$ และ $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq r|a_{n+1} - a_n|$

สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ และมี $r \in (0,1)$ ซึ่ง

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \le r|a_{n+1} - a_n| \qquad (*)$$

สำหรับทุก $n, m \in \boldsymbol{I}^+$ และ $n \ge m$ เราได้ว่า

$$\begin{aligned} a_n - a_m &= (a_{m+1} - a_m) + (a_{m+2} - a_{m+1}) + \ldots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1}) \\ &= \sum_{k=m}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \end{aligned}$$

และโดยการใช้ $(*)$ ซ้ำแล้วซ้ำอีก จะได้

$$|a_{k+1} - a_k| \le r|a_k - a_{k-1}| \le r^2|a_{k-1} - a_{k-2}| \le \cdots \le r^{k-1}|a_2 - a_1|$$

ดังนั้น

$$|a_n - a_m| = \left|\sum_{k=m}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\right| \le \sum_{k=m}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \le \sum_{k=m}^{n-1} r^{k-1}|a_2 - a_1|$$

และ

$$\sum_{k=m}^{n-1} r^{k-1}|a_2 - a_1| = r^{m-1}|a_2 - a_1| \sum_{k=0}^{n-m-1} r^{k-1} = |a_2 - a_1| r^{m-1} \frac{1-r^{n-m}}{1-r} < |a_2 - a_1| r^{m-1} \frac{1}{1-r}$$

ต่อไปเราจะแสดงว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับโคชี ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ เราได้ว่า มี $N_1 \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง

$$r^m < \frac{\varepsilon(1-r)}{|a_2 - a_1|}$$

สำหรับทุก $m \ge N_1$ ให้ $N = N_1 + 1$ สำหรับ $n \ge N$ $m \ge N$ และ $n \ge m$ เราได้

$$|a_n - a_m| < |a_2 - a_1| r^{m-1} \frac{1}{1-r} < \frac{|a_2 - a_1|}{1-r} \frac{\varepsilon(1-r)}{|a_2 - a_1|} = \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับโคชี โดยทฤษฎีบท 3.34 $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ■

ตัวอย่าง 3.3.6 : จงแสดงว่าลำดับที่กำหนดต่อไปนี้ลู่เข้า และหาลิมิตของลำดับ

(1) $a_1 = 1$ และ $a_n = 1 + \dfrac{a_{n-1}}{4}$

(2) $a_1 = \sqrt{2}$ และ $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$

วิธีทำ : (1) กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งนิยามดังนี้

$$a_1 = 1 \quad \text{และ} \quad a_n = 1 + \frac{a_{n-1}}{4} \qquad \text{สำหรับทุก}\, n \in \boldsymbol{I}^+$$

เนื่องจาก

$$\left| a_{n+2} - a_{n+1} \right| = \left| 1 + \frac{a_{n+1}}{4} - 1 - \frac{a_n}{4} \right|$$
$$= \frac{1}{4} \left| a_{n+1} - a_n \right|$$

โดยทฤษฎีบท 3.3.5 จะได้ว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าสู่จำนวนจริง a เนื่องจาก

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a_n}{4}\right)$$

ดังนั้น

$$a = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a_n}{4}\right) = 1 + \frac{a}{4}$$

จะได้ว่า

$$a = 1 + \frac{a}{4} \quad \text{หรือ} \quad a = \frac{4}{3}$$

เพราะฉะนั้น ลิมิตของ $\{a_n\}$ เท่ากับ $\frac{4}{3}$

(2) กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งนิยามดังนี้

$$a_1 = \sqrt{2} \quad \text{และ} \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \ \text{สำหรับทุก}\, n \in \boldsymbol{I}^+$$

ประการแรกจะแสดงว่า $a_n \geq \sqrt{2}$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ และให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$$

เราจะแสดงว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$

(i) $P(1)$ เป็นจริง เพราะว่า

$$a_1 = \sqrt{2} \quad \text{และ} \quad \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

ดังนั้น $a_1 \geq \sqrt{2}$

(ii) ให้ $k \in \boldsymbol{I}^+$ และ $P(k)$ จริง นั่นคือ $a_k \geq \sqrt{2}$ เราได้

$$a_{k+1} = \sqrt{2a_k} \geq \sqrt{2\sqrt{2}} > \sqrt{2}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็น และโดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $a_n \geq \sqrt{2}$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$

ต่อไปจะแสดงว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า เนื่องจาก

$$\left| a_{n+2} - a_{n+1} \right| = \left| \sqrt{2a_{n+1}} - \sqrt{2a_n} \right|$$
$$= \left| \left(\sqrt{2a_{n+1}} - \sqrt{2a_n}\right) \cdot \left[\left(\sqrt{2a_{n+1}} - \sqrt{2a_n}\right) / \left(\sqrt{2a_{n+1}} + \sqrt{2a_n}\right)\right] \right|$$

$$= \left| 2(a_{n+1} - a_n) / \sqrt{2}\left(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}\right) \right|$$
$$= \left| 2(a_{n+1} - a_n) / \sqrt{2}\left(\sqrt{\sqrt{2a_n}} + \sqrt{a_n}\right) \right|$$
$$\leq \left| 2(a_{n+1} - a_n) / \sqrt{2}\left(\sqrt{\sqrt{2\sqrt{2}}} + \sqrt{a_n}\right) \right|$$
$$< \frac{1}{2} \left| a_{n+1} - a_n \right|$$

โดยทฤษฎีบท 3.3.5 จะได้ว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

ประการสุดท้าย จะแสดงการหาลิมิตของ $\{a_n\}$ ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าสู่จำนวนจริง a เนื่องจาก

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2a_n} = \sqrt{2 \lim_{n\to\infty} a_n}$$

ดังนั้น

$$a = \sqrt{2 \lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{2a}$$

จะได้ว่า

$$a^2 - 2a = 0 \quad \text{หรือ} \quad a(a-2) = 0$$

ดังนั้น

$$a = 0 \quad \text{หรือ} \quad a = 2$$

เพราะว่า $a_n \geq \sqrt{2}$ ดังนั้น $a = 2$ เพราะฉะนั้น ลิมิตของ $\{a_n\}$ เท่ากับ 2 ●

เราจะจบสารนิพนธ์นี้โดยการให้นิยามของอนุกรมของลำดับของจำนวนจริงซึ่งนิยามมาจากลำดับของจำนวนจริง ดังนั้นการศึกษาอนุกรมของจำนวนจริงจึงนำผลที่ได้ศึกษาไว้แล้วสำหรับลำดับมาใช้ได้ทั้งหมด

3.4 อนุกรมของจำนวนจริง (*Series of Real Numbers*)

บทนิยาม 3.4.1 : ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ ให้ $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ เราจะเรียกลำดับ $\{S_n\}$ ว่า **อนุกรมของจำนวนจริง (*series of real numbers*)** และเขียนแทนอนุกรมโดย $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ หรือ $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ เรียก a_n ว่า **เทอมที่ $\boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{n^{th}}$ *term*)** ของอนุกรม และเรียก S_n ว่า **ผลบวกย่อยที่ $\boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{n^{th}}$ *partial sum*)** ของอนุกรม

บทนิยาม 3.4.2 : ให้ $\{S_n\}$เป็นลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เรากล่าวว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็น**อนุกรมลู่เข้า (*convergent series*)** ถ้า $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

ถ้า $\{S_n\}$ ลู่เข้าสู่ s เราเรียก s ว่า**ผลบวก (*sum*)** ของอนุกรม และเขียนแทนโดย $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$

ถ้าลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก เรากล่าวว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็น**อนุกรมลู่ออก *(divergent series)***

ตัวอย่าง 3.4.3 : จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $n \in I^+$ และ $\{S_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่งนิยามดังนี้

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$$

เราจะแสดงว่า $\{S_n\}$ ลู่เข้าสู่ 2 ให้ $\varepsilon > 0$

เลือกจำนวนเต็มบวก $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n \geq N$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}|S_n - s| &= \left|1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} - 2\right| \\ &= \left|2 - \frac{1}{2^n} - 2\right| \\ &= \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\{S_n\}$ ลู่เข้าสู่ 2 และ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$ ●

ตัวอย่าง 3.4.4 : จงหาผลบวกของ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

วิธีทำ : เนื่องจาก

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

จะได้ว่า

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

ดังนั้น

$$S_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1}$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\\ &= \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1+(1/n)}\\ &= 1\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$ และ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1$ ●

ตัวอย่าง 3.4.5 : จงแสดงว่าอนุกรมเรขาคณิต *(geometric series)* $a+ar+ar^2+\ldots$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ถ้า $|r|<1$ และมีผลบวกเป็น $\frac{a}{1-r}$

พิสูจน์ : เนื่องจาก

$$\begin{aligned}S_n &= a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1}\\ &= a\left(1+r+r^2+\ldots+r^{n-1}\right)\\ &= \frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r}\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-r}-\lim_{n\to\infty}\frac{ar^n}{1-r}\\ &= \frac{a}{1-r}-\frac{a}{1-r}\lim_{n\to\infty} r^n\\ &= \frac{a}{1-r}\end{aligned}$$

●

ตัวอย่าง 3.4.6 : จงตรวจสอบว่าอนุกรม $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่

วิธีทำ : เนื่องจากอนุกรม $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a=1$ และ

$r = -\frac{1}{3}$ ดังนั้น อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า และ

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots = \frac{1}{1-\left(-1/3\right)} = \frac{3}{4}$$ ●

ตัวอย่าง 3.4.7 : จงแสดงว่าอนุกรมฮาร์โมนิก (*harmonic series*)

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ เป็นอนุกรมลู่ออก

พิสูจน์ : เนื่องจาก

$$S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

เป็นลำดับซึ่งนิยามดังตัวอย่าง 3.2.2(4) ดังนั้น $\{S_n\}$ เป็นลำดับโมโนโทน แต่ในตัวอย่าง 2.2.5(2) ได้แสดงแล้วว่า $\{S_n\}$เป็นลำดับไม่มีขอบเขต และโดยทฤษฎีบท 3.2.3 สรุปได้ว่า $\{S_n\}$เป็นลำดับลู่ออก ดังนั้น $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ เป็นอนุกรมลู่ออก ●

ทฤษฎีบท 3.4.8 : ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า พิจารณา $n \geq 2$ จะได้ว่า

$$S_n - S_{n-1} = \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right) - \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}\right) = a_n$$

ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$$

ถ้าลิมิตของแต่ละเทอมทางขวาหาค่าได้ เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ■

ทฤษฎีบท 3.4.8 มีประโยชน์ในการตรวจสอบว่าอนุกรมเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่ ดังจะเห็นได้จากการแสดงว่าอนุกรมเรขาคณิตลู่ออก เมื่อ $|r| \geq 1$

ถ้า $a_n = ar^n$ แล้ว $\left|ar^{n+1}\right| = \left|ar^n\right||r| \geq \left|ar^n\right| \geq |a| > 0$ สำหรับทุก $n = 0,1,2,\ldots$ เนื่องจาก $0 < a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots$ ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$

เพราะฉะนั้น อนุกรม $a + ar + ar^2 + \ldots$ ลู่ออก เมื่อ $|r| \geq 1$

บทกลับของทฤษฎีบท 3.1.20ไม่จริง นั่นคือเราแสดงได้ว่ามีอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ซึ่ง $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ แต่อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่ออกดังตัวอย่างต่อไปนี้

อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ลู่ออก

เนื่องจาก $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$

เมื่อกำหนด $M > 0$ เลือกจำนวนเต็มบวก $n > M^2$ ดังนั้น $S_n > M$ และสรุปได้ว่า $\{S_n\}$ เป็นลำดับไม่มีขอบเขต เพราะฉะนั้น $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ เป็นอนุกรมลู่ออก