

บทคัดย่อ

E.T. Goodwin และ J. Staton (1948) ได้หาค่าของฟังก์ชัน $f(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2} du}{u+x}$

ในช่วง $0.02 \leq x \leq 10.00$ โดยที่ค่าของฟังก์ชันมีความแม่นยำถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 4 โดยใช้
อนุกรมเพิ่ม อนุกรมเชิงเส้นกำกับ และผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ (แต่ในการหา
ค่าของฟังก์ชันยังมีความยุ่งยากซับซ้อน โดยเฉพาะอย่างยิ่ง การแบ่งช่วงของ x ในการคำนวณ
เนื่องจากเทคนิคการคำนวณในสมัยนั้นยังไม่ได้พัฒนามากนัก)

ในการทำวิทยานิพนธ์นี้ จึงได้นำแนวความคิดดังกล่าว มาขยายไปสู่การประมาณค่าของ
ฟังก์ชัน $f(m, n, x) = \int_0^{\infty} \frac{u^m e^{-u^2} du}{u^n + x^n}$ สำหรับ $m, n \in \{0, 1, 2\}$ และ $x \geq 0$ โดยใช้เทคนิคการ
คำนวณทางคณิตศาสตร์หลายๆ วิธีแล้วนำค่าของฟังก์ชันที่คำนวณได้มาเปรียบเทียบกัน

ในส่วนแรกของวิทยานิพนธ์นี้ ได้หาค่าของฟังก์ชัน $f(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2} du}{u+x}$ โดยค่าของ
ฟังก์ชันมีความแม่นยำถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 6 แล้วนำค่าที่ได้ไปเปรียบเทียบกับค่าของฟังก์ชัน ใน
บทความของ E.T. Goodwin และ J. Staton นอกจากนี้ยังได้หาค่าของฟังก์ชัน ในกรณีที่
 $x \rightarrow 0$ และ $x \rightarrow \infty$

ในส่วนที่สองของวิทยานิพนธ์นี้ ได้ตรวจสอบประสิทธิภาพของโปรแกรมสำเร็จรูป โดย
การหาค่าของอินทิกรัล $\int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2} du}{2}$, $\int_0^{\infty} \frac{ue^{-u^2} du}{2}$ และ $\int_0^{\infty} \frac{u^2 e^{-u^2} du}{2}$ โดยวิธีการหาปริพันธ์
เชิงตัวเลข แล้วเปรียบเทียบกับค่าเชิงวิเคราะห์ของอินทิกรัลทั้ง 3 เพื่อหาค่าลิมิตบนที่เหมาะสม
สำหรับที่จะใช้หาค่าของฟังก์ชันในกรณีอื่นๆ

ในส่วนที่สามของวิทยานิพนธ์นี้ หาค่าของฟังก์ชัน $f(m, n, x) = \int_0^{\infty} \frac{u^m e^{-u^2} du}{u^n + x^n}$ ในอีก 5
กรณี โดยใช้อนุกรมเพิ่ม อนุกรมเชิงเส้นกำกับ ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ และ
วิธีการหาปริพันธ์เชิงตัวเลข แล้วนำค่าที่คำนวณได้ของแต่ละวิธีมาเปรียบเทียบกัน

ในส่วนสุดท้ายของวิทยานิพนธ์ประกอบด้วยสองภาคผนวก คือ ในภาคผนวก ก ได้หาค่า
และตรวจสอบพฤติกรรมของฟังก์ชัน $g(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2} du}{u+x^2}$ ซึ่งคล้ายกับฟังก์ชันในวิทยานิพนธ์นี้
และยังได้นำเสนอตัวอย่างการประยุกต์ของปัญหาทางฟิสิกส์ เพื่อเป็นแนวทางในการหาค่าเชิง
เปรียบเทียบ โดยใช้อนุกรมเพิ่ม อนุกรมเชิงเส้นกำกับ และวิธีการหาปริพันธ์เชิงตัวเลข และ
ในภาคผนวก ข ได้เสนอรายละเอียดในการคำนวณบางประการที่ใช้ในการทำวิทยานิพนธ์นี้

Abstract

E.T. Goodwin and J. Staton (1948) evaluated the function $f(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2} du}{u+x}$ to four decimals accuracy for the range $0.02 \leq x \leq 10.00$ by using ascending series, asymptotic series and numerical solution of a differential equation. They showed that each method was valid over a restricted range of x values. However, the results of Goodwin and Staton were unnecessarily complicated because of the old – fashioned computational techniques available in 1948.

In this thesis, their methods are extended to approximate values of the function $f(m,n,x) = \int_0^{\infty} \frac{u^m e^{-u^2} du}{u^n + x^n}$ for $m,n \in \{0,1,2\}$ and $x \geq 0$. Modern computational methods are also used to extend and check the Goodwin and Staton results.

In the first section of the thesis, the function $f(0,1,x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2} du}{u+x}$ considered by Goodwin and Staton is evaluated to six decimals accuracy and compared with the values in their paper. Further, the function $f(0,1,x)$ is evaluated in the limits as $x \rightarrow 0$ and $x \rightarrow \infty$.

In the second section of the thesis, the efficiency of the numerical integration routines in MATLAB is investigated by comparing values obtained from the integrals $\int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2} du}{2}$, $\int_0^{\infty} \frac{ue^{-u^2} du}{2}$ and $\int_0^{\infty} \frac{u^2 e^{-u^2} du}{2}$ with the exact analytical values.

In the third section of the thesis, the other 5 cases of the function $f(m,n,x)$ for $m,n \in \{0,1,2\}$ are evaluated by using ascending series, asymptotic series, numerical solution of differential equations and numerical integration, and the results from the different methods are compared.

The thesis concludes with two appendices. In appendix A, the behaviour of the function $g(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2} du}{u+x^2}$ is investigated and the results are applied to the physical problem of an electrical transmission line. In appendix B, a more detailed analysis is given of some of the numerical methods used throughout the thesis.