

บทที่ 1

บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในปัจจุบันการวิจัยในด้านต่างๆ ไม่ว่าจะเป็นด้านเศรษฐศาสตร์ บริหารธุรกิจ สังคมศาสตร์ หรือ วิทยาศาสตร์ จำเป็นต้องใช้วิธีการสถิติเข้ามาช่วยในการวิจัย โดยเฉพาะการวิจัยที่มีการสร้างสมการพยากรณ์ เพื่อใช้คาดคะเนเหตุการณ์ต่างๆ โดยพิจารณาจากปัจจัยที่มีอิทธิพลกับตัวแปรที่ต้องการพยากรณ์ เราเรียกรูปแบบนี้ว่า การวิเคราะห์การถดถอย (Regression Analysis)

การวิเคราะห์การถดถอย (Regression Analysis) เป็นการวิเคราะห์ที่ใช้ในการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระ กับ ตัวแปรตาม โดยความสัมพันธ์อาจมีได้ทั้งในรูปแบบที่เป็นเชิงเส้น และไม่เป็นเชิงเส้น การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ในรูปแบบเชิงเส้น เรียกว่า การวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้น (Linear Regression Analysis)

การวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้น (Linear Regression Analysis) แบ่งออกเป็น การวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นเชิงเดียว (Simple Linear Regression Analysis) เมื่อมีตัวแปรอิสระหนึ่งตัวที่มีความสัมพันธ์กับตัวแปรตาม และ การวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ (Multiple Linear Regression Analysis) เมื่อมีตัวแปรอิสระตั้งแต่สองตัวแปรขึ้นไปที่มีความสัมพันธ์กับตัวแปรตาม แต่ในความเป็นจริงแล้ว ส่วนใหญ่จะพบการวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นพหุคูณมากกว่า การวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นเชิงเดียว เนื่องจาก ในการสร้างสมการถดถอยเชิงเส้น ตัวแปรอิสระส่วนใหญ่จะมีมากกว่า 1 ตัวที่มีความสัมพันธ์กับตัวแปรตาม ดังนั้น ในการวิจัยครั้งนี้ จึงสนใจศึกษาการวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ (Multiple Linear Regression Analysis) ซึ่งเป็นการคัดเลือกตัวแปรอิสระ มาสร้างสมการถดถอยเชิงเส้นที่เลือกตัวแปรอิสระให้น้อยที่สุด แต่ทำให้ได้สมการถดถอยที่สามารถพยากรณ์ได้ถูกต้องและแม่นยำที่สุด ดังนั้น วิธีการที่จะนำมาคัดเลือกตัวแปรอิสระ หรือการคัดเลือกตัวแบบ จึงเป็นสิ่งสำคัญในการวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ

การคัดเลือกตัวแบบที่รู้จักกันทั่วไป ก็คือ การคัดเลือกตัวแปรด้วยสถิติทดสอบเอฟบางส่วน (The Partial F-test Statistic) เช่น วิธีการคัดเลือกตัวแปรแบบไปข้างหน้า (Forward Selection Method) วิธีการกำจัดตัวแปรแบบถอยหลัง (Backward Elimination Method) และวิธีการถดถอย

แบบขั้นบันได (Stepwise Regression Method) เป็นต้น แต่ในอดีตมีนักสถิติหลายท่าน ได้สร้างเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบที่ไม่ได้ใช้สถิติทดสอบเอฟบางส่วน (The Partial F-test Statistic) ในการคัดเลือกตัวแบบ ซึ่งมีอยู่หลายแนวคิดที่ใช้เป็นทางเลือกในการวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นพหุคูณซึ่งกล่าวโดยสรุปดังต่อไปนี้

1. แนวคิดของอาไคเคะ (Akaike, 1973) ใช้ข้อมูลเอนโทรปีแบบคูลล์-ไลท์เบอร์ (Kullback Leibler Information) มาสร้างเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบที่เรียกว่า เกณฑ์ข้อมูลของอาไคเคะ (Akaike's Information Criterion) หรือ เกณฑ์ AIC

2. แนวคิดของมอลโลว์ (Mallow, 1973) คือการนำข้อมูล n ตัวอย่าง มาแบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม โดยกลุ่มแรก นำมาสร้างสมการถดถอย และ กลุ่มที่ 2 ใช้เป็นข้อมูลเพื่อตรวจสอบความสามารถในการพยากรณ์ของตัวแบบ เรียกเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบนี้ว่า Cross-Validation (C_p)

จากแนวคิดของอาไคเคะ (Akaike, 1973) ได้มีผู้พัฒนาเกณฑ์ดังกล่าวอย่างต่อเนื่อง เนื่องจากเกณฑ์ AIC เป็นเกณฑ์ที่ใช้ได้ดี เมื่อขนาดตัวอย่างใหญ่ แต่ถ้าขนาดตัวอย่างเล็ก โอกาสที่ตัวแบบที่คัดเลือกได้มีจำนวนตัวแปรอิสระมากกว่าความเป็นจริง (Overfitting) สูง ดังนั้น เฮอริวิทซ์ และ ไช (Hurvich and Tsai, 1989) ได้พัฒนาเกณฑ์ AIC เมื่อขนาดตัวอย่างเล็ก ในเชิงความน่าจะเป็น เพื่อลดการเกิดปัญหาดังกล่าวลง เรียกเกณฑ์นี้ว่า AIC_C ต่อมา เฮอริวิทซ์ ชัมเว และ ไช (Hurvich, Shumway and Tsai, 1990) เสนอเกณฑ์ใหม่ในอีกแนวคิดหนึ่ง โดยพัฒนาเกณฑ์ AIC ในเชิงการทดลองสุ่มด้วยเทคนิคมอนติคาร์โล ซึ่งลดการเกิดปัญหาเช่นเดียวกัน คือลดโอกาสที่ตัวแบบที่คัดเลือกได้มีจำนวนตัวแปรอิสระมากกว่าความเป็นจริง (Overfitting) เมื่อขนาดตัวอย่างเล็ก เรียกว่า เกณฑ์ AIC_I ซึ่งเกณฑ์ AIC_C และ AIC_I เป็นเกณฑ์ที่ลดโอกาสที่ตัวแบบที่คัดเลือกได้มีจำนวนตัวแปรอิสระมากกว่าความเป็นจริง (Overfitting) ก็จริงแต่อาจทำให้เพิ่มโอกาสที่ตัวแบบที่คัดเลือกได้มีจำนวนตัวแปรอิสระน้อยกว่าความเป็นจริง (Underfitting) เช่นเดียวกัน

จากแนวคิดของมอลโลว์ (Mallow, 1973) ได้มีผู้พัฒนาเกณฑ์ดังกล่าวอย่างต่อเนื่อง เช่นกัน เนื่องจากเกิดปัญหา เช่นเดียวกับ เกณฑ์ AIC ดังนั้น ในปี 2001-2005 มีนักสถิติได้เสนอเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบ เพื่อแก้ไขปัญหาดังกล่าว เมื่อขนาดตัวอย่างเล็ก ตามลำดับดังนี้

ควานอร์ช (Joseph E. Cavanaugh, 2001) ได้เสนอเกณฑ์คัดเลือกตัวแบบที่ใช้แนวคิดการแยกออกของความสมมาตรของข้อมูลเอนโทรปีแบบคูลล์-ไลท์เบอร์ (Kullback's Symmetric Divergence) มาปรับใช้กับ AIC_C และ AIC_I เพื่อให้การคัดเลือกตัวแบบมีความแม่นยำมากขึ้น ในการคัดเลือกตัวแบบการถดถอยเชิงเส้น เรียกเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบใหม่นี้ว่า KIC_C และ

KIC_I ตามลำดับ และ คavanaugh (Joseph E. Cavanaugh) ได้เปรียบเทียบ เกณฑ์ KIC_C และ KIC_I กับ KIC , AIC , AIC_C , AIC_I , C_p , R^2_{adj} , HQ และ SIC สรุปได้ว่า KIC_I คัดเลือกตัวแบบได้แม่นยำกว่าเกณฑ์อื่น เมื่อขนาดตัวอย่างเล็ก และ KIC_C คัดเลือกตัวแบบได้แม่นยำกว่าเกณฑ์อื่น เมื่อขนาดตัวอย่างปานกลางถึงใหญ่

โนตะ เวง ทาคาฮาชิ และ อิโตะ (Kazuo Noda, Jinglong Wang, Rinya Takahashi and Masashi Itoh, 2003) ได้เสนอเกณฑ์คัดเลือกตัวแบบ AIC_n ที่พัฒนาจากเกณฑ์คัดเลือกตัวแบบ AIC ซึ่งสามารถคัดเลือกตัวแบบได้ถูกต้องแม่นยำกว่า AIC เมื่อขนาดตัวอย่างเล็ก และให้ค่าความเสี่ยงที่น้อยกว่า AIC

ราว และ วู (C. Radhakrishna Rao and Yuehua Wu, 2005) ได้เสนอเกณฑ์คัดเลือกตัวแบบ Cross-Validation (C_p) ที่มีความแม่นยำในการคัดเลือกตัวแบบที่ถูกต้องมากขึ้น เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก โดย ราว และ วู นำวิธี Cross-Validation (C_p) เดิม (The Classical Cross-Validation Method) มาเพิ่มฟังก์ชัน C_n เพื่อลดโอกาสตัวแบบที่คัดเลือกได้มีจำนวนตัวแปรอิสระมากกว่า หรือ น้อยกว่าความเป็นจริง ในการคัดเลือกตัวแบบสมการถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ ซึ่งวิธีสร้างฟังก์ชัน C_n เรียกว่า Data-Oriented Penalty ซึ่งเป็นการสร้างฟังก์ชัน C_n จากข้อมูลตัวแปรอิสระและตัวแปรตาม แต่ในอดีต ฟังก์ชัน C_n เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับขนาดตัวอย่างอย่างเดียวยังไม่ได้ขึ้นอยู่กับข้อมูลตัวแปรอิสระและตัวแปรตาม ทำให้ฟังก์ชัน C_n ที่ใช้ในวิธีใหม่ เหมาะสมสำหรับข้อมูลมากขึ้น และ ราว และ วู (C. Radhakrishna Rao and Yuehua Wu) ได้เปรียบเทียบ เกณฑ์ที่เสนอใหม่กับวิธี Cross-Validation (C_p) เดิม สรุปได้ว่า เกณฑ์ที่เสนอใหม่ คัดเลือกตัวแบบได้แม่นยำกว่า เกณฑ์ Cross-Validation (C_p) เดิม เมื่อขนาดตัวอย่างเล็ก

เกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบทั้ง 4 วิธี ที่กล่าวข้างต้น ยังไม่มีผู้ใดทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพ ด้วยเหตุนี้ผู้วิจัย จึงสนใจศึกษาเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการคัดเลือกตัวแบบ 5 วิธี ในการวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ ดังต่อไปนี้

1. การคัดเลือกตัวแบบโดยใช้เกณฑ์ข้อสนเทศของฮาโคเคะที่ปรับค่าความเสี่ยง โดยใช้ตัวประมาณของข้อสนเทศคูลส์แบล็ค-ไลท์เบอร์ (Kullback Leibler Information) หรือ AIC_n เสนอโดย โนตะ เวง ทาคาฮาชิ และ อิโตะ (Kazuo Noda, Jinglong Wang, Rinya Takahashi and Masashi Itoh, 2003)
2. การคัดเลือกตัวแบบที่พัฒนาเกณฑ์ AIC_C ที่ลดความเอนเอียงโดยใช้การแยกออกของความสมมาตรของข้อสนเทศคูลส์แบล็ค-ไลท์เบอร์ (Kullback's Symmetric Divergence) หรือ KIC_C เสนอโดย คavanaugh (Joseph E. Cavanaugh, 2001)

3. การคัดเลือกตัวแบบที่พัฒนาเกณฑ์ AIC_I ที่ลดความเอนเอียงโดยใช้การแยกออกของความสมมาตรของข้อสนเทศคูลส์แบล็ค-ไลท์เบอร์ (Kullback's Symmetric Divergence) หรือ KIC_I เสนอโดย คavanaugh (Joseph E. Cavanaugh, 2001)
 4. การคัดเลือกตัวแบบ Cross-Validation (C_p) ที่ใช้สำหรับตัวอย่างขนาดเล็กหรือ G_n^{CV} ที่ใช้ $C_n^{(R)}$ เสนอโดย ราว และ วู (C. Radhakrishna Rao and Yuehua Wu, 2005)
 5. การคัดเลือกตัวแบบโดยใช้สถิติทดสอบเอฟบางส่วน (The Partial F-test Statistic) ด้วยวิธีการถดถอยแบบขั้นบันได (Stepwise Regression Method)
- การวิจัยครั้งนี้ศึกษาโดยการจำลองข้อมูล เพื่อศึกษาเปรียบเทียบประสิทธิภาพ ในการคัดเลือกตัวแบบแต่ละวิธี โดยพิจารณาจาก ค่าเฉลี่ยของค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Average of Mean Square Error: AMSE) และ ค่าอัตราส่วนผลต่างของค่าเฉลี่ยของค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Ratio of Different Average of Mean Square Error: RDAMSE) เพื่อประกอบการตัดสินใจ

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อศึกษาเปรียบเทียบเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบที่ให้ค่าพยากรณ์ที่มีความถูกต้องและแม่นยำ ในการวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นพหุคูณของเกณฑ์ ดังต่อไปนี้

1. การคัดเลือกตัวแบบโดยใช้เกณฑ์ข้อสนเทศของอาโคเคที่ปรับค่าความเสี่ยง โดยใช้ตัวประมาณของ ข้อสนเทศคูลส์แบล็ค-ไลท์เบอร์ (Kullback Leibler Information)
2. การคัดเลือกตัวแบบที่พัฒนาเกณฑ์ AIC_C ที่ลดความเอนเอียงโดยใช้การแยกออกของความสมมาตรของข้อสนเทศคูลส์แบล็ค-ไลท์เบอร์ (Kullback's Symmetric Divergence)
3. การคัดเลือกตัวแบบที่พัฒนาเกณฑ์ AIC_I ที่ลดความเอนเอียงโดยใช้การแยกออกของความสมมาตรของข้อสนเทศคูลส์แบล็ค-ไลท์เบอร์ (Kullback's Symmetric Divergence)
4. การคัดเลือกตัวแบบ Cross-Validation (C_p) ที่ใช้สำหรับตัวอย่างขนาดเล็กหรือ G_n^{CV} ที่ใช้ $C_n^{(R)}$
5. การคัดเลือกตัวแบบโดยใช้สถิติทดสอบเอฟบางส่วน (The Partial F-test Statistic) ด้วยวิธีการถดถอยแบบขั้นบันได (Stepwise Regression Method)

สมมติฐานของการวิจัย

การคัดเลือกตัวแบบในการวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ การคัดเลือกตัวแบบ Cross-Validation (C_p) ที่ใช้สำหรับตัวอย่างขนาดเล็ก หรือ G_n^{CV} ที่ใช้ $C_n^{(R)}$ เป็นวิธีที่ให้ค่าพยากรณ์ที่มีความถูกต้องและแม่นยำกว่า การคัดเลือกตัวแบบโดยใช้เกณฑ์ข้อสนเทศของอาไคเคะที่ปรับค่าความเสี่ยง โดยใช้ตัวประมาณของข้อสนเทศคูลส์แบล็ค-ไลท์เบอร์ (Kullback Leibler Information), การคัดเลือกตัวแบบที่พัฒนาเกณฑ์ AIC_C ที่ลดความเอนเอียงโดยใช้การแยกออกของความสมมาตรของข้อสนเทศคูลส์แบล็ค-ไลท์เบอร์ (Kullback's Symmetric Divergence), การคัดเลือกตัวแบบที่พัฒนาเกณฑ์ AIC_I ที่ลดความเอนเอียงโดยใช้การแยกออกของความสมมาตรของข้อสนเทศคูลส์แบล็ค-ไลท์เบอร์ (Kullback's Symmetric Divergence) และ การคัดเลือกตัวแบบโดยใช้สถิติทดสอบเอฟบางส่วน (The Partial F-test Statistic) ด้วยวิธีการถดถอยแบบขั้นบันได (Stepwise Regression Method)

ข้อตกลงเบื้องต้น

การวิเคราะห์ตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ มีข้อตกลงเบื้องต้นดังนี้

1. ความคลาดเคลื่อนสุ่ม (e) เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติ
2. ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนสุ่มเป็น 0 นั่นคือ $E(e_i) = 0$
3. ค่าแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนสุ่มเป็นค่าคงที่ที่ไม่ทราบค่า $V(e) = \sigma^2$
4. $Cov(e_i, e_j) = 0$ เมื่อ $i \neq j$

ขอบเขตของการวิจัย

การศึกษานี้มีขอบเขตการวิจัย ดังนี้

1. จำนวนตัวแปรอิสระ เท่ากับ 3 , 6 , 9 และ 12 ตัว
2. กำหนดให้ความคลาดเคลื่อนสุ่มมีการแจกแจงแบบปกติ ค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 1 , 5 และ 10
3. กำหนดขนาดตัวอย่าง (n) ที่ศึกษาขึ้นกับจำนวนตัวแปรอิสระ ดังนี้
 - 3.1 กรณีจำนวนตัวแปรอิสระ 3 ตัว ขนาดตัวอย่างเป็น 10 , 20 , 30 และ 40
 - 3.2 กรณีจำนวนตัวแปรอิสระ 6 ตัว ขนาดตัวอย่างเป็น 10 , 20 , 30 และ 40
 - 3.3 กรณีจำนวนตัวแปรอิสระ 9 ตัว ขนาดตัวอย่างเป็น 15 , 25 , 35 และ 45
 - 3.4 กรณีจำนวนตัวแปรอิสระ 12 ตัว ขนาดตัวอย่างเป็น 20 , 30 , 40 และ 50
4. กำหนดค่าพารามิเตอร์เริ่มต้นในการจำลองข้อมูล
 - 4.1 กรณีตัวแปรอิสระ 3 ตัว ($\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$) เป็น (1,1,1,1)
 - 4.2 กรณีตัวแปรอิสระ 6 ตัว ($\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_6$) เป็น (1,1,1,1,1,1)
 - 4.3 กรณีตัวแปรอิสระ 9 ตัว ($\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_9$) เป็น (1,1,1,1,1,1,1,1,1)
 - 4.4 กรณีตัวแปรอิสระ 12 ตัว ($\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{12}$) เป็น (1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)
5. เกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบโดยใช้เกณฑ์ข้อสนเทศของอาโคเคะ ที่ปรับค่าฟังก์ชันความเสี่ยงโดยใช้ตัวประมาณของข้อสนเทศคูลส์แบล็ค-ไลท์เบอร์ (Kullback Leibler Information) กำหนดให้ $\alpha = 3/4$ และ $\epsilon = 2/5$
6. เกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบวิธีการคัดเลือกตัวแบบโดยใช้สถิติทดสอบเอฟบางส่วน (The Partial F-test Statistic) ด้วยวิธีการถดถอยแบบขั้นบันได (Stepwise Regression Method) กำหนดระดับนัยสำคัญของการทดสอบเพื่อนำตัวแปรอิสระเข้าสมการเป็น 0.05 และระดับนัยสำคัญของการทดสอบเพื่อนำตัวแปรอิสระออกจากสมการเป็น 0.10
7. กำหนดจำนวนทำซ้ำ 500 ครั้ง

เกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบ

เกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ ในการวิจัยนี้ คือ

ค่าเฉลี่ยของค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Average of Mean Square Error: AMSE)

$$MSE_j = \frac{\sum_{i=1}^n (y_{ij} - \hat{y}_{ij})^2}{n - p}$$

$$AMSE = \frac{\sum_{j=1}^{500} MSE_j}{500}$$

เมื่อ y_{ij} แทน ค่าสังเกตที่ i ของการทำซ้ำรอบที่ j เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$
 \hat{y}_{ij} แทน ค่าพยากรณ์ของค่าสังเกตที่ i ของการทำซ้ำรอบที่ j
 p แทน จำนวนค่าคงที่การถดถอยกับพารามิเตอร์สัมประสิทธิ์การถดถอย
 n แทน ขนาดตัวอย่าง

MSE_j แทน ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของการทำซ้ำรอบที่ j

และ ค่าอัตราส่วนผลต่างของค่าเฉลี่ยของค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Ratio of Different Average of Mean Square Error: RDAMSE)

$$RDAMSE_i = \frac{(AMSE_i - AMSE_{\min})}{AMSE_{\min}} \times 100\%$$

เมื่อ $AMSE_i$ แทนค่าเฉลี่ยของค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของวิธีที่ i เมื่อ $i = 1, 2, 3, 4, 5$
 $AMSE_{\min}$ แทนค่าเฉลี่ยของค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่ำสุดของทั้ง 5 วิธี

เกณฑ์ที่ให้ค่าเฉลี่ยของค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย และ ค่าอัตราส่วนผลต่างของค่าเฉลี่ยของค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย ต่ำสุด เป็นเกณฑ์การคัดเลือกตัวแบบที่ดีที่สุด

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ทราบถึงขั้นตอนในการคัดเลือกตัวแบบสมการถดถอยเชิงเส้นพหุคูณของแต่ละเกณฑ์
2. สามารถหาเกณฑ์ที่ใช้ในการหาสมการถดถอยเชิงเส้นพหุคูณที่ใช้กับกลุ่มตัวอย่างขนาดต่างๆ ได้อย่างมีประสิทธิภาพ เพื่อ ลดการเกิด Overfitting และ Underfitting
3. เพื่อขยายแนวคิดและเป็นแนวทางในการศึกษาการคัดเลือกตัวแบบอื่น เช่น ตัวแบบอนุกรมเวลา (Time Series Model) ตัวแบบที่ไม่ใช่สมการถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ และตัวแบบที่ไม่ใช้พารามิเตอร์ (Nonparametric Model) เป็นต้น

คำจำกัดความที่ใช้ในการวิจัย

ตัวแบบเต็มรูป (Full Model)	หมายถึง	ตัวแบบที่ประกอบไปด้วยตัวแปรอิสระทุกตัว
Underfitting	หมายถึง	การที่ตัวแบบที่ได้รับการคัดเลือก (Fitted or Candidate Model) มีจำนวนพารามิเตอร์ น้อยกว่า จำนวนพารามิเตอร์ที่แท้จริงของตัวแบบที่แท้จริง (True Model)
Overfitting	หมายถึง	การที่ตัวแบบที่ได้รับการคัดเลือก (Fitted or Candidate Model) มีจำนวนพารามิเตอร์มากกว่า จำนวนพารามิเตอร์ที่แท้จริงของตัวแบบที่แท้จริง (True Model)
ขนาดตัวอย่างเล็ก	หมายถึง	ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10 เมื่อจำนวนตัวแปรอิสระ เท่ากับ 3 และ 6 ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 15 เมื่อจำนวนตัวแปรอิสระ เท่ากับ 9
ขนาดตัวอย่างปานกลาง	หมายถึง	ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 เมื่อจำนวนตัวแปรอิสระ เท่ากับ 12 ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 , 30 เมื่อจำนวนตัวแปรอิสระ เท่ากับ 3 และ 6 ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 25 , 35 เมื่อจำนวนตัวแปรอิสระ เท่ากับ 9

ขนาดตัวอย่างใหญ่

หมายถึง

ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 , 40 เมื่อจำนวนตัวแปรอิสระ เท่ากับ 12

ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 40 เมื่อจำนวนตัวแปรอิสระ เท่ากับ 3 และ 6

ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 45 เมื่อจำนวนตัวแปรอิสระ เท่ากับ 9

ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50 เมื่อจำนวนตัวแปรอิสระ เท่ากับ 12