บทที่ 2

ลำดับของจำนวนจริง

(SEQUENCES OF REAL NUMBERS)

ในบทนี้เราจะเริ่มต้นโดยการนำเสนอบทนิยามของลำดับลู่เข้าว่าเป็นลำดับมีขอบเขตที่มีจุดลิมิตเพียงค่าเดียวซึ่งเป็นบทนิยามของ *Narayan* [3] สำหรับบทนิยามของลำดับลู่เข้าที่ทราบกันดี คือ ถ้าลำดับของจำนวนจริง $\{a_n\}$ ลู่เข้า แล้ว จะมีจำนวนจริง l ซึ่งสอดคล้องว่า สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $|a_n - l| < \varepsilon$ สำหรับทุก $n \geq N$ และสุดท้ายเราได้พิสูจน์ว่าบทนิยามทั้ง 2 ลักษณะเป็นบทนิยามที่สมมูลกัน

2.1 บทนิยามของลำดับของจำนวนจริง (*Definition of Sequences of Real Numbers*)

จะขอเริ่มต้นด้วยการกำหนดสัญลักษณ์แทนเซตต่าง ๆ ที่ใช้ในสารนิพนธ์ดังต่อไปนี้

$\boldsymbol{R}$ แทนเซตของจำนวนจริงทั้งหมด

$\boldsymbol{I}^+$ แทนเซตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมด

และเขียน $A \subset B$ แทนความหมายว่า A เป็นสับเซตของ B

บทนิยาม 2.1.1 : **ลำดับ (*sequence*)** คือฟังก์ชันซึ่งโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมด

ลำดับของจำนวนจริง คือ ลำดับซึ่งมีเรนจ์เป็นสับเซตของ $\boldsymbol{R}$ และจะเขียนแทนลำดับ f ซึ่ง $f(n) = a_n$ ด้วย $\{a_n\}$ หรือ $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ เรียก a_n ว่า**เทอมที่ $\boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{n^{th}}$ *term*)** ของลำดับและเรียก n ว่า **ดัชนี (*index*)** สำหรับลำดับ เมื่อ $n \in \boldsymbol{I}^+$

ในสารนิพนธ์นี้ถ้าไม่กล่าวเป็นอย่างอื่น เมื่อกล่าวถึงลำดับจะหมายถึงลำดับของจำนวนจริง

ตัวอย่าง 2.1.2 : ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของลำดับ $\{a_n\}$

(1) $a_n = (-1)^n$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$

(2) ให้ $c \in (-1, 1)$ และ $a_n = c^n$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$

(3) ให้ $r \in \boldsymbol{R}$ และสำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ นิยาม $\{a_n\}$ ดังนี้

$$a_n = r + r^2 + \ldots + r^n$$

(4) ให้ $a_1 = 1$ และสำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ นิยาม $\{a_n\}$ ดังนี้

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \frac{1}{n} & \text{เมื่อ } a_n^2 \le 2 \\ a_n - \frac{1}{n} & \text{เมื่อ } a_n^2 > 2 \end{cases}$$

เราจะเรียกลำดับซึ่งนิยามใน (4) ว่า **ลำดับรีเคอซีฟ (*recursive sequence*)** กล่าวคือ เป็นลำดับ $\{a_n\}$ ซึ่งนิยาม a_n ในเทอมของ a_k เมื่อ $k < n$

ในหัวข้อต่อไปเราจะกล่าวถึงบทนิยามและทฤษฎีบทต่างๆที่เกี่ยวกับลำดับมีขอบเขตและจุดลิมิตของลำดับ $\{a_n\}$ โดยเราจะพิสูจน์ว่าทุกลำดับซึ่งมีขอบเขตมีจุดลิมิต

2.2 ลำดับมีขอบเขตและจุดลิมิต (*Bounded Sequences and Limit Points)*

บทนิยาม 2.2.1 : กำหนดให้ $A \subset \boldsymbol{R}$ เราเรียกจำนวนจริง u ว่า **ขอบเขตบน *(upper bound)*** ของเซต A ถ้า $u \ge x$ เมื่อ $x \in A$

บทนิยาม 2.2.2: กำหนดให้ $A \subset \boldsymbol{R}$ เราเรียกจำนวนจริง l ว่า **ขอบเขตล่าง *(lower bound)*** ของเซต A ถ้า $l \le x$ เมื่อ $x \in A$

บทนิยาม 2.2.3 : กำหนดให้ $A \subset \boldsymbol{R}$ เรากล่าวว่า A เป็น**เซตมีขอบเขต (*bounded set*)** ถ้ามีช่วง $[a,b]$ ซึ่ง $A \subset [a, b]$

บทนิยาม 2.2.4 : เรากล่าวว่าลำดับ $\{a_n\}$ เป็น**ลำดับมีขอบเขต (*bounded sequence*)** ถ้ามีจำนวนจริงบวก M ซึ่ง $|a_n| \le M$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

เห็นได้ชัดว่า ลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต ก็ต่อเมื่อ $\{a_n : n \in \boldsymbol{I}^+\}$ มีทั้งขอบเขตล่างและขอบเขตบน

ตัวอย่าง 2.2.5 : จงตรวจสอบว่าลำดับ $\{a_n\}$ กำหนดต่อไปนี้เป็นลำดับมีขอบเขตหรือไม่

(1) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

(2) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$

(3) $a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$

พิสูจน์ : (1) ให้ $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
|a_n| &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
&= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\frac{1}{n^n} \\
&= 2 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{2\cdot 3\cdots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\
&< 2 + \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}}\right] \\
&= 2 + \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\Big/\left(1-\frac{1}{2}\right)\right] \\
&< 3
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต

(2) ให้ $a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$

ประการแรกจะแสดงว่า $a_{2^n} \geq 1+\frac{n}{2}$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$a_{2^n} \geq 1+\frac{n}{2}$$

เราจะแสดงว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$

(i) $P(1)$ เป็นจริง เพราะว่า

$$a_2 = 1+\frac{1}{2} \text{ และ } 1+\frac{1}{2} \geq 1+\frac{1}{2}$$

ดังนั้น $a_2 \geq 1+\frac{1}{2}$

(ii) ให้ $k \in \boldsymbol{I}^+$ และ $P(k)$ จริง นั่นคือ $a_{2^k} \geq 1+\frac{k}{2}$ แล้วได้ว่า

$$
\begin{aligned}
a_{2^{k+1}} &= a_{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \ldots + \frac{1}{2^k 2} \\
&\geq 1+\frac{k}{2} + \frac{2^k}{2^k 2} \\
&= 1+\frac{k+1}{2}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง และโดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $a_{2^n} \geq 1+\frac{n}{2}$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$

ต่อไปจะแสดงว่าทุกจำนวนจริงบวก M ไม่เป็นขอบเขตบนของ $\{a_n\}$

ให้ $M>0$ เลือก $n \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง $1+\frac{n}{2} > M$ ดังนั้น

$$\left|a_{2^n}\right| \geq 1+\frac{n}{2} > M$$

เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับไม่มีขอบเขต

(3) ให้ $a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
|a_n| &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} \\
&= 1+\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-2}}\right] \\
&= 1+\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\Big/\left(1-\frac{1}{2}\right)\right] \\
&< 2
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต ●

บทนิยาม 2.2.6 : กำหนดให้ $A \subset \boldsymbol{R}$ และ A เป็นเซตมีขอบเขต เราเรียกจำนวนจริง g ว่า **สมาชิกค่ามากสุด *(greatest member)*** ของ A ถ้า $g \in A$ และ g เป็นขอบเขตบนของ A

บทนิยาม 2.2.7 : กำหนดให้ $A \subset \boldsymbol{R}$ และ A เป็นเซตมีขอบเขต เราเรียกจำนวนจริง l ว่า **สมาชิกค่าน้อยสุด *(smallest member)*** ของ A ถ้า $l \in A$ และ l เป็นขอบเขตล่างของ A

บทนิยาม 2.2.8 : กำหนดให้ $A \subset \boldsymbol{R}$ เรากล่าวว่าจำนวนจริง u เป็น**ขอบเขตบนค่าน้อยสุด (*least upper bound*)** ของ A หรือ ***supremum*** ของ A ถ้า u สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) u เป็นขอบเขตบนของ A

(2) ถ้าจำนวนจริง u' เป็นขอบเขตบนของ A แล้ว $u' \geq u$

บทนิยาม 2.2.9 : กำหนดให้ $A \subset \boldsymbol{R}$ เรากล่าวว่าจำนวนจริง l เป็น**ขอบเขตล่างค่ามากสุด (*greatest lower bound*)** ของ A หรือ ***infimum*** ของ A ถ้า l สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) l เป็นขอบเขตล่างของ A

(2) ถ้าจำนวนจริง l' เป็นขอบเขตล่างของ A แล้ว $l \geq l'$

บทนิยาม 2.2.10 : กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริง แล้ว **อาณาเขต (*neighbourhood*)** ของ x คือช่วงเปิด (a,b) ซึ่ง $x \in (a,b)$

บทนิยาม 2.2.11 : ให้ $A \subset \boldsymbol{R}$ จะกล่าวว่าจำนวนจริง x เป็น**จุดลิมิต (*limit point*)** ของ A ถ้าแต่ละอาณาเขต (a,b) ของ x เราได้ว่า $\{y : y \in A$ และ $y \in (a,b)\}$ เป็นเซตอนันต์

บทนิยาม 2.2.12 : ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ และ a เป็นจำนวนจริง ถ้า $\{n : a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\}$ เป็นเซตอนันต์ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ แล้วจะกล่าวว่า a เป็น**จุดลิมิต (*limit point*)** ของ $\{a_n\}$

เห็นได้ว่า a เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ มีเทอม a_n จำนวนอนันต์เทอมซึ่ง $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

ตัวอย่าง 2.2.13 : จงแสดงว่า

(1) ลำดับ $\{c\}$ มี c เป็นจุดลิมิตเพียงค่าเดียว เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

(2) ลำดับ $\{a_n\}$ มี 0 เป็นจุดลิมิตเพียงค่าเดียว เมื่อ $a_n = \frac{1}{n}$

(3) ลำดับ $\{a_n\}$ มี -1 และ 1 เป็นจุดลิมิต เมื่อ $a_n = (-1)^n$

(4) ลำดับ $\{a_n\}$ ไม่มีจุดลิมิต เมื่อ $a_n = n$

พิสูจน์ : (1) การพิสูจน์เห็นได้ชัด

(2) ประการแรกจะแสดงว่า 0 เป็นจุดลิมิตของ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง $N > \frac{1}{\varepsilon}$ สำหรับทุก $n \ge N$ จะได้ว่า $\frac{1}{n} \le \frac{1}{N} < \varepsilon$

ดังนั้น มีเทอม a_n จำนวนอนันต์เทอม ซึ่ง $a_n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

เพราะฉะนั้น 0 เป็นจุดลิมิตของ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

ประการสุดท้ายจะแสดงว่า $0 \ne a$ ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

กรณีที่ 1 : $a > 0$

เลือก $\varepsilon = \frac{a}{2}$ พิจารณาช่วง $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \left(\frac{a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$

เลือก $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง $\frac{1}{N} < \frac{a}{2}$ สำหรับทุก $n \ge N$ จะได้ว่า $\frac{1}{n} \le \frac{1}{N} < \frac{a}{2}$

ดังนั้น $a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ สำหรับทุก $n \ge N$

นั่นคือ มีเทอม a_n อย่างมากจำนวน $N-1$ เทอม ซึ่ง $a_n \in (\frac{a}{2},\frac{3a}{2})$

เพราะฉะนั้น a ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

กรณีที่ 2 : $a<0$

เลือก $\varepsilon=\frac{|a|}{2}$ พิจารณาช่วง $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ = $(\frac{3a}{2},\frac{a}{2})$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$

เห็นได้ชัดว่า $a_n \notin (\frac{3a}{2},\frac{a}{2})$ สำหรับทุก n

เพราะว่า $a_n>0$ ดังนั้น a ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

(3) ประการแรกจะแสดงว่า 1 เป็น จุดลิมิตของ $\{(-1)^n\}$

ให้ $\varepsilon>0$ สำหรับทุกจำนวนเต็มคู่ n ใด ๆ จะได้ว่า $(-1)^n = 1 < 1+\varepsilon$

ดังนั้น มีเทอม a_n จำนวนอนันต์เทอม ซึ่ง $a_n \in (1-\varepsilon,1+\varepsilon)$

เพราะฉะนั้น 1 เป็นจุดลิมิตของ $\{(-1)^n\}$

ต่อไปจะแสดงว่า -1 เป็นจุดลิมิตของ $\{(-1)^n\}$

ให้ $\varepsilon>0$ สำหรับทุกจำนวนเต็มคี่ n ใด ๆ จะได้ว่า $(-1)^n = -1 > -1-\varepsilon$

ดังนั้น มีเทอม a_n จำนวนอนันต์เทอม ซึ่ง $a_n \in (-1-\varepsilon,-1+\varepsilon)$

เพราะฉะนั้น -1 เป็นจุดลิมิตของ $\{(-1)^n\}$

ประการสุดท้ายจะแสดงว่า $a \in \boldsymbol{R}$ ซึ่ง $a \neq 1$ หรือ $a \neq -1$ ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

กรณีที่ 1 : $a<-1$

เลือก $\varepsilon=\frac{1}{2}|a+1|$ แล้ว $a+\varepsilon<-1$ และ $a+\varepsilon<1$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$

เพราะว่า $a_n=-1$ หรือ $a_n=1$ ดังนั้น $a_n \notin (a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ สำหรับทุก n

เพราะฉะนั้น a ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\{(-1)^n\}$

กรณีที่ 2 : $a>1$

การพิสูจน์เป็นทำนองเดียวกันกับกรณีที่ 1

กรณีที่ 3 : $-1<a<1$

เลือก $\varepsilon=\frac{1}{2}\ min\ \{|a+1|,|a-1|\}$ สำหรับทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$

แล้ว $1 \notin (a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ และ $-1 \notin (a-\varepsilon,a+\varepsilon)$

ดังนั้น $a_n \notin (a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ สำหรับทุก n เพราะฉะนั้น a ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\{(-1)^n\}$

(4) เราจะแสดงว่า $\{a_n\}$ ไม่มีจุดลิมิต

กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ และให้ $\varepsilon>0$ เลือก $n \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง $n > a+\varepsilon$

จะได้ว่า $a_k \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ทุกจำนวนเต็ม $k \geq n$
ดังนั้น มีเทอม a_k อย่างมากจำนวน $n-1$ เทอม ซึ่ง $a_k \in (a+\varepsilon, a-\varepsilon)$
เพราะฉะนั้น a ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\{n\}$ ●

ข้อสังเกต 2.2.14 : a เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ ก็ต่อเมื่อ
ให้ $\varepsilon > 0$ และ m เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วจะมีจำนวนเต็มบวก $m' \geq m$ ซึ่ง $a_{m'} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ (*)

พิสูจน์ : $(\rightarrow)$ กำหนดให้ a เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ ให้ $\varepsilon > 0$ และ m เป็นจำนวนเต็มบวก สมมติว่า m' เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $m' \geq m$ และ $a_{m'} \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$
นั่นคือ มีเทอม a_n อย่างมากจำนวน $m-1$ เทอม ซึ่ง $a_n \in (a+\varepsilon, a-\varepsilon)$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้งกับการเป็นจุดลิมิตของ a ดังนั้น มีจำนวนเต็ม $m' \geq m$ ซึ่ง $a_{m'} \in (a+\varepsilon, a-\varepsilon)$

$(\leftarrow)$ กำหนดให้ (*) เป็นจริง และ ให้ $\varepsilon > 0$
เลือกจำนวนเต็มบวก $m_1 = 1$ จะได้ว่า มีจำนวนเต็มบวก $m_1' \geq m_1$ ซึ่ง $a_{m_1'} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$
เลือกจำนวนเต็มบวก $m_2 = m_1' + 1$ จะได้ว่า มีจำนวนเต็มบวก $m_2' \geq m_2$ ซึ่ง $a_{m_2'} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$
เลือกจำนวนเต็มบวก $m_3 = m_2' + 1$ จะได้ว่า มีจำนวนเต็มบวก $m_3' \geq m_3$ ซึ่ง $a_{m_3'} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$
$\vdots$
นั่นคือ สำหรับทุกจำนวนเต็ม k เมื่อ $k \geq 3$ เลือกจำนวนเต็มบวก $m_{k+1}' \geq m_{k+1}$ โดยที่ $m_{k+1} = m_k' + 1$ ซึ่งทำให้ $a_{m_{k+1}'} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$
ดังนั้น $\{m' : a_{m'} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\}$ เป็นเซตอนันต์
เพราะฉะนั้น a เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ ■

ทฤษฎีบทประกอบ 2.2.15 : Bolzano – Weierstrass Theorem
ทุกเซตอนันต์ที่มีขอบเขตจะมีจุดลิมิต

พิสูจน์ : สามารถดูการพิสูจน์จาก [3]

ทฤษฎีบท 2.2.16 : ทุกลำดับซึ่งมีขอบเขตมีจุดลิมิต

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต และ ให้ $A = \{a_n : n \in \boldsymbol{I}^+\}$
พิจารณา 2 กรณี ต่อไปนี้
กรณีที่ 1 : A เป็นเซตจำกัด

ดังนั้น มี $c \in A$ ซึ่ง $\{n : a_n = c\}$ เป็นเซตอนันต์ เพราะฉะนั้น c เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

กรณีที่ 2 : A เป็นเซตอนันต์

เนื่องจาก $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต ดังนั้น A เป็นเซตอนันต์ซึ่งมีขอบเขต
โดย *Bolzano – Weierstrass Theorem* จะได้ว่า มี a เป็นจุดลิมิตของ A
ดังนั้น สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะได้ว่า $\{n : a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\}$ เป็นเซตอนันต์
เพราะฉะนั้น a เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ และการพิสูจน์ทฤษฎีบทสิ้นสุด ■

ข้อสังเกต 2.2.17 : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต ถ้า E เป็นเซตของจุดลิมิตทั้งหมดของ $\{a_n\}$ โดยที่ $E \neq \phi$ แล้ว E มีขอบเขต

พิสูจน์ : ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต และ E เป็นเซตของจุดลิมิตทั้งหมดของ $\{a_n\}$ โดยที่ $E \neq \phi$ สมมติว่า E ไม่มีขอบเขต
ดังนั้น E ไม่เป็นสับเซตของ $[-r, r]$ สำหรับทุกช่วง $r > 0$
เนื่องจาก $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต ดังนั้น จะมีจำนวนจริงบวก M ซึ่ง $|a_n| \leq M$
เพราะว่า E ไม่เป็นสับเซตของ $[-M, M]$ ดังนั้นมี a ซึ่ง $a \notin [-M, M]$
พิจารณา 2 กรณีต่อไปนี้

กรณีที่ 1 : $a < -M$

ให้ $\varepsilon = \frac{1}{2}|a+M|$ เห็นได้ชัดว่า $a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ซึ่งขัดแย้งกับการเป็นจุดลิมิตของ a

กรณีที่ 2 : $a > M$

การพิสูจน์เป็นทำนองเดียวกันกับกรณีที่ 1
เพราะฉะนั้น E มีขอบเขต ■

ทฤษฎีบท 2.2.18 : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต แล้ว E จะมีสมาชิกค่ามากสุดและสมาชิกค่าน้อยสุด

พิสูจน์ : กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต และ E เป็นเซตของจุดลิมิตทั้งหมดของ $\{a_n\}$ ให้ u เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ E และ l เป็นขอบเขตล่างค่ามากสุดของ E

ประการแรกจะแสดงว่า u เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $u - \frac{\varepsilon}{2}$ ไม่เป็นขอบเขตบนของ E ดังนั้น มี $c \in E$ ซึ่ง

$$u-\frac{\varepsilon}{2} < c \le u < u+\frac{\varepsilon}{2}$$

เพราะว่า c เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ ดังนั้น

$$N=\left\{n: a_n \in \left(c-\frac{\varepsilon}{2}, c+\frac{\varepsilon}{2} \right)\right\}$$

เป็นเซตอนันต์ และ ทุก $n \in N$ จะได้ว่า

$$u-\varepsilon < c-\frac{\varepsilon}{2} < a_n < c+\frac{\varepsilon}{2} < u+\varepsilon$$

จึงสรุปได้ว่า u เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ ดังนั้น $u \in E$ และ u เป็นสมาชิกค่ามากสุด E

ต่อไปจะแสดงว่า l เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $l+\frac{\varepsilon}{2}$ ไม่เป็นขอบเขตล่างของ E ดังนั้น มี $c \in E$ ซึ่ง

$$l-\frac{\varepsilon}{2} < l \le c < l+\frac{\varepsilon}{2}$$

เพราะว่า c เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ ดังนั้น

$$N=\left\{n: a_n \in \left(c-\frac{\varepsilon}{2}, c+\frac{\varepsilon}{2} \right)\right\}$$

เป็นเซตอนันต์ และ ทุก $n \in N$ จะได้ว่า

$$l-\varepsilon < c-\frac{\varepsilon}{2} < a_n < c+\frac{\varepsilon}{2} < l+\varepsilon$$

จึงสรุปได้ว่า l เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ ดังนั้น $l \in E$ และ l เป็นสมาชิกค่าน้อยสุด E ■

บทนิยาม 2.2.19 : จะเรียกสมาชิกค่ามากสุดของ E และ สมาชิกค่าน้อยสุดของ E ในทฤษฎีบท 2.2.18 ว่า **ลิมิตบน *(upper limit)*** และ **ลิมิตล่าง *(lower limit)*** ของลำดับ $\{a_n\}$ และเขียนแทนโดย $\overline{\lim_{n\to\infty}}\ a_n$ และ $\underline{\lim_{n\to\infty}}\ a_n$ ตามลำดับ

ทฤษฎีบท 2.2.20 : u เป็น ลิมิตบนของลำดับ $\{a_n\}$ ก็ต่อเมื่อ u สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) สำหรับทุกจำนวนบวก ε จะได้ว่า $\{n: a_n \ge u+\varepsilon\}$ เป็นเซตจำกัด

(2) สำหรับทุกจำนวนบวก ε จะได้ว่า $\{n: a_n > u-\varepsilon\}$ เป็นเซตอนันต์

พิสูจน์ : $(\rightarrow)$ กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต และ u เป็นลิมิตบนของ $\{a_n\}$

ประการแรกจะแสดงว่าข้อความ (1) เป็นจริง

ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก u เป็นลิมิตบนของ $\{a_n\}$ ดังนั้น $u+\varepsilon$ ไม่เป็นลิมิตบนของ $\{a_n\}$

จะได้ว่า ไม่มีจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ ที่มีค่ามากกว่า $u+\varepsilon$
ดังนั้น $\{n : a_n \geq u+\varepsilon\}$ เป็นเซตจำกัด
เพราะฉะนั้น ข้อความ (1) เป็นจริง

ต่อไปจะแสดงว่าข้อความ (2) เป็นจริง ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก u เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$
ดังนั้น $A = \{n : a_n \in (u-\varepsilon, u+\varepsilon)\}$ เป็นเซตอนันต์
จะได้ว่า $u-\varepsilon < a_n < u+\varepsilon$ สำหรับทุก $n \in A$
เพราะฉะนั้น ข้อความ (2) เป็นจริง

($\leftarrow$) กำหนดให้ข้อความ (1) และ (2) เป็นจริง
จะได้ว่า $A = \{n : a_n \in (u-\varepsilon, u+\varepsilon)\}$ เป็นเซตอนันต์ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$
ดังนั้น u เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

สมมติให้ u' เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ ซึ่ง $u' > u$ และให้ α และ β เป็นจำนวน ซึ่ง

$$\beta > u' > \alpha > u$$

โดยข้อความ (1) จะได้ว่า $\{n : a_n \in (\alpha, \beta)\}$ เป็นเซตจำกัด
ดังนั้น u' ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง
เพราะฉะนั้น u เป็นลิมิตบนของ $\{a_n\}$ ■

ทฤษฎีบท 2.2.21 : l เป็นลิมิตล่างของลำดับ $\{a_n\}$ ก็ต่อเมื่อ l สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) สำหรับทุกจำนวนบวก ε จะได้ว่า $\{n : a_n < l-\varepsilon\}$ เป็นเซตจำกัด

(2) สำหรับทุกจำนวนบวก ε จะได้ว่า $\{n : a_n < l+\varepsilon\}$ เป็นเซตอนันต์

พิสูจน์ : การพิสูจน์เป็นทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 2.2.20 ■

ตัวอย่าง 2.2.22 : จงหาขอบเขตบนค่าน้อยสุด ขอบเขตล่างค่ามากสุด ลิมิตบน และลิมิตล่างของลำดับ $\{a_n\}$ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1) $a_n = (-1)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

(2) $$a_n = \begin{cases} \dfrac{n+1}{n} & \text{เมื่อ } n = 3m \\ \dfrac{n+2}{2n} & \text{เมื่อ } n = 3m+1 \\ \dfrac{1}{n+1} & \text{เมื่อ } n = 3m+2 \end{cases} \qquad \text{สำหรับทุกจำนวนเต็ม } m$$

วิธีทำ : (1) ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $\{a_n\}$ คือ $\frac{3}{2}$ และขอบเขตล่างค่ามากสุดของ $\{a_n\}$ คือ -2 ในการหาลิมิตบนและลิมิตล่างของลำดับ $\{a_n\}$ เราจะหาจุดลิมิตทั้งหมดของลำดับ $\{a_n\}$

ประการแรก จะแสดงว่า 1 เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือกจำนวนเต็มบวก $N > \frac{1}{\varepsilon}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มคู่ $n \geq N$ จะได้ว่า

$$1 < 1 + \frac{1}{n} < 1 + \varepsilon$$

ดังนั้น มีเทอม a_n เป็นจำนวนอนันต์เทอม ซึ่ง $a_n \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ และสรุปได้ว่า 1 เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

ต่อไปจะแสดงว่า -1 เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือกจำนวนเต็มบวก $N > \frac{1}{\varepsilon}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มคี่ $n \geq N$ จะได้ว่า

$$-1-\varepsilon < -1 - \frac{1}{n} < -1$$

ดังนั้น มีเทอม a_n เป็นจำนวนอนันต์เทอม ซึ่ง $a_n \in (-1-\varepsilon, -1+\varepsilon)$ และสรุปได้ว่า -1 เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

ประการสุดท้ายจะแสดงว่า $a \in \boldsymbol{R}$ ซึ่ง $a \neq 1$ หรือ $a \neq -1$ ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

กรณีที่ 1 : $a < -1$

ให้ $\varepsilon = \frac{1}{2}|a+1|$ และเลือกจำนวนเต็มบวก $N > \frac{1}{\varepsilon}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq N$ จะได้ว่า

$$-1 - \frac{1}{n} > a + \varepsilon \qquad \text{หรือ} \qquad 1 + \frac{1}{n} > a + \varepsilon$$

ดังนั้น $a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ สำหรับทุก $n \geq N$ และสรุปได้ว่า a ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

กรณีที่ 2 : $a > 1$

ให้ $\varepsilon = \frac{1}{2}|a-1|$ และเลือกจำนวนเต็มบวก $N > \frac{1}{\varepsilon}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq N$ จะได้ว่า

$$1 + \frac{1}{n} < a - \varepsilon \qquad \text{หรือ} \qquad -1 - \frac{1}{n} < a - \varepsilon$$

ดังนั้น $a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ สำหรับทุก $n \geq N$

เพราะฉะนั้น a ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

กรณีที่ 3 : $-1 < a < 1$

เลือก $\varepsilon = \frac{1}{2}\, min\{|a+1|, |a-1|\}$

เนื่องจาก $a_n < -1$ ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคี่ และ $a_n > 1$ ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคู่

ดังนั้น $a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ สำหรับทุก n และสรุปได้ว่า a ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$
ดังนั้นสรุปได้ว่า ลิมิตบนของ $\{a_n\}$ คือ 1 และลิมิตล่างของ $\{a_n\}$ คือ -1

(2) ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $\{a_n\}$ คือ $\frac{4}{3}$ และขอบเขตล่างค่ามากสุดของ $\{a_n\}$ คือ 0
ในการหาลิมิตบนและลิมิตล่างของลำดับ $\{a_n\}$ เราจะหาจุดลิมิตทั้งหมดของลำดับ $\{a_n\}$

ประการแรก จะแสดงว่า 0 เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือกจำนวนเต็มบวก $N > \frac{1}{\varepsilon}$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n = 3m+2$ ซึ่ง $n \geq N$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} < \varepsilon$$

ดังนั้น มีเทอม a_n เป็นจำนวนอนันต์เทอม ซึ่ง $a_n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ และสรุปได้ว่า
0 เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

ต่อไปจะแสดงว่า $\frac{1}{2}$ เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือกจำนวนเต็มบวก $N > \frac{1}{\varepsilon}$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n = 3m+1$ ซึ่ง $n \geq N$ จะได้ว่า

$$\frac{n+2}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \quad \text{และ} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{N} < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

ดังนั้น มีเทอม a_n เป็นจำนวนอนันต์เทอม ซึ่ง $a_n \in (\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon)$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{2}$ เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

ต่อไปจะแสดงว่า 1 เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือกจำนวนเต็มบวก $N > \frac{1}{\varepsilon}$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n = 3m$ ซึ่ง $n \geq N$ จะได้ว่า

$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \quad \text{และ} \quad 1 + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{N} < 1 + \varepsilon$$

ดังนั้น มีเทอม a_n เป็นจำนวนอนันต์เทอม ซึ่ง $a_n \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$
เพราะฉะนั้น 1 เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$
ประการสุดท้ายจะแสดงว่า $a \in \boldsymbol{R}$ ซึ่ง $a \neq 0$ หรือ $a \neq \frac{1}{2}$ หรือ $a \neq 1$ ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

กรณีที่ 1 : $a < 0$

เลือก $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$ พิจารณาช่วง $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) = (\frac{3a}{2}, \frac{a}{2})$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n
เห็นได้ชัดว่า $a_n \notin (\frac{3a}{2}, \frac{a}{2})$ สำหรับทุก n และสรุปได้ว่า a ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

กรณีที่ 2 : $0 < a < \frac{1}{2}$

ให้ $\varepsilon = \frac{1}{2}\ min\ \{\ |a|, |a-\frac{1}{2}|\ \}$ และเลือกจำนวนเต็มบวก $N > \frac{1}{\varepsilon}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq N$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{n+1} < a-\varepsilon$$

หรือ

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{n} > \frac{1}{2} > a+\varepsilon$$

หรือ

$$1+\frac{1}{n} > \frac{1}{2}+\frac{1}{n} > a+\varepsilon$$

ดังนั้น $a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ สำหรับทุก $n \geq N$

เพราะฉะนั้น a ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

กรณีที่ 3 : $\frac{1}{2} < a < 1$

เลือก $\varepsilon = \frac{1}{2}\ min\{\ |a-\frac{1}{2}|, |a-1|\ \}$ และเลือกจำนวนเต็มบวก $N > \frac{1}{\varepsilon}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq N$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{n} < a-\varepsilon$$

หรือ

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{2} < \frac{1}{2}+\frac{1}{n} < a-\varepsilon$$

หรือ

$$1+\frac{1}{n} > 1 > a+\varepsilon$$

ดังนั้น $a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ สำหรับทุก $n \geq N$ และสรุปได้ว่า a ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

กรณีที่ 4 : $a > 1$

ให้ $\varepsilon = \frac{1}{2}|a-1|$ และเลือกจำนวนเต็มบวก $N > \frac{1}{\varepsilon}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq N$ จะได้ว่า

$$1+\frac{1}{n} < a-\varepsilon \quad \text{หรือ} \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{n} < a-\varepsilon$$

หรือ

$$\frac{1}{n+1} < a-\varepsilon$$

ดังนั้น $a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ สำหรับทุก $n \geq N$ เพราะฉะนั้น a ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$

ดังนั้นสรุปได้ว่า ลิมิตบนของ $\{a_n\}$ คือ 0 และ ลิมิตล่างของ $\{a_n\}$ คือ 1 ●

ในหัวข้อ 2.3 เราจะนำเสนอบทนิยามของลำดับลู่เข้าว่าเป็นลำดับมีขอบเขตที่มีจุดลิมิตเพียงค่าเดียวซึ่งเป็นบทนิยามของ *Narayan* และในทฤษฎีบท 2.3.3 ได้แสดงการพิสูจน์ว่าบทนิยามของ *Narayan* สมมูลกับบทนิยามที่ทราบกันดี

2.3 ลำดับลู่เข้า (*Convergent Sequences*)

บทนิยาม 2.3.1 : เรากล่าวว่า $\{a_n\}$ เป็น**ลำดับลู่เข้า *(convergent sequences)*** ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งมีขอบเขตและมีจุดลิมิตเพียงค่าเดียว และจะเรียกจุดลิมิตนั้นว่า **ลิมิต*(limit)*** ของ $\{a_n\}$

ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่มี a เป็นลิมิต แล้วเรากล่าวว่า $\{a_n\}$ **ลู่เข้าสู่ a** (***converges to a***) และจะเขียนแทนโดย $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

ถ้า $\{a_n\}$ ไม่เป็นลำดับลู่เข้า แล้วจะกล่าวว่า ลำดับ $\{a_n\}$ เป็น**ลำดับลู่ออก *(divergent sequences)***

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของลำดับลู่เข้า

$\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$, $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของลำดับลู่ออก

$\{(-1)^n\}$, $\{1+(-1)^n\}$, $\{n^2\}$

เห็นได้ชัดว่า $\{c\}$ เป็นลำดับลู่เข้าสู่ c

ทฤษฎีบท 2.3.3 : ให้ลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ a ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่งสอดคล้อง $|a_n - a| < \varepsilon$ สำหรับทุก $n \geq N$

พิสูจน์ : $(\rightarrow)$ กำหนดให้ลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ a และให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก a เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ ดังนั้น $A = \{n : a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\}$ เป็นเซตจำกัด

พิจารณา 2 กรณี ต่อไปนี้

กรณีที่ 1 : $A = \phi$

ดังนั้น ทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ จะได้ว่า $|a_n - a| < \varepsilon$

กรณีที่ 2 : $A \neq \phi$

ให้ m เป็นสมาชิกค่ามากสุดของ A และ $N = m+1$

พิจารณา ทุก $n \geq N$ จะได้ว่า $n \notin A$ ดังนั้น $|a_n - a| < \varepsilon$

($\leftarrow$) กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่งสอดคล้องว่า สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $|a_n - a| < \varepsilon$ สำหรับทุก $n \geq N$

ประการแรกจะแสดงว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต

ให้ $\varepsilon = 1$ ดังนั้นมีจำนวนเต็มบวก k ซึ่งสอดคล้องว่า $|a_n - a| < 1$ สำหรับทุก $n \geq k$

เลือก $M = max\left\{|a| + 1, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{k-1}|\right\}$

ดังนั้น $|a_n| \leq M$ ทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ และสรุปได้ว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต

ประการสุดท้าย จะแสดงว่า $\{a_n\}$ มีจุดลิมิตเพียงค่าเดียว

จากกำหนดให้จะได้ว่า a เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ สมมติ a' เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ เมื่อ $a' \neq a$

กรณีที่ 1 : ถ้า $a' > a$

ให้ $\varepsilon = \frac{1}{3}(a - a')$ จะได้ว่า $a' - \varepsilon = a + 2\varepsilon > a + \varepsilon$

เนื่องจาก a เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ ดังนั้น a เป็นลิมิตบนของลำดับ $\{a_n\}$

โดยทฤษฎีบท 2.2.20 (1) ดังนั้น $\{n : a_n \in (a' - \varepsilon, a' + \varepsilon)\}$ เป็นเซตจำกัด

จะได้ว่า a' ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้งของการเป็นจุดลิมิตของ a'

กรณีที่ 2 : ถ้า $a' < a$

ให้ $\varepsilon = \frac{1}{3}|a - a'|$ จะได้ว่า $a' + \varepsilon = a - 2\varepsilon > a - \varepsilon$

เนื่องจาก a เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ ดังนั้น a เป็นลิมิตบนของลำดับ $\{a_n\}$

โดยทฤษฎีบท 2.2.21 (1) ดังนั้น $\{n : a_n \in (a' - \varepsilon, a' + \varepsilon)\}$ เป็นเซตจำกัด

จะได้ว่า a' ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้งของการเป็นจุดลิมิตของ a'

ดังนั้น a เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ เพียงค่าเดียว

เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ a ดังนั้นการพิสูจน์ทฤษฎีบทสมบูรณ์ ■

เงื่อนไขในทฤษฎีบท 2.3.3 เป็นเงื่อนไขที่พอเพียงสำหรับการเป็นลำดับลู่เข้าของลำดับ $\{a_n\}$ คือ บทนิยามของการเป็นลำดับลู่เข้าซึ่งเป็นที่รู้จักกันดี และเราจะใช้บทนิยามนี้ในการตรวจสอบลำดับลู่เข้าดังตัวอย่าง 2.3.4 และตัวอย่าง 2.3.5

ตัวอย่าง 2.3.4 : จงแสดงว่าลำดับ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ลู่เข้าสู่ 0

พิสูจน์ : ให้ $\varepsilon > 0$ เลือกจำนวนเต็มบวก $N > \frac{1}{\varepsilon}$

ดังนั้น $\frac{1}{N} < \varepsilon$ สำหรับทุก $n \geq N$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{n} \le \frac{1}{N} < \varepsilon$$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2.3.3 สรุปได้ว่า ลำดับ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ลู่เข้าสู่ 0 ●

ตัวอย่าง 2.3.5 : จงแสดงว่าลำดับ $\left\{\frac{2}{n^2} + \frac{4}{n} + 3\right\}$ ลู่เข้าสู่ 3

พิสูจน์ : ให้ $\varepsilon > 0$ เลือกจำนวนเต็มบวก $N > \frac{6}{\varepsilon}$ สำหรับทุก $n \ge N$ จะได้ว่า

$$\left|\frac{2}{n^2} + \frac{4}{n} + 3 - 3\right| = \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n} \le \frac{6}{N} < \varepsilon$$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2.3.3 สรุปได้ว่า ลำดับ $\left\{\frac{2}{n^2} + \frac{4}{n} + 3\right\}$ ลู่เข้าสู่ 3 ●

ตัวอย่าง 2.3.6 : จงแสดงว่าลำดับ $\left\{(-1)^n\right\}$ เป็นลำดับลู่ออก

พิสูจน์ : สมมติ $\left\{(-1)^n\right\}$ ลู่เข้าสู่จำนวนจริง a และให้ $\varepsilon = 1$

โดยทฤษฎีบท 2.3.3 จะมี $N \in \boldsymbol{I}^+$ ซึ่ง $\left|(-1)^n - a\right| < 1$ สำหรับทุก $n \ge N$

เนื่องจาก

$$1 - a \le |1 - a| = \left|(-1)^{2N} - a\right| < 1$$

ดังนั้น $a > 0$ และ

$$1 + a \le |1 + a| = \left|-(1 + a)\right| = |-1 - a| = \left|(-1)^{2N+1} - a\right| < 1$$

ดังนั้น $a < 0$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง เพราะฉะนั้น $\left\{(-1)^n\right\}$ เป็นลำดับลู่ออก ●

เราจะจบบทนี้ด้วยเงื่อนไขที่เพียงพอและจำเป็นสำหรับการเป็นลำดับลู่เข้า นั่นคือเงื่อนไขในทฤษฎีบท 2.3.7

ทฤษฎีบท 2.3.7 : $\left\{a_n\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $\left|a_m - a_n\right| < \varepsilon$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม n และ m เมื่อ $n \ge N$ และ $m \ge N$

พิสูจน์ : $(\rightarrow)$ กำหนดให้ $\left\{a_n\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ดังนั้นมีจำนวนจริง a ซึ่ง $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$

ให้ $\varepsilon > 0$ โดยทฤษฎีบท 2.3.3 จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $\left|a_n - a\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ สำหรับทุก $n \ge N$

พิจารณาจำนวนเต็ม $n \ge N$ และจำนวนเต็ม $m \ge N$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
|a_m - a_n| &= |a_m - a + a - a_n| \\
&\le |a_m - a| + |a_n - a| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

($\leftarrow$) กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งสอดคล้องว่า สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $|a_m - a_n| < \varepsilon$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม n และ m เมื่อ $n \ge N$ และ $m \ge N$

ประการแรกจะแสดงว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต

ให้ $\varepsilon = 1$ จากกำหนดให้ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $|a_m - a_n| < 1$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม n และ m เมื่อ $n \ge N$ และ $m \ge N$ ให้ $N = m$ จะได้ว่า

$$|a_N - a_n| < 1 \quad \text{หรือ} \quad |a_n| < |a_N| + 1 \quad \text{สำหรับทุกจำนวนเต็ม}\, n \ge N$$

เลือก $M = max\,\{|a_N| + 1\,, |a_1|\,, |a_2|\,, \ldots, |a_{N-1}|\}$

ดังนั้น $|a_n| \le M$ ทุก $n \in \boldsymbol{I}^+$ เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต

ประการสุดท้ายจะแสดงว่า $\{a_n\}$ มีจุดลิมิตเพียงค่าเดียว

โดยทฤษฎีบท 2.2.16 ได้ว่า $\{a_n\}$ มีจุดลิมิต

กำหนดให้ a' และ a เป็นจุดลิมิตของ $\{a_n\}$ โดยที่ $a' \ne a$ และให้ $\varepsilon > 0$

จากกำหนดให้ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $|a_m - a_n| < \varepsilon$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม n และ m เมื่อ $n \ge N$ และ $m \ge N$ โดยข้อสังเกต 2.2.14 จะมีจำนวนเต็ม $m_1 \ge N$ และจำนวนเต็ม $m_2 \ge N$ ซึ่ง

$$a_{m_1} \in \left(a - \frac{\varepsilon}{3}, a + \frac{\varepsilon}{3}\right) \quad \text{และ} \quad a_{m_2} \in \left(a' - \frac{\varepsilon}{3}, a' + \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
|a - a'| &= |a - a_{m_1} + a_{m_1} - a_{m_2} + a_{m_2} - a'| \\
&\le |a - a_{m_1}| + |a_{m_1} - a_{m_2}| + |a_{m_2} - a'| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

และสรุปได้ว่า $a = a'$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง ดังนั้น $\{a_n\}$ มีจุดลิมิตเพียงค่าเดียว

เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

ดังนั้นการพิสูจน์ทฤษฎีบทสมบูรณ์ ■