ผนวก ค

การพิสูจน์ค่าปรับความเอนเอียงของการคัดเลือกตัวแบบที่พัฒนาเกณฑ์ AIC_C ที่ลดความเอนเอียงโดยใช้การแยกออกของความสมมาตรของข้อสนเทศคูลส์เบล็ค-ไลท์เบอร์ (Kullback's Symmetric Divergence) หรือ KIC_C เสนอโดย คาวานอซ์ (Joseph E. Cavanaugh, 2001)

ค.1 แสดงว่า $B_1(k,\theta_k)=\dfrac{2n(p+1)}{n-p-2}$

พิสูจน์ จาก $B_1(k,\theta_k)=E_{\theta_k}[d(\theta_k,\hat{\theta}_p)]-E_{\theta_k}[-2\ln f(\mathbf{Y}\,|\,\hat{\theta}_p)]$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
d(\theta_k,\theta_p) &= E_{\theta_k}[-2\ln f(\mathbf{Y}\,|\,\theta_p)]\\
&= E_{\theta_k}[n\ln 2\pi\sigma^2+(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})/\sigma^2]\\
&= E_{\theta_k}[n\ln 2\pi\sigma^2]+\frac{1}{\sigma^2}E_{\theta_k}(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})\\
&= n\ln 2\pi\sigma^2+\frac{1}{\sigma^2}[n\sigma^{+^2}+(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}^+)'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}^+)]\\
&= n\ln 2\pi\sigma^2+\frac{n\sigma^{+^2}}{\sigma^2}+(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}^+)'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}^+)/\sigma^2
\end{aligned}
$$

เพราะว่า $E_{\theta_k}[(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})]$

$=n\sigma^{+^2}+(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}^+)'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}^+)$ แสดงใน ค.4

ดังนั้น

$$d(\theta_k,\hat{\theta}_p)=n\ln 2\pi\hat{\sigma}^2+\frac{n\sigma^{+^2}}{\hat{\sigma}^2}+(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}^+)'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}^+)/\hat{\sigma}^2$$

$$
\begin{aligned}
E_{\theta_k}[d(\theta_k,\hat{\theta}_p)] &= E_{\theta_k}\left[n\ln 2\pi+n\ln\hat{\sigma}^2+\frac{n\sigma^{+^2}}{\hat{\sigma}^2}+(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}^+)'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}^+)/\hat{\sigma}^2\right]\\
&= n\ln 2\pi+nE_{\theta_k}(\ln\hat{\sigma}^2)+E_{\theta_k}\left[\frac{n\sigma^{+^2}}{\hat{\sigma}^2}\right]+E_{\theta_k}[(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}^+)'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}^+)/\hat{\sigma}^2]
\end{aligned}
$$

เพราะว่า $E_{\theta_k}\left[\dfrac{n\sigma^{+^2}}{\hat{\sigma}^2}\right]=n^2E_{\theta_k}\left[\dfrac{\sigma^{+^2}}{n\hat{\sigma}^2}\right]$ และ $E(1/u)=\dfrac{1}{m-2}$ $\quad u\sim\chi^2(m)$

ดังนั้น $$E_{\theta_k}\left[\frac{n\sigma^{+^2}}{\hat{\sigma}^2}\right]=\frac{n^2}{(n-p)-2} \qquad \because \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^{+^2}} \sim \chi^2(n-p)$$

และ $E_{\theta_k}[(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}^+)'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}^+)/\hat{\sigma}^2]$

$$= E_{\theta_k}[((\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}^+)'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}^+)/\sigma^{+^2})(n\sigma^{+^2}/n\hat{\sigma}^2)]$$
$$= nE_{\theta_k}[(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}^+)'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}^+)/\sigma^{+^2}]E_{\theta_k}[\sigma^{+^2}/n\hat{\sigma}^2]$$

เนื่องจาก $(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}^+)'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}^+)/\sigma^{+^2} \sim \chi^2(p)$ และ $n\hat{\sigma}^2/\sigma^{+^2} \sim \chi^2(n-p)$

$E(1/u)=\dfrac{1}{m-2}$ ถ้า $u \sim \chi^2(m)$ แสดงใน ค.3

$E(z)=m$ ถ้า $z \sim \chi^2(m)$

ดังนั้น $$E_{\theta_k}[(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}^+)'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}^+)/\hat{\sigma}^2]=np\left(\frac{1}{n-p-2}\right)$$
$$=\frac{np}{n-p-2}$$

เพราะฉะนั้น

$$E_{\theta_k}[d(\theta_k,\hat{\theta}_p)]=n\ln 2\pi+nE_{\theta_k}(\ln\hat{\sigma}^2)+\frac{n^2}{n-p-2}+\frac{np}{n-p-2} \qquad (*1)$$

และ

$$E_{\theta_k}[-2\ln f(\mathbf{Y}\,|\,\hat{\theta}_p)]=E_{\theta_k}[n\ln 2\pi+n\ln\hat{\sigma}^2+n]$$
$$=n\ln 2\pi+nE_{\theta_k}(\ln\hat{\sigma}^2)+n \qquad (*2)$$

จาก (*1) และ (*2) ดังนั้น

$$B_I(k,\theta_k)=E_{\theta_k}[d(\theta_k,\hat{\theta}_p)]-E_{\theta_k}[-2\ln f(\mathbf{Y}\,|\,\hat{\theta}_p)]$$
$$=[n\ln 2\pi+nE_{\theta_k}(\ln\hat{\sigma}^2)+\frac{n^2}{n-p-2}+\frac{np}{n-p-2}]$$
$$-[n\ln 2\pi+nE_{\theta_k}(\ln\hat{\sigma}^2)+n]$$
$$=\frac{n^2}{n-p-2}+\frac{np}{n-p-2}-n$$
$$=\frac{2n(p+1)}{n-p-2}$$

ค.2 แสดงว่า $B_2(p,\theta_k) = n\ln\frac{n}{n-p} + \frac{n}{n-p}$

<u>**พิสูจน์**</u> จาก $B_2(p,\theta_k) = E_{\theta_k}[d(\hat{\theta}_p,\theta_k)] - E_{\theta_k}[d(\hat{\theta}_p,\hat{\theta}_p)]$

พิจารณา $d(\theta_p,\theta_k) = E_{\theta_p}[-2\ln f(\mathbf{Y}\,|\,\theta_k)]$ ทำนองเดียวกับ ค.4

$$= n\ln 2\pi + nE_{\theta_p}(\ln\sigma^{+^2}) + E_{\theta_p}[(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^+)'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^+)/\sigma^{+^2}]$$

$$= n\ln 2\pi + n\ln\sigma^{+^2} + E_{\theta_p}[(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^+)'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^+)/\sigma^{+^2}]$$

$$= n\ln 2\pi + n\ln\sigma^{+^2} + \frac{n\sigma^2}{\sigma^{+^2}} + [(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}^+)'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}^+)/\sigma^{+^2}]$$

เพราะว่า $E_{\theta_p}[(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^+)'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^+)/\sigma^{+^2}]$

$$= E_{\theta_p}[(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})/\sigma^{+^2} + (\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}^+)'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}^+)/\sigma^{+^2}]$$

$$= E_{\theta_p}[(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})/\sigma^{+^2}] + E_{\theta_p}[(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}^+)'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}^+)/\sigma^{+^2}]$$

$$= \frac{n\sigma^2}{\sigma^{+^2}} + (\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}^+)'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}^+)/\sigma^{+^2}$$

ดังนั้น $d(\hat{\theta}_p,\theta_k) = n\ln 2\pi + n\ln\sigma^{+^2} + \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^{+^2}} + (\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}^+)'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}^+)/\sigma^{+^2}$

$$E_{\theta_k}[d(\hat{\theta}_p,\theta_k)] = E_{\theta_k}[n\ln 2\pi + n\ln\sigma^{+^2} + \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^{+^2}} + (\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}^+)'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}^+)/\sigma^{+^2}]$$

$$= n\ln 2\pi + n\ln\sigma^{+^2} + E_{\theta_k}\left(\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^{+^2}}\right) + E_{\theta_k}[(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}^+)'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}^+)/\sigma^{+^2}]$$

เพราะว่า $n\hat{\sigma}^2/\sigma^{+^2} \sim \chi^2(n-p)$ และ $(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}^+)'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}^+)/\sigma^{+^2} \sim \chi^2(p)$

เพราะฉะนั้น $E_{\theta_k}[d(\hat{\theta}_p,\theta_k)] = n\ln 2\pi + n\ln\sigma^{+^2} + n - p + p$

$$= n\ln 2\pi + n\ln\sigma^{+^2} + n \qquad (**1)$$

พิจารณา $d(\theta_p,\theta_p) = E_{\theta_p}[-2\ln f(\mathbf{Y}\,|\,\theta_p)]$

$$= n\ln 2\pi + nE_{\theta_p}(\ln\sigma^2) + E_{\theta_p}[(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})/\sigma^2]$$

$$= n\ln 2\pi + n\ln\sigma^2 + \frac{n\sigma^2}{\sigma^2}$$

$$= n\ln 2\pi + n\ln\sigma^2 + n$$

ดังนั้น $d(\hat{\theta}_p,\hat{\theta}_p) = n\ln 2\pi + n\ln\hat{\sigma}^2 + n$

$$E_{\theta_k}[d(\hat{\theta}_p,\hat{\theta}_p)] = E_{\theta_k}[n\ln 2\pi + n\ln\hat{\sigma}^2 + n]$$

$$= n\ln 2\pi + nE_{\theta_k}(\ln\hat{\sigma}^2) + n$$

$$= n\ln 2\pi + n\ln\sigma^{+^2} + n\ln\frac{n-p}{n} - \frac{n}{n-p} + n \qquad (**2)$$

เพราะว่า $nE_{\theta_k}(\ln\hat{\sigma}^2) = \ln\sigma^{+^2} + \ln\frac{n-p}{n} - \frac{1}{n-p}$ แสดงใน ค.5

จาก (**1) และ (**2) ดังนั้น

$$B_2(p,\theta_k) = E_{\theta_k}[d(\hat{\theta}_p,\theta_k)] - E_{\theta_k}[d(\hat{\theta}_p,\hat{\theta}_p)]$$

$$= [n\ln 2\pi + n\ln\sigma^{+^2} + n] - [n\ln 2\pi + n\ln\sigma^{+^2} + n\ln\frac{n-p}{n} - \frac{n}{n-p} + n]$$

$$= -n\ln\frac{n-p}{n} + \frac{n}{n-p}$$

$$= n\ln\frac{n}{n-p} + \frac{n}{n-p}$$

ค.3 แสดงว่า $E(1/u)=\frac{1}{m-2}$ เมื่อ $u \sim \chi^2(m)$ หรือ $u \sim \text{Gamma}(\alpha = m/2, \beta = 2)$

ดังนี้

$$E(1/u)=\int_0^\infty \frac{1}{u}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}u^{\alpha-1}e^{-u/\beta}du$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\int_0^\infty u^{(\alpha-1)-1}e^{-u/\beta}du$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\int_0^\infty \left(\frac{u}{\beta}\right)^{(\alpha-1)-1} e^{-u/\beta}du(\beta^{\alpha-2})$$

ให้ $y=u/\beta$ ดังนั้น $du=\beta dy$

จะได้
$$E(1/u)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\int_0^\infty y^{(\alpha-1)-1}e^{-y}\beta dy(\beta^{\alpha-2})$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta}\int_0^\infty y^{(\alpha-1)-1}e^{-y}dy$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta}\Gamma(\alpha-1)$$

$$=\frac{(\alpha-2)!}{(\alpha-1)!\beta}$$

$$=\frac{(\alpha-2)!}{\beta(\alpha-1)(\alpha-2)!}$$

$$=\frac{1}{\beta(\alpha-1)}$$

แทน $\alpha=\frac{m}{2}$ และ $\beta=2$

ดังนั้น
$$E(1/u)=\frac{1}{2\left(\frac{m}{2}-1\right)}$$

$$=\frac{1}{m-2}$$

ค.4 แสดงว่า $E_{\theta_k}[(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\beta)'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\beta)] = n\sigma^{+^2} + (\beta-\beta^+)'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\beta-\beta^+)$

ดังนี้

$$E_{\theta_k}[(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\beta)'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\beta)]$$

$$= E_{\theta_k}\{[(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\beta^+)+(\mathbf{X}\beta^+-\mathbf{X}\beta)]'[(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\beta^+)+(\mathbf{X}\beta^+-\mathbf{X}\beta)]\}$$

$$= E_{\theta_k}\{[(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\beta^+)'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\beta^+)\} + E_{\theta_k}\{(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\beta^+)'(\mathbf{X}\beta^+-\mathbf{X}\beta)\}$$

$$+ E_{\theta_k}\{(\mathbf{X}\beta^+-\mathbf{X}\beta)'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\beta^+)\} + E_{\theta_k}\{(\mathbf{X}\beta^+-\mathbf{X}\beta)'(\mathbf{X}\beta^+-\mathbf{X}\beta)\}$$

$$= E_{\theta_k}\{(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\beta^+)'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\beta^+)\} + \{(\mathbf{X}\beta^+-\mathbf{X}\beta)'(\mathbf{X}\beta^+-\mathbf{X}\beta)\}$$

$$= E_{\theta_k}\{(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\beta^+)'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\beta^+)\} + (\beta-\beta^+)'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\beta-\beta^+)$$

เพราะว่า

$$= E_{\theta_k}\{(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\beta^+)'(\mathbf{X}\beta^+-\mathbf{X}\beta)\}$$

$$= E_{\theta_k}\{\mathbf{Y}'(\mathbf{X}\beta^+) - \mathbf{Y}'(\mathbf{X}\beta) - (\mathbf{X}\beta^+)'(\mathbf{X}\beta^+) + (\mathbf{X}\beta^+)'(\mathbf{X}\beta)\}$$

$$= E_{\theta_k}(\mathbf{Y}')(\mathbf{X}\beta^+) - E_{\theta_k}(\mathbf{Y}')(\mathbf{X}\beta) - (\mathbf{X}\beta^+)'(\mathbf{X}\beta^+) + (\mathbf{X}\beta^+)'(\mathbf{X}\beta)$$

$$= (\mathbf{X}\beta^+)'(\mathbf{X}\beta^+) - (\mathbf{X}\beta^+)'(\mathbf{X}\beta) - (\mathbf{X}\beta^+)'(\mathbf{X}\beta^+) + (\mathbf{X}\beta^+)'(\mathbf{X}\beta)$$

$$= 0$$

และ $E_{\theta_k}\{(\mathbf{X}\beta^+-\mathbf{X}\beta)'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\beta^+)\}$

$$= E_{\theta_k}\{(\mathbf{X}\beta^+)'\mathbf{Y} - (\mathbf{X}\beta^+)'(\mathbf{X}\beta^+) - (\mathbf{X}\beta)'\mathbf{Y} + (\mathbf{X}\beta)'(\mathbf{X}\beta^+)\}$$

$$= (\mathbf{X}\beta^+)'E_{\theta_k}(\mathbf{Y}) - (\mathbf{X}\beta^+)'(\mathbf{X}\beta^+) - (\mathbf{X}\beta)'E_{\theta_k}(\mathbf{Y}) + (\mathbf{X}\beta)'(\mathbf{X}\beta^+)$$

$$= (\mathbf{X}\beta^+)'(\mathbf{X}\beta^+) - (\mathbf{X}\beta^+)'(\mathbf{X}\beta^+) - (\mathbf{X}\beta)'(\mathbf{X}\beta^+) + (\mathbf{X}\beta)'(\mathbf{X}\beta^+)$$

$$= 0$$

เนื่องจาก $E_{\theta_k}\{(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\beta^+)'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\beta^+)\} = n\sigma^{+^2}$

เพราะฉะนั้น

$$E_{\theta_k}[(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\beta)'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\beta)] = n\sigma^{+^2} + (\beta-\beta^+)'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\beta-\beta^+)$$

ค.5 แสดง $E_{\theta_k}(\ln\hat{\sigma}^2) \simeq \ln\sigma^{+2} + \ln\frac{n-p}{n} - \frac{1}{n-p}$ โดยใช้อนุกรมเทเลอร์ (Taylor Expansion) ดังต่อไปนี้

พิจารณา z เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบ $\chi^2(n)$ และ $E(z) = n$ ดังนั้นอนุกรมเทเลอร์ของ $\ln z$ คือ

$$\ln z = \ln(E(z)) + \ln'(E(z))(z - E(z)) + \frac{1}{2}\ln''(E(z))(z - E(z))^2 + \ldots$$

$$\simeq \ln n + \frac{1}{n}(z-n) - \frac{1}{2n^2}(z-n)^2$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} E(\ln z) &= \ln n + \frac{1}{n}E(z-n) - \frac{1}{2n^2}E(z-n)^2 \\ &= \ln n - \frac{1}{2n^2}E(z-n)^2 \\ &= \ln n - \frac{1}{2n^2}(E(z^2) - 2nE(z) + n^2) \\ &= \ln n - \frac{1}{2n^2}(E(z^2) - n^2) \\ &= \ln n - \frac{1}{2n^2}(n^2 + 2n - n^2) \\ &= \ln n - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^{+2}} \sim \chi^2(n-p)$

เพราะฉะนั้น
$$E\left(\ln\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^{+2}}\right) \simeq \ln(n-p) - \frac{1}{n-p}$$

$$E\left[\ln\hat{\sigma}^2 + \ln n - \ln\sigma^{+2}\right] = \ln(n-p) - \frac{1}{n-p}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} E\left[\ln\hat{\sigma}^2\right] &= \ln\sigma^{+2} - \ln n + \ln(n-p) - \frac{1}{n-p} \\ &= \ln\sigma^{+2} + \ln\frac{(n-p)}{n} - \frac{1}{n-p} \end{aligned}$$