

ผนวก ค

ตัวอย่างการคำนวณค่าสถิติทดสอบ

การศึกษาการทดสอบภาวะสารูปสนิทสำหรับการแจกแจงแบบปกติ ได้แก่

1. ตัวสถิติทดสอบ Z_A (Zhang and Wu, 2005)
2. ตัวสถิติทดสอบ Z_C (Zhang and Wu, 2005)
3. ตัวสถิติทดสอบ Z_K (Zhang and Wu, 2005)
4. ตัวสถิติทดสอบ Anderson-Darling (A^2) (Anderson and Darling, 1954)
5. ตัวสถิติทดสอบ Shapiro-Wilk (W) (Shapiro and Wilk, 1965)
6. ตัวสถิติทดสอบ Shapiro-Francia (W') (Shapiro and Francia, 1972)

ซึ่งตัวสถิติทดสอบมีวิธีการคำนวณที่แตกต่างกัน คือ

1. การคำนวณตัวสถิติทดสอบ Z_A

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง X_1, \dots, X_n เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n มีสถิติลำดับคือ $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
-5	6	0	-2	-1	4	2	1	5	7

ทดสอบสมมติฐานภายใต้

สมมติฐานว่าง H_0 : ประชากรมีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน

แย้งกับ H_1 : ประชากรมีไม่มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน

i	X_i	$X_{(i)}$	$X'_{(i)}$	$F_0(X_{(i)})$	$\log F_0(X'_{(i)})$	$\log[1 - F_0(X'_{(i)})]$	(1) + (2)	
					$n - i + 0.5$	$i - 0.5$		
					(1)	(2)		
1	-5	-5	-1.7488	0.0402	-0.3384	-0.0820	-0.4204	
2	6	-2	-0.9658	0.1671	-0.2105	-0.1219	-0.3324	
3	0	-1	-0.7047	0.2405	-0.1900	-0.1100	-0.3000	
4	-2	0	-0.4437	0.3286	-0.1712	-0.1138	-0.2850	
5	-1	1	-0.1827	0.4275	-0.1545	-0.1239	-0.2785	
6	4	2	0.0783	0.5312	-0.1406	-0.1377	-0.2783	
7	2	4	0.6003	0.7259	-0.0915	-0.1991	-0.2906	
8	1	5	0.8614	0.8055	-0.0865	-0.2183	-0.3048	
9	5	6	1.1224	0.8691	-0.0935	-0.2393	-0.3328	
10	7	7	1.3834	0.9167	-0.1739	-0.2616	-0.4355	
รวม								<u>-3.2584</u>

$$Z_A = -\sum_{i=1}^n \left[\frac{\log F_0(X_{(i)})}{n-i+0.5} + \frac{\log [1-F_0(X_{(i)})]}{i-0.5} \right]$$

$$Z_A = -(-3.2584)$$

$$\begin{aligned} \therefore 10Z_A - 32 &= 10(-3.2584) - 32 \\ &= 0.584 \end{aligned}$$

เกณฑ์การตัดสินใจในการทดสอบสมมติฐานคือ จะปฏิเสธสมมติฐานว่างเมื่อ ค่าสถิติทดสอบที่คำนวณได้มีค่ามากกว่าค่าวิกฤตที่เปิดจากตาราง Percentage points of $10Z_A - 32$ for testing normality

ถ้า $\alpha = 0.05$ จะได้จากตาราง Percentage points of $10Z_A - 32$ for testing normality เท่ากับ 2.970 จะสรุปได้ว่าไม่สามารถปฏิเสธสมมติฐานว่าง

2. การคำนวณตัวสถิติทดสอบ Z_c

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง X_1, \dots, X_n เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n มีสถิติลำดับคือ $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
-5	6	0	-2	-1	4	2	1	5	7

ทดสอบสมมติฐานภายใต้

สมมติฐานว่าง H_0 : ประชากรมีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน

แย้งกับ H_1 : ประชากรไม่มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน

i	$X_{(i)}$	$X_{(i)}$	$F_0(X_{(i)})$	$F_0(X_{(i)})^{-1} - 1$	$\frac{n - \frac{1}{2}}{i - \frac{3}{4}} - 1$	$\log \left(\frac{(1)}{(2)} \right)$	$(3)^2$	
				(1)	(2)	(3)		
1	-5	-1.7488	0.0402	23.8997	37.0000	-0.4371	0.1910	
2	-2	-0.9658	0.1671	4.9851	6.6000	-0.2806	0.0787	
3	-1	-0.7047	0.2405	3.1583	3.2222	-0.0200	0.0004	
4	0	-0.4437	0.3286	2.0430	1.9231	0.0605	0.0037	
5	1	-0.1827	0.4275	1.3391	1.2353	0.0807	0.0065	
6	2	0.0783	0.5312	0.8825	0.8095	0.0863	0.0075	
7	4	0.6003	0.7259	0.3777	0.5200	-0.3198	0.1023	
8	5	0.8614	0.8055	0.2415	0.3103	-0.2508	0.0629	
9	6	1.1224	0.8691	0.1506	0.1515	-0.0064	0.0000	
10	7	1.3834	0.9167	0.0908	0.0270	1.2122	1.4695	
รวม								1.9225

$$Z_c = \sum_{i=1}^n \left[\log \left\{ \frac{F_0(X_{(i)})^{-1} - 1}{(n - 0.5)/(i - 0.75) - 1} \right\} \right]^2$$

$$\therefore Z_c = 1.9225$$

เกณฑ์การตัดสินใจในการทดสอบสมมติฐานคือ จะปฏิเสธสมมติฐานว่างเมื่อ ค่าสถิติทดสอบที่คำนวณได้มีค่ามากกว่าค่าวิกฤตที่เปิดจากตาราง Percentage points of Z_c for testing normality

ถ้า $\alpha = 0.05$ จะได้ค่าจากตาราง Percentage points of Z_c for testing normality เท่ากับ 6.650 จะสรุปได้ว่าไม่สามารถปฏิเสธสมมติฐานว่าง

3. การคำนวณตัวสถิติทดสอบ Z_k

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง X_1, \dots, X_n เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n มีสถิติลำดับคือ $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
-5	6	0	-2	-1	4	2	1	5	7

ทดสอบสมมติฐานภายใต้

สมมติฐานว่าง H_0 : ประชากรมีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน

แย้งกับ H_1 : ประชากรไม่มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน

i	$X_{(i)}$	$X'_{(i)}$	$F_0(X'_{(i)})$	$(i-0.5) \log \frac{i-0.5}{nF_0(X'_{(i)})}$	$(n-i+0.5) \log \frac{n-i+0.5}{n[1-F_0(X'_{(i)})]}$	(1) + (2)
				(1)	(2)	
1	-5	-1.7488	0.0402	0.1096	-0.0425	0.0671
2	-2	-0.9658	0.1671	-0.1618	0.0749	-0.0868
3	-1	-0.7047	0.2405	0.0970	-0.0411	0.0560
4	0	-0.4437	0.3286	0.2206	-0.0914	0.1293
5	1	-0.1827	0.4275	0.2307	-0.0957	0.1350
6	2	0.0783	0.5312	0.1912	-0.0800	0.1113
7	4	0.6003	0.7259	-0.7175	0.3713	-0.3462
8	5	0.8614	0.8055	-0.5352	0.2724	-0.2628
9	6	1.1224	0.8691	-0.1894	0.0890	-0.1004
10	7	1.3834	0.9167	0.3387	-0.1108	0.2279 *

$$Z_k = \max_{1 \leq i \leq n} \left[(i-0.5) \log \frac{i-0.5}{nF_0(X_{(i)})} + (n-i+0.5) \log \frac{n-i+0.5}{n[1-F_0(X_{(i)})]} \right]$$

$$\therefore Z_k = 0.2279$$

เกณฑ์การตัดสินใจในการทดสอบสมมติฐานคือ จะปฏิเสธสมมติฐานว่างเมื่อค่าสถิติทดสอบที่คำนวณได้มีค่ามากกว่าค่าวิกฤตที่เปิดจากตาราง Percentage points of Z_k for testing normality

ถ้า $\alpha = 0.05$ จะได้ค่าจากตาราง Percentage points of Z_k for testing normality เท่ากับ 0.992 จะสรุปได้ว่าไม่สามารถปฏิเสธสมมติฐานว่าง

4. การคำนวณตัวสถิติทดสอบ Anderson-Darling (A^2)

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง X_1, \dots, X_n เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n มีสถิติลำดับคือ $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
-5	6	0	-2	-1	4	2	1	5	7

ทดสอบสมมติฐานภายใต้

สมมติฐานว่าง H_0 : ประชากรมีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน

แย้งกับ H_1 : ประชากรไม่มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน

i	$X_{(i)}$	$X'_{(i)}$	$F_0(X'_{(i)})$	$(2i-1) [\ln F(X'_{(i)}) + \ln(1-F(X'_{(n-i+1)}))]$
1	-5	-1.7488	0.0402	-5.7005
2	-2	-0.9658	0.1671	-11.4689
3	-1	-0.7047	0.2405	-15.3116
4	0	-0.4437	0.3286	-16.8488
5	1	-0.1827	0.4275	-14.4663
6	2	0.0783	0.5312	-13.094
7	4	0.6003	0.7259	-9.3446
8	5	0.8614	0.8055	-7.3709
9	6	1.1224	0.8691	-5.492
10	7	1.3834	0.9167	-2.4308
รวม				-101.528

$$A^2 = -n - \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n (2i-1) \left[\ln F(X_{(i)}) + \ln (1-F(X_{(n-i+1)})) \right] \right]$$

$$\therefore A^2 = -10 - \frac{1}{10} (-101.528)$$

$$= 0.152842$$

เกณฑ์การตัดสินใจในการทดสอบสมมติฐานคือ จะปฏิเสธสมมติฐานว่างเมื่อ ค่าสถิติทดสอบที่คำนวณได้มีค่ามากกว่าค่าวิกฤตที่เปิดจากตาราง Percentage points of Anderson-Darling test

ถ้า $\alpha = 0.05$ จะได้จากตาราง Percentage points of Anderson-Darling test

$A^2 \left(1 + \frac{3}{4n} + \frac{9}{4n^2}\right)$ เท่ากับ 0.752 จะสรุปได้ว่าไม่สามารถปฏิเสธสมมติฐานว่าง

5. การคำนวณตัวสถิติทดสอบ Shapiro-Wilk (W)

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง X_1, \dots, X_n เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n มีสถิติลำดับคือ $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
-5	6	0	-2	-1	4	2	1	5	7

ทดสอบสมมติฐานภายใต้

สมมติฐานว่าง H_0 : ประชากรมีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน

แย้งกับ H_1 : ประชากรไม่มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน

i	$X_{(i)}$	$X'_{(i)}$	$X'_{(n-i+1)}$	a_{n-i+1}	$a_{n-i+1} (X'_{(n-i+1)} - X'_{(i)})$	$(X'_{(i)} - \bar{X}')^2$
1	-5	-1.7488	1.3834	0.5739	1.79758	3.05836
2	-2	-0.9658	1.1224	0.3291	0.68721	0.93270
3	-1	-0.7047	0.8614	0.2141	0.33530	0.49667
4	0	-0.4437	0.6003	0.1224	0.12779	0.19690
5	1	-0.1827	0.0783	0.0399	0.01041	0.03338
6	2	0.0783	-0.1827	-	-	0.00613
7	4	0.6003	-0.4437	-	-	0.36041
8	5	0.8614	-0.7048	-	-	0.74194
9	6	1.1224	-0.9658	-	-	1.25973
10	7	1.3834	-1.7488	-	-	1.91378
รวม					2.95829	9.0000

$$W = \frac{\left[\sum_{i=1}^k a_{n-i+1} (X'_{(n-i+1)} - X'_{(i)}) \right]^2}{\sum_{i=1}^n (X'_{(i)} - \bar{X}')^2}$$

$$k = 10/2 = 5$$

$$\therefore W = \frac{(2.95829)^2}{9} = 0.972390$$

เกณฑ์การตัดสินใจในการทดสอบสมมติฐานคือ จะปฏิเสธสมมติฐานว่างเมื่อ ค่าสถิติทดสอบที่คำนวณได้มีค่าน้อยกว่าค่าวิกฤตที่ได้จาก Percentage points of Shapiro-Wilk test

ถ้า $\alpha = 0.05$ จะได้ค่าจากตาราง ค่าวิกฤตที่ได้จาก Percentage points of Shapiro-Wilk test เท่ากับ 0.842 จะสรุปได้ว่าไม่สามารถปฏิเสธสมมติฐานว่าง

6. การคำนวณตัวสถิติทดสอบ Shapiro-Francia (W')

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง X_1, \dots, X_n เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n มีสถิติลำดับคือ $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
-5	6	0	-2	-1	4	2	1	5	7

ทดสอบสมมติฐานภายใต้

สมมติฐานว่าง H_0 : ประชากรมีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน

แย้งกับ H_1 : ประชากรไม่มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน

i	$X_{(i)}$	$X'_{(i)}$	m_i	$m_i X'_{(i)}$	m_i^2	$(X'_{(i)} - \bar{X}')^2$
1	-5	-1.7488	-1.53875	2.69099	2.36775	3.05836
2	-2	-0.9658	-1.00136	0.96708	1.00272	0.93270
3	-1	-0.7047	-0.65606	0.46236	0.43041	0.49667
4	0	-0.4437	-0.37576	0.16674	0.14120	0.19690
5	1	-0.1827	-0.12267	0.02241	0.01505	0.03338
6	2	0.0783	0.12267	0.00961	0.01505	0.00613
7	4	0.6003	0.37576	0.22558	0.14120	0.36041
8	5	0.8614	0.65606	0.56510	0.43041	0.74194
9	6	1.1224	1.00136	1.12390	1.00272	1.25973
10	7	1.3834	1.53875	2.12870	2.36775	1.91378
รวม				8.36247	7.91426	9.0000

$$\begin{aligned}
 W' &= \frac{\left[\sum_{i=1}^n m_i X_{(i)} \right]^2}{\sum_{i=1}^n m_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n (X_{(i)} - \bar{X})^2} \\
 &= \frac{8.36247^2}{(7.91426)(9)} = 0.981784
 \end{aligned}$$

เกณฑ์การตัดสินใจในการทดสอบสมมติฐานคือ จะปฏิเสธสมมติฐานว่างเมื่อ ค่าสถิติทดสอบที่คำนวณได้มีค่าน้อยกว่าค่าวิกฤตที่ได้จาก Percentage points of Shapiro-Francia test