ใบรับรองวิทยานิพนธ์

บัณฑิตวิทยาลัย สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

เรื่อง การออกแบบตัวกรองเชิงเลขไอไออาร์แบบนอตช์ที่ปรับปรุงผลตอบสนองทางความถี่

โดย นายเปาโล มงกุฎวิสุทธิ์

ได้รับอนุมัติให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

_____คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(อาจารย์ ดร.มงคล หวังสถิตย์วงษ์)

21 พฤษภาคม 2550

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

_____ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์มนูญ พ่วงพูล)

_____กรรมการ

(รองศาสตราจารย์สุรพันธ์ ยิ้มมั่น)

_____กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สนธยา บรรลือโชคชัย)

_____กรรมการ

(อาจารย์ ดร.มนตรี คำเงิน)

การออกแบบตัวกรองเชิงเลขไอไออาร์แบบนอตช์ที่ปรับปรุงผลตอบสนองทางความถี่

นายเปาโล มงกุฎวิสุทธิ์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า
บัณฑิตวิทยาลัย สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ
ปีการศึกษา 2549
ลิขสิทธิ์ของสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ชื่อ : นายเปาโล มงกุฎวิสุทธิ์
ชื่อวิทยานิพนธ์ : การออกแบบตัวกรองเชิงเลขไอไออาร์แบบนอตช์ที่ปรับปรุงผลตอบสนองทางความถี่
สาขาวิชา : วิศวกรรมไฟฟ้า
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ
ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ : รองศาสตราจารย์มนูญ พ่วงพูล
รองศาสตราจารย์สุรพันธ์ ยิ้มมั่น
ปีการศึกษา : 2549

บทคัดย่อ

ตัวกรองความถี่แบบนอตช์ (Notch Filter) ทำหน้าที่ในการกำจัดหรือลดทอนความถี่ใดความถี่หนึ่งโดยเฉพาะ ความถี่ที่ทำการกรองนั้นจะอยู่บนแถบความถี่ (Bandwidth Frequency) ของสัญญาณที่เลือกใช้งานพอดี เช่น สัญญาณรบกวนจาก Power line AC 50 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจ (Electrocardiogram:ECG) สำหรับการออกแบบตัวกรองความถี่แบบนอตช์ (Notch Filter) ในแบบดิจิตอลสามารถแบ่งตัวกรองเชิงเลขได้ 2 แบบ คือ แบบเอฟไออาร์ (Finite Impluse Response:FIR) และแบบไอไออาร์ (Infinite Impluse Response:IIR) เนื่องจากตัวกรองเชิงเลขแบบไอไออาร์มีผลตอบสนองทางความถี่ได้คม (Sharp Cut-Off Frequency) และจำนวนออร์เดอร์ในการออกแบบน้อยกว่าแบบเอฟไออาร์มาก จากการศึกษาสมการออร์เดอร์สองของตัวกรองเชิงเลขไอไออาร์แบบนอตช์พบว่า ไม่สามารถที่จะทำการปรับปรุงอัตราการขยายความถี่ผ่าน (Pass-Band Gain) และอัตราการขยายช่วงการเปลี่ยนแปลง (Transition-Band Gain) ให้สมมาตรกันในเวลาเดียวกันได้

ดังนั้นวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงได้นำเสนอการออกแบบเชิงเลขไอไออาร์แบบนอตช์ที่ปรับปรุงผลตอบสนองทางความถี่เพื่อแก้ไขความไม่สมมาตรกันโดยการเพิ่มโพล-ซีโร่ (Pole-Zero) เข้าไปในวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยอีกหนึ่งคู่ด้วยวิธีการวางโพล (Pole Placement)

ผลจากการวิจัยจำนวนออร์เดอร์ที่เพิ่มขึ้นสามารถปรับปรุงให้ผลตอบสนองทางความถี่ดีขึ้นได้ ซึ่งเมื่อทำการเปรียบเทียบผลการจำลองการทำงานด้วยโปรแกรม MATLAB กับการทำงานจริงบนตัวประมวลผลสัญญาณดิจิตอล TMS320C31 ได้ผลใกล้เคียงกัน

(วิทยานิพนธ์มีจำนวนทั้งสิ้น 77 หน้า)

คำสำคัญ : ไอไออาร์,นอตช์,TMS320C31

_____อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์

Name : Mr. Paolo Mongkudvisut
Thesis Title : IIR Notch Filter Design with Improve Frequency Response
Major Field : Electrical Engineering
King Mongkut's Institute of Technology North Bangkok
Thesis Advisors : Associate Professor Manoon Puangpool
Associate Professor Surapun Yimman
Academic Year : 2006

Abstract

Notch filter or narrow band filter is used for elimination or reduction particular frequency. That frequency has a frequency among bandwidth frequency of signal. Example such as power line AC 50 interferes in electrocardiogram. There are two types, Finite Impluse Response:FIR and Infinite Impluse Response:IIR, for designed digital notch filter. Because IIR filter has sharp cut-off and number order less than FIR filter, several researchers have always selected IIR for notch filter. From study, in equation of IIR notch filter is second order that can not be improved pass-band gain and transition-band gain in the same time.

This thesis is present designed IIR notch filter with improve frequency for modified non-symmetry by pair poles-zeroes addition into unit-circle, z-plane , with pole placement method.

From the result of research that added order could improve frequency response is better. When comparison between simulation by MATLAB and implement on DSP-TMS320C31,The results of pass-band gain and transition-band gain had better symmetry.

(Total 77 pages)

Keywords : IIR,NOTCH,TMS320C31

_____ Advisor

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี โดยได้รับความช่วยเหลือจากอาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ รองศาสตราจารย์มนูญ พ่วงพูล และรองศาสตราจารย์สุรพันธ์ ยิ้มมั่น ที่ได้ให้คำแนะนำและปรึกษาในการแก้ปัญหาต่างๆระหว่างการทำงานวิจัย ขอขอบคุณห้องปฏิบัติการประมวลผลสัญญาณเชิงเลข ภาควิชาฟิสิกส์อุตสาหกรรมและอุปกรณ์การแพทย์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ รวมถึงอาจารย์และเจ้าหน้าที่ประจำบัณฑิตวิทยาลัย คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ และ คณะศิลปศาสตร์ประยุกต์ ตลอดจนเพื่อนๆ ทุกคนที่ได้ให้ความสนับสนุนและชี้แนะด้วยดีตลอดมา

ท้ายนี้ผู้วิจัยใคร่ขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา และญาติๆ ซึ่งได้ให้โอกาสทางการศึกษาและกำลังใจอันล้นเหลือแก่ผู้วิจัยเสมอมาจนวิทยานิพนธ์นี้สำเร็จลงได้

เปาโล มงกุฎวิสุทธิ์

สารบัญ

		หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย		ข
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ		ค
กิตติกรรมประกาศ		ง
สารบัญตาราง		ช
สารบัญภาพ		ซ
บทที่ 1	บทนำ	1
	1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา	1
	1.2 วัตถุประสงค์	4
	1.3 ขอบเขตของการวิจัย	4
	1.4 วิธีการวิจัย	4
	1.5 ประโยชน์ของการวิจัย	5
บทที่ 2	ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง	6
	2.1 สัญญาณและระบบ	6
	2.2 ระบบประมวลผลสัญญาณดิจิตอล	6
	2.3 z-transform	9
	2.4 ผลตอบสนองทางความถี่	13
	2.5 การหาผลตอบสนองทางความถี่ด้วยวิธีทางเรขาคณิต	19
	2.6 ตัวกรองดิจิตอล	20
	2.7 ตัวกรองดิจิตอลแบบนอตช์	25
บทที่ 3	ขั้นตอนการออกแบบ	28
	3.1 ขั้นตอนการออกแบบด้วยสมการออร์เดอร์สอง	28
	3.2 ขั้นตอนการปรับปรุงผลตอบสนองทางความถี่	35
	3.3 การหาตำแหน่งโพล-ซีโร่เมื่อมุมเป็นจำนวนเชิงซ้อน	47
บทที่ 4	ผลการทดลองและการเปรียบเทียบผลการทดลอง	53
	4.1 ผลที่ได้จากการจำลองการทำงานด้วย MATLAB	53
	4.2 ผลที่ได้จากการทดลองจริงบน TMS320C31	58
บทที่ 5	สรุปผลและข้อเสนอแนะ	64
	5.1 สรุปผล	64

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
5.2 ข้อเสนอแนะ	64
เอกสารอ้างอิง	67
ภาคผนวก ก สรุปสูตร	68
ภาคผนวก ข บทความที่ได้ตีพิมพ์เผยแพร่	70
ประวัติผู้วิจัย	77

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

3-1 ตารางเปรียบเทียบคำตอบของมุม ϕ ที่ $r = 0.7$ 45

3-2 ตารางเปรียบเทียบคำตอบของมุม ϕ ที่ $r = 0.9$ 46

4-1 สรุปสูตรที่ใช้ในการเปรียบเทียบผลการจำลองการทำงานด้วย MATLAB 55

4-2 สรุปสมการในการจำลองการทำงานเมื่อ $\omega_0 = 0.3\pi, r = 0.7$ 56

4-3 สรุปสมการในการจำลองการทำงานเมื่อ $\omega_0 = 0.3\pi, r = 0.8$ 57

4-4 สรุปสมการในการจำลองการทำงานเมื่อ $\omega_0 = 0.3\pi, r = 0.9$ 57

4-5 สรุปสมการในการใช้งานจริงเมื่อ $\omega_0 = 0.0333\pi, r = 0.96$ 63

สารบัญภาพ

ภาพที่		หน้า
1-1	สัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจกับสัญญาณ 60 Hz	1
1-2	(ก) ผลตอบสนองทางความถี่ที่ไม่ได้ปรับปรุงอัตราการขยายช่วงเปลี่ยนแปลง (ข) ผลตอบสนองทางความถี่ที่ได้จากวิทยานิพนธ์	3
2-1	แสดงลักษณะของสัญญาณที่ใช้กับระบบ Continuous และ Discrete	6
2-2	ระบบประมวลผลสัญญาณดิจิตอล	7
2-3	การแปลงจากสัญญาณอะนาลอกเป็นดิจิตอล	7
2-4	ผลทางด้านอินพุทและเอาท์พุทที่ผ่านตัวประมลผลสัญญาณดิจิตอล	8
2-5	แสดงความสัมพันธ์ระหว่างระนาบ s-plane และ z-palne	10
2-6	โพลและซีโร่บนระนาบ s-plane และ z-plane	12
2-7	แสดงตัวอย่างโพล-ซี่โร่บนระนาบ z-plane	12
2-8	แสดงตัวอย่างผลตอบสนองของภาพที่ 2-7	13
2-9	ภาพโครงสร้างในสมการที่ 2-16	14
2-10	ผลตอบสนองทางความถี่ และโพล-ซีโร่ของสมการที่ 2-18	16
2-11	ภาพโครงสร้างสมการที่ 2-22	15
2-12	แสดงผลตอบสนองทางความถี่ และโพล-ซีโร่พล็อตของสมการที่ 2-32	16
2-13	แสดงช่วงต่างๆของผลตอบสนองทางความถี่	18
2-14	ตัวอย่างการหาผลตอบสนองทางความถี่โดยใช้ Geometric	19
2-15	โครงสร้างไอไออาร์แบบตรงแบบที่ 1 (Direct Form I)	21
2-16	โครงสร้างแบบตรงแบบที่ II ของตัวกรองเชิงเลขแบบไอไออาร์	22
2-17	การต่ออนุกรมของโครงสร้างแบบไอไออาร์	23
2-18	ไอไออาร์ออร์เดอร์สี่ด้วยโครงสร้าง II มาอนุกรมกัน	23
2-19	แสดงการขนานของโครงสร้างตัวกรองเชิงเลขแบบไอไออาร์	24
2-20	โครงสร้างไอไออาร์ออร์เดอร์สี่ที่เกิดจากโครงสร้างรูปแบบที่ II ต่อขนานกัน	24
2-21	แสดงโครงสร้างของตัวกรองเชิงเลขแบบเอฟไออาร์	25
2-22	แสดงผลตอบสนองทางความถี่ของตัวกรองเชิงเลขแบบนอตช์	26
2-23	สัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจกับสัญญาณ 60 Hz	27
3-1	แสดงตำแหน่งของโพล-ซีโร่บนวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วย	29

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่		หน้า
3-2	แสดงความสัมพันธ์ของอัตราขยายระหว่างโพลและซีโร่ในแบบเรขาคณิต	29
3-3	แสดงผลตอบสนองทางความถี่และโพล-ซีโร่เมื่อความยาวของรัศมีของโพลเปลี่ยนแปลงไป	30
3-4	แสดงผลตอบสนองทางความถี่และโพล-ซีโร่เมื่อเปลี่ยนแปลงความถี่นอตช์	30
3-5	แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง Pass-Band Gain ที่ 0 และ π	31
3-6	แสดงการปรับมุมของโพลเพื่อปรับปรุงผลตอบสนองทางความถี่	32
3-7	เปรียบเทียบผลตอบสนองทางความถี่ที่ปรับปรุงมุม ϕ	33
3-8	แสดงผลตอบสนองทางความถี่ที่ได้ทำการปรับปรุงทั้งค่ามุม ϕ และ b_0	34
3-9	เปรียบเทียบผลตอบสนองทางความถี่ที่ $\omega_0 = 0.3\pi$ และ $\omega_0 = 0.7\pi$	35
3-10	แสดงตำแหน่งโพล-ซีโร่ที่ทำการเพิ่มเข้าไปในวงกลมหนึ่งหน่วยอีกหนึ่งคู่	37
3-11	ลักษณะการวางโพล-ซีโร่ที่ทำการวิจัย	38
3-12	ผลตอบสนองทางความถี่เมื่อเครื่องหมายเป็นบวกที่ $r = 0.7$	45
3-13	ผลตอบสนองทางความถี่เมื่อเครื่องหมายเป็นลบที่ $r = 0.7$	45
3-14	ผลตอบสนองทางความถี่เมื่อเครื่องหมายเป็นบวกที่ $r = 0.9$	46
3-15	ผลตอบสนองทางความถี่เมื่อเครื่องหมายเป็นลบที่ $r = 0.9$	46
3-16	สามเหลี่ยมมุมฉาก	47
3-17	แสดงผลตอบสนองเมื่อมุมที่คำนวณได้เป็นจำนวนเชิงซ้อน	51
3-18	แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ω_0 และ r ที่มีผลทำให้มุมโพล ϕ เป็นจำนวนเชิงซ้อน	51
4-1	ผลตอบสนองทางความถี่และโพล-ซีโร่พลอต เมื่อเลือกค่า r แตกต่างกัน	53
4-2	เปรียบเทียบ Magnitude Response และ Group Delay Response ที่ $r = 0.7$	56
4-3	เปรียบเทียบ Magnitude Response และ Group Delay Response ที่ $r = 0.8$	56
4-4	เปรียบเทียบ Magnitude Response และ Group Delay Response ที่ $r = 0.9$	57
4-5	ผลตอบสนองทางความถี่ที่จะนำไปใช้งานจริง	60
4-6	ผลตอบสนองทางความถี่เมื่อผลตอบสนองเป็นการสเกลหนึ่งหน่วย	61
4-7	ผลจากการจำลองด้วย MATLAB และ ทำจริงบน TMS320C31	62
4-8	เปรียบเทียบผลการใช้งานจริงก่อนและหลังการปรับปรุง	63

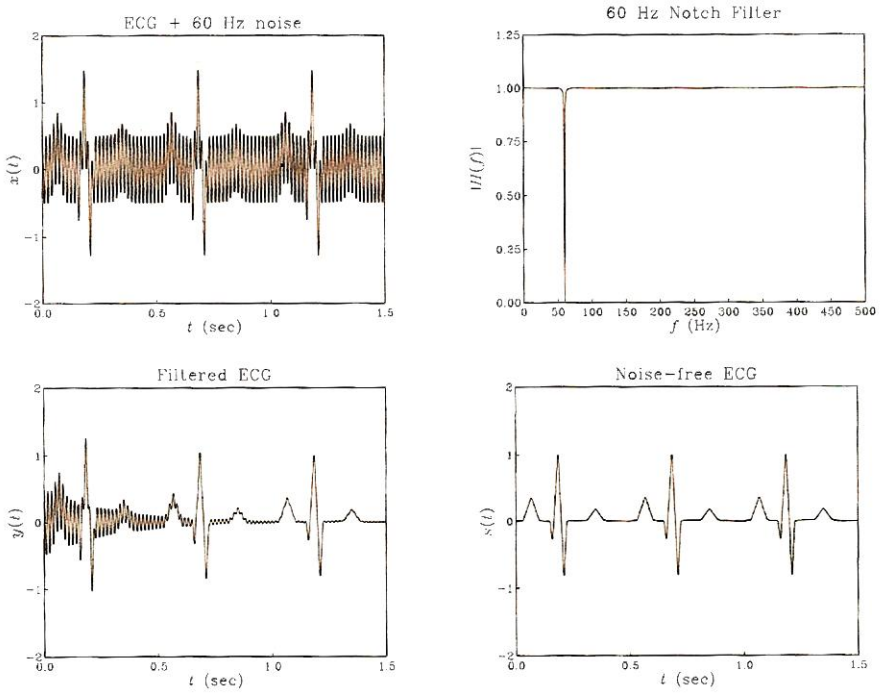
สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่		หน้า
5-1	ผลตอบสนองทางความถี่ของตัวส่งผ่านความถี่ทุกความถี่เมื่อความถี่สุ่มแตกต่างกัน (Range = 14000 Hz)	65
5-2	ผลตอบสนองทางความถี่ของตัวส่งผ่านความถี่ทุกความถี่เมื่อความถี่สุ่มแตกต่างกัน (Range = 800 Hz)	66
5-3	แสดงความลาดเอียงของผลตอบสนองทางความถี่ในทางปฏิบัติ	66

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ตัวกรองความถี่แบบนอตช์ (Notch Filter) เป็นตัวกรองความถี่ชนิดหนึ่งทำหน้าที่คล้ายกับตัวกรองความถี่แบบจำกัดแถบความถี่ผ่าน (Band-Reject Filter) คือยอมให้ความถี่ตลอดย่านความถี่ผ่านได้หมดยกเว้นแถบความถี่ช่วงหนึ่งที่จะไม่ยอมให้ผ่าน แต่สำหรับตัวกรองความถี่แบบนอตช์ (Notch Filter) จะกำจัดหรือลดทอนเฉพาะความถี่ใดความถี่หนึ่งโดยเฉพาะหรือมีความถี่นอตช์เพียงความถี่เดียว [1] เท่านั้น เช่น ใช้ในการลดทอนสัญญาณรบกวนจาก Power Line AC 60 Hz ที่ปะปนมากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจ (Electrocardiogram:ECG)



ภาพที่ 1-1 สัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจกับสัญญาณ 60 Hz

ภาพที่ 1-1 จะอธิบายถึงสัญญาณของคลื่นไฟฟ้าหัวใจ [2] ในขณะที่ไม่มีสัญญาณรบกวน (Noise-Free ECG) เมื่อถูกรบกวนด้วยสัญญาณรบกวน (ECG+60 Hz Noise) ปัญหาที่เกิดขึ้นเนื่องจากการวัดคลื่นไฟฟ้าที่ได้ในเบื้องต้นจะมีขนาดของแรงดันที่น้อยมากๆทำให้สัญญาณรบกวนที่มี

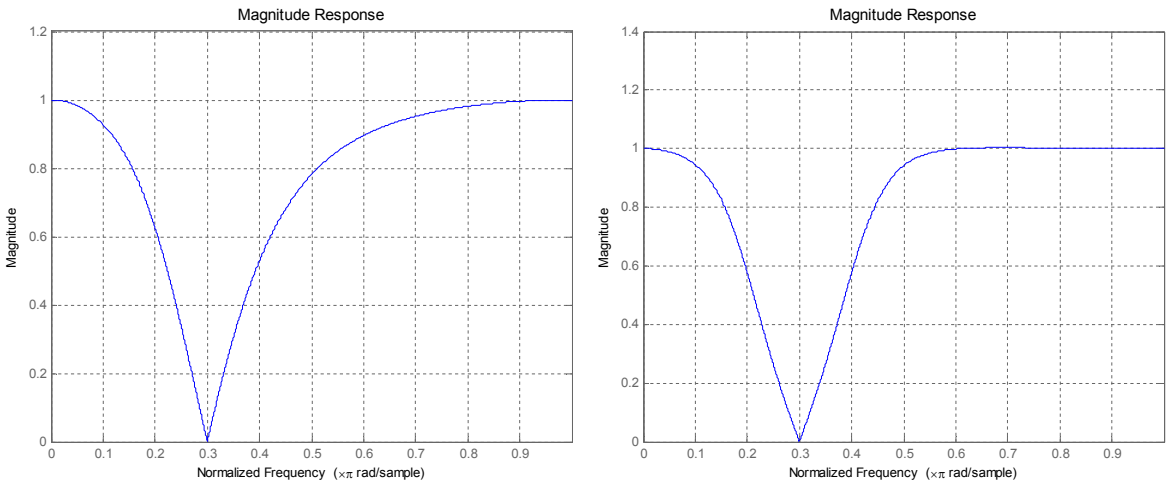
ขนาดน้อยอยู่แล้วเมื่อรวมเข้ากับสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจ และผ่านวงจรขยายจะทำให้สัญญาณรบกวน และสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจถูกขยายไปพร้อมกัน คลื่นไฟฟ้าหัวใจในลักษณะปกติ แพทย์ผู้เชี่ยวชาญสามารถที่จะอธิบายถึงความผิดปกติของหัวใจได้ แต่เมื่อถูกรบกวนดังภาพข้างต้นแล้วจะทำให้การวินิจฉัยโรคเกี่ยวกับหัวใจเกิดความผิดพลาดขึ้นได้ ซึ่งเมื่อผ่านตัวกรอความถี่แบบนอตช์ที่ 60 Hz (60 Hz Notch Filter) ดังภาพจะเป็นผลตอบสนองทางความถี่ที่ 60 Hz จะถูกลดทอนไปเพียงความถี่เดียวส่วนความถี่อื่นๆจะยอมให้ผ่านไปทั้งหมด

ตัวกรองความถี่แบบนอตช์สามารถสร้างขึ้นได้ทั้งที่เป็นแบบอะนาลอก และแบบดิจิตอล สำหรับในแบบอะนาลอกนั้น การออกแบบวงจรเพื่อกำจัดความถี่ใดความถี่หนึ่งโดยเฉพาะทำได้ยากเนื่องจากองค์ประกอบหลายประการซึ่งเมื่อพิจารณาที่ตัวประกอบคุณภาพ (Q-Factor) ที่ได้มาจากอัตราส่วนระหว่างความถี่ตัด (Cut-Off Frequency) กับความกว้างของแถบความถี่ ถ้าตัวประกอบคุณภาพมีค่ามากๆนั้นหมายถึง แถบความถี่มีความแคบมากตามเป็นผลให้ประสิทธิภาพดีขึ้นตามไปด้วย โดยสรุปแล้วในการสร้างในแบบอะนาลอก เมื่อแถบความถี่ที่แคบมากๆ ณ ความถี่ใดความถี่หนึ่งจำเป็นที่จะต้องเลือกใช้อุปกรณ์ให้ตรงกับค่าที่คำนวณมากที่สุด ซึ่งถ้าอุปกรณ์ไม่เหมาะสมอาจทำให้เกิดปัญหาความกว้างของแถบความถี่ (Bandwidth Frequency) และความถี่นอตช์ (Notch Frequency) ที่เลื่อนไปจากค่าที่คำนวณ และปัญหาอื่นๆเช่นขนาดของวงจร ความสมมาตรกันของอัตราการขยายความถี่ผ่าน (Pass-Band Gain) เป็นต้น ดังนั้นการเลือกใช้ในแบบดิจิตอลจึงเหมาะสมกว่าแบบอะนาลอก เนื่องจากการออกแบบไม่ขึ้นอยู่กับค่าคุณภาพของอุปกรณ์หรือความผิดพลาดของอุปกรณ์ การปรับปรุงพารามิเตอร์ตัวใดตัวหนึ่งทำได้ง่าย ผลตอบสนองทางความถี่ที่ได้มีความถูกต้องและแม่นยำใกล้เคียงกับค่าที่ได้ออกแบบไว้ และอื่นๆ

สำหรับในแบบดิจิตอลนั้นสามารถแบ่งได้เป็นตัวกรองเชิงเลขได้เป็น2 แบบ[2]คือ เอฟไออาร์ (FIR:Finite Impluse Response) และแบบไอไออาร์ (IIR:Infinite Impluse Response) เมื่อพิจารณาคุณสมบัติแล้วตัวกรองแบบไอไออาร์จะเหมาะสมกว่าที่จะนำมาทำเป็นตัวกรองแบบนอตช์เนื่องจากไอไออาร์มีผลตอบสนองทางความถี่ได้คม (Sharp Cut-Off Frequency) ซึ่งดีกว่าแบบเอฟไออาร์ และเนื่องจากสมการของไอไออาร์เป็นแบบแลทชั่นแนล (Rational Fuction) มีทั้งโพล (Pole) และซีโร่ (Zero) ทำให้จำนวนออร์เดอร์ในการออกแบบน้อยกว่าแบบเอฟไออาร์ที่มีเฉพาะซีโร่ (Zero) เพียงอย่างเดียว อย่างไรก็ตามตัวกรองแบบไอไออาร์ก็มีข้อเสียตรงที่ คุณสมบัติเฟสไม่เป็นเชิงเส้นและเสถียรภาพไม่ดี การออกแบบทำได้ยาก

ในการออกแบบตัวกรองเชิงเลขแบบนอตช์ เมื่อต้องการที่จะปรับปรุงให้ดีขึ้นตามคุณสมบัติจะต้องคำนึงถึงอัตราการขยายความถี่ผ่าน (Pass-Band Gain) ของตัวกรองความถี่แบบนอตช์ (Notch Filter) ที่จะต้องได้ผลตอบสนองทางความถี่ให้มีความสมมาตรกันตลอดช่วงความกว้างของ

แถบความถี่ (Bandwidth Frequency) เป็นหลักแล้วยังจะต้องพิจารณาถึงช่วงการเปลี่ยนแปลง (Transition-Band Gain) ด้วย งานวิจัยนี้จึงเลือกตัวกรองเชิงเลขแบบไอไออาร์มาใช้ในการปรับปรุงผลตอบสนองทางความถี่ จากการศึกษาถึงตัวกรองเชิงเลขแบบไอไออาร์ที่ได้นำมาทำการปรับปรุงผลตอบสนองทางความถี่ที่ผ่านมา [3] สามารถควบคุมอัตราการขยายทางด้านความถี่ต่ำและด้านความถี่สูงให้มีขนาดเท่ากันได้ดังภาพที่ 1-2 (ก) ซึ่งจะเห็นได้ว่าขอบของผลตอบสนองทางความถี่ (Frequency Response) จะเท่ากันซึ่งโดยปกติแล้ว เมื่อแทนด้วยสมการที่เป็นไอไออาร์แบบนอตช์จะไม่สามารถควบคุมอัตราการขยายทั้งสองด้านได้ การปรับปรุงดังกล่าวทำโดยการปรับมุมของโพล (Pole) ของสมการออร์เดอร์สองใหม่ลงในวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วย แต่เมื่อพิจารณาอัตราการขยายช่วงการเปลี่ยนแปลง (Transition-Band Gain) บริเวณความถี่นอตช์ (Notch Frequency) แล้วจะพบว่าไม่สมมาตรกัน [3]



(ก) (ข)

ภาพที่ 1-2 (ก) ผลตอบสนองทางความถี่ที่ไม่ได้ปรับปรุงอัตราการขยายช่วงเปลี่ยนแปลง
(ข) ผลตอบสนองทางความถี่ที่ได้จากวิทยานิพนธ์

ดังนั้นวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงได้นำเสนอการออกแบบเชิงเลขไอไออาร์แบบนอตช์ที่ปรับปรุงผลตอบสนองทางความถี่เพื่อแก้ไขความไม่สมมาตรกันของอัตราการขยายช่วงการเปลี่ยนแปลง (Transition-Band Gain) ทั้งขอบขาขึ้นและขอบขาลงให้มีความสมมาตรกันโดยการเพิ่มโพล-ซีโร่ (Pole-Zero) เข้าไปในวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยอีกหนึ่งคู่ด้วยวิธีการวางโพล (Pole-Placement) สำหรับการหาสมการที่เหมาะสมได้เลือกใช้โปรแกรม MATLAB [4] จำลองการทำงานและหาค่าตำแหน่งของโพล-ซีโร่ (Pole-Zero) ตัวใหม่ ผลที่ได้จากการเพิ่มโพล-ซีโร่ดังกล่าวทำให้ช่วงอัตราการขยาย

ช่วงการเปลี่ยนแปลงดีขึ้นดังในภาพที่ 1-2 (ข) รวมถึงได้ทำการเปรียบเทียบผลการจำลองการทำงานกับการสร้างจริงบนตัวประมวลผลสัญญาณเชิงเลข TMS320C31 ด้วย

สำหรับส่วนประกอบต่างๆในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะแบ่งด้วยกันเป็น 5 บทด้วยกันคือบทนำ ซึ่งผู้อ่านกำลังอ่านอยู่ในขณะนี้จะกล่าวถึงภาพรวมของตัวกรองแบบนอตช์ (Notch Filter) ว่าการใช้งานที่ใดบ้าง และผลตอบสนองทางความถี่เป็นอย่างไร รวมถึงผลที่วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ปรับปรุงไปแล้วจะเป็นอย่างไร สำหรับผู้ที่เข้าใจถึงผลตอบสนองดังภาพที่ 1-2 ที่ได้ทำการปรับปรุงไปแล้วสามารถใช้สูตรในการคำนวณในภาคผนวก ก สรุปสูตร ได้ทันที สำหรับบทที่ 2 จะกล่าวถึงทฤษฎีที่เกี่ยวข้องในวิทยานิพน์ฉบับนี้ เช่น สัญญาณ และระบบที่เป็นการประมวลผลสัญญาณดิจิตอล ความเกี่ยวข้องกันระหว่างระบบในแบบดิจิตอลและแบบอะนาลอก ความแตกต่างระหว่าง FIR และ IIR บริเวณใดเรียกว่าเป็นอัตราการเปลี่ยนแปลง (Transiton-Band Gain) และอัตราการขยายความถี่ผ่าน (Pass-Band Gain) ของนอตช์ฟิลเตอร์ ความสัมพันธ์ระหว่างโพล-ซี่โร่บนวงกลมหนึ่งหน่วยกับผลตอบสนองทางความถี่และอื่นๆ ในบนที่ 3 กล่าวถึงขั้นตอนการออกแบบในวิธีเดิมด้วยสมการออร์เดอร์สองและวิธีในการวิจัยซึ่งเป็นสมการออร์เดอร์สี่ ซึ่งจะอธิบายถึงข้อจำกัดในการปรับปรุงให้ได้ผลตอบสนองจากภาพที่ 1-2 (ก) เป็นผลตอบสนองภาพที่ 1-2 (ข) ด้วยสมการออร์เดอร์สองของไอไออาร์นอตช์ฟิลเตอร์ คำตอบที่ได้จากการแก้สมการออร์เดอร์สี่จะเป็นสูตรสำเร็จ ในบทที่ 4 ในบทนี้จะเป็นการนำเอาผลที่จำลองการทำงานด้วย MATLAB โดยนำเอาสัมประสิทธิ์ที่ได้นำไปสร้างจริงบนตัวประมวลผลสัญญาณดิจิตอลซึ่ง เพื่อเปรียบเทียบผลที่ได้ และในบทสุดท้ายจะอธิบายถึงปัญหาและข้อเสนอแนะต่างๆที่ได้จากการวิจัย

1.2 วัตถุประสงค์

ออกแบบตัวกรองเชิงเลขไอไออาร์แบบนอตช์ที่ปรับปรุงผลตอบสนองทางความถี่ให้อัตราการขยายที่ช่วงความถี่ผ่านมีความสมมาตรกัน

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

1.3.1 ออกแบบตัวกรองเชิงเลขไอไออาร์แบบนอตช์ที่ปรับปรุงผลตอบสนองทางความถี่โดยใช้โปรแกรม MATLAB

1.3.2 สร้างจริงบนตัวประมวลผลสัญญาณเชิงเลข TMS320C31

1.4 วิธีการวิจัย

1.4.1 ศึกษาหลักการของตัวกรองเชิงเลขไอไออาร์

1.4.2 ออกแบบตัวกรองเชิงเลขไอไออาร์แบบนอตช์ที่มีผลตอบสนองทางความถี่ในช่วงบริเวณการเปลี่ยนแปลงความถี่นอตช์ให้ใกล้เคียงกัน

1.4.3 สร้างแบบจำลองของตัวกรองเชิงเลขไอไออาร์แบบนอตช์โดยใช้โปรแกรม MATLAB

1.4.4 เปรียบเทียบผลการจำลองการทำงานด้วยโปรแกรม MATLAB กับการทำงานจริงบนตัวประมวลผลสัญญาณเชิงเลข TMS320C31

1.5 ประโยชน์ของการวิจัย

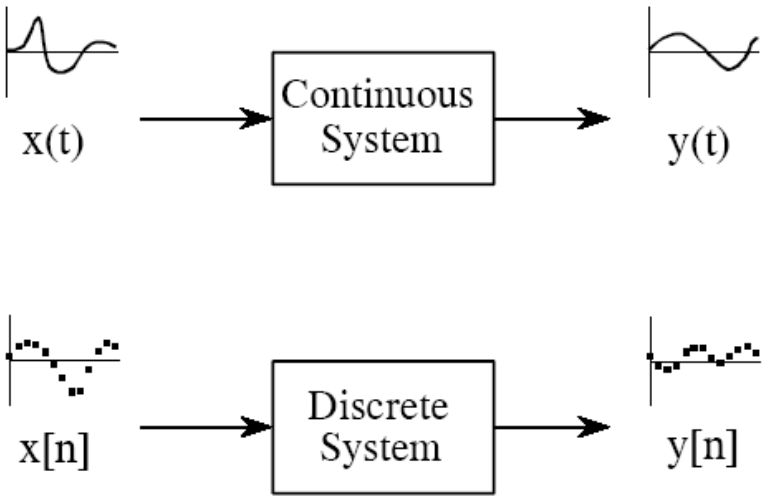
1.5.1 เป็นแนวทางในการออกแบบไอไออาร์แบบนอตช์ที่มีอัตราการขยายช่วงการเปลี่ยนแปลง (Transition-Band Gain) ที่ความถี่นอตช์ (Notch Frequency) มีความสมมาตรกัน

1.5.2 นำไปประยุกต์ใช้ในงานต่างๆที่ต้องการลดทอนสัญญาณรบกวนเฉพาะความถี่ เช่น การลดทอนสัญญาณคลื่น 50 Hz หรือ 60 Hzในสัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจ

บทที่ 2
ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 สัญญาณและระบบ

สัญญาณ (Signal) เป็นการอธิบายหรือแสดงถึงการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์ตัวหนึ่งด้วยพารามิเตอร์อีกตัวหนึ่ง ตัวอย่างเช่น แรงดันไฟฟ้าในวงจรไฟฟ้าเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา เป็นต้น ส่วนระบบ (System) จะเป็นกระบวนใดกระบวนหนึ่งที่มีสัญญาณเอาท์พุทเป็นผลตอบสนองของระบบต่อสัญญาณอินพุท ดังภาพที่ 2-1 ระบบดังกล่าวสามารถแบ่งเป็นสองแบบด้วยกันคือระบบต่อเนื่อง และระบบที่ไม่ต่อเนื่อง ในแบบต่อเนื่องนั้นจะรับสัญญาณที่เป็นอะนาลอกซึ่งเป็นสัญญาณที่มีความต่อเนื่องทางเวลา x(t) เข้าไปโดยตรง ส่วนประกอบในระบบนี้ส่วนใหญ่จะประกอบไปด้วยอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์จำพวก ตัวต้านทาน ตัวเก็บประจุ ตัวเหนี่ยวนำ ทรานซิสเตอร์ และอื่นๆ ส่วนในแบบไม่ต่อเนื่อง สัญญาณที่เป็นสัญญาณอะนาลอกจะถูกตัดเป็นส่วนโดยมีลำดับ n แทนเวลาเพื่อนำค่าไปประมวลผลในระบบและจะนำค่าที่ได้ส่งออกมาทางเอาท์พุทในแบบลำดับที่ n เช่นเดียวกัน ซึ่งในระบบที่ไม่ต่อเนื่องก็คือระบบประมวลผลสัญญาณดิจิตอล

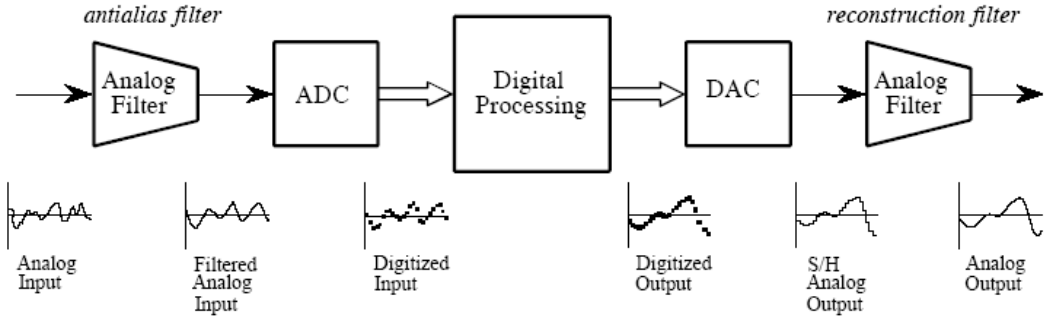


ภาพที่ 2-1 แสดงลักษณะของสัญญาณที่ใช้กับระบบ Continuous และ Discrete

2.2 ระบบประมวลผลสัญญาณดิจิตอล

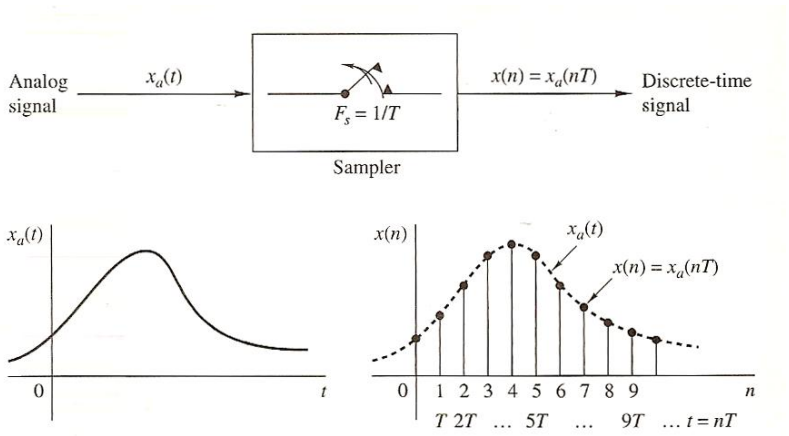
ระบบประมวลผลสัญญาณดิจิตอลจะมีส่วนประกอบทั้งที่เป็นระบบที่ต่อเนื่องและระบบที่ไม่

มีความต่อเนื่องจากภาพที่ 2-2 ทางด้านอินพุทยังรับสัญญาณที่เป็นอะนาลอกเข้ามาและส่งออกไปเป็นสัญญาณอะนาลอกเช่นเดียวกัน ก่อนที่อินพุทจะถูกนำไปประมวลผลจะต้องผ่านตัวแปลงสัญญาณที่เป็นอะนาลอกไปเป็นดิจิตอล (Analog to Digital) ซึ่งจะบอกถึงขนาดของสัญญาณซึ่งเป็น



ภาพที่ 2-2 ระบบประมวลผลสัญญาณดิจิตอล

ตัวเลขโดยมีอัตราการสุ่มความถี่ (Sampling Frequency) เป็นตัวกำหนดจังหวะการอ่านค่าของตัวประมวลสัญญาณในแต่ละครั้ง ความถี่สุ่มที่เกิดขึ้นบ่งบอกถึงระยะเวลาในการอ่านค่าอะนาลอกในแต่ละครั้งจะเป็นเวลาคงที่ดังภาพที่ 2-3



ภาพที่ 2-3 การแปลงจากสัญญาณอะนาลอกเป็นดิจิตอล

เมื่อ F_s เป็นความถี่ในการสุ่ม โดยการสุ่มแต่ละครั้งจะเปรียบเสมือนมีฟังก์ชั่นอิมพัลส์ขนาดหนึ่งหน่วยไปคูณกับสัญญาณอินพุท ขนาดที่ได้ก็จะถูกนำไปคำนวณตามฟังก์ชั่นที่ได้ออกแบบไว้ทันที และตัวประมวลสัญญาณจะต้องทำการประมวลผลกับค่าอินพุท และส่งค่าไปยังเอาท์พุทให้เสร็จก่อนที่จะถึงเวลาในการสุ่มครั้งต่อไป สัญญาณใหม่ที่ได้จะเป็นสัญญาณที่ไม่ต่อเนื่อง เพื่อให้

เห็นภาพจะยกตัวอย่างฟังก์ชั่นตัวกรองง่ายๆ เช่น ตัวกรองแบบเฉลี่ยค่าด้วยการเลื่อนตำแหน่ง (Moving Average Filters) ด้วยฟังก์ชั่น

$$y(i) = \frac{1}{M}\sum_{j=0}^{M-1} x[i+j] \tag{2-1}$$

เมื่อ M เป็นจำนวนข้อมูลที่ต้องการเฉลี่ย

j เป็นตำแหน่งที่ต้องการที่ทำการเลื่อนค่าเฉลี่ย

กำหนดให้

$M = 5$

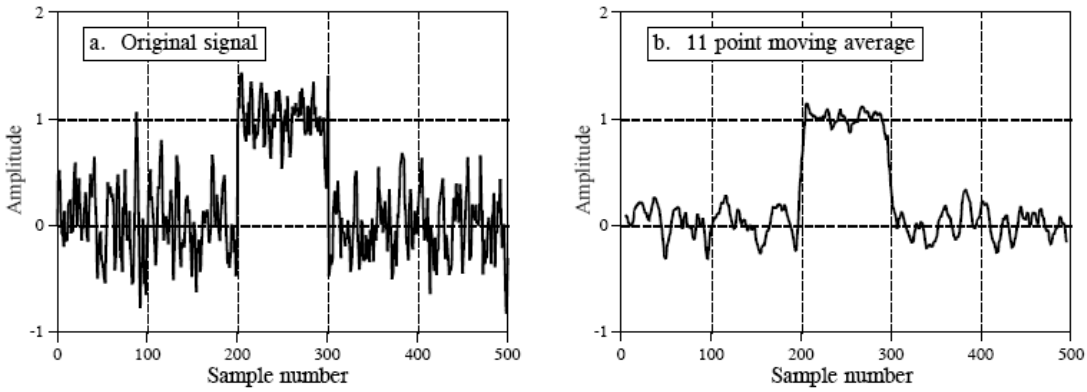
$$y(80) = \frac{x(80)+x(81)+x(82)+x(83)+x(84)}{5}$$

หรือจะเปลี่ยนค่า j จาก 0 เป็นค่าอื่นจะได้

$$y(80) = \frac{x(78)+x(79)+x(80)+x(81)+x(82)}{5} \tag{2-2}$$

$$y(81) = \frac{x(79)+x(80)+x(81)+x(82)+x(83)}{5} \tag{2-3}$$

จากสมการที่ 2-2 และ 2-3 อธิบายได้ว่าเมื่อรับค่าอินพุทเข้ามาจะทำการคำนวณตามฟังก์ชั่นตัวกรองเมื่อได้เอาท์พุท $y(n)$ ที่ต้องการก็จะส่งค่าออกทางเอาท์พุทให้เป็นสัญญาณอะนาลอกด้วยตัวแปลงดิจิตอลเป็นอะนาลอก (Digital to Analog) ต่อไป



ภาพที่ 2-4 ผลทางด้านอินพุทและเอาท์พุทที่ผ่านตัวประมลผลสัญญาณดิจิตอล

จากสมการที่ 2-2 และ 2-3 เป็นการคำนวณในการสุ่มครั้งที่ 80 และ 81 ฟังก์ชั่นที่ใช้จะต้องนำค่าทั้งหมดมารวมกันก่อนทุกครั้ง แต่จะเห็นได้ว่าระยะการสุ่มหนึ่งๆ จะมีค่าเก่าออกไปหนึ่งค่าและมีค่าใหม่เข้ามาหนึ่งค่าซึ่งจะเขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$y(81) = \frac{y(80)+x(83)-x(78)}{5} \tag{2-4}$$

จากสมการที่ 2-4 จะเห็นได้ว่าสมการสั้นลงทำให้ลดเวลาในการคำนวณลงได้เมื่อสมการที่ 2-3 มีความยาวมากๆการคำนวณก็จะใช้เวลามากขึ้นตามไปด้วย ซึ่งลักษณะสมการที่ 2-3 และ 2-4 สามารถอธิบายถึงชนิดของตัวกรองเชิงเลขได้กล่าวคือ ในสมการที่ 2-4 เมื่อฟังก์ชั่นใดๆ มีเอาท์พุทเป็นประกอบของสัญญาณทั้งทางด้านอินพุทและเอาท์พุท จะอธิบายสมการเป็นแบบ Recursive ในทำนองเดียวกันถ้าหาฟังก์ชั่นนั้นไม่มีส่วนประกอบที่เป็นเอาท์พุทอยู่เลยก็จะถูกเรียกว่าเป็นแบบ Non-Recursive ดังสมการที่ 2-3 ซึ่งจะเป็นพื้นฐานที่ครอบคลุมตัวกรองเชิงเลขทั้งหมดทั้งที่เป็นแบบ IIR และแบบ FIR

2.3 z-transform

z-transform ถูกนำมาใช้ในการวิเคราะห์สัญญาณที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา ในทำนองเดียวกันลาปาสทรานฟอร์มจะถูกใช้ในการวิเคราะห์สัญญาณที่มีความต่อเนื่องทางเวลาดังนั้นในระบบที่เป็นตัวกรองความถี่แบบอะนาลอกจะใช้เป็นลาปาสทรานฟอร์มในการแก้ปัญหาสมการ ส่วนตัวกรองความถี่แบบดิจิตอลจะใช้ z-transform ในการแก้ปัญหาสมการ เมื่อพิจารณาดังภาพที่ 2-3 สัญญาณอะนาลอก $x_a(t)$ ที่ผ่านการสุ่มตัวอย่างจะได้ดังสมการที่ 2-5

$$x_s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_a(t)\delta(t-kT) \tag{2-5}$$

ที่ $\delta(t-kT)$ เป็นฟังก์ชั่นอิมพลัสที่ถูกหน่วงเวลาด้วย kT และ $T = 1/F_s$ เป็นคาบเวลาในการสุ่มซึ่งฟังก์ชั่น $x_s(t)$ มีค่าเป็นศูนย์ทุกค่ายกเว้นที่เวลา $t = kT$ เมื่อทำการหาลาปาสทรานฟอร์มของ $x_s(t)$ จะได้

$$\begin{aligned} X_s(s) &= \int_0^{\infty} x_s(t)e^{-st}dt \\ &= \int_0^{\infty} \{x(t)\delta(t) + x(t)\delta(t-T) + ...\}e^{-st}dt \end{aligned} \tag{2-6}$$

จากคุณสมบัติของตัวอิมพลัสฟังก์ชั่นที่ว่า

$$\int_0^{\infty} f(t)\delta(t-kT)dt = f(kT)$$

$X_s(s)$ ในสมการที่ 2-6 จะได้เป็น

$$X_s(s) = x(0) + x(T)e^{-sT} + x(2T)e^{-2sT} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-nst} \tag{2-7}$$

ให้ $z = e^{sT}$ ในสมการที่ 2-7 จะได้

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n} \tag{2-8}$$

จากภาพที่ 2-3 T จะเป็นคาบเวลาที่เท่ากันตลอดรวมถึงทุกค่าที่ $x(nT)$ สามารถระบุเพียง $x(n)$ ก็น่าจะเพียงพอทำให้สมการที่ 2-8 ได้เป็น

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = ZT\{x(n)\} \tag{2-9}$$

ตัวอย่างเช่น

$$x(n) = \{1,2,1,3,5\}$$
$$\uparrow$$

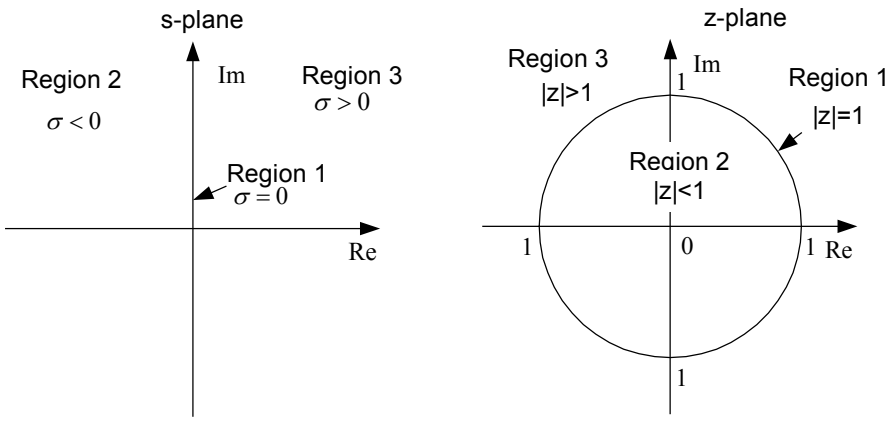
$$x(n) = \{x(0), x(1), x(2), x(3), x(4)\}$$
$$ZT\{x(n)\} = X(z) = 1 + 2z^{-1} + z^{-2} + 3z^{-3} + 5z^{-4} \tag{2-10}$$

การแทน z-transform ของ $x(n)$ จะใช้ (ZT) ในการแสดงถึงความเกี่ยวข้องกันระหว่าง $x(n)$ และ $X(z)$ เมื่อกล่าวถึงการแปลง z-transform ก็จำเป็นที่จะต้องดูระนาบของแซด (z-plane) ซึ่งเป็นระนาบของสัญญาณไม่ต่อเนื่องทางเวลา

การแปลงลาปาสดังกล่าวข้างต้นเมื่ออยู่บนระบบ s-plane จะถูกใช้ในการหาเสถียรภาพของระบบโดยที่เมื่อโพลอยู่ทางซ้ายของแกนจินตภาพ ($j\omega$ axis) ระบบจะเป็นระบบที่มีเสถียรภาพ (Stable System) ถ้าโพลอยู่ทางขวาของแกนจินตภาพ ($j\omega$ axis) จะเป็นระบบที่ไม่มีเสถียรภาพ ถ้าโพลไปอยู่บนแกนจินตภาพเพียงอย่างเดียวก็จะให้ผลออกมาเป็นสัญญาณซายน์โดยความถี่จะเริ่มจากที่ตำแหน่ง $\omega = 0$

ในทำนองเดียวกันบนระนาบ z-plane ก็สามารถอธิบายเสถียรภาพและพฤติกรรมอื่นๆได้เช่นเดียวกันกับ s-plane จากที่ให้ $z = e^{sT}$ และ $s = \sigma + j\omega$ ดังนั้น

$$z = e^{\sigma T} e^{j\omega T} \tag{2-11}$$



ภาพที่ 2-5 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างระนาบ s-plane และ z-plane

จาก $z = re^{j\theta}$ ขนาดของ z คือ $|z| = r = e^{\sigma T}$ และทำมุมด้วย $\theta = \omega T = 2\pi f / F_s$ ทำให้ f เปลี่ยนแปลงจาก 0 ถึง $\pm F_s / 2$ ทำให้ θ เปลี่ยนแปลงจาก 0 ถึง π

จากสมการที่ 2-9 เมื่อ $s = \sigma + j\omega$ และ $z = re^{j\theta}$ อธิบายถึงตำแหน่งโพลหรือซีโร่บนระนาบ s-plane และ z-plane ตามลำดับดังในภาพที่ 2-5 จะเป็นการแสดงบริเวณที่เกี่ยวข้องกัน

1. $\sigma < 0$ เมื่อพิจารณาที่ตำแหน่งโพลจะอยู่ด้านซ้ายของแกนจินตภาพ (Region 2) ในระบบ s-plane จะถือว่าระบบมีเสถียรภาพ ในกรณีเดียวกันสมการที่ 2-11 $|z| < 1$ เนื่องจาก $e^{\sigma T} < 1$ เมื่อ σ เปลี่ยนแปลงจาก $-\infty$ จนถึง 0 ขนาด $|z|$ จะเปลี่ยนแปลง 0 ถึง 1 ทำให้โพลอยู่ภายในวงกลมหนึ่งหน่วยจะถือว่าระบบมีเสถียรภาพ

2. $\sigma > 0$ โพลจะอยู่ทางด้านขวาของแกนจินตภาพ (Region 3) ใน s-plane จะถือว่าระบบไม่มีเสถียรภาพและเมื่อพิจารณาที่ขนาดของ zจะได้ $|z| > 1$ เพราะ $e^{\sigma T} > 1$ เมื่อ σ เปลี่ยนแปลงจาก 0 ถึง ∞ โพลจะอยู่ภายนอกวงกลมหนึ่งหน่วยระบบก็จะไม่มีเสถียรภาพ

3. $\sigma = 0$ เมื่อตำแหน่งของโพลอยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วยที่ $|z| = 1$ ใน (Region 1) จะทำให้เกิดรูปซายน์และจะเป็นบริเวณสำหรับคำนวณผลตอบสนองทางความถี่ ณ ตำแหน่งต่างๆ

เมื่อทราบถึงบริเวณที่เป็นระบบแซดแล้วในการแปลงจากข้อมูลหรือฟังก์ชั่นให้อยู่ใน z-plane ก็จะมีสูตรที่สามารถนำไปใช้งานได้โดยมีสูตรดังนี้

จากสมการที่ 2-9 เป็นการแปลงลำดับที่ n ให้เป็นโดยจะกำหนดด้วย z เพื่อเป็นการกำหนดลำดับที่ n เมื่อข้อมูลทั้งหมดถูกเลื่อนไปที่ลำดับที่ k สามารถเขียน $x(n)$ ใหม่ที่ถูกเลื่อนไปได้เป็น

$$ZT\{x(n-k)\} = z^{-k}X(z) \qquad (2\text{-}12)$$

ตัวอย่าง

$$ZT\{x(n-2)\} = z^{-2}X(z)$$

ถ้า $X(z)$ เป็นสมการที่ 2-10 จะได้

$$ZT\{x(n-2)\} = z^{-2}(1 + 2z^{-1} + z^{-2} + 3z^{-3} + 5z^{-4})$$

$$ZT\{x(n-2)\} = z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4} + 3z^{-5} + 5z^{-6}$$

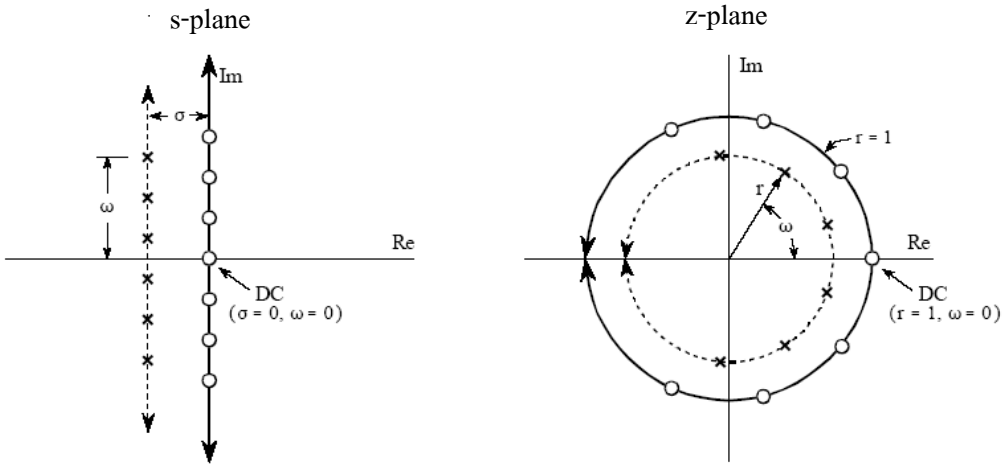
ทั้งสองระนาบ s-plane และ z-plane จะเป็นเครื่องมือที่สำคัญในการออกแบบตัวกรองความถี่ในการหาผลตอบสนองทางความถี่และเสถียรภาพของระบบหรือฟังก์ชั่นที่ทำการเลือกใดๆสามารถอธิบายถึงส่วนประกอบระหว่างโพลและซีโร่ได้ได้ทั้งสองระนาบ สำหรับในระบบแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete System) จะอาศัยระนาบ z-plane ในเบื้องต้นเมื่อพิจารณา z-plane ของระบบใดๆสามารถอธิบายพฤติกรรมของระบบได้ดังนี้

1. สามารถที่จะบอกได้ว่าระบบมีเสถียรภาพหรือไม่ โดยให้สังเกตที่โพลหรือเครื่องหมายกากบาทจะต้องอยู่ภายในวงกลมหนึ่งหน่วยเท่านั้นส่วนตัวซีโร่ที่เป็นเครื่องหมายวงกลม ดังภาพที่ 2-6 จะอยู่ตำแหน่งใดๆก็ได้และถ้าหากไม่มีโพลเลยก็จะมีเสถียรภาพเสมอ

2. จำนวนของโพลที่ปรากฏบนวงกลมหนึ่งคือจำนวนออร์เดอร์ของระบบ

3. จุดที่ซีโร่อยู่บนขอบของวงกลมหนึ่งหน่วยจะได้ผลตอบสนองทางความถี่ ณ ตำแหน่งนั้นขนาดของความถี่จะเป็นศูนย์

4. เมื่อโพลและซีโร่ตัวใดเป็นจำนวนเชิงซ้อนจะต้องมีคู่คอนจูเกตของตัวมันเองอยู่บนวงกลมหนึ่งด้วยมิฉะนั้นจะไม่สามารถที่จะนำไปสร้างจริงได้



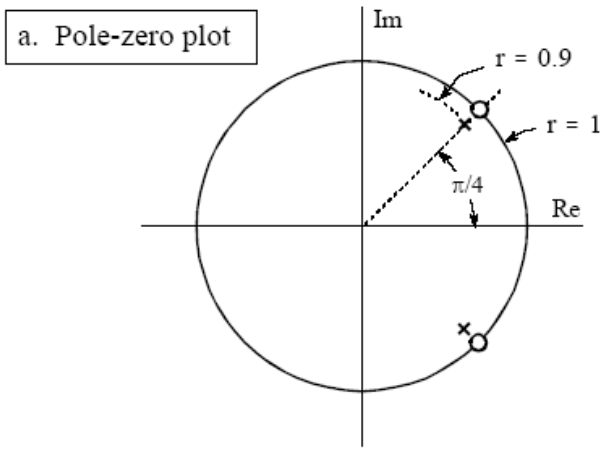
ภาพที่ 2-6 โพลและซีโร่บนระนาบ s-plane และ z-plane

ในการเขียนฟังก์ชั่นที่ประกอบด้วยโพลและซีโร่สามารถเขียนได้เป็นดังสมการ

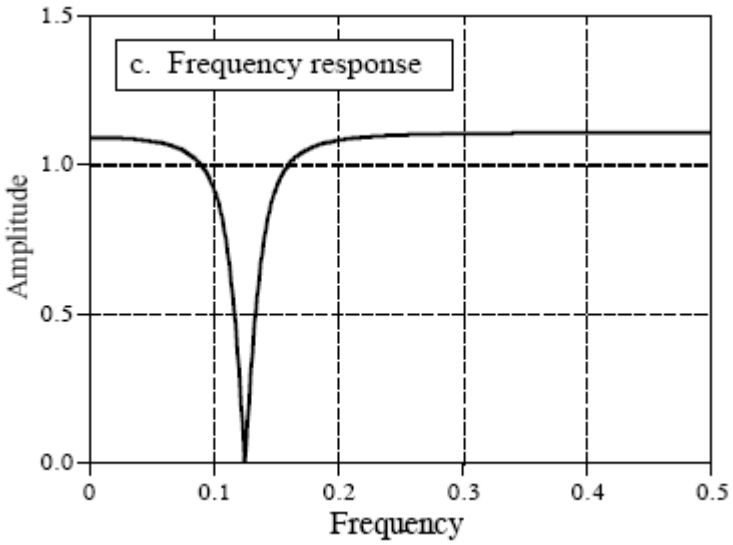
$$H(z) = \frac{(z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n)}{(z - p_1)(z - p_2)...(z - p_n)} \qquad (2\text{-}13)$$

เมื่อ z_1, z_2 จนถึง z_n และ p_1, p_2 จนถึง p_n แทนด้วยตำแหน่งของซี่โร่และโพลด้วยสมการตำแหน่ง $x + jy$

ตัวอย่างของผลตอบสนองทางความถี่ซึ่งมีโพลและซีโร่ดังนี้



ภาพที่ 2-7 แสดงตัวอย่างโพล-ซี่โร่บนระนาบ z-plane



ภาพที่ 2-8 แสดงตัวอย่างผลตอบสนองของภาพที่ 2-7

2.4 ผลตอบสนองทางความถี่

จากการกำหนดฟังก์ชั่นในสมการที่ 2-2 อธิบายได้เพียงว่า ณ ตำแหน่งที่ n ใดๆจะได้ค่าที่เกิดจากสัญญาณอินพุท 5 ค่ามารวมกันแต่จะทราบได้อย่างไรว่าผลตอบสนองที่แท้จริงของฟังก์ชั่นที่ออกแบบให้ผลตอบสนองทางความถี่ที่ความถี่ต่างๆเป็นอย่างไร จะต้องนำฟังก์ชั่นที่ได้ไปแปลงให้อยู่บนเป็น z-domain เสียก่อนแล้วจึงทำการวิเคราะห์หาผลตอบสนองทางความถี่ดังกล่าว

$$y(80) = \frac{x(78) + x(79) + x(80) + x(81) + x(82)}{5}$$

$$y(n) = \frac{x(n+2) + x(n+1) + x(n) + x(n-1) + x(n-2)}{5} \qquad (2\text{-}14)$$

เนื่องจากในการใช้งานจริงที่เป็นลักษณะอ้างอิงเวลาจริง (Real Time) ฟังก์ชั่นด้านเอาท์พุท ณ เวลาที่ n หรือ $y(n)$ จะต้องประกอบด้วยค่าที่เป็นปัจจุบันและค่าที่ในอดีตเท่านั้นซึ่งค่าในอนาคตที่อยู่ในเทอมของ $x(n+k)$ หรือ $y(n+k)$ เป็นตัวแปรที่เป็นไปไม่ได้เลย ดังนั้นในตัวแปรที่อยู่ในรูปที่เป็นเหตุการณ์ล่วงหน้าจึงเป็นฟังก์ชั่นที่ไม่สามารถสร้างจริงได้ในการทำเป็นระบบอ้างอิงเวลาจริง (Real Time System) ดังนั้นจากสมการที่ 2-14 จะต้องทำการปรับสมการใหม่ได้เป็น

$$y(n) = \frac{x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3) + x(n-4)}{5} \qquad (2\text{-}15)$$

แปลงให้อยู่ใน z-domainโดยใช้สมการที่ 2-12

$$ZT\{y(n)\} = \frac{X(z) + X(z)z^{-1} + X(z)z^{-2} + X(z)z^{-3} + X(z)z^{-4}}{5}$$

$$Y(z) = \frac{1}{5}X(z)(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4}) \qquad (2\text{-}16)$$

ในการหาผลตอบสนองทางความถี่จะบอกถึงเกณฑ์การขยายความถี่ซึ่งจะเป็นอัตราส่วนระหว่างเอาท์พุทและส่วนด้วยอินพุทดังสมการที่ 2-17

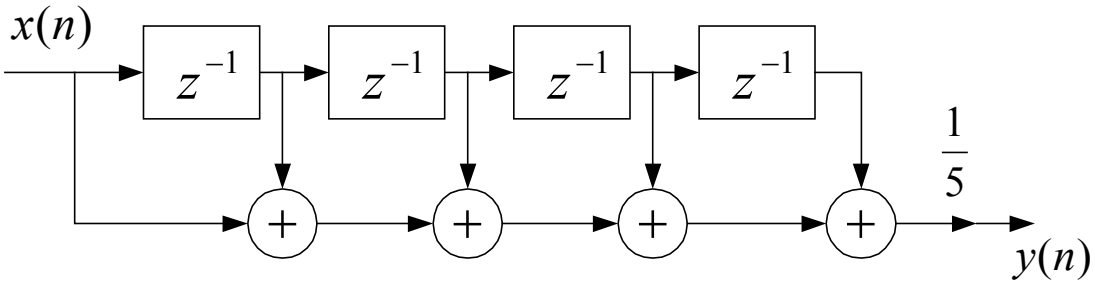
$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)} \tag{2-17}$$

เมื่อ $H(z)$ เป็นฟังก์ชั่นถ่ายโอนของระบบ

จัดรูปสมการที่ 2-16 ใหม่จะได้เป็น

$$H(z)=\frac{1}{5}(1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4}) \tag{2-18}$$

เมื่อนำไปเขียนโครงสร้างจะได้ดังภาพที่ 2-9



ภาพที่ 2-9 ภาพโครงสร้างในสมการที่ 2-16

จากสมการที่ 2-18 สามารถหาผลตอบสนองทางความถี่ของระบบที่ไม่ต่อเนื่องโดยแทน $z=e^{j\omega}$ จะได้ ดังสมการที่ 2-19

$$H(\omega)=\frac{1}{5}(1+e^{-j\omega}+e^{-2j\omega}+e^{-3j\omega}+e^{-4j\omega}) \tag{2-19}$$

เนื่องจาก $H(\omega)$ หรือ $H(z)$ เป็นอัตราส่วนระหว่างเอาท์พุทส่วนด้วยอินพุทซึ่งเป็นอัตราการขยายของระบบดังนั้น เมื่อต้องการขนาดของสัญญาณที่ความถี่ใดๆสามารถแทนค่าลงในตัวแปร ω เพื่อให้ได้ขนาดของระบบ แต่เนื่องจาก $H(\omega)$ เป็นส่วนประกอบระหว่างจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อน ดังนั้นเมื่อจัดรูปสมการให้อยู่ในพิกัดเชิงมุม (Polar Form) ที่บ่งบอกถึงขนาดและมุมเฟสของระบบ ดังแสดงในสมการที่ 2-20

$$H(\omega)=|H(\omega)|e^{j\Theta(\omega)} \tag{2-20}$$

ที่ $|H(\omega)|$ คือผลตอบสนองทางขนาด (Magnitude Response) และ $\Theta(\omega)$ เป็นผลตอบสนองทางเฟส (Phase Response) หาได้จากสมการที่ 2-21

$$\Theta(\omega)=\angle H(\omega) \tag{2-21}$$

เนื่องจากสมการที่ 2-19 การบวกกันของพิกัดเชิงมุมที่มีมุมไม่เท่ากันจะต้องแปลงรูปพิกัดเชิงมุมเป็นส่วนประกอบของจำนวนจริง และจำนวนเชิงซ้อนก่อนจึงจะทำการรวมกันได้ ซึ่งจาก Euler's Formula ดังสมการที่ 2-22

$$e^{\pm j\omega} = \cos\omega \pm j\sin\omega \tag{2-22}$$

ดังนั้น

$$e^{-j\omega} = \cos(-\omega) + j\sin(-\omega) = \cos(\omega) - j\sin(\omega) \tag{2-23}$$

นำสมการที่ 2-21 และ 2-22 แทนใน 2-19 แล้วทำการจัดรูปใหม่ให้เป็นสมการที่ 2-23

$$H(\omega) = H_R(\omega) + jH_I(\omega) \tag{2-24}$$

ทำการแปลงสมการที่ 2-23 ให้อยู่ในพิกัดเชิงมุมอีกครั้งหนึ่งดังสมการที่ จะได้

$$H(\omega) = \sqrt{H_R^2(\omega) + H_I^2}\, e^{j\tan^{-1}[H_i(\omega)/H_R(\omega)]} \tag{2-25}$$

เพราะฉะนั้นจากสมการที่ 2-20 และ สมการที่ 2-24 ขนาดและเฟสของฟังก์ชั่นถ่ายโอนได้เป็น

$$\begin{aligned} |H(\omega)| &= \sqrt{H_R^2(\omega) + H_I^2} \\ \Theta(\omega) &= \tan^{-1}\frac{H_I(\omega)}{H_R(\omega)} \end{aligned} \tag{2-26}$$

ในสมการที่ 2-25 สามารถที่จะนำไปหาผลตอบสนองทางความถี่ของฟังก์ชั่นถ่ายโอนใดๆ ก็ได้ซึ่งจะบอกได้ทั้งผลตอบสนองทางขนาด (Magnitude Response) และผลตอบสนองทางเฟส (Phase Response) ดังนั้น นำสมการที่ 2-22 แทนในสมการที่ 2-28 จะได้

$$H(\omega) = \frac{1}{5}\left[1 + \cos(\omega) + \cos(2\omega) + \cos(3\omega) + \cos(4\omega) - j(\sin(\omega) + \sin(2\omega) + \sin(3\omega) + \sin(4\omega))\right]$$

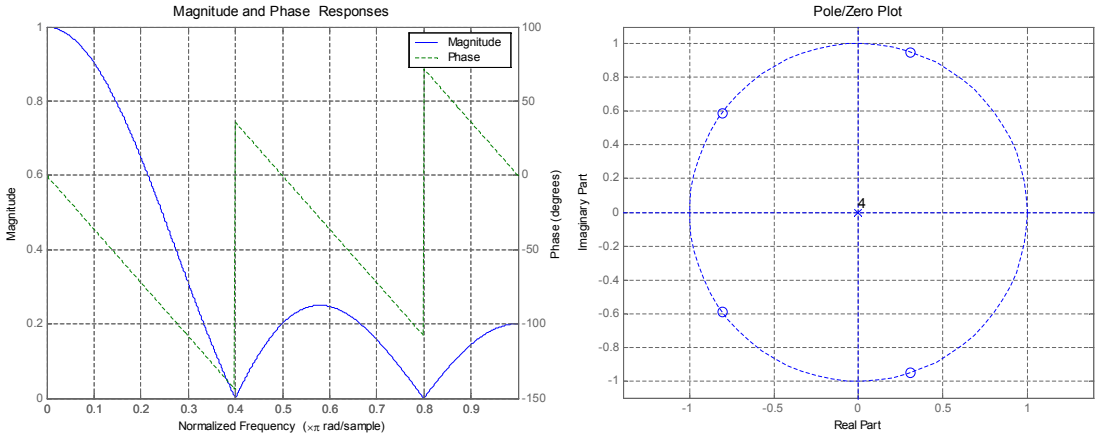
โดยที่ H_R เป็นส่วนประกอบที่เป็นจำนวนจริงและ H_I เป็นส่วนประกอบที่เป็นจำนวนจินตภาพ

$$H_R = \frac{1}{5}\left[1 + \cos(\omega) + \cos(2\omega) + \cos(3\omega) + \cos(4\omega)\right] \tag{2-27}$$

และ

$$H_I = -\frac{1}{5}\left[(\sin(\omega) + \sin(2\omega) + \sin(3\omega) + \sin(4\omega)\right] \tag{2-28}$$

นำสมการที่ 2-26 และ 2-27 ไปแทนใน 2-25 และทำการแทนค่าความถี่ $\omega = 0$ จนถึง $\omega = \pi$ เพื่อหาผลตอบสนองทางความถี่ ดังแสดงในภาพที่ 2-10 จากภาพทำให้ทราบถึงอัตราการขยายทางขนาดที่ความถี่ต่างๆ ของฟังก์ชั่น ในสมการที่ 2-18 รวมถึงเฟสของสัญญาณ และเมื่อเทียบสมการที่ 2-18 กับสมการที่ 2-13 จะเป็นสมการที่มีเฉพาะค่าเฉพาะซีโร่ ซึ่งแสดงในภาพที่ 2-10 ซีโร่ที่เป็นเครื่องหมายวงกลมใน Plot/Zero Plot จะมีตำแหน่งอยู่ภายในวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วย ส่วนซีโร่อยู่ตรงกลางของวงกลมหนึ่งหน่วยจะไม่มีผลต่อผลตอบสนองทางความถี่ของระบบ และเมื่อนำสมการที่ 2-16 ไปเขียนเป็นโครงสร้างในภาพที่ 2-9 จะสังเกตได้ว่าเอาท์พุทจะประกอบด้วย ส่วนทางด้านอินพุทเพียงอย่างเดียวลักษณะโครงสร้างลักษณะแบบนี้จะเป็นแบบ Non-Recursive



ภาพที่ 2-10 ผลตอบสนองทางความถี่ และโพล-ซีโร่ของสมการที่ 2-18

ในทำนองเดียวกัน ระบบที่เป็น Recursive ซึ่งจะเป็นฟังก์ชั่นในสมการที่ 2-4 เมื่อเขียนเป็นฟังก์ชั่นในลำดับที่ n ใดๆจะได้เป็น

$$y(n) = y(n-1) + \frac{x(n+2) - x(n-3)}{5} \tag{2-29}$$

เช่นเดียวกัน $x(n+2)$ ไม่สามารถทราบได้ในระบบเวลาจริงจึงเลื่อนตำแหน่งใหม่เป็น

$$y(n) = y(n-1) + \frac{x(n) - x(n-5)}{5}$$

ทำการแปลงให้อยู่ในรูป z-domain โดยใช้สมการที่ 2-12 จะได้

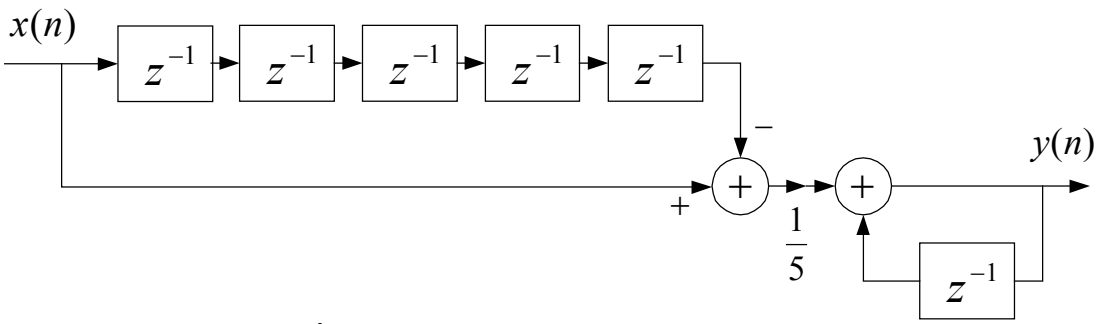
$$ZT\{y(n)\} = Y(z) = Y(z)z^{-1} + \frac{1}{5}(X(z) - X(z)z^{-5}) \tag{2-30}$$

จะได้ $Y(z)$

$$ZT\{y(n)\} = Y(z) = Y(z)z^{-1} + \frac{1}{5}X(z)(1 - z^{-5}) \tag{2-31}$$

$$H(z) = \frac{0.2(1 - z^{-5})}{1 - z^{-1}} \tag{2-32}$$

จากสมการที่ 2-12 เขียนโครงสร้างได้เป็น



ภาพที่ 2-11 ภาพโครงสร้างสมการที่ 2-22

นำสมการที่ 2-22 ไปหาผลตอบสนองทางความถี่เช่นเดียวกันกับการหาผลตอบสนองทางความถี่ในสมการที่ 2-32 เมื่อแทน $z = e^{j\omega}$ จะได้

$$H(\omega) = \frac{0.2(1 - e^{-5j\omega})}{1 - e^{-j\omega}} \tag{2-33}$$

แปลงให้อยู่ในรูปของส่วนประกอบจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อนด้วยสมการที่ 2-22 จะได้

$$H(\omega) = \frac{0.2(1 - \cos(5\omega) + j\sin(5\omega))}{1 - \cos(\omega) + j\sin(\omega)}$$

$$H(\omega) = \frac{0.2(1 - \cos(5\omega)) + 0.2j\sin(5\omega)}{1 - \cos(\omega) + j\sin(\omega)} \tag{2-34}$$

เมื่อ $H(\omega)$ เป็นเศษส่วนของจำนวนเชิงซ้อนซึ่งไม่ได้อยู่ในรูปของสมการที่ 2-24 ในที่นี้จะทำการคำนวณแยกกันก่อนและนำมาคำนวณรวมกันอีกครั้งหนึ่งโดยอาจจะใช้แนวทางดังนี้คือ

เมื่อ

$$H(\omega) = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} = |H(\omega)|\, e^{j\Theta(\omega)} \tag{2-35}$$

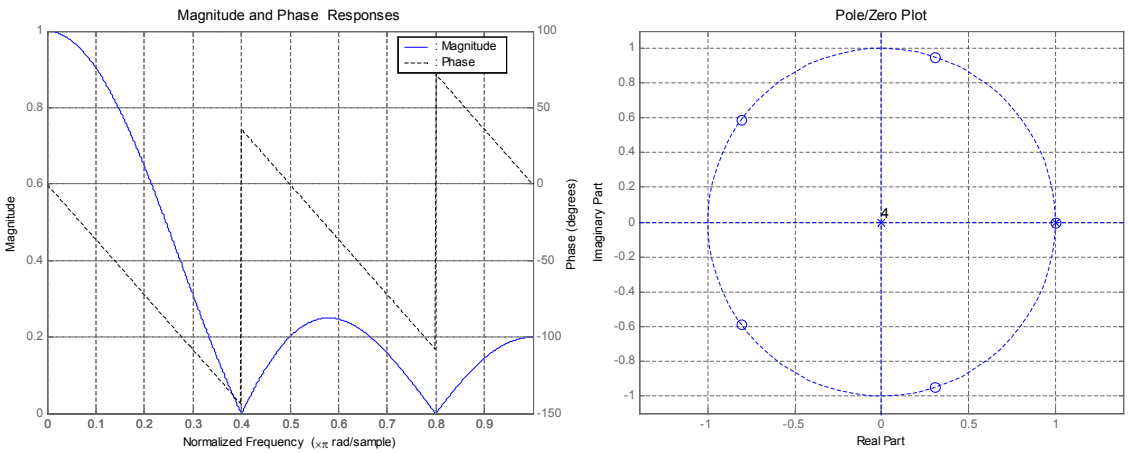
โดยที่

$$|H(\omega)| = \frac{\sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2}}}{\sqrt{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}}} \tag{2-36}$$

และ

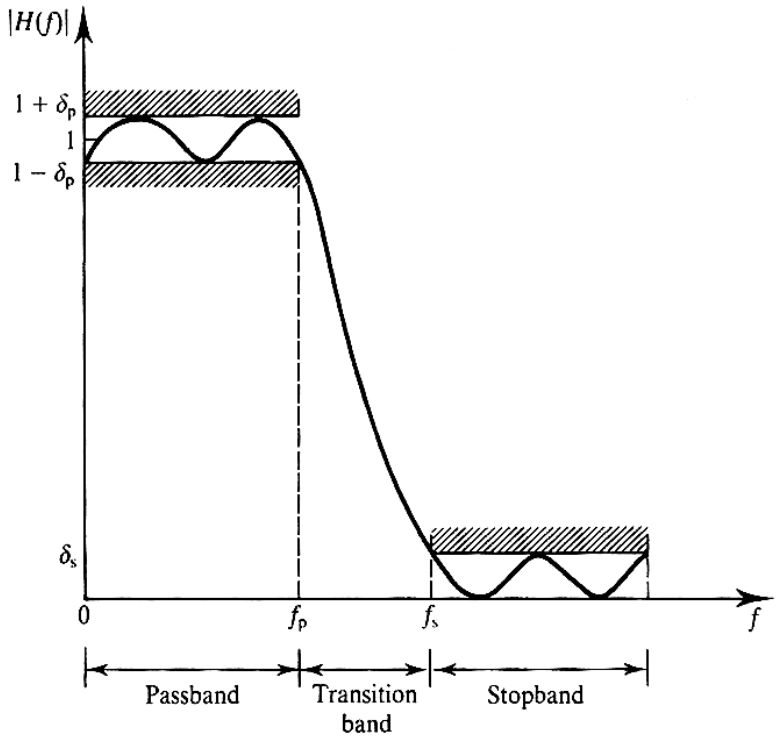
$$\Theta(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{y_1}{x_1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{y_2}{x_2}\right) \tag{2-37}$$

ดังนั้นเมื่อเทียบสมการที่ 2-35 กับสมการที่ 2-34 สามารถหาผลตอบสนองทางความถี่ได้ดังภาพที่ 2-12



ภาพที่ 2-12 แสดงผลตอบสนองทางความถี่ และโพล-ซีโร่พล็อตของสมการที่ 2-32

จากภาพที่ 2-10 และภาพที่ 2-12 จะให้ผลตอบสนองทางความถี่ที่เหมือนกันจะต่างกันก็ตรงที่ภาพที่ 2-12 มีโพลหนึ่งตัวอยู่บนวงกลมรัศมีหนึ่งซึ่งโพลที่ไม่ได้อยู่ตรงกลางวงกลมจะมีผลต่อระบบ แต่เนื่องจากมีซีโร่อีกหนึ่งตัวอยู่ตำแหน่งเดียวกันกับโพลดังกล่าวทำให้โพลตัวนี้ถูกตัดออกไปไม่มีผลต่อระบบ ซึ่งถ้าหากจะพิจารณาในสมการที่ 2-13 สมมุติให้ $z_1 = p_1$ เป็นผลให้โพล-ซีโร่ถูกตัดออกไปไม่มีผลต่อระบบ และเมื่อพิจารณาที่สมการที่ 2-31 และโครงสร้างในภาพที่ 2-11 เอาท์พุท $Y(z)$ จะประกอบด้วยส่วนที่เป็นทั้งอินพุทและเอาท์พุท ลักษณะเช่นนี้จะเรียกได้ว่าเป็นแบบ Recursive



ภาพที่ 2-13 แสดงช่วงต่างๆของผลตอบสนองทางความถี่

เมื่อได้ผลตอบสนองทางความถี่ดังภาพที่ 2-10 และภาพที่ 2-12 เมื่อเทียบกับภาพที่ 2-13 โดยที่ในการออกแบบตัวกรองในแบบต่างๆทั้งที่เป็นตัวกรองความถี่ต่ำผ่าน ความถี่สูงผ่านและอื่นๆ ในการออกแบบจะประกอบด้วยช่วงหลักๆอยู่ 3 ช่วงด้วยกันคือ

ช่วง Passband หรือช่วงอัตราการขยายความถี่ผ่าน ซึ่งจะเป็นบริเวณที่ต้องการให้ความถี่ผ่าน ตัวกรองบางชนิดอาจจะมีช่วง Passband หลายช่วงเช่น นอตช์ฟิลเตอร์เป็นต้น

ช่วง Transition Band หรือช่วงอัตราการขยายช่วงความเปลี่ยนแปลง รวมทั้งที่เป็นขอบขาขึ้นและขอบขาลง

ช่วง Stopband หรือช่วงหยุดความถี่ เป็นที่ลดทอนหรือกำจัดความถี่ที่ไม่ต้องการ

2.5 การหาผลตอบสนองทางความถี่ด้วยวิธีทางเรขาคณิต [5,6]

เมื่อ

$$H(z) = k\frac{(z-z_1)(z-z_2)...(z-z_M)}{(z-p_1)(z-p_2)...(z-p_N)}$$

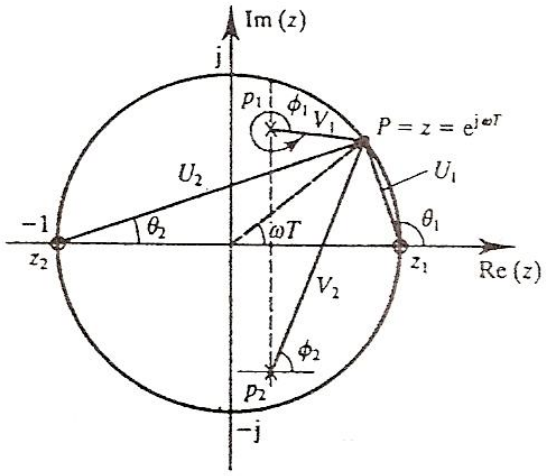
$$H(z) = k\frac{\prod_{i=1}^{M}(z-z_i)}{\prod_{i}^{N}(z-p_i)} \qquad (2\text{-}38)$$

แทนค่า $z = e^{j\omega}$ ลงในสมการที่ 2-38

$$H(\omega) = K\frac{\prod_{i=1}^{M}(e^{j\omega}-z_i)}{\prod_{i=1}^{N}(e^{j\omega}-p_1)} \qquad (2\text{-}39)$$

ในการหาผลตอบสนองทางความถี่จะต้องกำหนดความถี่ที่ต้องการหาโดยแทนด้วยจุดบนเส้นรอบวงของวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยซึ่งอยู่ในช่วง $0-\pi$

จากสมการที่ 2-38 จะกำหนดให้ระบบ Pole และ Zero อย่างละ 2 ตัว ความถี่ที่ต้องการหาผลตอบสนองทางความถี่อยู่ที่จุด P ดังภาพที่ 2-14 ผลตอบสนองทางความถี่แสดงได้ดังสมการที่ 2-40



ภาพที่ 2-14 ตัวอย่างการหาผลตอบสนองทางความถี่โดยใช้ Geometric

$$H(\omega) = K\frac{(e^{j\omega}-z_1)(e^{j\omega}-z_2)}{(e^{j\omega}-p_1)(e^{j\omega}-P_2)} \qquad (2\text{-}40)$$

$$H(\omega) = \frac{KU_1\angle\theta_1}{V_1\angle\phi_1}\frac{U_2\angle\theta_2}{V_2\angle\phi_2} \qquad (2\text{-}41)$$

พิจารณาสมการที่ 2-41 พบว่า U_1 และ U_2 ใช้แทนระยะระหว่าง Zero กับจุด P ส่วน V_1 และ V_2 แทนระยะห่างระหว่าง Pole กับจุด P ดังนั้นค่า Magnitude Response สามารถเขียนแทนได้ดังสมการที่ 2-42

$$|H(\omega)| = \frac{U_1 U_2}{V_1 V_2} \text{ เมื่อ } K = 1 \tag{2-42}$$

สำหรับผลตอบสนองทางเฟสจะหาจากมุมที่ Zero และ Pole ทำกับจุด P ดังสมการที่ 2-43

$$\Theta(\omega) = \angle H(\omega) = (\theta_1 + \theta_2) - (\phi_1 + \phi_2) \tag{2-43}$$

2.6 ตัวกรองดิจิตอล [8]

การออกแบบตัวกรองดังตัวอย่างที่กล่าวไปเบื้องต้นจะเป็นการอธิบายภาพรวมของตัวกรองตั้งแต่อินพุทจนถึงเอาท์พุท ซึ่งถ้าจะออกแบบตัวกรองที่เป็นแบบดิจิตอลสามารถแบ่งได้เป็นสองแบบตามลักษณะของผลตอบสนองทางความถี่ซึ่งจะตรงกับลักษณะที่เป็นระบบแบบ Recursive และ Non-Recursive ซึ่งจะแบ่งตัวกรองได้เป็นสองแบบคือ

2.6.1 ตัวกรองดิจิตอลแบบไอไออาร์ (Infinite Impluse Response:IIR)

ฟังก์ชั่นถ่ายโอน (Transfer Function) ของตัวกรองแบบนี้สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังต่อไปนี้

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \tag{2-44}$$

จากสมการที่ 2-44 สามารถเขียนใหม่ได้สมการที่ 2-45

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + ... + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + ... + a_M z^{-N}} = \frac{N(z)}{D(z)} \tag{2-45}$$

สมการที่ 2-44 จะเป็นฟังก์ชั่นถ่ายโอนที่เป็นอัตราส่วนระหว่างเอาท์พุทกับอินพุทดังนั้นเมื่อทำการจัดสมการใหม่ให้อยู่ในรูปของสมการเอาท์พุทจะได้สมการที่ 2-45

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{N}b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{M}a_k z^{-k}}$$

$$Y(z)(1+\sum_{k=1}^{M}a_k z^{-k})=\sum_{k=0}^{N}b_k X(z)z^{-k}$$

$$Y(z)=\sum_{k=0}^{N}b_k X(z)z^{-k}-\sum_{k=1}^{M}a_k Y(z)z^{-k}$$

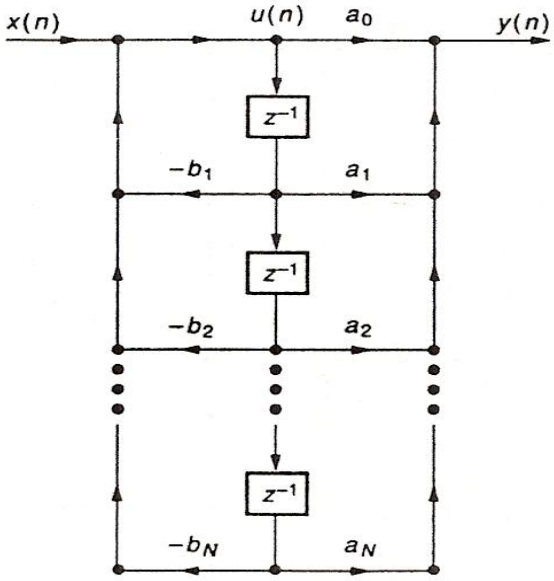
จากสมการที่ 2-12 $ZT\{x(n-k)\}=z^{-k}X(z)$ ดังนั้น

$$y(n)=\sum_{k=0}^{N}b_k x(n-k)-\sum_{k=1}^{M}a_k y(n-k) \qquad (2\text{-}46)$$

ในสมการที่ 2-46 จะเห็นได้ว่า เอาท์พุทเป็นส่วนประกอบทั้งอินพุทและเอาท์พุท ดังนั้น ตัวกรองแบบไอไออาร์จึงเป็นระบบแบบ Recursive

โครงสร้าง Direct Form I

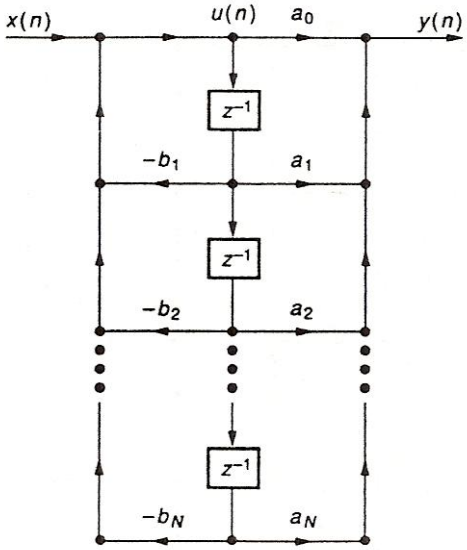
จากสมการที่ 2-31 สามารถเขียนเป็นโครงสร้างแบบ Direct Form I ได้ดังภาพที่ 2-15



ภาพที่ 2-15 โครงสร้างไอไออาร์แบบตรงแบบที่ 1 (Direct Form I)

โครงสร้าง Direct Form II

โครงสร้างของไอไออาร์แบบที่สองนี้แสดงในภาพที่ 2-16 สำหรับโครงสร้างนี้จะมีตัวหน่วง z^{-1} เป็นครึ่งหนึ่งของโครงสร้างในแบบที่ 1 ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ดังนี้



ภาพที่ 2-16 โครงสร้างแบบตรงแบบที่ II ของตัวกรองเชิงเลขแบบไอไออาร์

ให้ ตัวแปร $U(z)$ ให้เป็น

$$U(z) = \frac{X(z)}{D(z)} \tag{2-47}$$

โดยที่ $D(z)$ เป็นส่วนของสมการที่ 2-45

จากสมการที่ 2-45 และ 2-47 $Y(z)$ จะได้เป็น

$$Y(z) = N(z)\frac{X(z)}{D(z)} = N(z)U(z)$$

โดยที่ $N(z)$ เป็นเศษของสมการที่ 2-45 จะได้ ดังนี้

$$Y(z) = U(z)\{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + ... + a_N z^{-N}\} \tag{2-48}$$

จาก สมการที่ 2-47 ย้ายข้างหา $X(z)$ จะได้

$$X(z) = U(z)D(z) = U(z)\{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + ... + b_N z^{-N}\} \tag{2-49}$$

ทำการหาส่วนกลับ z-transform ของ สมการที่ 2-49

$$x(n) = u(n) + b_1 u(n-1) + b_2 u(n-2) + ... + b_N u(n-N) \tag{2-50}$$

ย้ายข้างหา $u(n)$ จากสมการที่ 2-50 จะได้

$$u(n) = x(n) - b_1 u(n-1) - b_2 u(n-2) - ... - b_N u(n-N) \tag{2-51}$$

ทำการหาส่วนกลับ z-transform ของสมการที่ 2-40 ได้เป็น

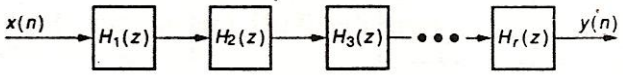
$$y(n) = a_0 u(n) + a_1 u(n-1) + a_2 u(n-2) + ... + a_N u(n-N) \quad (2\text{-}52)$$

ซึ่งโครงสร้างแบบที่ 2 นี้สามารถแทนโดยสมการที่ 2-51 และ 2-52 ได้ และแสดงไว้ในภาพที่ 2-16

โครงสร้างแบบ Cascade

จากฟังก์ชั่นถ่ายโอนในสมการที่ 2-30 เมื่อสามารถแยกเฟกเตอร์ให้อยู่รูปของสมการที่ 2-53 และเมื่อเขียนเป็นโครงสร้างที่ฟังก์ชั่นแต่ละตัวจะต่ออนุกรมกันดังภาพที่ 2-17

$$H(z) = GH_1(z)H_2(z)...H_r(z) \quad (2\text{-}53)$$



ภาพที่ 2-17 การต่ออนุกรมของโครงสร้างแบบไอไออาร์

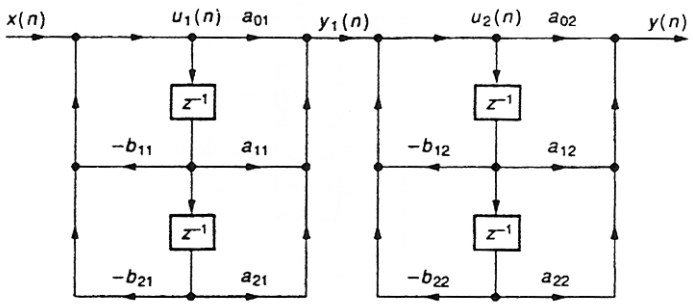
ฟังก์ชั่นถ่ายโอนแต่ละตัวอาจจะแทนด้วยสมการออร์เดอร์ตามต้องการ ซึ่งโครงสร้างภายในสามารถเป็นได้ทั้งโครงสร้างแบบตรงที่ I และแบบตรงที่สอง II ดังนั้นถ้าหากเป็นการอนุกรมกันของสมการออร์เดอร์สองสามารถเขียนเป็น

$$H(z) = \prod_{i=1}^{N/2} \frac{a_{0i} + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}}{1 + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2}} \quad (2\text{-}54)$$

ที่ G ในสมการที่ 2-53 จะเป็นตัวสัมประสิทธิ์ของ $H_i(z)$ ซึ่งแต่ละส่วนจะถูกแทนด้วย i สำหรับตัวอย่างให้ $N = 4$ จะได้ฟังก์ชั่นถ่ายโอนเป็นออร์เดอร์สี่ (Fourth-Order Transfer Function) ดังนี้

$$H(z) = \frac{(a_{01} + a_{11}z^{-1} + a_{21}z^{-2})(a_{01} + a_{12}z^{-1} + a_{22}z^{-2})}{(1 + b_{11}z^{-1} + b_{21}z^{-2})(1 + b_{12}z^{-1} + b_{22}z^{-2})} \quad (2\text{-}55)$$

เมื่อเขียนโครงสร้างออร์เดอร์สองของแต่ละตัวเป็นโครงสร้างแบบตรงแบบที่ 2 จะได้ดังภาพที่ 2-18 เมื่อนำสมการที่ 2-55 มาเขียนเป็นโครงสร้างที่ประกอบด้วยโครงสร้างแบบตรงแบบที่ 2 ออร์เดอร์สองจะได้



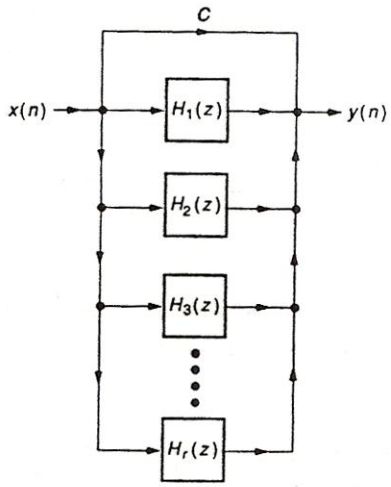
ภาพที่ 2-18 ไอไออาร์ออร์เดอร์สี่ด้วยโครงสร้าง II มาอนุกรมกัน

โครงสร้างแบบขนาน

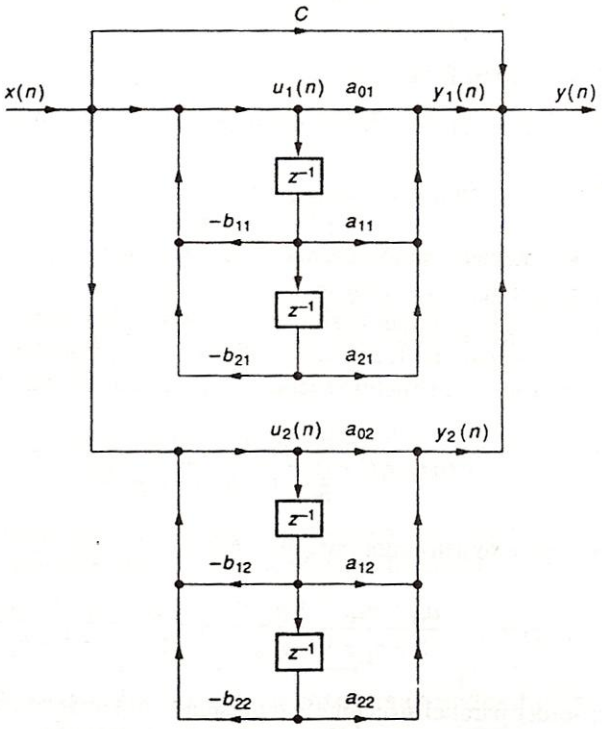
จากฟังก์ชั่นถ่ายโอนในสมการที่ 2-30 เมื่อสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ

$$H(z) = C + H_1(z) + H_2(z) + ... + H_r(z) \qquad (2\text{-}56)$$

ซึ่งหาได้จากการทำแยกพาเชียลโครงสร้างแบบขนานนี้แสดงดังภาพที่ 2-19



ภาพที่ 2-19 แสดงการขนานของโครงสร้างตัวกรองเชิงเลขแบบไอไออาร์



ภาพที่ 2-20 โครงสร้างไอไออาร์ออร์เดอร์สี่ที่เกิดจากโครงสร้างรูปแบบที่ II ต่อขนานกัน

เมื่อแต่ละส่วนประกอบด้วยสมการที่เป็นสมการออร์เดอร์สองจะได้

$$H(z) = C + \sum_{i=1}^{N/2} \frac{a_{0i} + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}}{1 + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2}} \tag{2-57}$$

สำหรับตัวอย่างสมการที่เป็นสมการออร์เดอร์สี่แทน N=4 ในสมการที่ 2-57 จะได้ดังสมการที่ 2-58 และมีโครงสร้างดังภาพที่ 2-20

$$H(z) = C + \frac{a_{oi} + a_{11}z^{-1} + a_{21}z^{-1}}{1 + b_{11}z^{-1} + b_{22}z^{-2}} + \frac{a_{02} + a_{12}z^{-1} + a_{22}z^{-2}}{1 + b_{12}z^{-1} + b_{22}z^{-2}} \tag{2-58}$$

2.6.2 ตัวกรองดิจิตอลแบบเอฟไออาร์ (Finite Impluse Response:FIR)

สำหรับฟังก์ชั่นถ่ายโอนของเอฟไออาร์นั้นจะเป็นดังนี้

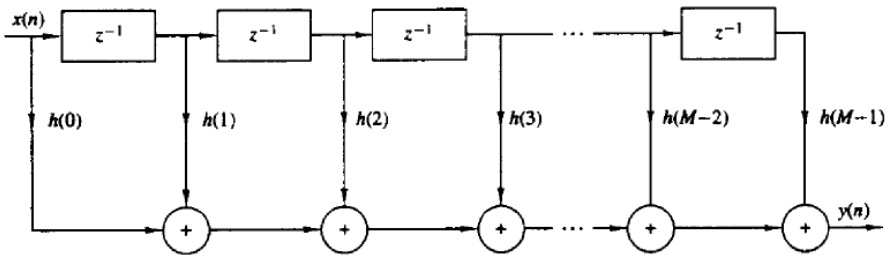
$$H(z) = \sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k} \tag{2-59}$$

เมื่อเขียนในรูปของเอาท์พุท

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{N} b_k X(z) z^{-k} \tag{2-60}$$

เมื่อทำการหาส่วนกลับของ z-transform จะได้

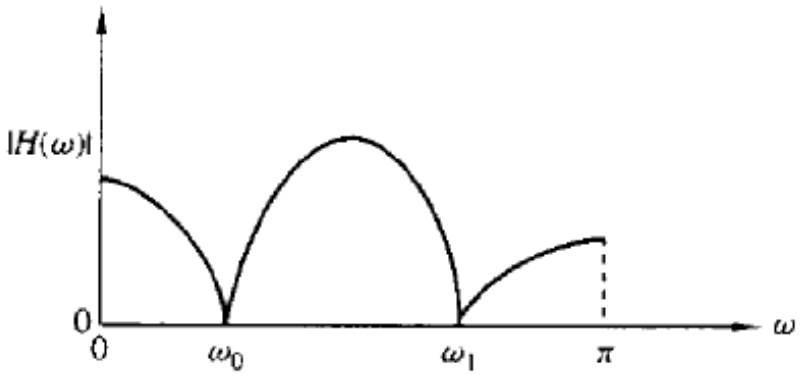
$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} b_k x(n-k) \tag{2-61}$$



ภาพที่ 2-21 แสดงโครงสร้างของตัวกรองเชิงเลขแบบเอฟไออาร์

2.7 ตัวกรองดิจิตอลแบบนอตช์

ตัวกรองความถี่แบบนอตช์หรืออาจจะเรียกว่าเป็นตัวกรองความถี่แบนแคบที่จะลดทอนหรือกำจัดความถือใดความถี่หนึ่งโดยเฉพาะอาจจะจุดเดียวหรือหลายจุด ω_0, ω_1 ดังในภาพที่ 2-22 ซึ่งการลดทอนในทางอุดมคติความถี่ที่ถูกเลือกจะถูกลดทอนจนถึงระบบศูนย์ สำหรับตัวอย่างการนำไปใช้งานเช่นการลดทอนสัญญาณไฟฟ้ากระแสสลับ 50 Hz ที่เข้ามาปะบนในระบบการวัดและบันทึกคลื่นไฟฟ้าหัวใจ

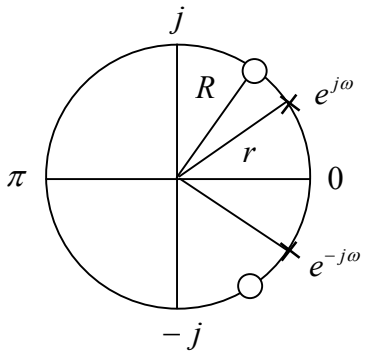


ภาพที่ 2-22 แสดงผลตอบสนองทางความถี่ของตัวกรองเชิงเลขแบบนอตช์

การตอบสนองทางความถี่ของ Notch Filter

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 & \omega_0 \\ 1 & otherwise \end{cases} \tag{2-62}$$

ω_0 คือความถี่คัตออฟของ Notch Filter



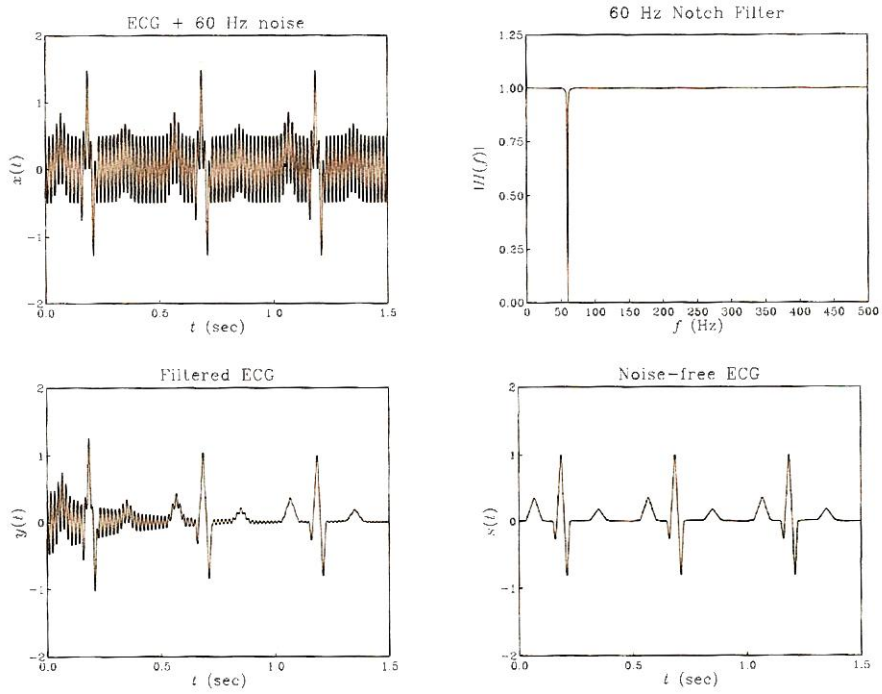
$$H(z) = G\frac{(1-\mathrm{Re}^{j\omega_0}z^{-1})(1-\mathrm{Re}^{-j\omega_0}z^{-1})}{(1-re^{j\omega_0}z^{-1})(1-re^{-j\omega_0}z^{-1})} = b_0\frac{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}} \tag{2-63}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} e^{\pm j\omega_0} &= \cos\omega_0 \pm j\sin\omega_0 \\ b_1 &= -2R\cos\omega_0 \qquad b_2 = R^2 \\ a_1 &= -2r\cos\omega_0 \qquad a_2 = r^2 \end{aligned} \tag{2-64}$$

เป็นสมการทั่วไป เมื่อต้องการเป็นแบบ Notch Filter กำหนดให้ $R = 1; r < R$ จะได้สมการ

$$H(z) = b_0\frac{1-2\cos\omega_0z^{-1}+z^{-2}}{1-2r\cos\omega_0z^{-1}+r^2z^{-2}} \tag{2-65}$$



ภาพที่ 2-23 สัญญาณคลื่นไฟฟ้าหัวใจกับสัญญาณ 60 Hz

บทที่ 3
ขั้นตอนการออกแบบ

จากทฤษฎีที่กล่าวมาในบทที่ 2 จะเป็นการกล่าวถึงวิธีการออกแบบต่างๆซึ่งได้อธิบายถึงในส่วนที่เป็นการออกแบบอะนาลอก และแบบดิจิตอลสำหรับในส่วนที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้จะเป็นการออกแบบที่ใช้ในการทำวิจัยนั้นคือ ตัวกรองเชิงเลขไอไออาร์แบบนอตช์โดยจะทำการปรับปรุงโดยวิธีการวางโพลนั้นคือการพิจารณาจากตำแหน่งของโพลและซีโร่โดยตรงบนวงกลมหนึ่งบนระนาบ z-plane และใช้โปรแกรม MATLAB ในการหาแนวโน้มความเป็นไปได้ของคำตอบซึ่งมีขั้นตอนคือ ศึกษาถึงตัวกรองเชิงเลขแบบไอไออาร์ที่มีการปรับปรุงไปก่อนหน้านี้ซึ่งถูกออกแบบด้วยสมการออร์เดอร์สอง การใช้หลักการเรขาคณิตหาแนวโน้มอัตราการขยายและกำหนดทิศทางของการปรับปรุงด้วยสมการออร์เดอร์สี่ หลังจากนั้นจะใช้โปรแกรม MATLAB ในการจำลองการทำงานและสังเกตผลลัพธ์ที่ได้

3.1 ขั้นตอนการออกแบบด้วยสมการออร์เดอร์สอง

โดยทั่วไปสมการเชิงเลขไอไออาร์ประกอบด้วยโพลและซีโร่จากภาพที่ 3-1 มีสมการดังนี้คือ

$$H(z) = G\frac{(1-Z_1z^{-1})(1-Z_2z^{-1})}{(1-P_1z^{-1})(1-P_2z^{-2})} = G\frac{(1-r_1e^{-j\omega_0}e^{-j\omega})(1-r_1e^{+j\omega_0}e^{-j\omega})}{(1-r_2e^{-j\omega_0}e^{-j\omega})(1-r_2e^{+j\omega_0}e^{-j\omega})} \qquad (3\text{-}1)$$

ทำการจัดรูปใหม่ให้อยู่ในรูปแบบ

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$$

$$H(z) = G\frac{(1-r_1e^{-j\omega_0}z^{-1})(1-r_1e^{+j\omega_0}z^{-1})}{(1-r_2e^{-j\omega_0}z^{-1})(1-r_2e^{+j\omega_0}z^{-1})} = G\frac{1-r_1e^{-j\omega_0}z^{-1}-r_1e^{+j\omega_0}z^{-1}+r_1^{\,2}e^{-j\omega_0}e^{+j\omega_0}z^{-2}}{1-r_2e^{-j\omega_0}z^{-1}-r_2e^{+j\omega_0}z^{-1}+r_2^{\,2}e^{-j\omega_0}e^{+j\omega_0}z^{-2}}$$

$$H(z) = G\frac{1-r_1(e^{-j\omega_0}+e^{+j\omega_0})z^{-1}+r_1^{\,2}z^{-2}}{1-r_2(e^{-j\omega_0}+e^{+j\omega_0})z^{-1}+r_2^{\,2}z^{-2}} \qquad (3\text{-}2)$$

จาก สูตร Complex Exponentials

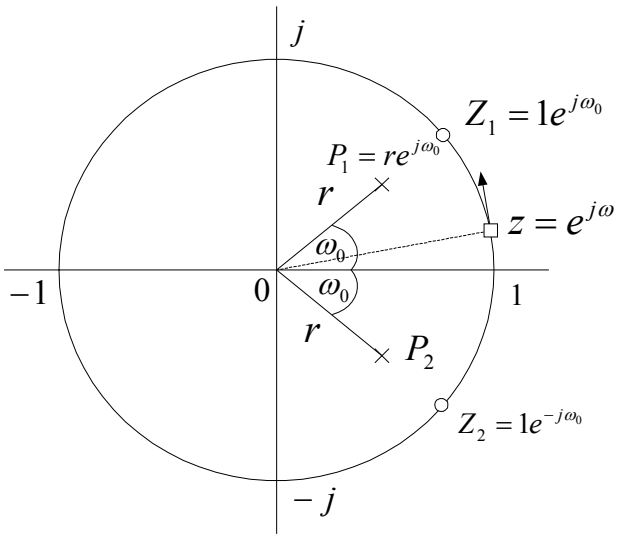
$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta}+e^{-j\theta})$$

นำไปแทนในสมการที่ 3-2 จะได้

$$H(z) = b_0\frac{1-2r_1\cos\omega_0z^{-1}+r_1^{\,2}z^{-2}}{1-2r_2\cos\omega_0z^{-1}+r_2^{\,2}z^{-2}} \qquad (3\text{-}3)$$

เมื่อต้องทำเป็นแบบนอตช์จึงกำหนดให้ขนาดรัศมี r_1 ของซีโร่อยู่บนวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยพอดี และให้ $r_2 = r$ เป็นรัศมีของโพลดังภาพที่ 3-1 และจะได้สมการใหม่ได้ดังนี้คือ

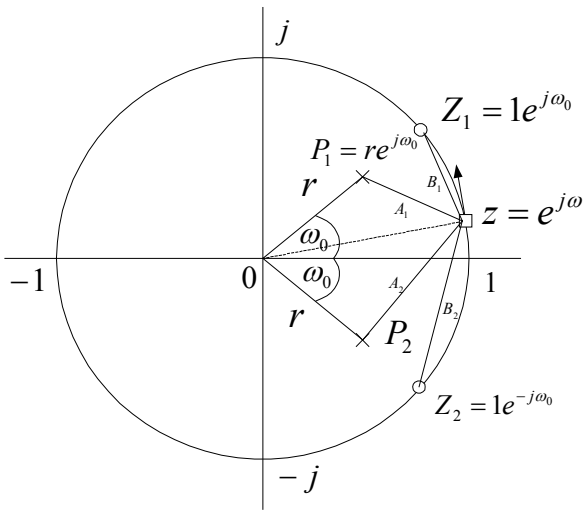
$$H(z) = \frac{1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r\cos\omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}} \tag{3-4}$$



ภาพที่ 3-1 แสดงตำแหน่งของโพล-ซีโร่บนวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วย

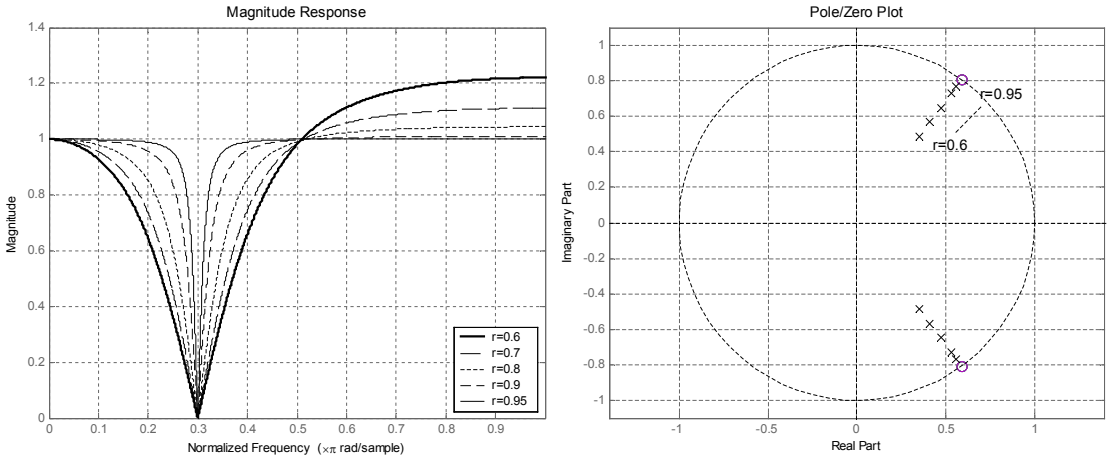
ที่ตำแหน่งซีโร่ Z_1 จะอยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วยซึ่งผลที่เกิดขึ้นเมื่อพิจารณาอัตราการขยายในลักษณะทรงเรขาคณิตแล้วดังภาพที่ 3-2 เมื่อ ความถี่ทางด้านอินพุท ω เปลี่ยนแปลงไปตั้งแต่ 0 ถึง π เคลื่อนที่ไปตามขอบของวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยจะทำให้เกิดผลตอบสนองทางความถี่ดังสมการ

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \frac{|B_1| * |B_2|}{|A_1| * |A_2|} \tag{3-5}$$

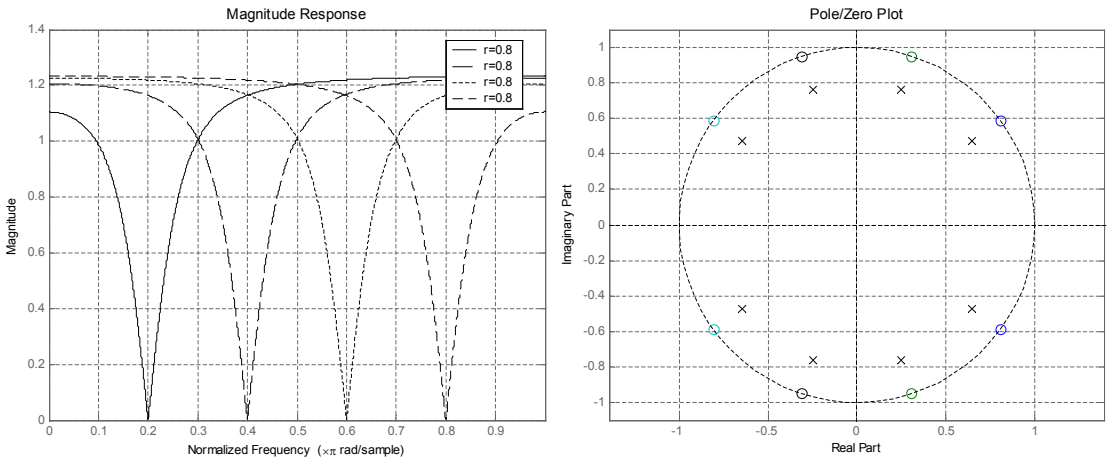


ภาพที่ 3-2 แสดงความสัมพันธ์ของอัตราขยายระหว่างโพลและซีโร่ในแบบเรขาคณิต

ดังนั้นเมื่อ ω เปลี่ยนแปลงไปจนถึงตำแหน่ง ω_0 จะทำให้ขนาดของ B_1 มีขนาดเป็นศูนย์ ทำให้ผลตอบสนองทางความถี่ดังสมการที่ 3-1 เป็น 0 ณ ตำแหน่งที่ความถี่อินพุทตรงกับตำแหน่งของซีโร่พอดีในขณะเดียวกันสมการที่ 3-1 เมื่อเปลี่ยนแปลงขนาดของรัศมีของโพลก็จะทำให้ผลตอบสนองทางความถี่เปลี่ยนแปลง ซึ่งเมื่อพิจารณาดังภาพที่ 3-2 เช่นกันโดยให้ตำแหน่งของ Z อยู่ในตำแหน่งดังภาพที่ 3-2 แล้วทำการเปลี่ยนรัศมีของโพลให้ยาวมากขึ้นเป็นผลให้ A_1 และ A_2 เกิดการเปลี่ยนแปลงทำให้ผลตอบสนองทางความถี่เกิดการเปลี่ยนแปลงไปด้วย การเปลี่ยนแปลงนี้จะมีผลต่อความกว้างของแถบความถี่ (Bandwidth Frequency) เพื่อให้เกิดความเข้าใจมากขึ้นจะใช้โปรแกรม MATLAB จำลองผลกระทบของตำแหน่งโพลและซีโร่บนระนาบ z-plane โดยที่ภาพที่ 3-3 จะแสดงถึงความกว้างของแถบความถี่ (Bandwidth Frequency) ที่เปลี่ยนแปลงไปตามรัศมีของโพลที่เปลี่ยนแปลงไป ส่วนในภาพที่ 3-4 จะแสดงถึงตำแหน่งของซีโร่ที่เปลี่ยนแปลงไปบนระบบ z-plane ซึ่งจะมีผลต่อความถี่นอตช์ (Notch Frequency)



ภาพที่ 3-3 แสดงผลตอบสนองทางความถี่และโพล-ซีโร่เมื่อความยาวของรัศมีของโพลเปลี่ยนแปลงไป

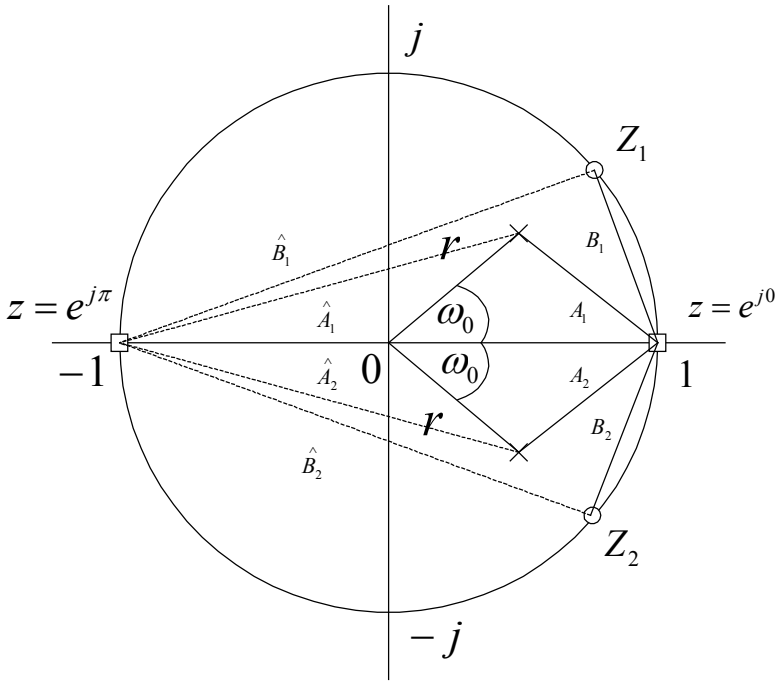


ภาพที่ 3-4 แสดงผลตอบสนองทางความถี่และโพล-ซีโร่เมื่อเปลี่ยนแปลงความถี่นอตช์

จากผลในภาพที่ 3-3 จะเห็นว่าช่วงอัตราการขยายความถี่ผ่าน (Pass-Band Gain) จะไม่เท่ากัน โดยสังเกตที่ตำแหน่ง ω ที่ 0 และ π จะมีอัตราการขยายไม่เท่ากัน และมีบทความ[3] ได้นำเสนอวิธีการปรับปรุงให้อัตราการขยายช่วงความถี่ผ่าน (Pass-Band Gain) โดยวิธีการปรับเปลี่ยนตำแหน่งโพลบนระนาบ z-plane โดยตรง ซึ่งจากภาพที่ 3-3 มุมของโพลและซีโรที่กระทำกับแกน x จะมีค่าเท่ากันเป็นผลให้ผลตอบสนองทางความถี่ด้านซ้าย และด้านขวาของความถี่นอตช์ไม่เท่ากัน จากภาพที่ 3-5 อัตราการขยายที่ตำแหน่ง 0 และ ตำแหน่ง π จะเป็นไปตามสมการดังนี้คือ

$$\left|H(e^{j0})\right| = \frac{|B_1|*|B_2|}{|A_1|*|A_2|} \tag{3-6}$$

$$\left|H(e^{j\pi})\right| = \frac{|\hat{B}_1|*|\hat{B}_2|}{|\hat{A}_1|*|\hat{A}_2|} \tag{3-7}$$

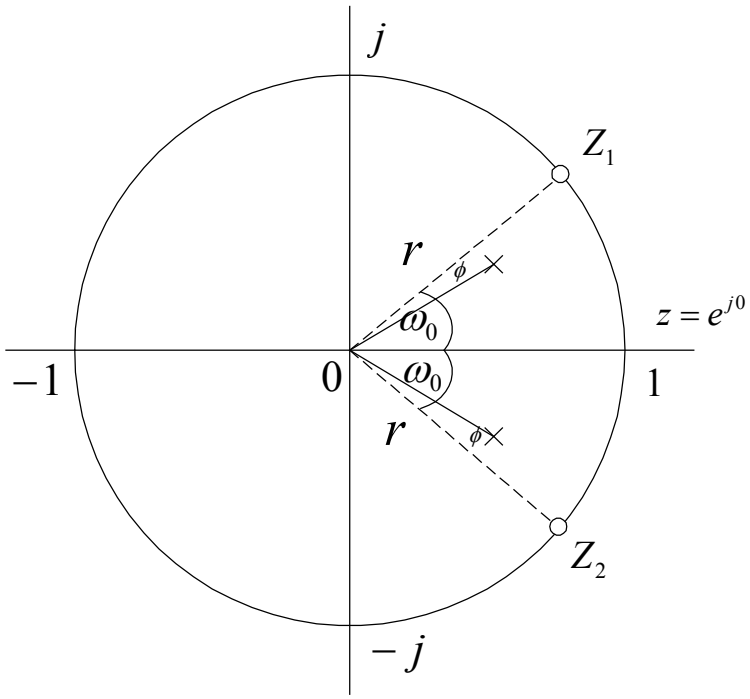


ภาพที่ 3-5 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง Pass-Band Gain ที่ 0 และ π

จากผลตอบสนองทางความถี่ในภาพที่ 3-3 ทางด้านซ้ายที่ตำแหน่ง 0 จะน้อยกว่าด้านขวาที่ตำแหน่ง π ดังนั้นถ้าต้องการให้ผลตอบสนองทางความถี่ที่ตำแหน่งที่ π น้อยลง ทำได้โดยการปรับมุมของโพลที่ทำกับแกน x ให้มีค่าน้อยลงเป็นผลให้ค่า

A_1 และ A_2 ในสมการที่ 3-6 และในภาพที่ 3-5 น้อยลง ทำให้ $\left|H(e^{j0})\right|$ มากขึ้น

$\hat{A}_1$ และ $\hat{A}_2$ ในสมการที่ 3-7 และในภาพที่ 3-5 มากขึ้น ทำให้ $\left|H(e^{j\pi})\right|$ น้อยลง



ภาพที่ 3-6 แสดงการปรับมุมของโพลเพื่อปรับปรุงผลตอบสนองทางความถี่

จากลักษณะเรขาคณิตข้างต้นเมื่อทำการปรับมุมของโพล จากสมการที่ 3-4 จะได้สมการใหม่ที่ได้รับการปรับปรุงเป็นดังนี้

$$H(z) = b_0 \frac{1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r\cos(\omega_0 - \phi)z^{-1} + r^2 z^{-2}} \tag{3-8}$$

ในการหามุม ϕ สามารถหาได้โดยการกำหนดขนาดของฟังก์ชันถ่ายโอนหรือขนาดของผลตอบสนองทางความถี่ที่ความถี่อินพุท ω ใดๆ และทำการแก้ไขสมการหาค่ามุม ϕ ได้ แต่เนื่องจากตามที่ได้กล่าวมาแล้ว จะพิจารณาความถี่ทางด้านอินพุท ω สองจุดคือ $\omega = 0$ และ $\omega = \pi$ จะต้องเท่ากันดังแสดงในสมการที่ 3-9 และทำการแก้สมการหาค่ามุม ϕ ต่อไป

$$\left|H(e^{j0})\right| = \left|H(e^{j\pi})\right| \tag{3-9}$$

จะได้

$$\left|H(e^{j0})\right| = b_0 \frac{2 - 2\cos\omega_0}{1 - 2r\cos(\omega_0 - \phi) + r^2} \tag{3-10}$$

และ

$$H(e^{j\pi}) = \frac{1 - 2\cos\omega_0 e^{-j\pi} + e^{-2j\pi}}{1 - 2r\cos(\omega_0 - \phi)e^{-j\pi} + r^2 e^{-2j\pi}} \tag{3-11}$$

จากสมการ Complex Exponentials

$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta \tag{3-12}$$

จากสมการที่ 3-10 สามารถหาค่า $e^{-j\pi}$ และ $e^{-2j\pi}$ ได้ดังนี้

$$e^{-j\pi} = \cos\pi - j\sin\pi = -1$$

และ

$$e^{-2j\pi} = \cos 2\pi - j\sin 2\pi = 1$$

นำค่าที่ได้แทนกลับไปในสมการที่ 3-11

$$\left|H(e^{j\pi})\right| = b_0 \frac{2+2\cos\omega_0}{1+2r\cos(\omega_0-\phi)+r^2} \tag{3-13}$$

นำสมการที่ 3-13 และ 3-10 แทนกลับไปยังสมการที่ 3-9 ได้เป็น

$$\frac{2-2\cos\omega_0}{1-2r\cos(\omega_0-\phi)+r^2} = \frac{2+2\cos\omega_0}{1+2r\cos(\omega_0-\phi)+r^2} \tag{3-14}$$

จัดรูปเพื่อให้เหลือเฉพาะ $\cos(\omega_0-\phi)$ ได้เป็น

$$(2-2\cos\omega_0)(1+2r\cos(\omega_0-\phi)+r^2) = (2+2\cos\omega_0)(1-2r\cos(\omega_0-\phi)+r^2)$$

$$2+4r\cos(\omega_0-\phi)+2r^2-2\cos\omega_0-4r\cos\omega_0\cos(\omega_0-\phi)-2r^2\cos\omega_0 =$$

$$2-4r\cos(\omega_0-\phi)+2r^2+2\cos\omega_0-4r\cos\omega_0\cos(\omega_0-\phi)+2r^2\cos\omega_0$$

$$+4r\cos(\omega_0-\phi)-2\cos\omega_0-2r^2\cos\omega_0 = -4r\cos(\omega_0-\phi)+2\cos\omega_0+2r^2\cos\omega_0$$

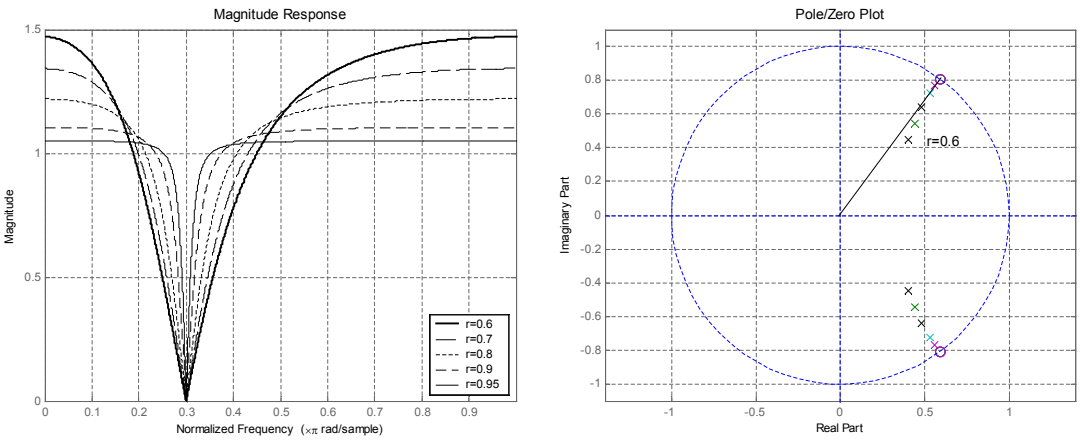
$$8r\cos(\omega_0-\phi) = 4\cos\omega_0+4r^2\cos\omega_0$$

$$\cos(\omega_0-\phi) = \frac{4\cos\omega_0(1+r^2)}{8r} = \frac{(1+r^2)\cos\omega_0}{2r}$$

$$\omega_0-\phi = \cos^{-1}\left(\frac{1+r^2}{2r}\cos\omega_0\right)$$

$$\phi = \omega_0 - \cos^{-1}\left(\frac{1+r^2}{2r}\cos\omega_0\right) \tag{3-15}$$

จากสมการที่ 3-15 จะเห็นได้ว่าการเปลี่ยนแปลงค่า r และ ω_0 มีผลต่อมุม ϕ ที่ปรับเปลี่ยนไป จากบทความ [3] ได้ทำการเปรียบเทียบรัศมี r ที่แตกต่างกันซึ่งได้ผลดังภาพที่ 3-7



ภาพที่ 3-7 เปรียบเทียบผลตอบสนองทางความถี่ที่ปรับปรุงมุม ϕ

จากภาพที่ 3-7 จะเห็นได้ว่าอัตราการขยายที่ตำแหน่ง $\omega = 0$ และ $\omega = \pi$ ที่ $r = 0.6$ จะมีขนาดเท่ากัน และเมื่อทำการเปลี่ยนแปลงรัศมี r จะทำให้อัตราการขยายที่ $\left|H(e^{j0})\right| = \left|H(e^{j\pi})\right|$ เหมือนกันแต่อัตราการขยายรวมยังไม่เป็นหนึ่งซึ่งตัวกรองที่ดีจะต้องส่งผ่านความถี่อื่นๆที่ต้องการออกไปโดยที่ยังคงขนาดและรูปร่างของสัญญาณไว้เหมือนเดิมนั้นคือจะต้องทำให้อัตราการขยายที่รัศมีค่าต่างๆมีขนาดเท่ากับหนึ่งด้วย เพราะฉะนั้นจากสมการที่ 3-8 จะเห็นได้ว่าจะมี b_0 ซึ่งเป็นอัตราการขยายของระบบ ที่ยังไม่ได้หาค่า และจากสมการที่ 3-10 และสมการที่ 3-13 เมื่อแทนค่ามุม ϕ และ ω_0 จะได้อัตราการขยายที่ $\omega = 0$ และ $\omega = \pi$ โดยที่อัตราการขยายตัวใหม่ให้เป็นค่า k ดังสมการที่ 3-16

$$k = b_0 a_{11} = b_0 a_{12} \tag{3-16}$$

เมื่อ

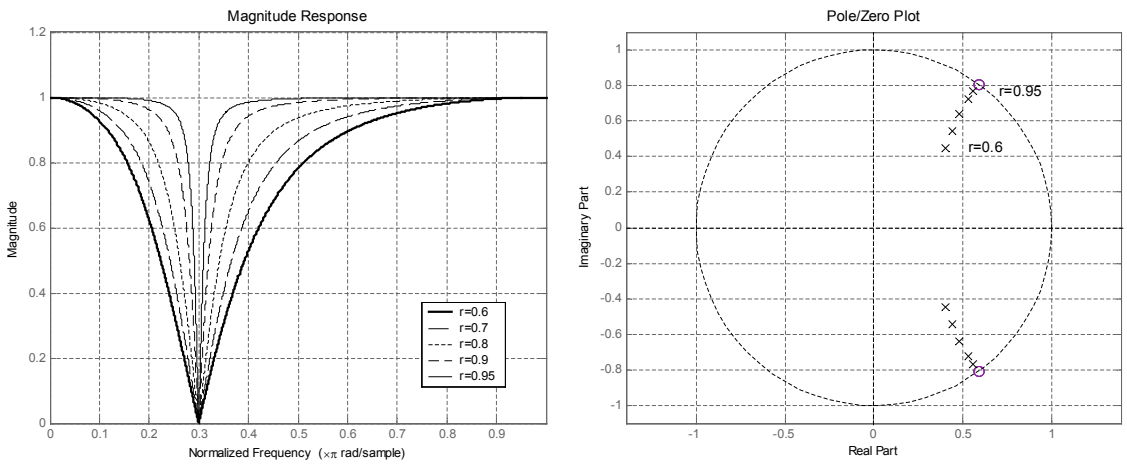
$$a_{11} = \frac{2 - 2\cos\omega_0}{1 - 2r\cos(\omega_0 - \phi) + r^2}$$

$$a_{12} = \frac{2 + 2\cos\omega_0}{1 + 2r\cos(\omega_0 - \phi) + r^2}$$

ดังนั้น สามารถหาค่า b_0 ได้ดังนี้คือ

$$b_0 = \frac{k}{a_{11}} = \frac{k}{a_{12}} \tag{3-17}$$

เมื่อได้อัตราการขยายดังสมการที่ 3-17 นำไปจำลองการทำงานด้วย MATLAB จะได้ดังภาพที่ 3-8 ผลตอบสนองทางความถี่ที่ $r = 0.6, r = 0.7, r = 0.8, r = 0.9, r = 0.95$ จะมีอัตราการขยายความถี่ผ่าน (Pass-Band Gain) เท่ากับ 1 ซึ่งทั้งหมดที่ได้อธิบายไปนั้นเป็นการนำเสนอของบทความ[3] ที่ต้องกล่าวถึงการปรับเปลี่ยนต่างๆเนื่องจากการวิจัยที่จะได้นำเสนอต่อไปจะมีลักษณะที่คล้ายคลึงกันมากๆ จะแตกต่างกันก็ตรงที่จำนวนออร์เดอร์และวิธีการจัดวางใหม่เท่านั้นเอง



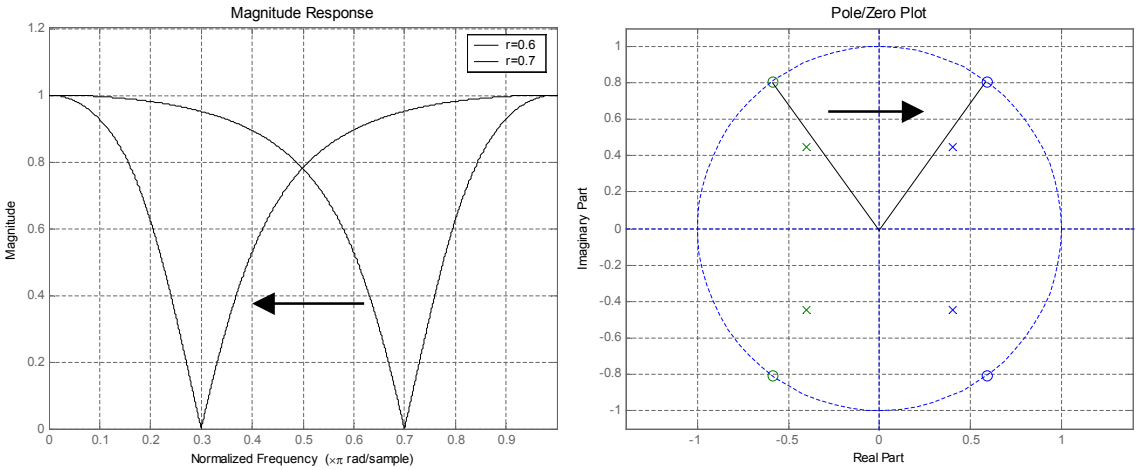
ภาพที่ 3-8 แสดงผลตอบสนองทางความถี่ที่ได้ทำการปรับปรุงทั้งค่ามุม ϕ และ b_0

3.2 ขั้นตอนการปรับปรุงผลตอบสนองทางความถี่

จากที่ได้นำเสนอไปจะเห็นได้ว่าการปรับปรุงผลตอบสนองทางความถี่ด้วยการพิจารณาตำแหน่งโพล/ซีโร่บนระบบ z-plane โดยตรงและใช้วิธีหาผลตอบสนองทางความถี่ด้วยวิธีเรขาคณิตในการหาอัตราการขยาย ของระบบสามารถที่จะวิเคราะห์แนวทางการปรับปรุงเบื้องต้นได้ รวมถึงเป็นแนวทางในการทำวิจัยที่จะนำเสนอต่อไปได้อีกด้วยดังนี้

จากภาพที่ 3-8 ที่รัศมี $r = 0.6, r = 0.7, r = 0.8, r = 0.9, r = 0.95$ จะให้อัตราการขยายความถี่ผ่านเท่ากับหนึ่ง สำหรับส่วนที่จะวิจัยคือเมื่อทำการพิจารณาที่ ผลการตอบสนองทางความถี่ที่ $\omega = 0$ และ $\omega = 0.6$ ที่ $r = 0.6$ จะได้อัตราการขยายไม่เท่ากันดังสมการที่ 3-18

$$\left|H_{r=0.6}(e^{j0})\right| \neq \left|H_{r=0.6}(e^{j0.6\pi})\right| \tag{3-18}$$



ภาพที่ 3-9 เปรียบเทียบผลตอบสนองทางความถี่ที่ $\omega_0 = 0.3\pi$ และ $\omega_0 = 0.7\pi$

ดังนั้นการวิจัยนี้จะทำการปรับปรุงอัตราขยายช่วงการเปลี่ยนแปลง (Transition Band Gain) ทั้งด้านลงและด้านขึ้นให้มีลักษณะที่ใกล้เคียงกันได้ จากภาพที่ 3-6 สิ่งที่ปรับเปลี่ยนได้มีเฉพาะโพลเท่านั้นที่สามารถทำการปรับเปลี่ยนได้ซึ่งการปรับเปลี่ยนมุมของโพลด้วยมุม ϕ สามารถทำให้อัตราการขยายความถี่ผ่าน (Pass-Band Gain) เท่ากันได้จะเห็นได้ว่าไม่เหลือตัวแปรที่สามารถปรับเปลี่ยนได้อีก

ข้อสังเกตหนึ่ง ดังภาพที่ 3-8 และภาพที่ 3-3 ที่ $r = 0.6$ ก่อนทำการปรับปรุงในภาพที่ 3-3 จะเห็นได้ว่า ที่ $\omega = 0.2\pi$ จะใกล้เคียงกับที่ $\omega = 0.4\pi$ แต่เมื่อทำการปรับมุมโพลใหม่ดังในภาพที่ 3-8 เป็นผลให้ $\omega = 0.2\pi$ และ $\omega = 0.4\pi$ มีค่าที่แตกต่างกันอย่างเห็นได้ชัดซึ่งอาจสรุปได้ว่าถ้าต้องการช่วงการเปลี่ยนแปลง (Transitrion Band Gain) มีลักษณะใกล้เคียงกันโดยไม่มีการปรับมุมโพลใหม่ก็จะสูญเสีย อัตราการขยายความถี่ผ่าน (Pass-Band Gain) หรือถ้าต้องการอัตราการขยาย

ความถี่ผ่าน (Pass-Band Gain) ก็จะได้ช่วงการเปลี่ยนแปลงที่ไม่เท่ากันไม่สามารถทำการปรับปรุงได้ทั้ง Pass-Band Gain และ Transition Band Gain ในเวลาเดียวกันได้ ในเมื่อสมการออร์เดอร์สองไม่สามารถที่จะทำได้ ดังนั้นวิธีแก้ไขก็คือการเพิ่มโพลซีโร่เข้าไปอีก 1 คู่ หรือเพิ่มเติมฟังก์ชั่นที่เป็นสมการออร์เดอร์สองเข้าไปอีก 1 ชุดดังสมการที่ 3-19 เพื่อเพิ่มตัวแปรให้กับการปรับให้มากขึ้นและที่ต้องเพิ่มด้วยออเดอร์สองก็เนื่องมาจากตำแหน่งของโพลหนึ่งตัวที่เพิ่มเข้าไปจะมีตำแหน่งเป็นจำนวนเชิงซ้อนอยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย ซึ่งจะต้องมีองค์ประกอบของโพลอีกตัวหนึ่งซึ่งเป็นค่าคอนจูเกตของกันและกัน เพื่อให้ได้สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชั่นถ่ายโอนเป็นจำนวนจริงจึงจะนำไปใช้งานจริงได้

สำหรับแนวทางในการทำวิจัยสำหรับโพลซีโร่เกิดจากการสังเกตดังภาพที่ 3-9 เป็นการเปรียบเทียบระหว่างความถี่นอตช์ที่ $\omega_0 = 0.3\pi$ และ $\omega_0 = 0.7\pi$ การปรับมุมโพลใหม่ให้เข้าใกล้แกน x เป็นผลให้ช่วงการเปลี่ยนแปลงที่โพลทำมุมไปมีความชันที่มากขึ้นดังนั้นถ้าโพลเลื่อนไปทางด้านใดของความถี่นอตช์ (ω_0) จะทำให้ช่วงการเปลี่ยนแปลงด้านนั้นๆมีค่าสูงขึ้น เพราะฉะนั้นเมื่อพิจารณาช่วงการเปลี่ยนแปลงทางด้านขวาของความถี่นอตช์ $\omega_0 = 0.3\pi$ ก็ควรที่จะต้องมีโพลอีกหนึ่งตัวเพื่อชดเชยผลตอบสนองที่มีช่วงการเปลี่ยนแปลงที่มีความชันน้อยกว่า หรืออาจจะนำเอาผลตอบสนองทางด้าน $\omega_0 = 0.7\pi$ เลื่อนเข้ามาชดเชยอีกด้านหนึ่งดังภาพที่ 3-9 ก็น่าจะเป็นแนวคิดที่เหมาะสม

จากการเพิ่มสมการออร์เดอร์สองจะได้การจัดวางโพล-ซีโร่ใหม่ได้เป็นดังภาพที่ 3-10

$$\hat{H(z)} = H(z)H_{Add}(z) \tag{3-19}$$

เมื่อ

$\hat{H(z)}$ เป็นสมการที่ทำการวิจัย

$H(z)$ เป็นสมการตัวเดิมในสมการที่ 3-8

$H_{Add}(z)$ เป็นสมการออร์เดอร์สองเช่นเดียวกันกับสมการที่ 3-3

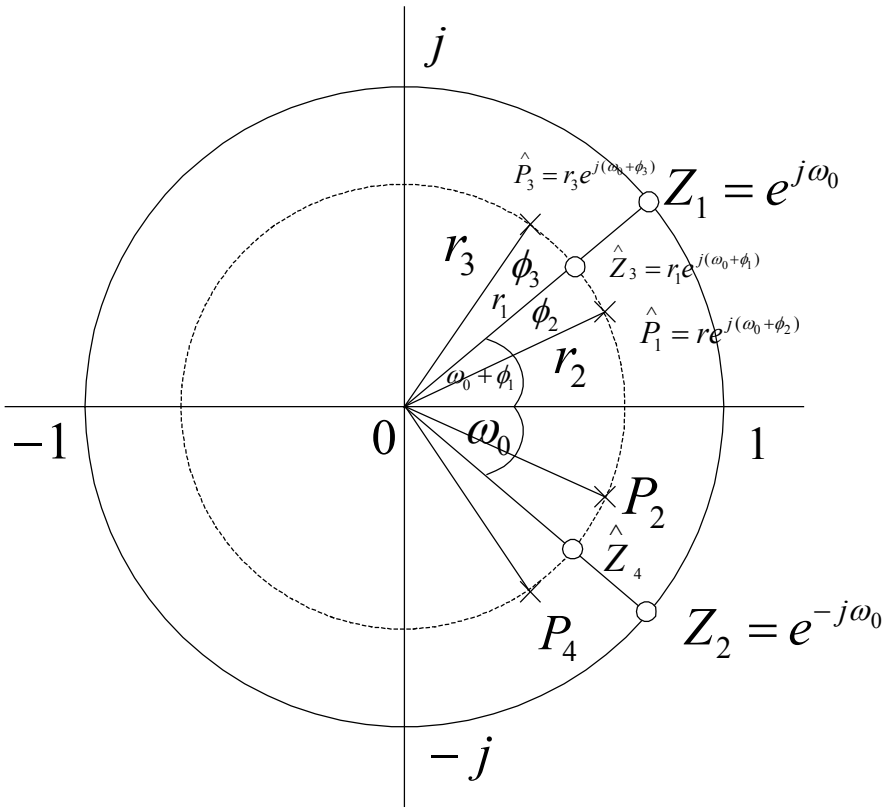
จะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนตัวใหม่ดังนี้คือ

$$\hat{H(z)} = \hat{b_0}\frac{1-2\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2}}{1-2r_2\cos(\omega_0-\phi_2)z^{-1}+r_2^{\,2}z^{-2}}\frac{1-2r_1\cos(\omega_0+\phi_1)z^{-1}+r_1^{\,2}z^{-2}}{1-2r_3\cos(\omega_0+\phi_3)z^{-1}+r_3^{\,2}z^{-2}} \tag{3-20}$$

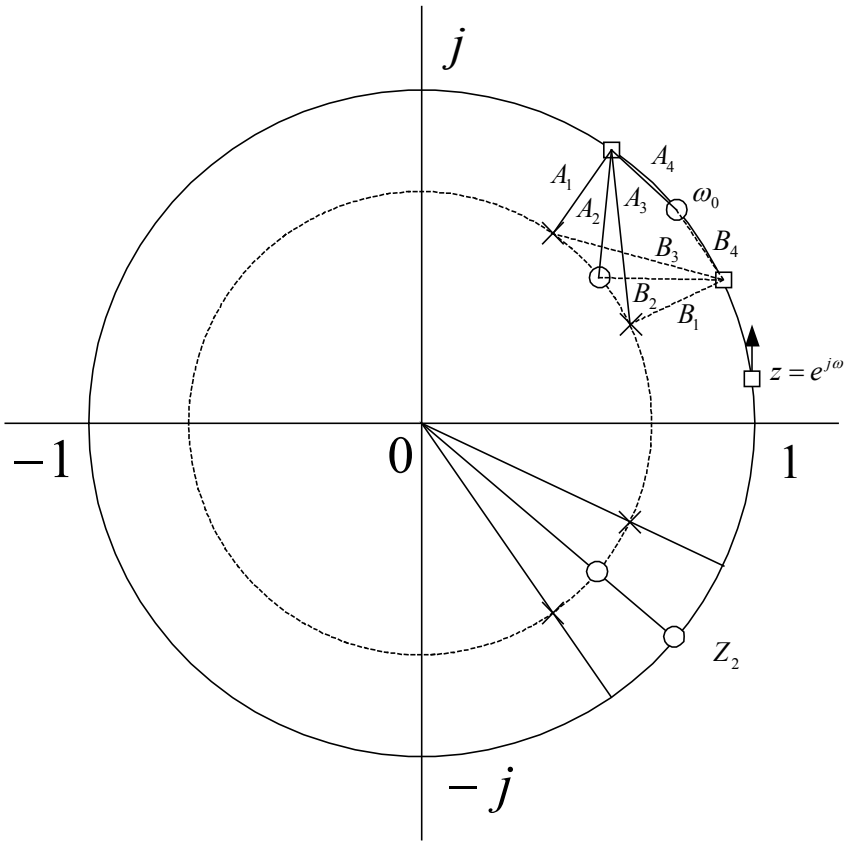
จากภาพที่ 3-10 และสมการที่ 3-20 จะมีตัวแปรอิสระทั้งหมด 6 ตัวดังนี้คือ $r_1, r_2, r_3, \phi_1, \phi_2, \phi_3$ จากเดิมที่มีเฉพาะ r_2 และ ϕ_2 จะเห็นได้ว่าจะเกิดตัวแปรอิสระที่ไม่ทราบค่าที่

เพิ่มเข้ามา นั้นคือ r_1, r_3, ϕ_1, ϕ_3 ถึงตรงนี้ก็ขึ้นอยู่กับว่าจะกำหนดค่าตัวแปรอิสระดังกล่าวให้อยู่ตำแหน่งใดบนระนาบ z-plane สำหรับการปรับปรุงให้ช่วงการเปลี่ยนแปลงได้ใกล้เคียงกันก็จะอาศัยวิธีการทางเรขาคณิตในการช่วยดูแนวโน้มในการเปลี่ยนแปลงโดยตั้งสมมุติฐานที่ว่าทั้งสองด้านของ ความถี่นอตช์หรือความถี่ตัดต้องเท่ากันจึงได้ออกมาเป็นดังภาพที่ 3-11 เมื่อพิจารณาที่ $z = e^{j(\omega_0+\Delta_1)}$ และที่ $z = e^{j(\omega_0-\Delta_1)}$ โดยที่ ขนาดของ $A_1 = B_1, A_2 = B_2, A_3 = B_3, A_4 = B_4$ ซึ่งจะวางในลักษณะสมมาตรกันทั้งด้านบวกและลบของความถี่นอตช์ และเมื่อพิจารณาในลักษณะเรขาคณิตอัตราการขยายในช่วงความถี่ที่ $\omega_0 + \Delta$ และ $\omega_0 - \Delta$ จะมีอัตราการขยายเท่ากัน เนื่องจากลักษณะการจัดวางดังในภาพที่ 3-10 ถ้าเป็นไปตามสมมุติฐานจึงกำหนดให้ $r_1 = r_2 = r_3$ ส่วนมุมซีโร่จะให้เป็นค่าคงที่โดยให้ $\phi_1 = 0$ ส่วน ϕ_2, ϕ_3 ให้มีขนาดเท่ากันแต่มีทิศทางตรงกันข้ามกันจากสมการที่ 3-20 เป็นสมการที่ 3-21

$$\hat{H(z)} = \hat{b_0} \frac{1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r\cos(\omega_0 + \phi)z^{-1} + r^2 z^{-2}} \frac{1 - 2r\cos\omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}{1 - 2r\cos(\omega_0 - \phi)z^{-1} + r^2 z^{-2}} \tag{3-21}$$



ภาพที่ 3-10 แสดงตำแหน่งโพล-ซีโร่ที่ทำการเพิ่มเข้าไปในวงกลมหนึ่งหน่วยอีกหนึ่งคู่



ภาพที่ 3-11 ลักษณะการวางโพล-ซีโร่ที่ทำการวิจัย

จากสมการที่ 3-21 ตัวแปรจะมีเฉพาะ ϕ เพียงตัวเดียว ซึ่งถ้าหากการชดเชยด้วยโพลและการวางเรขาคณิตถูกต้องนั้นคือ จะได้อัตราขยายความถี่ผ่านและช่วงการเปลี่ยนแปลงเป็นไปตามที่ต้องการ ในส่วนการแก้สมการและการแทนค่าเพื่อไม่ให้ติดตัวแปรเชิงซ้อนจึงสามารถพิจารณาที่ $\omega = 0$ และ $\omega = \pi$ ได้เช่นเดียวกันกับสมการที่ 3-11 และสมการที่ 3-13 ดังนั้นสมมุติให้

$$H(\hat{e}^{j0}) = H(\hat{e}^{j\pi}) \tag{3-22}$$

ที่

$$H(\hat{e}^{j0}) = \hat{b}_0 \frac{1 - 2\cos\omega_0 e^{-j0} + e^{-2j0}}{1 - 2r\cos(\omega_0 - \phi)e^{-j0} + r^2 e^{-2j0}} \frac{1 - 2r\cos\omega_0 e^{-j0} + r^2 e^{-2j0}}{1 - 2r\cos(\omega_0 + \phi)e^{-j0} + r^2 e^{-2j0}} \tag{3-23}$$

เมื่อ $e^{-j0} = e^{-2j0} = 1$

ดังนั้น

$$\left|H(\hat{e^{j0}})\right| = \hat{b_0}\frac{2-2\cos\omega_0}{1-2r\cos(\omega_0+\phi)+r^2}\frac{1-2r\cos\omega_0+r^2}{1-2r\cos(\omega_0-\phi)+r^2} \tag{3-24}$$

และที่ $e^{-j\pi}$

$$H(\hat{e^{j\pi}}) = \hat{b_0}\frac{1-2\cos\omega_0 e^{-j\pi}+e^{-2j\pi}}{1-2r\cos(\omega_0+\phi)e^{-j\pi}+r^2e^{-2j\pi}}\frac{1-2r\cos\omega_0 e^{-j\pi}+r^2e^{-2j\pi}}{1-2r\cos(\omega_0-\phi)e^{-j\pi}+r^2e^{-2j\pi}} \tag{3-25}$$

จากสมการที่ 3-12 แทนค่า $e^{-j\pi}=-1$ และ $e^{-2\pi}=1$ แทนในสมการที่ 3-25 จะได้

$$\left|H(\hat{e^{j\pi}})\right| = \hat{b_0}\frac{2+2\cos\omega_0}{1+2r\cos(\omega_0+\phi)+r^2}\frac{1+2r\cos\omega_0+r^2}{1+2r\cos(\omega_0-\phi)+r^2} \tag{3-26}$$

นำสมการที่ 3-24 และ 3-26 แทนลงในสมการที่ 3-23

$$\frac{2-2\cos\omega_0}{1-2r\cos(\omega_0+\phi)+r^2}\frac{1-2r\cos\omega_0+r^2}{1-2r\cos(\omega_0-\phi)+r^2} = \frac{2+2\cos\omega_0}{1+2r\cos(\omega_0+\phi)+r^2}\frac{1+2r\cos\omega_0+r^2}{1+2r\cos(\omega_0-\phi)+r^2} \tag{3-27}$$

เนื่องจากต้องการหาค่า ϕ ซึ่งเป็นตัวแปรเพียงตัวเดียวจะให้ตัวแปรอื่นๆเป็นค่าคงที่โดยจะให้ค่าคงที่ต่างๆแทนด้วยตัวแปรดังนี้เพื่อให้ง่ายต่อการแก้สมการ

กำหนดให้

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= \cos\omega_0 \\
A_2 &= \cos(\omega_0+\phi) \\
A_3 &= \cos(\omega_0-\phi) \\
A &= (2-2A_1)(1-2rA_1+r^2) = (2-2A_1)(C-2rA_1) \\
B &= (2+2A_1)(1+2rA_1+r^2) = (2+2A_1)(C+2rA_1) \\
C &= 1+r^2
\end{aligned}\right\} \tag{3-28}$$

เนื่องจากตัวแปร ϕ จะต้องถูกแยกออกจากเทอมของ $\cos(\omega_0+\phi)$ และ $\cos(\omega_0-\phi)$ ก่อน โดยใช้สูตร Trigonometric Indentities ดังนี้

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{3-29}$$

และ

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \tag{3-30}$$

แต่ก่อนที่จะกระจายสมการที่ 3-29 และ 3-30 เข้าไปในตัวแปรในสมการที่ 3-28 จะทำการจัดรูปสมการที่ 3-27 ให้อยู่ในรูปที่สั้นที่สุดเสียก่อนเพื่อป้องกันความผิดพลาดที่เกิดจากการย้ายข้างสมการที่มีความยาวมากๆ โดยนำตัวแปร A_1, A_2, A_3, A, B จากสมการที่ 3-28 แทนในสมการที่ 3-27 จะได้ดังนี้

$$\frac{A}{(C-2rA_2)(C-2rA_3)} = \frac{B}{(C+2rA_2)(C+2rA_3)} \tag{3-31}$$

เนื่องจาก A_2 และ A_3 เป็นตัวแปรที่มีค่า ϕ ซึ่งเป็นค่าที่ต้องการดังนั้นจะทำการย้ายข้างและแยกตัวประกอบให้เหลือในเทอมของ A_2 และ A_3 จากสมการที่ 3-31 จัดรูปให้สมการเท่ากับศูนย์ดังนี้

$$A(C+2rA_2)(C+2rA_3)=B(C-2rA_2)(C-2rA_3)$$
$$A(C^2+2rCA_3+2rCA_2+4r^2A_2A_3)=B(C^2-2rCA_2-2rCA_3+4r^2A_2A_3)$$
$$AC^2+2rACA_3+2rACA_2+4r^2AA_2A_3=BC^2-2rBCA_2-2rBCA_3+4r^2BA_2A_3$$
$$AC^2+2rACA_3+2rACA_2+4r^2AA_2A_3-BC^2+2rBCA_2+2rBCA_3-4r^2BA_2A_3=0$$

จัดกลุ่ม A_2, A_3

$$2rACA_2+2rBCA_2+2rACA_3+2rBCA_3+4r^2AA_2A_3-4r^2BA_2A_3+AC^2-BC^2=0$$
$$(2rAC+2rBC)A_2+(2rAC+2rBC)A_3+(4r^2A-4r^2B)A_2A_3+AC^2-BC^2=0 \quad (3\text{-}32)$$

เนื่องจากสัมประสิทธิ์ของแต่ละค่าเป็นค่าคงที่ อย่างที่กล่าวมาข้างต้นจะทำการลดรูปลงไปอีกเพื่อสะดวกในการแก้สมการจะได้ดังนี้คือ

$$C_1A_2+C_2A_3+C_3A_2A_3+C_4=0 \quad (3\text{-}33)$$

โดยที่ ตัวแปร C_1, C_2, C_3, C_4 เทียบกับสมการที่ 3-32 จะได้

$$\left.\begin{aligned} C_1&=C_2=2rAC+2rBC \\ C_3&=4r^2A-4r^2B \\ C_4&=AC^2-BC^2 \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}34)$$

ก่อนที่จะนำสมการที่ 3-29 และ 3-30 แทนในสมการที่ 3-33 จะทำการลดรูปสมการที่ 3-29 และ 3-30 โดยให้เป็นตัวแปร M และ N ดังนี้โดยให้

$$M=\cos(\omega_0)\cos(\phi) \quad (3\text{-}35)$$

และ

$$N=\sin(\omega_0)\sin(\phi) \quad (3\text{-}36)$$

นำสมาการที่ 3-35 และ 3-36แทนใน 3-29 , 3-30 และแทนกลับเข้าไปในสมการที่ 3-28 จะได้

$$A_2=\cos(\omega_0+\phi)=M-N \quad (3\text{-}37)$$

และ

$$A_3=\cos(\omega_0-\phi)=M+N \quad (3\text{-}38)$$

นำสมการที่ 3-37 และสมการที่ 3-38 แทนในสมการที่ 3-33 จะได้

$$C_1(M-N)+C_2(M+N)+C_3(M+N)(M-N)+C_4=0$$
$$C_1M-C_1N+C_2M+C_2N+C_3M^2-C_3N^2+C_4=0 \quad (3\text{-}39)$$

เนื่องจากสมการที่ 3-34 $C_1=C_2$ จะได้

$$2C_1M + C_3M^2 - C_3N^2 + C_4 = 0 \quad (3\text{-}40)$$

นำสมการที่ 3-35 และสมการที่ 3-36 แทนกลับเข้าไปในสมการที่ 3-34 ได้เป็น

$$2C_1\cos(\omega_0)\cos(\phi) + C_3\cos^2(\omega_0)\cos^2(\phi) - C_3\sin^2\omega_0\sin^2\phi + C_4 = 0 \quad (3\text{-}41)$$

จากสมการที่ 3-41 ต้องการที่จะจัดรูปให้อยู่ในรูปของตัวแปร $\cos\phi$ ตลอดทั้งสมการ

$$\sin^2\phi = 1 - \cos^2\phi \quad (3\text{-}42)$$

นำสมการที่ 3-42 แทนใน 3-41 ได้

$$2C_1\cos(\omega_0)\cos(\phi) + C_3\cos^2(\omega_0)\cos^2(\phi) - C_3\sin^2\omega_0(1-\cos^2\phi) + C_4 = 0$$

$$2C_1\cos(\omega_0)\cos(\phi) + C_3\cos^2(\omega_0)\cos^2(\phi) - C_3\sin^2\omega_0 + C_3\sin^2\omega_0\cos^2\phi + C_4 = 0$$

จัดกลุ่มเลขยกกำลัง

$$C_3\cos^2(\omega_0)\cos^2(\phi) + C_3\sin^2\omega_0\cos^2\phi + 2C_1\cos(\omega_0)\cos(\phi) + -C_3\sin^2\omega_0 + C_4 = 0$$

$$(\cos^2(\omega_0) + \sin^2(\omega_0))C_3\cos^2(\phi) + 2C_1\cos(\omega_0)\cos(\phi) + -C_3\sin^2\omega_0 + C_4 = 0$$

$$C_3\cos^2(\phi) + 2C_1\cos(\omega_0)\cos(\phi) + -C_3\sin^2\omega_0 + C_4 = 0 \quad (3\text{-}43)$$

หารด้วย C_3 ตลอดทั้งสมการจะได้

$$\cos^2(\phi) + \frac{2C_1}{C_3}\cos(\omega_0)\cos(\phi) - \sin^2\omega_0 + \frac{C_4}{C_3} = 0 \quad (3\text{-}44)$$

สมการที่ 3-44 จะอยู่ในรูปของสมการกำลังสองดังสมการ

$$ax^2 + bx + c = 0$$

สามารถแก้สมการโดยใช้สูตร

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3\text{-}45)$$

เมื่อทำการเทียบสัมประสิทธิ์ a, b, c กับสมการที่ 3-44 จะได้สัมประสิทธิ์ดังต่อไปนี้

$$\left.\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= \frac{2C_1}{C_3}\cos\omega_0 \\ c &= \frac{C_4}{C_3} - \sin^2\omega_0 \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}46)$$

จากสมการที่ 3-46 สามารถนำไปหาค่ามุม ϕ แต่จะไม่สะดวกในการนำไปใช้งานเนื่องจากต้องแทนค่าตัวแปรหลายลำดับชั้น ดังนั้นจะทำการแทนค่ากลับโดยนำ C_1, C_3, C_4 จากสมการที่ 3-34 แทนกลับไปในสมการที่ 3-46 จะได้

$$\left.\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= \frac{2(2rAC + 2rBC)}{4r^2A - 4r^2B}\cos\omega_0 \\ c &= \frac{AC^2 - BC^2}{4r^2A - 4r^2B} - \sin^2\omega_0 \end{aligned}\right\} \tag{3-47}$$

จากสมการที่ 3-47 จะเห็นได้ว่าสามารถดึงตัวร่วมและลดรูปได้เป็น

$$\left.\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= \frac{4rC(A+B)}{4r^2(A-B)}\cos\omega_0 = \frac{C(A+B)}{r(A-B)}\cos\omega_0 \\ c &= \frac{C^2(A-B)}{4r^2(A-B)} - \sin^2\omega_0 = \frac{C^2}{4r^2} - \sin^2\omega_0 \end{aligned}\right\} \tag{3-48}$$

เนื่องจากตัวแปร A, B, C สามารถนำค่ามาจากสมการที่ 3-28 แต่ในที่นี้จะหาที่ละส่วนแล้วจึงนำไปแทนใน 3-48 โดยจะหาความสัมพันธ์ของเทอม $(A+B)$ และ $(A-B)$ ก่อนเมื่อ

$$\begin{aligned} A &= (2 - 2A_1)(C - 2rA_1) = 2C - 2CA_1 - 4rA_1 + 4rA_1^2 \\ B &= (2 + 2A_1)(C + 2rA_1) = 2C + 2CA_1 + 4rA_1 + 4rA_1^2 \end{aligned} \tag{3-49}$$

ดังนั้น

$$A - B = -4CA_1 - 8rA_1 \tag{3-50}$$

และ

$$A + B = 4C + 8rA_1^2 \tag{3-51}$$

นำสมการที่ 3-50 และ 3-51 แทนใน ตัวแปร b ในสมการที่ 3-48 จะได้

$$b = \frac{C(4C + 8rA_1^2)}{r(-4CA_1 - 8rA_1)}\cos\omega_0 = -\frac{4C(C + 2rA_1^2)}{4rA_1(C + 2r)}\cos\omega_0 = \frac{C(C + 2rA_1^2)}{rA_1(C + 2r)}\cos\omega_0 \tag{3-52}$$

นำ C, A_1 ในสมการที่ 3-28 แทนลงในสมการที่ 3-52 จะได้

$$b = -\frac{(1+r^2)(1+r^2+2r\cos^2\omega_0)\cos\omega_0}{r(1+r^2+2r)\cos\omega_0} = -\frac{(1+r^2)(1+r^2+2r\cos^2\omega_0)}{r(1+r)^2} \tag{3-53}$$

นำ C ในสมการที่ 3-28 แทนลงในสมการที่ 3-48 ด้วยเพื่อหาค่า c ได้เป็น

$$c = \frac{1+r^2}{4r^2} - \sin^2\omega_0 \tag{3-54}$$

เมื่อได้สัมประสิทธิ์ a, b, c แทน $x = \cos\phi$ ในสมการที่ 3-45 จะได้

$$\cos\phi = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}\right) \tag{3-55}$$

เนื่องจากการเลือกตำแหน่งความถี่นอตช์ ขนาดของรัศมีโพล r และการปรับมุม ϕ แต่ละครั้งล้วนมีผลต่ออัตราการขยายของระบบซึ่งสามารถสังเกตได้จากภาพที่ 3-3 และ ภาพที่ 3-4 ดังนั้นเมื่อทำการออกแบบจนกระทั่งถึงการหาขนาดของมุม ϕ ก็ควรที่จะกำหนดอัตราการขยายของตัวกรองที่ได้ออกแบบด้วย ดังนั้นจากสมการที่ 3-23 จะมีตัวแปร b_0 ซึ่งเป็นตัวคูณกับฟังก์ชันถ่ายโอนเพื่อให้ได้อัตราการขยายที่ต้องการ ดังนั้นเมื่อคำนวณค่า ϕ จากสมการที่ 3-55 ให้นำค่า ϕ แทนกลับเข้าไปในสมการที่ 3-24 หรือ สมการที่ 3-26 เพื่อนำไปหาค่า b_0 สาเหตุที่เลือกที่ 3-24 และ 3-26 เนื่องจากทั้งสองสมการเป็นสมการที่ไม่ติดตัวแปรจำนวนเชิงซ้อน รวมถึงจุดที่ใช้ในการคำนวณก็จะเป็นตำแหน่งที่ใช้ในการหาอัตราการขยายของตัวกรองความถี่ และที่เลือกใช้สมการเป็นตำแหน่งเริ่มต้นที่ $\omega = 0$ และสุดท้าย $\omega = \pi$ เนื่องมาจากสมการที่ 3-22 ที่กำหนดให้ทั้งสองสมการมีอัตราการขยายที่เท่ากัน ดังนั้นเมื่อได้ค่า ϕ สามารถนำไปหาค่า a_1 หรือ a_2

$$H(\hat{e}^{j0}) = b_0 a_1 = k \tag{3-56}$$

หรือ

$$H(\hat{e}^{j\pi}) = b_0 a_2 = k \tag{3-57}$$

เมื่อ

$$a_1 = \frac{2 - 2\cos\omega_0}{1 - 2r\cos(\omega_0 + \phi) + r^2}\,\frac{1 - 2r\cos\omega_0 + r^2}{1 - 2r\cos(\omega_0 - \phi) + r^2}$$

$$a_2 = \frac{2 + 2\cos\omega_0}{1 + 2r\cos(\omega_0 + \phi) + r^2}\,\frac{1 + 2r\cos\omega_0 + r^2}{1 + 2r\cos(\omega_0 - \phi) + r^2}$$

จะได้ค่า b_0 ตามอัตราการขยาย(k) ที่ได้ทำการออกแบบ

$$b_0 = \frac{k}{a_1} = \frac{k}{a_2} \tag{3-58}$$

เมื่อได้พารามิเตอร์ครบแล้วก็สามารถที่จะนำไปใช้จริงได้ ซึ่งจะสรุปขั้นตอนใช้ดังนี้คือ

1. กำหนดความถี่นอตช์ ω_0

2. กำหนดรัศมีของโพล r เพื่อกำหนดความกว้างของช่วงการเปลี่ยนแปลงความถี่ (Bandwidth Frequency)

3. กำหนดอัตราการขยายของตัวกรองความถี่ที่ต้องการด้วยค่า k

4. นำ ω_0 และ r ไปคำนวณหามุม ϕ โดยใช้สมการที่ 3-55 ดังนี้

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}\right)$$

เมื่อ b ได้จากสมการที่ 3-53 และ c ในสมการที่ 3-54 ดังนี้

$$b = -\frac{(1+r^2)(1+r^2+2r\cos^2\omega_0)}{r(1+r)^2}$$

และ

$$c = \frac{1+r^2}{4r^2} - \sin^2\omega_0$$

5. นำค่ามุม ϕ ที่ได้กับอัตราการขยายของตัวกรองความถี่ (k) ที่ได้กำหนดไว้ในข้อที่ 3 เพื่อหาค่า b_0 ได้จากสมการที่ 3-58 ดังนี้

$$b_0 = \frac{k}{a_1} = \frac{k}{a_2}$$

$$a_1 = \frac{2-2\cos\omega_0}{1-2r\cos(\omega_0+\phi)+r^2}\frac{1-2r\cos\omega_0+r^2}{1-2r\cos(\omega_0-\phi)+r^2}$$

$$a_2 = \frac{2+2\cos\omega_0}{1+2r\cos(\omega_0+\phi)+r^2}\frac{1+2r\cos\omega_0+r^2}{1+2r\cos(\omega_0-\phi)+r^2}$$

6. นำค่า ω_0, r, ϕ และ b_0 ไปแทนในฟังก์ชันถ่ายโอนในสมการที่ 3-19 ดังนี้

$$\hat{H(z)} = \hat{b_0}\frac{1-2\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2}}{1-2r\cos(\omega_0+\phi)z^{-1}+r^2z^{-2}}\frac{1-2r\cos\omega_0 z^{-1}+r^2z^{-2}}{1-2r\cos(\omega_0-\phi)z^{-1}+r^2z^{-2}}$$

7. นำสัมประสิทธิ์ที่ใช้ในการจำลองการทำงานหรือสร้างจริง

8. การนำไปใช้จริงจะต้องกำหนด ω_0 ให้สอดคล้องกับความถี่สุ่ม (Sampling Frequency) ที่ใช้งานซึ่งตามที่กล่าวมาข้างต้นจะอาศัยผลตอบสนองทางความถี่เพียง $0-\pi$ เท่านั้นซึ่งรายละเอียดในส่วนใช้งานจริงจะอธิบายเพิ่มเติมในบทต่อไป

จากขั้นตอนในการออกแบบการปรับปรุงผลตอบสนองทางความถี่เมื่อพิจารณาขั้นตอนที่ 4 หรือสมการที่ 3-55 ซึ่งใช้ในการหาค่ามุม ϕ แล้วจะพบว่าเป็นการแก้สมการกำลังสอง คำตอบที่ได้จึงมีสองค่าด้วย ซึ่งทั้งสองค่าจะทำให้สมการที่ 3-22 เป็นจริงแต่ในส่วนที่เป็นช่วงการเปลี่ยนแปลงของความถี่นอตช์ (Transition Band Gain) จะมีลักษณะสัมพันธ์กับทั้งสองค่าอย่างไร ในที่นี้จะใช้โปรแกรม MATLAB เข้ามาช่วยในการจำลองผลตอบสนองทางความถี่ เพื่อที่จะสรุปได้ว่าสามารถใช้งานได้ทั้งสองค่าหรือไม่ ดังนั้นจะเลือก พารามิเตอร์ที่เหมาะสมจากภาพที่ 3-38 โดยเลือกความถี่นอตช์ $\omega_0 = 0.3\pi$ รัศมี $r = 0.7$ และ อัตราการขยายความถี่ผ่าน $k = 1$

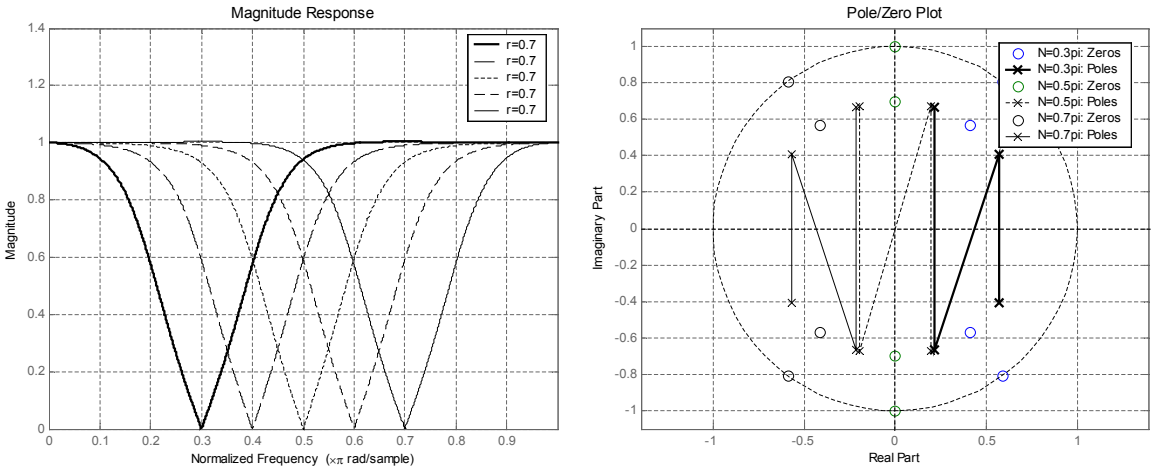
จากภาพที่ 3-12 ที่ $r = 0.7$ เมื่อเครื่องหมายเป็นบวกสามารถปรับปรุงผลตอบสนองทางความถี่ทำให้อัตราขยายช่วงการเปลี่ยนแปลง (Transition Band Gain) มีลักษณะใกล้เคียงกันทั้งสองด้านในขณะที่เครื่องหมายที่เป็นลบจะไม่ช่วยให้ช่วงการเปลี่ยนแปลงดีขึ้นดังแสดงในภาพที่ 3-13 และเมื่อพิจารณาในตารางที่ 3-1 แล้วจะเห็นว่าเมื่อเครื่องหมายเป็นลบจะทำให้มุม ϕ นั้นเพิ่มขึ้นเกิน

กว่าค่าที่เป็นเครื่องหมายบวกหรือเกินจุดที่จะทำให้ช่วงการเปลี่ยนแปลงได้ใกล้เคียงกัน ในทำนองเดียวกันเมื่อเปลี่ยนแปลงค่า $r = 0.9$ ผลตอบสนองทางความถี่ที่เกิดขึ้นก็จะเหมือนกับที่ $r = 0.7$ ดังนั้นจึงสรุปคำตอบของมุม ϕ ที่ทำให้ผลตอบสนองดีขึ้นมีเพียงค่าเดียวคือค่าที่เป็นเครื่องหมายบวก ดังสมการที่ 3-59

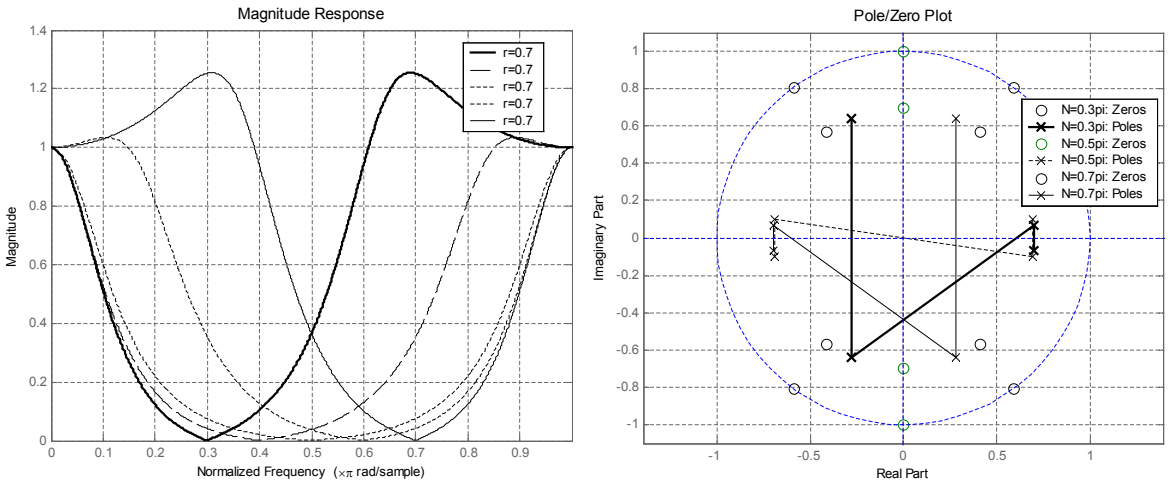
$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}\right) \tag{3-59}$$

ตารางที่ 3-1 ตารางเปรียบเทียบคำตอบของมุม ϕ ที่ $r = 0.7$

$r = 0.7$	$\omega_0 = 0.3\pi$	$\omega_0 = 0.4\pi$	$\omega_0 = 0.5\pi$	$\omega_0 = 0.6\pi$	$\omega_0 = 0.7\pi$
$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}\right)$	0.1004π	0.0930π	0.0914π	0.0930π	0.1004π
$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}\right)$	0.3322π	0.4234π	0.4558π	0.4234π	0.3322π



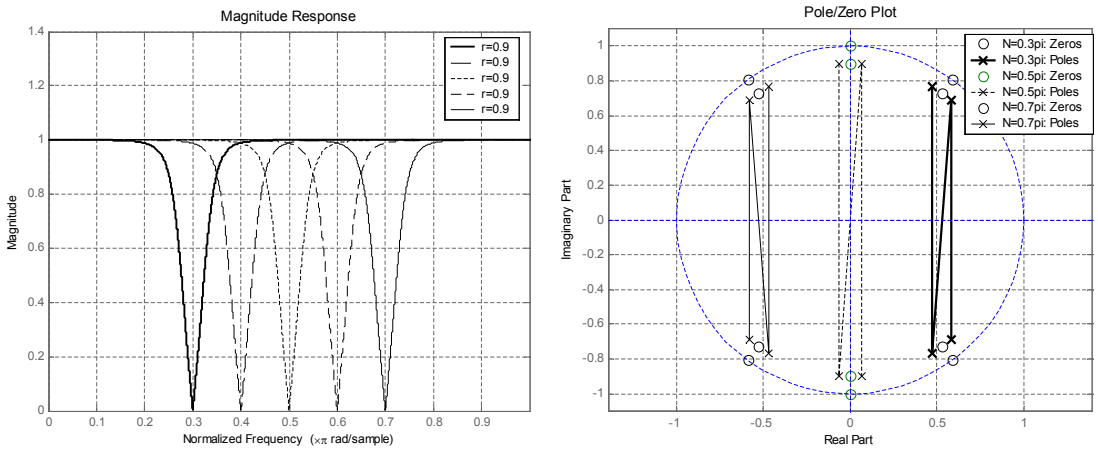
ภาพที่ 3-12 ผลตอบสนองทางความถี่เมื่อเครื่องหมายเป็นบวกที่ $r = 0.7$



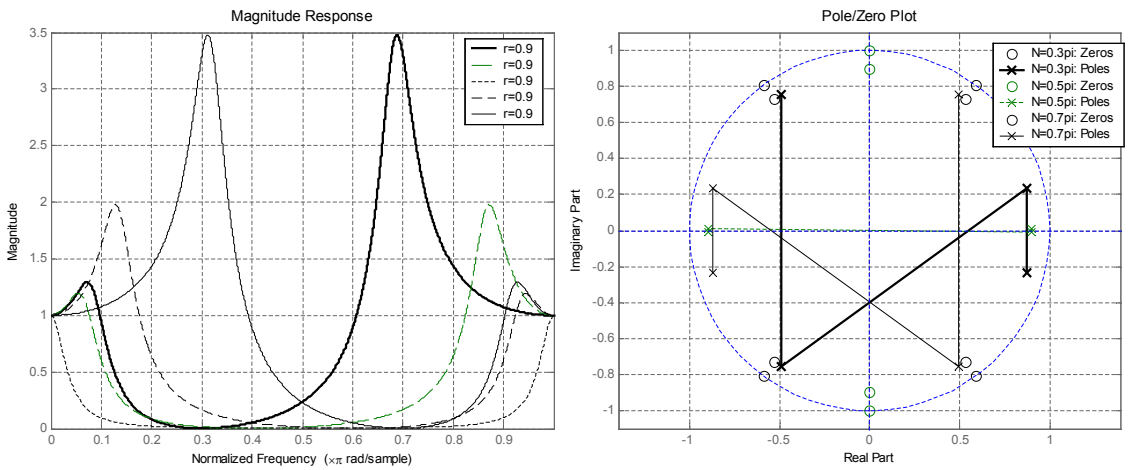
ภาพที่ 3-13 ผลตอบสนองทางความถี่เมื่อเครื่องหมายเป็นลบที่ $r = 0.7$

ตารางที่ 3-2 ตารางเปรียบเทียบคำตอบของมุม ϕ ที่ $r = 0.9$

$r = 0.9$	$\omega_0 = 0.3\pi$	$\omega_0 = 0.4\pi$	$\omega_0 = 0.5\pi$	$\omega_0 = 0.6\pi$	$\omega_0 = 0.7\pi$
$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}\right)$	0.0241π	0.0240π	0.0240π	0.0240π	0.0241π
$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}\right)$	0.3836π	0.4659π	0.4964π	0.4659π	0.3836π



ภาพที่ 3-14 ผลตอบสนองทางความถี่เมื่อเครื่องหมายเป็นบวกที่ $r = 0.9$



ภาพที่ 3-15 ผลตอบสนองทางความถี่เมื่อเครื่องหมายเป็นลบที่ $r = 0.9$

3.3 การหาตำแหน่งโพล-ซีโร่เมื่อมุมเป็นจำนวนเชิงซ้อน

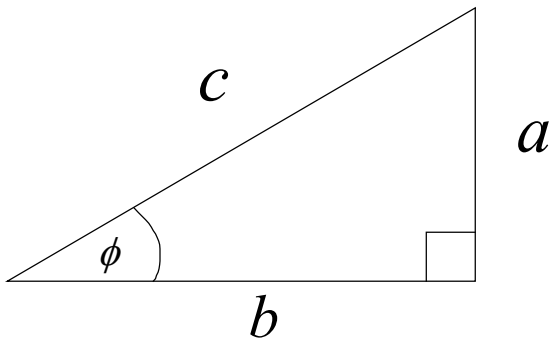
จากสมการที่ 3-59 เนื่องจากเป็นการหาส่วนกลับของโคไซน์ และค่าที่ต้องการหาส่วนกลับเป็นผลลัพธ์จากการหาค่ารากกำลังสองสมบูรณ์อีกที่หนึ่ง ซึ่งการหาค่ารากดังกล่าวจะทำให้เกิดผลลัพธ์เป็นจำนวนเชิงซ้อนได้เมื่อค่า $b^2 < 4c$ ซึ่งโดยปกติโคไซน์จะเป็นส่วนประกอบสามเหลี่ยมมุมฉากดังภาพที่ 3-16 ซึ่งจะกำหนดให้ตัวแปรทุกตัวเป็นจำนวนจริงจึงจะสามารถหาค่าได้ดังสมการที่ 3-60 และสมการที่ 3-61

$$\cos\phi = \frac{b}{c} \tag{3-60}$$

$$\phi = \cos^{-1}\frac{b}{c} \tag{3-61}$$

และค่าของ b ส่วน c จะต้องมีค่าอยู่ในช่วงต่อไปนี้

$$1 \geq \frac{b}{c} \geq -1 \tag{3-62}$$



ภาพที่ 3-16 สามเหลี่ยมมุมฉาก

ดังนั้นถ้าผลลัพธ์ก่อนที่จะทำการหาส่วนกลับของโคไซน์เกิดเป็นจำนวนเชิงซ้อนหรือทำให้ไม่เป็นไปตามสมการที่ 3-62 ทำให้ไม่สามารถหาค่ามุม ϕ ด้วยสมการที่ 3-61 ได้ จะต้องไปใช้สูตรดังสมการที่ 3-63 แทน ซึ่งเป็นสูตร[7] สำหรับค่าที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน คำตอบหรือมุมที่ได้จึงเป็นจำนวนเชิงซ้อนตามไปด้วย

$$\cos^{-1} z = -i\log[z + i\sqrt{1 - z^2}] \tag{3-63}$$

เนื่องจากการปรับปรุงที่ได้กล่าวมาข้างต้นเป็นการกำหนดให้มุม ϕ เป็นจำนวนจริงเพื่อให้มุมที่ปรับเปลี่ยนไปมีขนาดเท่ากันดังสมการที่ 3-21 ดังนั้นเมื่อคำตอบของมุมเป็นจำนวนเชิงซ้อนทำให้ค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอน $\hat{H(z)}$ เกิดเป็นจำนวนเชิงซ้อนทำให้ไม่สามารถนำไปใช้จริง

บนตัวประมวลผลสัญญาณดิจิตอลได้ ซึ่งจะยกตัวอย่างในกรณีที่ทำให้ค่าสัมประสิทธิ์ของ $\hat{H(z)}$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน

สมมติให้ $\omega_0 = 0.3\pi, r = 0.6, k = 1$ ใช้โปรแกรม MATLAB ในการคำนวณหาค่า มุม ϕ จะได้นำค่า ω_0, r แทนในสมการที่ 3-59 โดยค่า b และ c หาค่าได้ดังนี้

$$b = -\frac{(1+0.6^2)(1+0.6^2+2\times 0.6\times \cos^2 0.3\pi)}{0.6(1+0.6)^2}$$

$$b = -1.5713$$

และ

$$c = \frac{1+0.6^2}{4\times 0.6^2} - \sin^2 0.3\pi$$

$$c = 0.6299$$

จะได้

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2} = \frac{1.5713+\sqrt{(-1.5713)^2-4\times 0.6299}}{2}$$

$$= \frac{1.5713+\sqrt{-0.0509}}{2}$$

$$= \frac{1.5713+0.2256\text{i}}{2} = 0.7856+0.1128\text{i}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2} = 0.7856+0.1128\text{i}$$

เมื่อนำค่ากลับเข้าไปแทนในสมการที่ 3-59 เนื่องจากการหาส่วนกลับของโคไซน์เป็นจำนวนเชิงซ้อนจึงใช้สมการที่ 3-63 แทนค่าได้ดังนี้

$$\cos^{-1} z = -i\log[0.7856+0.1128i+i\sqrt{1-(0.7856+0.1128i)^2}]$$

$$\cos^{-1} z = -i\log[0.7856+0.1128i+i\sqrt{1-0.6044-0.1772i}]$$

$$\cos^{-1} z = -i\log[0.7856+0.1128i+i\sqrt{1-0.6044-0.1772i}]$$

$$\cos^{-1} z = -i\log[0.7856+0.1128i+i\sqrt{0.3956-0.1772i}] \qquad (3\text{-}64)$$

จากสมการที่ 3-64 จะต้องทำการหารากของ $0.3956-0.1772i$ ซึ่งเป็นจำนวนเชิงซ้อนจึงต้องใช้สูตรสำหรับหารากที่เป็นการหารากที่สองของจำนวนเชิงซ้อนอีกเช่นเดียวโดยมีวิธีการดังนี้ คือเมื่อ

$$z^2 = a \pm bi$$

จะได้

$$z = \pm\sqrt{\frac{r+a}{2}} \pm \sqrt{\frac{r-a}{2}}i$$

ที่ $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

ดังนั้น

$$z^2 = 0.3956 - 0.1772i$$

$$r = 0.4335$$

$$z = \sqrt{\frac{0.4335 + 0.3956}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{0.4335 - 20.3956}}{2}}i$$

$$= \sqrt{\frac{0.8291}{2}} - \sqrt{\frac{0.0379}{2}}i$$

$$= 0.6439 - 0.1377i$$

นำค่า $z = 0.6439 - 0.1377i$ แทนในสมการที่ 3-64 จะได้

$$\cos^{-1} z = -i\log[0.7856 + 0.1128i + i(0.6439 - 0.1377i)]$$

$$\cos^{-1} z = -i\log[0.7856 + 0.1128i + 0.6439i + 0.1377)]$$

$$\cos^{-1} z = -i\log[0.7856 + 0.1128i + 0.6439i + 0.1377)]$$

$$\cos^{-1} z = -i\log[0.9233 + 0.7567i] \qquad (3\text{-}65)$$

จาก

$$\log(z) = \ln(r) + i\theta$$

ดังนั้นเมื่อ $z = 0.9233 + 0.7567i$

$$r = 1.1938$$

$$\ln(r) = \ln(1.1938) = 0.1771$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{0.7567}{0.9233} = 0.6866$$

จะได้ $\log(0.9233 + 0.7567i) = 0.1771 + 0.6866i$

นำค่าที่ได้แทนในสมการที่ 3-65 จะได้คำตอบ

$$\phi = \cos^{-1} z = 0.6866 - 0.1771i$$

เมื่อแทนค่า $\omega_0 = 0.3\pi, r = 0.6$ และ $\phi = 0.6866 - 0.1771$ กลับเข้าไปในสมการที่ 3-21 ในเทอมของ $\cos(\omega_0 + \phi)$ จะได้ดังนี้

$$\cos(0.3\pi + 0.6866 - 0.1771i) = \cos(1.6291 - 0.1771i)$$

เมื่อต้องการหาค่าโคไซน์ที่มีมุมเป็นจำนวนเชิงซ้อนจะต้องใช้สูตร

$$\cos(z) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$$

โดยที่

$$\sinh(y) = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}$$

และ

$$\cosh(y) = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}$$

ดังนั้น

$$\cos(1.6291 - 0.1771i) = \cos(1.6291)\cosh(0.1771) - i\sin(1.1691)\sinh(0.1771)$$

เมื่อ

$$\cos(1.6291) = -0.0583$$
$$\sin(1.6291) = 0.9983$$
$$\cosh(0.1771) = \frac{e^{0.1771} + e^{-0.1771}}{2} = \frac{1.1938 + 0.8377}{2} = 1.0157$$
$$\sinh(0.1771) = \frac{e^{0.1771} - e^{-0.1771}}{2} = \frac{1.1938 - 0.8377}{2} = 0.1780$$

จะได้

$$\cos(1.6291 - 0.1771i) = (-0.0583)(1.0157) - i(0.9983)(0.1780)$$
$$\cos(1.6291 - 0.1771i) = 0.0592 - 0.1777i \qquad (3\text{-}66)$$

จากคำตอบในสมการที่ 3-66 เมื่อนำค่ากลับขึ้นไปแทนสมการที่ 3-21 จะทำให้สัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเชิงซ้อนเป็นผลให้ไม่สามารถนำไปใช้งานได้จริงได้ ซึ่งโดยปกติแล้วโพลแต่ละคู่จะเป็นคอนจูเกตกันเมื่อคู่คอนจูเกตคูณกันแล้วทำให้ได้ค่าสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง ซึ่งสามารถอธิบายด้วยตำแหน่งของโพลค่าใหม่ดังภาพที่ 3-10 ที่ P_1, P_2 เป็นคอนจูเกตดังสมการที่ 3-67

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= 0.6e^{j(0.3\pi - \phi)} \\ P_2 &= 0.6e^{-j(0.3\pi - \phi)} \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}67)$$

เมื่อนำมุม $\phi = 0.6866 - 0.1771i$ แทนในสมการที่ 3-67 จะได้ P_1

$$P_1 = 0.6e^{j(0.3\pi - (0.6866 - 0.1771i)} = 0.6e^{j(0.2559 + 0.1771i)}$$
$$= 0.6e^{j0.2559 - 0.1771} = 0.6e^{-0.1771}e^{j0.2559}$$
$$P_1 = 0.6 \times 0.8377e^{j0.2559} = 0.5026e^{j0.2559} \qquad (3\text{-}68)$$

ส่วน โพลตัวที่ 2 P_2

$$P_2 = 0.6e^{-j(0.3\pi - (0.6866 - 0.1771i)} = 0.6e^{-j(0.2559 + 0.1771i)}$$
$$= 0.6e^{-j0.2559 + 0.1771} = 0.6e^{0.1771}e^{-j0.2559}$$
$$P_2 = 0.6 \times 1.1938e^{-j0.2559} = 0.7163e^{-j0.2559} \qquad (3\text{-}69)$$

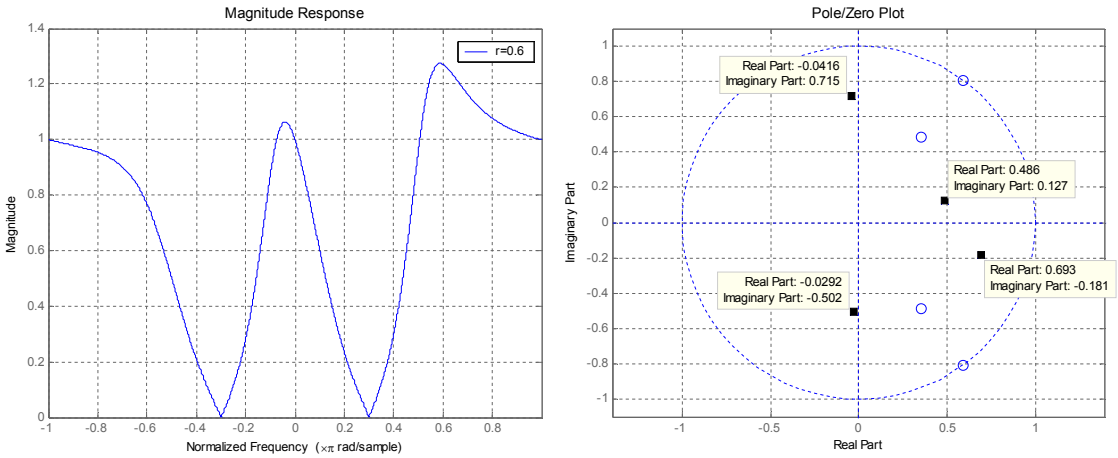
จากคำตอบ P_1, P_2 ในสมการที่ 3-68 และ 3-69 มุมที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนจะทำให้รัศมีของโพล r เปลี่ยนแปลงไปโดยที่

$$P_1 = 0.5026e^{j0.2559} = 0.4862 + 0.1272i$$

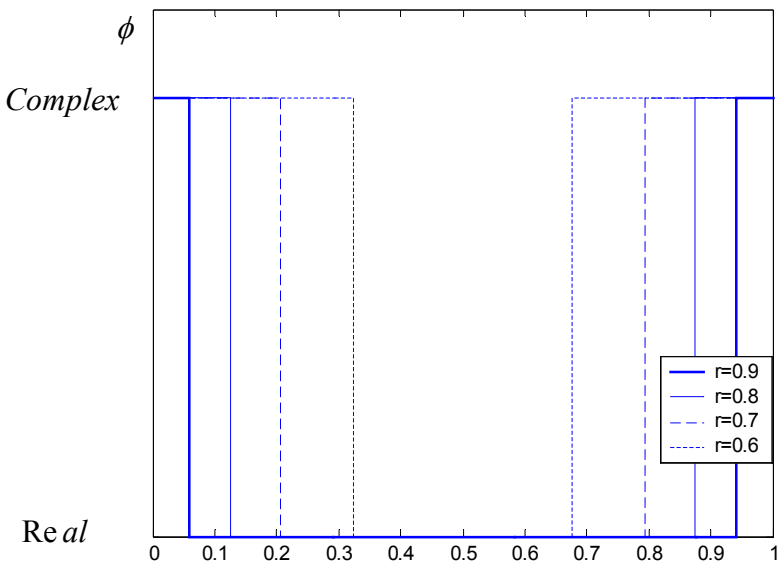
และ

$$P_2 = 0.7163e^{-j0.2559} = 0.6930 + 0.1813i$$

เมื่อพิจารณาที่ผลตอบสนองทางความถี่ของมุมเป็นจำนวนเชิงซ้อนแสดงไว้ในภาพที่ 3-17 จะเห็นได้ว่าตำแหน่งของโพลแต่ละคู่จะไม่เป็นคอนจูเกตกัน ทำให้ผลตอบสนองทางความถี่ได้ไม่สามารถปรับปรุงให้ดีขึ้นได้



ภาพที่ 3-17 แสดงผลตอบสนองเมื่อมุมที่คำนวณได้เป็นจำนวนเชิงซ้อน

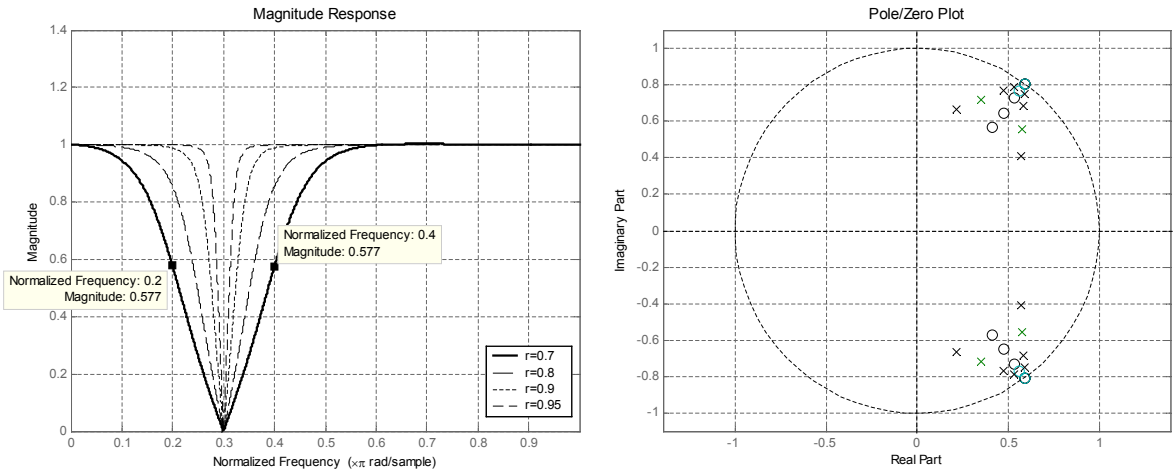


ภาพที่ 3-18 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ω_0 และ r ที่มีผลทำให้มุมโพล ϕ เป็นจำนวนเชิงซ้อน

ดังนั้นในการออกแบบจะต้องเลือกค่าของพารามิเตอร์ให้เหมาะสม ซึ่งจะเป็นความสัมพันธ์ระหว่างค่ารัศมีของโพล (r) และ ความถี่นอตช์(ω_0) ซึ่งจะมีผลโดยตรงกับมุมที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนดังภาพที่ 3-18 เมื่อความยาวรัศมีของโพลน้อยลงจะทำให้ช่วงการใช้งานน้อยลงเช่นที่ $r = 0.6$ สามารถเลือกความถี่นอตช์ ω_0 ได้เพียงช่วงประมาณ 0.3π จนถึง 0.7π เท่านั้นจะเห็นได้ว่าเมื่อค่า r มีค่าความยาวมากขึ้นจะทำให้ช่วงในการเลือกใช้งานสูงขึ้นตามไปด้วย

บทที่ 4
ผลการทดลองและการเปรียบเทียบผลการทดลอง

4.1 ผลที่ได้จากการจำลองการทำงานด้วย MATLAB



ภาพที่ 4-1 ผลตอบสนองทางความถี่และโพล-ซีโร่พลอต เมื่อเลือกค่า r แตกต่างกัน

ภาพที่ 4-1 เป็นการเปรียบเทียบผลตอบสนองทางความถี่ (Frequency Response) ที่ค่ารัศมีของโพล r แตกต่างกันโดยในภาพจะมีการเลือกค่า r ที่ 0.7,0.8,0.9 และ 0.95 ซึ่งผลตอบสนองทางความถี่ที่แสดงทางด้านซ้ายจะเห็นว่าที่ค่าแต่ละค่าจะทำให้อัตราการขยายช่วงการเปลี่ยนแปลง (Transition Band Gain) จะมีลักษณะสมมาตรกันทั้งช่วงที่เป็นขอบขาขึ้นและขอบขาลง ซึ่งจะสังเกตได้จากที่ $r = 0.7$ เมื่อพิจารณา $\omega = 0.2\pi$ และ $\omega = 0.4\pi$ โดยจากขนาดทั้งสองจุดจะพบว่า $\left|H(e^{j2\pi})\right| = \left|H(e^{j4\pi})\right|$ รวมถึงอัตราการขยายความถี่ของตัวกรองความถี่ (Pass-Band Gain) สามารถควบคุมได้ตามอัตราการขยายที่ต้องการซึ่งในที่นี้จะกำหนดให้อัตราการขยายเท่ากับหนึ่งตลอดช่วงความถี่ที่เลือกใช้งาน ส่วนในภาพที่ 4-1 ทางด้านขวาจะเป็นตำแหน่งการวางโพลซีโร่บนระนาบ $z-plane$ ซึ่งจากที่ได้ออกแบบไว้ให้มุมโพลแยกออกจากความถี่นอตช์ไปเท่าๆกันทั้งสองด้าน จากภาพตำแหน่งการวางจะเห็นว่าเมื่อเลือกค่า r น้อยลงจะทำให้ขนาดมุมของโพลมีลักษณะที่เพิ่มมากขึ้นตามไปด้วย

ในภาพที่ 4-2 จะเป็นการเปรียบเทียบผลตอบสนองทางความถี่ทั้ง 3 แบบโดยจะเริ่มจาก

ผลตอบสนองในแบบทั่วไป (General Design) ซึ่งไม่มีการปรับปรุงมุมโพลและมีสมการเป็นสมการออร์เดอร์สองจะเห็นได้อัตราการขยายความถี่ผ่าน (Pass-Band Gain) จะมีขนาดไม่เท่ากับหนึ่งตลอดช่วงความถี่นั้นคือ $\left|H(e^{j0})\right| \neq \left|H(e^{j\pi})\right|$

ผลตอบสนองที่มีการปรับปรุงผลตอบสนองทางความถี่บางส่วน (Previous Design) ซึ่งจะเป็นสมการออร์เดอร์สองเหมือนกับวิธีแรกแต่จะทำการปรับมุมของโพลเพื่อให้อัตราการขยายความถี่ผ่าน (Pass-Band Gain) มีค่าเท่ากันจากภาพที่ 4-2 จะเห็นว่าที่ $\left|H(e^{j0})\right| = \left|H(e^{j\pi})\right|$

สำหรับในส่วนที่ทำการวิจัย (Proposed Design) จะเป็นการปรับปรุงผลตอบสนองเพิ่มเติมจากการปรับปรุงก่อนหน้านี้ (Previous Design) [3] ซึ่งในแต่ละแบบที่นำมาเปรียบเทียบ จะกำหนดให้อัตราการขยายที่ความถี่ $\omega = 0$ ให้มีขนาดเท่ากับหนึ่งทุกตัว ซึ่งจะมีสมการในการหาคำตอบในแต่ละวิธีดังนี้คือ

4.1.1 แบบทั่วไป (General Design) จะมีสมการดังนี้

$$H(z) = b_0 \frac{1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r\cos\omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}} \tag{4-1}$$

จากสมการที่ 3-10 เมื่อไม่มีการแก้ไขมุมโพล ϕ จะได้ดังสมการที่ $\omega = 0$ ดังนี้

$$\left|H(e^{j0})\right| = b_0 \frac{2 - 2\cos\omega_0}{1 - 2r\cos\omega_0 + r^2} \tag{4-2}$$

กำหนดให้อัตราการขยายที่ $\left|H(e^{j0})\right| = 1$ ดังนั้นสามารถขนาดของ b_0 ได้ดังนี้

$$b_0 = \frac{1 - 2r\cos\omega_0 + r^2}{2 - 2\cos\omega_0} \tag{4-3}$$

4.1.2 แบบปรับปรุงผลตอบสนองทางความถี่ที่ได้นำเสนอก่อนหน้านี้ (Previous Design) [3] จะมีสมการดังนี้

$$H(z) = b_0 \frac{1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r\cos(\omega_0 - \phi) z^{-1} + r^2 z^{-2}} \tag{4-4}$$

มุม ϕ คำนวณได้จากสมการที่ 3-15 ดังนี้

$$\phi = \omega_0 - \cos^{-1}\left(\frac{1 + r^2}{2r}\cos\omega_0\right) \tag{4-5}$$

จากสมการที่ 3-10 เมื่อมีการแก้ไขมุมโพล ϕ จะได้ดังสมการที่ $\omega = 0$ ดังนี้

$$\left|H(e^{j0})\right| = b_0 \frac{2 - 2\cos\omega_0}{1 - 2r\cos(\omega_0 - \phi) + r^2} \tag{4-6}$$

กำหนดให้อัตราการขยายที่ $\left|H(e^{j0})\right| = 1$ เช่นเดียวกันดังนั้นสามารถหาขนาดของ b_0 ได้ดังนี้

$$b_0 = \frac{1-2r\cos(\omega_0-\phi)+r^2}{2-2\cos\omega_0} \tag{4-7}$$

4.1.3 แบบสุดท้ายจะเป็นในแบบที่ได้ทำการวิจัย (Proposed Design)

$$\hat{H(z)} = \hat{b_0}\,\frac{1-2\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2}}{1-2r\cos(\omega_0+\phi)z^{-1}+r^2z^{-2}}\,\frac{1-2r\cos\omega_0 z^{-1}+r^2z^{-2}}{1-2r\cos(\omega_0-\phi)z^{-1}+r^2z^{-2}} \tag{4-8}$$

มุม ϕ คำนวณได้จากสมการที่ 3-47,3-48,3-49 ดังนี้

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}\right) \tag{4-9}$$

$$b = -\frac{(1+r^2)(1+r^2+2r\cos^2\omega_0)}{r(1+r)^2} \tag{4-10}$$

$$c = \frac{1+r^2}{4r^2} - \sin^2\omega_0 \tag{4-11}$$

จากสมการที่ 3-22 เมื่อยังมีการแก้ไขมุมโพล ϕ จะได้ดังสมการที่ $\omega = 0$ ดังนี้

$$\left|\hat{H(e^{j0})}\right| = \hat{b_0}\,\frac{2-2\cos\omega_0}{1-2r\cos(\omega_0+\phi)+r^2}\,\frac{1-2r\cos\omega_0+r^2}{1-2r\cos(\omega_0-\phi)+r^2} \tag{4-12}$$

กำหนดให้อัตราการขยายที่ $\left|H(e^{j0})\right| = 1$ เช่นเดียวกันดังนั้นสามารถหาขนาดของ b_0 ได้ดังนี้

$$\hat{b_0} = \frac{1-2r\cos(\omega_0+\phi)+r^2}{2-2\cos\omega_0}\,\frac{1-2r\cos(\omega_0-\phi)+r^2}{1-2r\cos\omega_0+r^2} \tag{4-13}$$

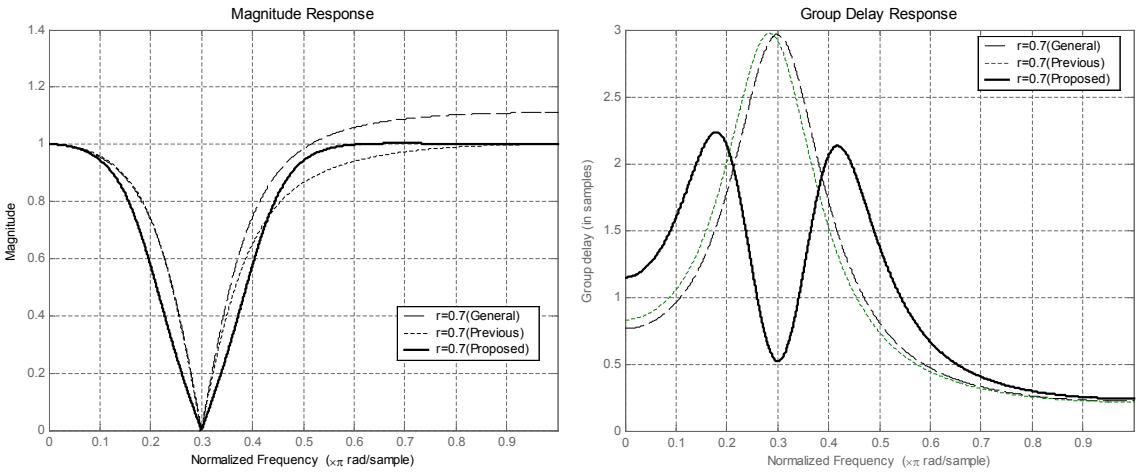
นำสมการที่ 4-1 จนถึงสมการที่ 4-13 มาสรุปเป็นตารางได้ดังนี้

ตารางที่ 4-1 สรุปสูตรที่ใช้ในการเปรียบเทียบผลการจำลองการทำงานด้วย MATLAB

Design	$H(z)$	ϕ
General	$H(z) = b_0\,\frac{1-2\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2}}{1-2r\cos\omega_0 z^{-1}+r^2z^{-2}}$	-
	$b_0 = \frac{1-2r\cos\omega_0+r^2}{2-2\cos\omega_0}$	
Previous	$H(z) = b_0\,\frac{1-2\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2}}{1-2r\cos(\omega_0-\phi)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\phi = \omega_0 - \cos^{-1}\left(\frac{1+r^2}{2r}\cos\omega_0\right)$
	$b_0 = \frac{1-2r\cos(\omega_0-\phi)+r^2}{2-2\cos\omega_0}$	
Proposed	$\hat{H(z)} = \hat{b_0}\,\frac{1-2\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2}}{1-2r\cos(\omega_0+\phi)z^{-1}+r^2z^{-2}}\,\frac{1-2r\cos\omega_0 z^{-1}+r^2z^{-2}}{1-2r\cos(\omega_0-\phi)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}\right)$
	$\hat{b_0} = \frac{1-2r\cos(\omega_0+\phi)+r^2}{2-2\cos\omega_0}\,\frac{1-2r\cos(\omega_0-\phi)+r^2}{1-2r\cos\omega_0+r^2}$	$b = -\frac{(1+r^2)(1+r^2+2r\cos^2\omega_0)}{r(1+r)^2}$ $c = \frac{1+r^2}{4r^2} - \sin^2\omega_0$

เมื่อนำสูตรในตารางที่ 4-1 ไปจำลองการทำงานที่รัศมีของโพล r ที่แตกต่างกันจะได้ผลดังนี้

ที่ $r = 0.7$

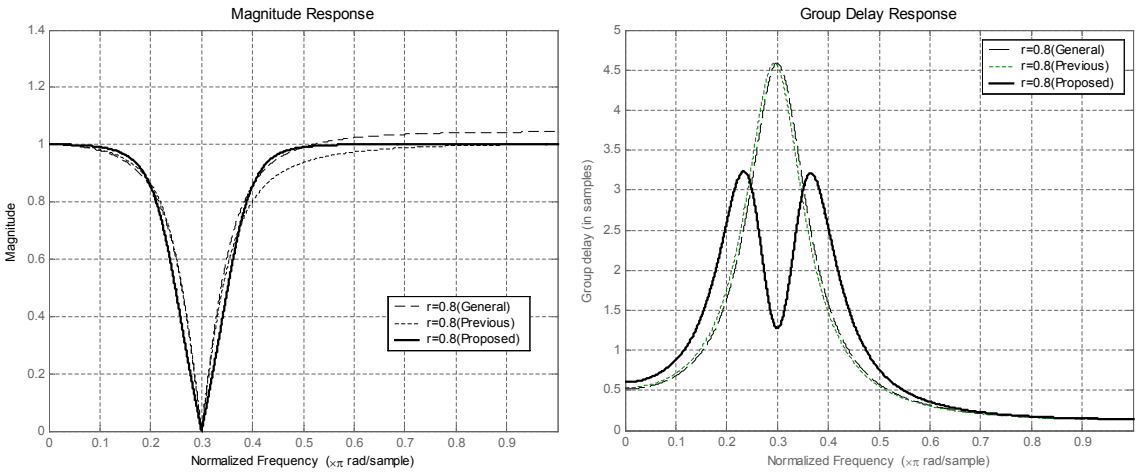


ภาพที่ 4-2 เปรียบเทียบ Magnitude Response และ Group Delay Response ที่ $r = 0.7$

ตารางที่ 4-2 สรุปสมการในการจำลองการทำงานเมื่อ $\omega_0 = 0.3\pi, r = 0.7$

Design	$H(z)$	ϕ
General	$0.8092\dfrac{1-1.1756z^{-1}-z^{-2}}{1-0.8299z^{-1}+0.49z^{-2}}$	$\phi = 0$
Previous	$0.745\dfrac{1-1.1756z^{-1}-1z^{-2}}{1-0.8758z^{-1}+0.49z^{-2}}$	$\phi = 0.0151\pi$
Proposed	$0.6862\dfrac{1-1.1756z^{-1}+z^{-2}}{1-0.4310z^{-1}+0.49z^{-2}}\dfrac{1-0.8229z^{-1}+0.49z^{-2}}{1-1.1336z^{-1}+0.49z^{-2}}$	$\phi = 0.1004\pi$

ที่ $r = 0.8$

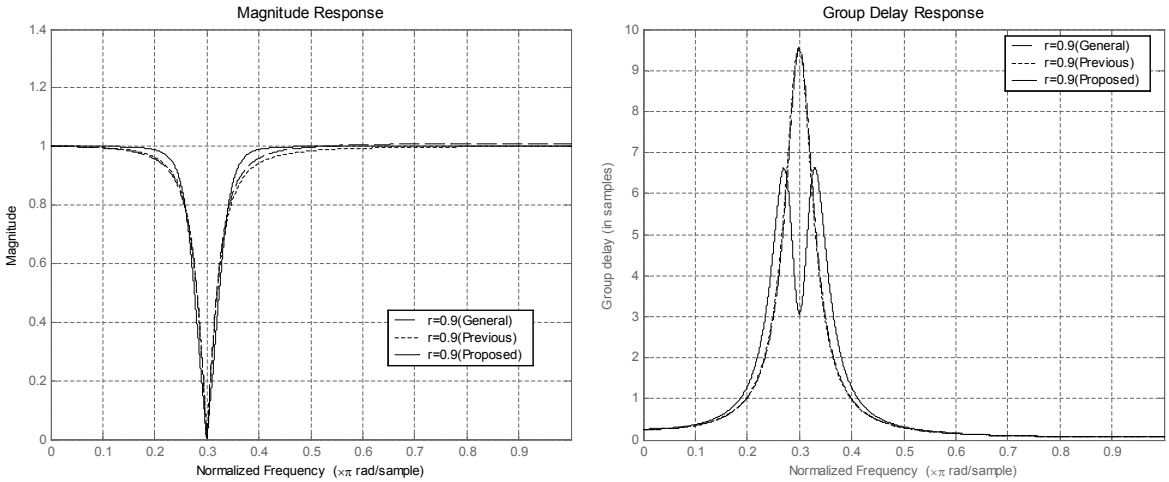


ภาพที่ 4-3 เปรียบเทียบ Magnitude Response และ Group Delay Response ที่ $r = 0.8$

ตารางที่ 4-3 สรุปสมการในการจำลองการทำงานเมื่อ $\omega_0 = 0.3\pi, r = 0.8$

Design	$H(z)$	ϕ
General	$0.8485\dfrac{1-1.1756z^{-1}-z^{-2}}{1-0.9405z^{-1}+0.64z^{-2}}$	$\phi = 0$
Previous	$0.82\dfrac{1-1.1756\,z^{-1}-1z^{-2}}{1-0.9640\,z^{-1}+0.64\,z^{-2}}$	$\phi = 0.0058\pi$
Proposed	$0.7981\dfrac{1-1.1756z^{-1}+z^{-2}}{1-0.9405z^{-1}+0.49z^{-2}}\dfrac{1-0.7067z^{-1}+0.64z^{-2}}{1-1.1468z^{-1}+0.64z^{-2}}$	$\phi = 0.0544\pi$

ที่ $r = 0.9$



ภาพที่ 4-4 เปรียบเทียบ Magnitude Response และ Group Delay Response ที่ $r = 0.9$

ตารางที่ 4-4 สรุปสมการในการจำลองการทำงานเมื่อ $\omega_0 = 0.3\pi, r = 0.9$

Design	$H(z)$	ϕ
General	$0.9121\dfrac{1-1.1756z^{-1}-z^{-2}}{1-1.058z^{-1}+0.81z^{-2}}$	$\phi = 0$
Previous	$0.905\dfrac{1-1.1756z^{-1}-1z^{-2}}{1-1.0639z^{-1}+0.81z^{-2}}$	$\phi = 0.0013\pi$
Proposed	$0.8999\dfrac{1-1.1756z^{-1}+z^{-2}}{1-1.058z^{-1}+0.49z^{-2}}\dfrac{1-9447z^{-1}+0.81z^{-2}}{1-1.1652z^{-1}+0.81z^{-2}}$	$\phi = 0.0241\pi$

จากผลดังกล่าวจะเห็นว่าเป็นไปตามที่ได้ออกแบบไว้คือสามารถทำให้อัตราการขยายความถี่ผ่าน (Pass-Band Gain) เท่ากันตลอดช่วงความถี่ และอัตราการขยายช่วงการเปลี่ยนแปลง (Transition-Band Gain) ได้สามาตรกันทั้งสองด้านรวมถึงทำให้ตัวหน่วงกลุ่ม (Group Delay) น้อยลงด้วย ซึ่งในลำดับต่อไปนี้จะเป็นการยกตัวอย่างเมื่อนำไปใช้งานจริงบนตัวประมวลผลสัญญาณดิจิตอล TMS320C31

ตัวอย่างการออกแบบการใช้งานจริงบนตัวประมวลผลสัญญาณดิจิตอล ในที่นี้จะกำหนดให้

ความถี่นอตช์ (Notch Frequency) เท่ากับ 50 Hz มี

รัศมีมุมโพลที่ $r = 0.96$ และ

ความถี่สุ่ม (Sampling Frequency) มีค่าเท่ากับ 3004 Hz

4.2 ผลที่ได้จากการทำงานจริงบน TMS320C31

ขั้นตอนการออกแบบเพื่อนำไปใช้งานจริงนั้นจะเหมือนกันกับที่ได้สรุปไว้ในบทที่ 3 แต่จะเพิ่มบางส่วนเพื่อนำไปใช้ในทางปฏิบัติซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

4.2.1 ทำการกำหนดตำแหน่งความถี่นอตช์ ω_0 ใหม่ เนื่องจาก ω_0 เดิมเป็นการสเกลอยู่บน ค่า Nomalized Frequency ซึ่งเป็นอัตราส่วนระหว่างความถี่นอตช์กับความถี่สุ่ม (Sampling Frequency) และเมื่อพิจารณาที่ Nomalized จะเห็นว่าเป็นการแสดงเพียง π เท่านั้นไม่ได้แสดงครบทั้ง 2π และเนื่องจาก 0 ถึง π จะได้ผลซ้ำกับช่วง π ถึง 2π เมื่อจะนำความถี่สุ่มที่ใช้งานจริงมาใช้งานซึ่งจะเป็นค่าที่จะมีค่าเท่ากับหนึ่งวงกลมหรือ 2π ทำให้ความถี่ที่ใช้ในการคำนวณจริงจะต้องทำให้เหลือเพียงครึ่งวงกลมหรือ π เท่านั้นดังนั้น

$$f_N = \frac{f_c}{\left(\frac{f_s}{2}\right)} \tag{4-14}$$

เมื่อ

f_c เป็นความถี่นอตช์ (Notch Frequency)

f_s เป็นความถี่สุ่มที่ใช้งานจริง (Actual Sampling Frequency

f_N เป็นตำแหน่งความถี่นอตช์ บนวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วย (Normalized Frequency)

เพราะฉะนั้นจากที่กำหนดให้จะได้

$$f_N = \frac{50}{\left(\frac{3004}{2}\right)} = \frac{50}{1502} = 0.0333$$

ที่ f_N โดยปกติแล้ว ω_0 จะเท่ากับ $2\pi f$ แต่เนื่องจาก f ที่เป็นความถี่นอตช์ ไม่สามารถแทนด้วยความถี่ที่กำหนดโดยตรงได้ เนื่องจากเป็นความถี่ที่กำหนดขึ้นเป็นความถี่ที่มีความต่อเนื่อง แต่ในระบบที่เป็นแบบดิจิตอล ฟังก์ชันต่อเนื่องทางด้านอินพุทจะถูกตัดออกเป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องด้วยตัวแปลงอะนาลอกเป็นดิจิตอลตามความถี่สุ่มที่ใช้งาน ผลตอบสนองทางความถี่จึงขึ้นอยู่กับความถี่สุ่มตามไปด้วย ดังนั้นเมื่อจะระบุความถี่ใดในระบบที่ไม่ต่อเนื่อง (Discrete-Time) จึงต้องบอกเป็นอัตราส่วนระหว่างความถี่ที่ต้องการกับความถี่สุ่มเสมอ ซึ่งจะถูกกำหนดให้อยู่บนวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วย ดังนั้น $\omega_{\max}$ จึงมีค่าเท่ากับ 2π หรือเท่ากับหนึ่งรอบวงกลม แต่เนื่องจากผลทาง π จนถึง 2π จะเหมือนกับ 0 ถึง π ดังนั้น ผลตอบสนองจึงคิดเพียงครึ่งวงกลมเท่ากัน ทำให้

$$\omega_0 = f_N \pi \tag{4-15}$$

ดังนั้นจะได้ $\omega_0 = 0.0333\pi$

4.2.2 นำ $\omega_0 = 0.0333\pi$ และ $r = 0.96$ นำไปคำนวณหามุม ϕ โดยใช้สมการที่ 3-59 ดังนี้

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}\right)$$

เมื่อ b ได้จากสมการที่ 3-53 และ c ในสมการที่ 3-54 ดังนี้

$$b = -\frac{(1+r^2)(1+r^2+2r\cos^2\omega_0)}{r(1+r)^2}$$

แทนค่า r และ ω_0 จะได้

$$b = -\frac{(1+0.96^2)(1+0.96^2+2\times 0.96\times\cos^2 0.0333\pi)}{0.96(1+0.96)^2}$$

และ

$$c = \frac{1+r^2}{4r^2} - \sin^2\omega_0$$

$$c = \frac{1+0.96^2}{4\times 0.96^2} - \sin^2 0.0333\pi$$

จะได้มุม $\phi = 0.0111\pi$

4.2.3 นำค่ามุม ϕ ที่คำนวณได้กับอัตราการขยายของตัวกรองความถี่ (k) ที่ได้กำหนดไว้ไปหาค่า b_0 ได้จากสมการที่ 3-58 ดังนี้

$$b_0 = \frac{k}{a_1} = \frac{k}{a_2}$$

$$a_1 = \frac{2-2\cos\omega_0}{1-2r\cos(\omega_0+\phi)+r^2}\,\frac{1-2r\cos\omega_0+r^2}{1-2r\cos(\omega_0-\phi)+r^2}$$

$$a_2 = \frac{2+2\cos\omega_0}{1+2r\cos(\omega_0+\phi)+r^2}\,\frac{1+2r\cos\omega_0+r^2}{1+2r\cos(\omega_0-\phi)+r^2}$$

เลือกหาค่า ด้วย a_1 จะได้

$$a_1 = \frac{2-2\cos(0.0333\pi)}{1-2(0.96)\cos(0.0333\pi+0.0111\pi)+(0.96)^2}\,\frac{1-2(0.96)\cos(0.0333\pi)+(0.96)^2}{1-2(0.96)\cos(0.0333\pi-0.0111\pi)+(0.96)^2}$$

$$a_1 = 0.5402\times 1.9286 = 1.0419$$

ดังนั้น

$$b_0 = \frac{1}{1.0419} = 0.9598$$

4.2.4 นำค่า ω_0, r, ϕ และ b_0 ไปแทนในทรานเฟอร์ฟังก์ชั่นในสมการที่ 3-21 ดังนี้

$$\hat{H(z)} = \hat{b_0}\,\frac{1-2\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2}}{1-2r\cos(\omega_0+\phi)z^{-1}+r^2z^{-2}}\,\frac{1-2r\cos\omega_0 z^{-1}+r^2z^{-2}}{1-2r\cos(\omega_0-\phi)z^{-1}+r^2z^{-2}} \qquad (4\text{-}16)$$

จะแทนค่าที่ละส่วนดังนี้

$$2\cos(\omega_0) = 2\cos(0.0333\pi) = 1.9891$$

$$2r\cos(\omega_0) = 2\times 0.96\times\cos(0.0333\pi) = 1.9095$$

$$2r\cos(\omega_0+\phi) = 2\times 0.96\times\cos(0.0333\pi+0.0111\pi) = 1.9014$$

$$2r\cos(\omega_0-\phi) = 2\times 0.96\times\cos(0.0333\pi-0.0111\pi) = 1.9153$$

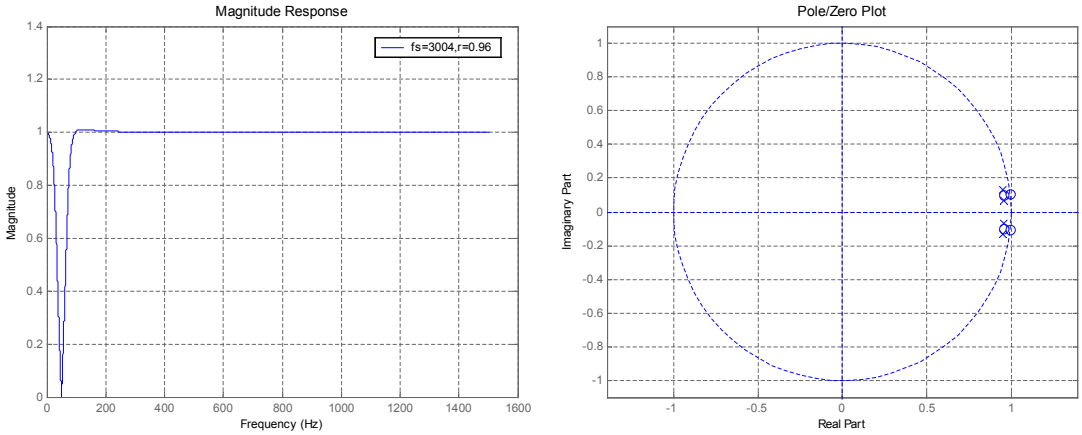
$$r^2 = 0.96^2 = 0.09216$$

นำแต่ละค่าแทนในสมการที่ 4-16 จะได้

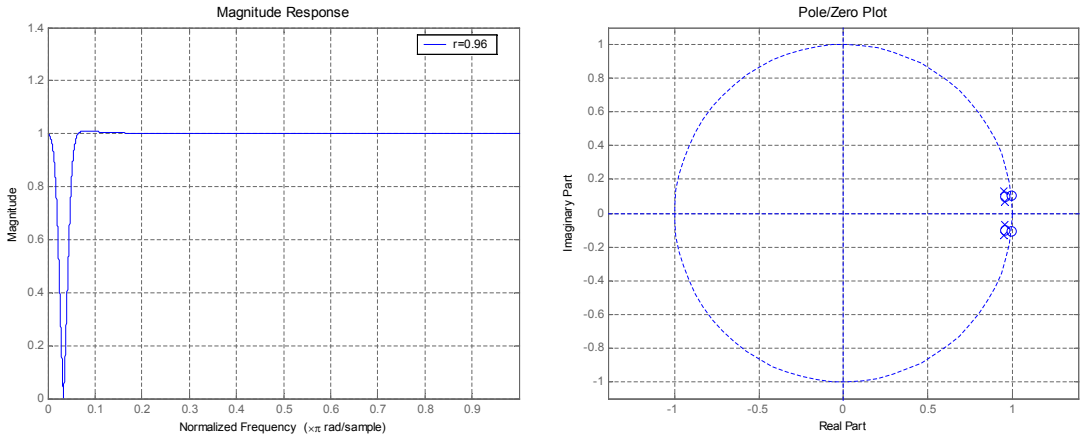
$$\hat{H(z)} = 0.9598\,\frac{1-1.9891z^{-1}+z^{-2}}{1-1.9095z^{-1}+0.9216z^{-2}}\,\frac{1-1.9014z^{-1}+0.9216z^{-2}}{1-1.9153z^{-1}+0.9216z^{-2}}$$

หรือ

$$\hat{H(z)} = \frac{0.9598-3.7419z^{-1}+5.4899z^{-2}-3.5923z^{-3}+0.8846z^{-4}}{1-3.8167z^{-1}+5.4850z^{-2}-3.5175z^{-3}+0.8493z^{-4}} \qquad (4\text{-}17)$$



ภาพที่ 4-5 ผลตอบสนองทางความถี่ที่จะนำไปใช้งานจริง



ภาพที่ 4-6 ผลตอบสนองทางความถี่เมื่อผลตอบสนองเป็นการสเกลหนึ่งหน่วย

จากภาพที่ 4-5 และ 4-6 เป็นผลที่ได้จากการนำสมการที่ 4-4 ไปจำลองการทำงานด้วยโปรแกรม MATLAB เพียงแต่ภาพที่ 4-3 จะมีการกำหนดความถี่สุ่มที่จะใช้งานส่วนภาพที่ 4-5 เป็นค่าที่สเกลค่าลงมาให้เหลือเพียง 1หน่วย ซึ่งหนึ่งหน่วยที่ว่านี้ก็สามารถที่จะแทนความถี่สุ่มใดๆก็ได้ ทำให้ความถี่นอตช์ที่เลือกเปลี่ยนแปลงตามความถี่สุ่มที่ใช้งาน ดังที่ได้อธิบายไว้ในการคำนวณหา ω_0 ซึ่งในขั้นตอนต่อไปจะเป็นวิธีนำทรานเฟอร์ฟังก์ชันที่ออกแบบไปใช้งานจริง

4.2.5 ในการนำไปใช้งานจริงจะต้องทำการแปลง z-transform ให้อยู่ในรูปของเวลา $y(t)$ ดังนี้

จาก $\hat{H(z)} = \dfrac{Y(z)}{X(z)} = \dfrac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + a_4 z^{-4}}$

$$\begin{aligned} &Y(z)\left(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + a_4 z^{-4}\right) = X(z)\left(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4}\right) \\ &Y(z) + a_1 Y(z) z^{-1} + a_2 Y(z) z^{-2} + a_3 Y(z) z^{-3} + a_4 Y(z) z^{-4} \\ &= b_0 X(z) + b_1 X(z) z^{-1} + b_2 X(z) z^{-2} + b_3 X(z) z^{-3} + b_4 X(z) z^{-4} \end{aligned} \quad (4\text{-}18)$$

จากสูตร แปลง z-domain ให้อยู่ในรูปของ Time Domain ในเรื่องของการเลื่อนเวลา (Time Shifting) จะมีสมการดังนี้

$$x(n-k) \Leftrightarrow z^{-k} X(z) \quad (4\text{-}19)$$

ทำการแปง z-domain ในสมการที่ 4-18 ไปเป็น Time Domain ได้เป็น

$$\begin{aligned} &y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + a_3 y(n-3) + a_4 y(n-4) \\ &= b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) + b_3 x(n-3) + b_4 x(n-4) \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้ $y(n)$

$$\begin{aligned} &y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) + b_3 x(n-3) + b_4 x(n-4) \\ &- a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) - a_3 y(n-3) - a_4 y(n-4) \end{aligned} \quad (4\text{-}20)$$

จะเห็นว่าการแปลงค่าแบบตรงไปตรงมาตามทฤษฎีแล้วจะเป็นโครงสร้างแบบที่ 1 ซึ่งจะมี Delay ทั้งอินพุทและเอาท์พุท ซึ่งสามารถที่จะลดจำนวน Delay ให้เหลือเพียงชุดเดียวได้ด้วยการใช้โครงสร้างในแบบที่ 2 แทนตามทฤษฎีในบทที่ 2 โดยที่

$$u(n) = x(n) - a_1 u(n-1) - a_2 u(n-2) - \ldots - a_N u(n-N)$$

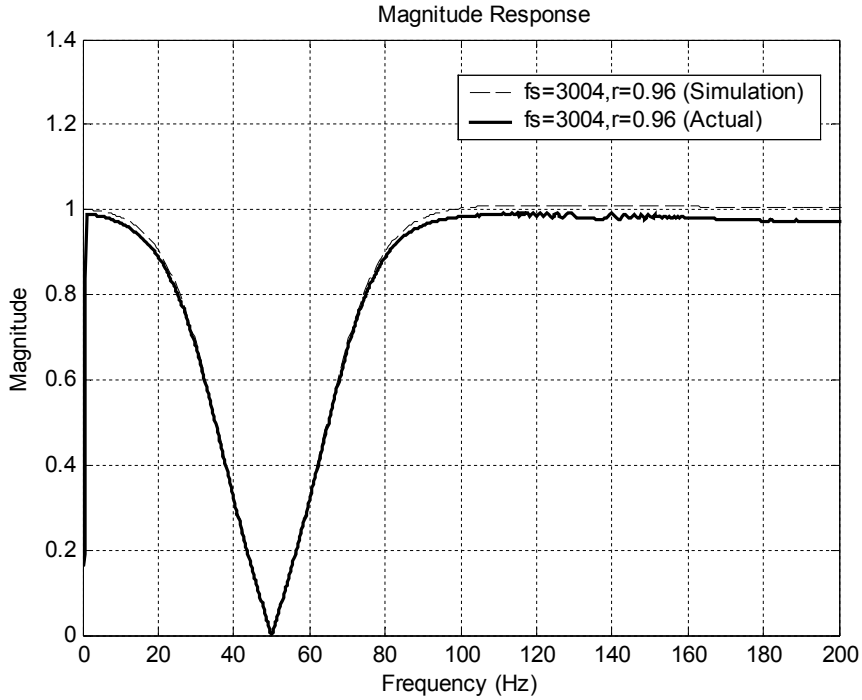
และ

$$y(n) = b_0 u(n) + b_1 u(n-1) + a_2 u(n-2) + \ldots + b_N u(n-N)$$

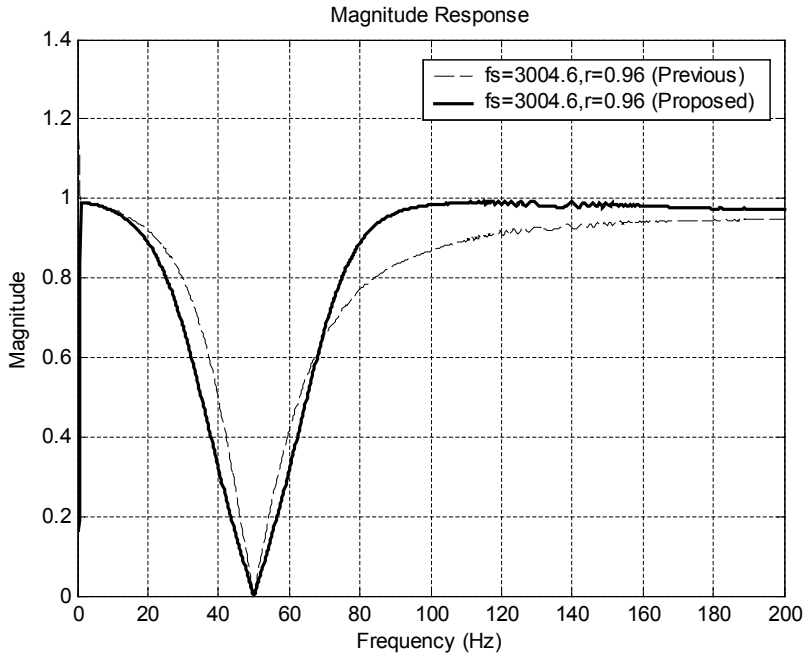
ดังนั้นจากสัมประสิทธิ์ในสมการที่ 4-4 สามารถแทนได้ดังนี้

$$u(n) = x(n) - a_1 u(n-1) - a_2 u(n-2) - a_3 u(n-3) - a_4 u(n-4)$$
$$y(n) = b_0 u(n) + b_1 u(n-1) + b_2 u(n-2) + b_3 u(n-3) + b_4 u(n-4) \qquad (4\text{-}21)$$

ทางผู้วิจัยได้ทำการเลือกสมการที่ 4-21 ไปใช้งานเนื่องจากใช้หน่วยความจำน้อยกว่าคือใช้หน่วยความจำสำหรับตัว Delay เพียง 4 ตัว ส่วนในสมการที่ 4-20 ใช้ถึง 8 ตัวด้วยกัน เมื่อนำไปเขียนโปรแกรมด้วยภาษา C [8] ลงบนตัวประมวลผลสัญญาณดิจิตอบล TMS320C31 แล้วจะได้ผลดังภาพที่ 4-7



ภาพที่ 4-7 ผลจากการจำลองด้วย MATLAB และ ทำจริงบน TMS320C31



ภาพที่ 4-8 เปรียบเทียบผลการใช้งานจริงก่อนและหลังการปรับปรุง

ตารางที่ 4-5 สรุปสมการในการใช้งานจริงเมื่อ $\omega_0 = 0.0333\pi, r = 0.96$

Design	$H(z)$	ϕ
Previous	$0.9608\dfrac{1-1.9891z^{-1}-z^{-2}}{1-1.9111z^{-1}+0.9216z^{-2}}$	$\phi = 0.0026\pi$
Proposed	$0.9598\dfrac{1-1.9891z^{-1}+z^{-2}}{1-1.9095z^{-1}+0.9216z^{-2}}\dfrac{1-1.9014z^{-1}+0.9216z^{-2}}{1-1.9153z^{-1}+0.9216z^{-2}}$	$\phi = 0.0111\pi$

ภาพที่ 4-8 เป็นผลตอบสนองทางความถี่ที่ได้จากการใช้งานจริงบนตัวประมวลผลสัญญาณดิจิตอล TMS320C31 ด้วยกันทั้งคู่ ซึ่งจะเป็นการเปรียบเทียบผลตอบสนองทางความถี่ก่อนปรับปรุง (Previous Design) และหลังจากที่ได้มีการปรับปรุง (Proposed Design) เนื่องจากต้องการให้เห็นถึง (Pass-Band Gain) และช่วงการเปลี่ยนแปลง (Transition-Band Gain) จึงทำการขยายสเกลทางด้านความถี่เพื่อให้เห็นผลตอบสนองได้ชัดเจนจากภาพจะเห็นได้ว่าเมื่อปรับปรุงผลตอบสนองทางความถี่แล้วที่ความถี่ 80 Hz จะถูกชดเชยด้วยโพล-ซีโร่อีกคู่หนึ่งที่ได้เติมเข้าไปซึ่งจะได้ผลได้ใกล้เคียงกับที่ 20 Hz

บทที่ 5
สรุปผลและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผล

เมื่อทำการเปรียบเทียบผลตอบสนองทางความถี่ทั้งจากการจำลองการทำงานด้วย MATLAB และการใช้งานจริงบนตัวประมวลผลสัญญาณดิจิตอล TMS320C31 ได้ผลออกมาได้ใกล้เคียงกัน ดังภาพต่างๆในบทที่ 4 ส่วนวิธีการออกแบบด้วยวิธีการวางโพลหรือการเพิ่มโพลเข้าไปในวงกลมหนึ่งหน่วยและอาศัยการคำนวณด้วยวิธีทางเรขาคณิต ตำแหน่งของโพลที่ออกแบบไว้ในบทที่ 3 สามารถปรับปรุงผลตอบสนองทางความถี่ให้ดีขึ้นได้ ทั้งที่เป็นอัตราการขยายช่วงการเปลี่ยนแปลง (Transition-Band Gain) ทำให้ขอบของการเปลี่ยนแปลงทั้งสองด้านมีลักษณะที่สมมาตรกันและอัตราขยายความถี่ผ่าน (Pass-Band Gain) ให้มีอัตราขยายเท่ากันตลอดความถี่ที่ตอบสนอง

จากที่ได้ทำการวิจัยจะเห็นได้ว่าการเพิ่มโพล-ซีโร่เข้าไปอีกหนึ่งคู่นั้น ตำแหน่งของโพลและซีโร่สามารถที่จะเปลี่ยนแปลงอย่างไรก็ได้ขึ้นอยู่กับวิธีการและสมมุติฐานที่ตั้งขึ้น รวมถึงแนวทางในการแก้ไขสมการเพื่อให้ได้คำตอบมีวิธีการทำที่ยากหรือง่ายเพียงใด อันหนึ่งที่จะแนะนำก็คือก่อนที่จะทำการแก้สมการเพื่อให้ได้คำตอบและเป็นการแก้สมการที่ยาวอาจจะใช้วิธีทางตัวเลข (Numerical Method) มาช่วยในการหาคำตอบเบื้องต้นก่อนเพื่อดูความเป็นไปได้ของคำตอบว่าได้ค่าที่ถูกต้องหรือไม่ ก่อนที่จะใช้เวลาส่วนใหญ่ในการแก้สมการเพื่อให้ได้สูตรสำเร็จในการคำนวณ

5.2 ข้อเสนอแนะ

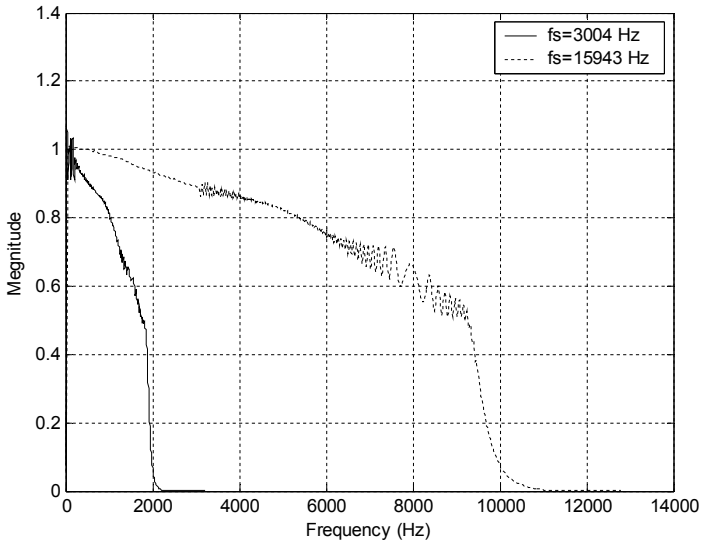
5.2.1 ในการนำสูตรที่ได้ไปใช้งานจริงไม่สามารถที่จะกำหนดแบนด์วิดท์ให้กับ สมการได้โดยตรงเนื่องจากในขั้นตอนการออกแบบสมการทั้งหมดอ้างอิงอยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย ซึ่งพิจารณาเพียงขนาดรัศมีของโพลซึ่งขนาดรัศมีดังกล่าวจะมีผลโดยตรงต่อแบนด์วิดท์ของความถี่นอตช์ ทำให้ต้องสุ่มค่ารัศมีของโพลจนกว่าจะได้แบนด์วิดท์ที่ต้องการ ถ้าหากสามารถหาความสัมพันธ์ของแบนด์วิดท์และรัศมีของโพลได้ ก็จะเป็นการเพิ่มความสะดวกในการใช้งานมากยิ่งขึ้น

5.2.2 จากการออกแบบจะเห็นได้ว่าคำตอบที่ได้เกิดจากการแก้สมการให้อัตราการขยายความถี่ผ่านที่ $\left|H(e^{j0})\right| = \left|H(e^{j\pi})\right|$ แต่บริเวณช่วงการเปลี่ยนแปลง (Transition-Band gain) ยังไม่มีสมการใดมาตรวจสอบได้ว่ามีความสมมาตรกันมากน้อยเพียงใด ซึ่งในการวิจัยอาศัยเพียงการสังเกตุด้วยตาเพียงอย่างเดียว รวมถึงเป็นการปรับปรุงที่ทำการปรับเฉพาะมุม ϕ ที่เพียงอย่างเดียว ซึ่งผู้ที่สนใจ

อาจหาวิธีวางโพลใหม่ด้วยการปรับทั้งมุมและรัศมีไปพร้อมกัน หรือจะทำการเพิ่มโพล-ซีโร่เข้าไปอีกก็อาจจะได้ผลตอบสนองที่ดีขึ้นได้

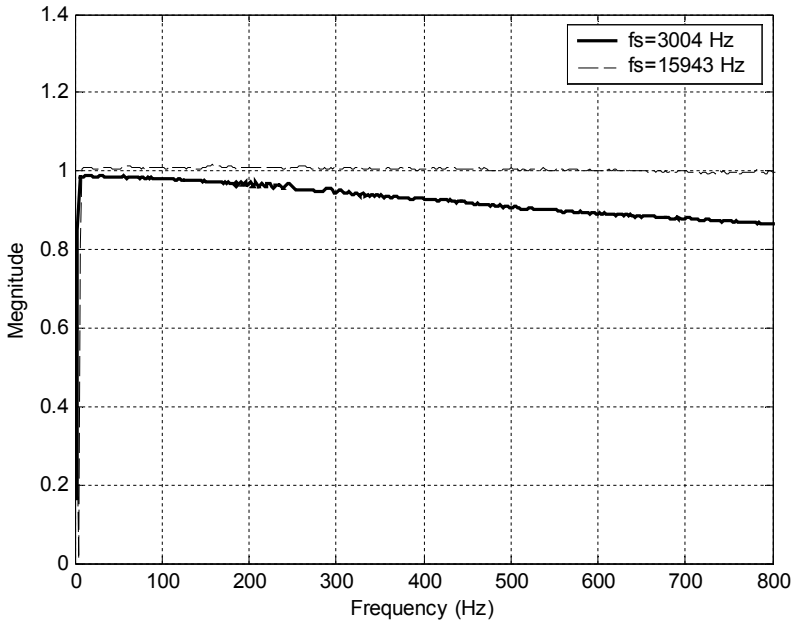
5.2.3 การหาคำตอบอาจไม่จำเป็นที่จะต้องสรุปเป็นสูตรเพื่อนำใช้งาน บางครั้งการทำวิธีการคำนวณเชิงเลข อาจได้ผลที่ดีกว่าและเร็วกว่า จากการวิจัยพบว่าการปรับมุมโพลเพียงอย่างเดียวในสมการที่เป็นสมการออร์เดอร์สี่ยังพอที่จะแก้สมการเพื่อหาคำตอบได้ แต่ถ้าหากจำนวนตัวแปรและออร์เดอร์มีมากขึ้นวิธีการแก้สมการเพื่อให้ได้สูตรออกมาอาจใช้เวลาในการแก้สมการค่อนข้างมาก ดังนั้นวิธีการคำนวณทางตัวเลข (Numerical Method) ก็อาจจะช่วยในการหาคำตอบได้เร็วกว่าได้ ซึ่งถ้าหากนำมาใช้ในงานวิจัยนี้ ก็จะต้องกำหนดค่าเริ่มต้นและเงื่อนไขให้สอดคล้องกับคำตอบที่ควรจะเป็น จากในบทที่ 3 จะเห็นได้ว่าคำตอบของมุม ϕ มีโอกาสที่จะเป็นจำนวนเชิงซ้อนได้ ซึ่งถ้าหากกำหนดเงื่อนไขไม่เหมาะสม วิธีการคำนวณเชิงเลข (Numerical Method) ก็อาจจะไม่ได้คำตอบ

5.2.4 จากภาพที่ 4-5 และ 4-6 ในส่วนที่เป็นผลตอบสนองที่ได้จากการใช้งานจริงจะเห็นได้ว่าขนาดจะลดลงเมื่อความถี่มีค่ามากขึ้น ซึ่งกระบวนการ Reconstruction[6] ของภาคแปลงสัญญาณจากดิจิตอลเป็นอะนาลอก ซึ่งถ้าหากขยายสเกลผลช่วงความถี่ในการแสดงผลออกไปดังภาพที่ 5-1 จะเห็นได้ว่าผลตอบสนองทางความถี่ในการส่งผ่านความถี่ของตัวประมวลผลสัญญาณดิจิตอลที่ได้จะมีความลาดเอียงที่แตกต่างกันไปตามความถี่สุ่มที่เลือกใช้งาน ดังนั้นเมื่อนำตัวกรองความถี่แบบนอตช์ที่ได้คำนวณในบทที่ 4 ไปทำงานจริงบนตัวประมวลผลสัญญาณดิจิตอล จะทำให้ผลตอบสนองมีความลาดเอียงตามไปด้วย ดังแสดงในภาพที่ 5-3 เพราะฉะนั้นวิธีแก้ไขหนึ่งคือ การเลือกใช้

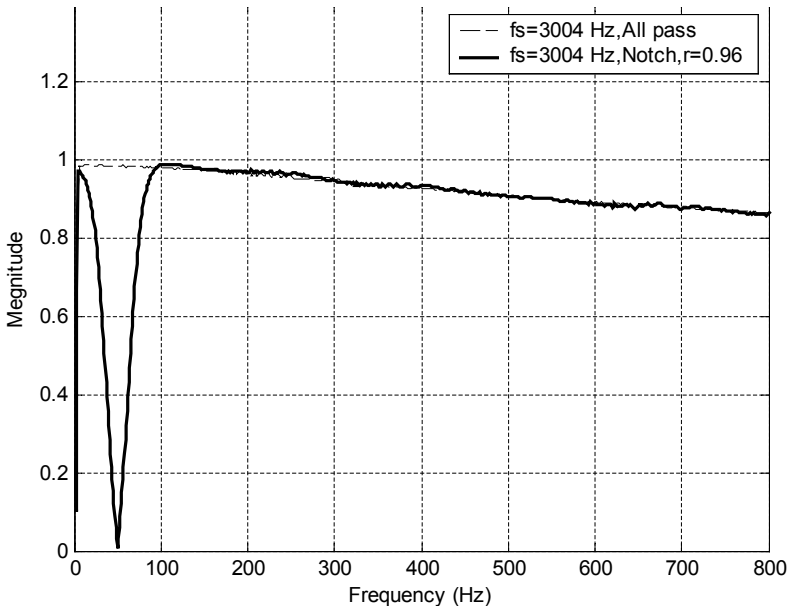


ภาพที่ 5-1 ผลตอบสนองทางความถี่ของตัวส่งผ่านความถี่ทุกความถี่เมื่อความถี่สุ่มแตกต่างกัน (Range = 14000 Hz)

ความถี่สุ่มสูงๆและมีช่วงการใช้งานต่ำๆ สามารถช่วยลดความลาดเอียงได้ ดังแสดงในภาพที่ 5-2 เมื่อเลือกย่านการใช้งานอยู่ที่ 800 Hz การเลือกความถี่สุ่ม f_s ที่สูงกว่าสามารถลดความลาดเอียงได้ แต่ถ้าต้องการใช้งานดังภาพที่ 5-3 ที่ความถี่สุ่มที่ต่ำกว่า ก็น่าที่จะทำการชดเชยขนาดของสัญญาณที่มีความลาดเอียง ให้ขนาดของสัญญาณมีขนาดเท่ากันตลอดย่านความถี่ที่ใช้งานด้วยการเพิ่มสมการที่มีความลาดเอียงในทิศทางตรงกันข้าม ก็จะทำให้ผลตอบสนองทางความถี่ดีขึ้นได้



ภาพที่ 5-2 ผลตอบสนองทางความถี่ของตัวส่งผ่านความถี่ทุกความถี่เมื่อความถี่สุ่มแตกต่างกัน (Range = 800 Hz)



ภาพที่ 5-3 แสดงความลาดเอียงของผลตอบสนองทางความถี่ในทางปฏิบัติ

เอกสารอ้างอิง

1. พิชัย ภักดีพานิชเจริญ. คู่มือการออกแบบวงจรกรองความถี่. กรุงเทพมหานคร : ฟิสิกเซ็นเตอร์, 2535.
2. S. J. Orfandis. Introduction to Signal Processing. Englewood Cliffs, N.J. : Prentice Hall, 1996.
3. S.Yimman, W. Hinjit, S. Sriboonsong,M. Puangpool and K. Dejhan. "IIR Notch Filter Design With Modified Pole-Zero Placements Algorithm." IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology. 2003 : 822-825.
4. G. J. Borse. Numerical Methods with Matlab. Boston : PWS Publishing, 1997.
5. สุรพันธ์ ยิ้มมั่น. เอกสารประกอบการสอนวิชา การประมวลผลสัญญาณดิจิตอล. กรุงเทพมหานคร : สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ, 2545.
6. J. G. Proakis, D. G. Manolakis. Digital Signal Processing Principle, Algorithms, and Aplication. US : Prentice Hall, 1996.
7. James Ward Brown, Ruel V. Churchill. Complex Variables and Applications. Auckland : McGraw-Hill, 2004.
8. Rulph Chassaing. Digital Signal Processing : Laboratory Experiments Using C and the TMS320C31 DSK. New York : Wiley, 1998.

ภาคผนวก ก

สรุปสูตร

A: Equation for improved frequency response.

$$\hat{H}(z) = b_0 \frac{1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r\cos(\omega_0 + \phi)z^{-1} + r^2 z^{-2}} \frac{1 - 2r\cos\omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}{1 - 2r\cos(\omega_0 - \phi)z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}\right)$$

When

$$b = -\frac{(1 + r^2)(1 + r^2 + 2r\cos^2(\omega_0))}{r(r+1)^2}$$

$$c = \frac{(1 + r^2)^2}{4r^2} - \sin^2(\omega_0)$$

And

$$b_0 = \frac{k}{a_1} = \frac{k}{a_2}$$

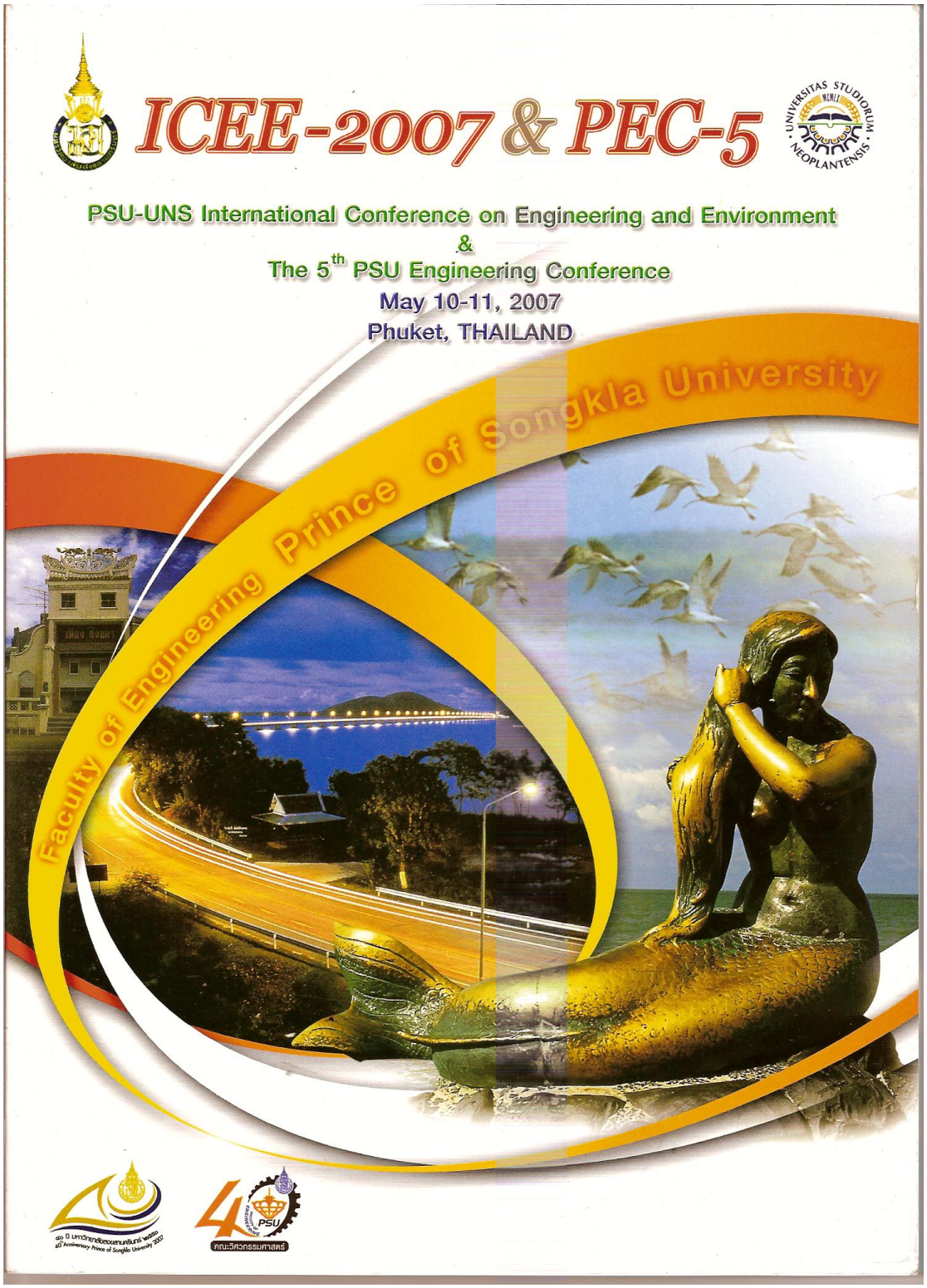
When

$$a_1 = \frac{2 - 2\cos\omega_0}{1 - 2r\cos(\omega_0 + \phi) + r^2} \frac{1 - 2r\cos\omega_0 + r^2}{1 - 2r\cos(\omega_0 - \phi) + r^2}$$

$$a_2 = \frac{2 + 2\cos\omega_0}{1 + 2r\cos(\omega_0 + \phi) + r^2} \frac{1 + 2r\cos\omega_0 + r^2}{1 + 2r\cos(\omega_0 - \phi) + r^2}$$

ภาคผนวก ข

บทความที่ได้ตีพิมพ์เผยแพร่


ICEE-2007 & PEC-5
PSU-UNS International Conference on Engineering and Environment
&
The 5th PSU Engineering Conference
May 10-11, 2007
Phuket, THAILAND
Faculty of Engineering Prince of Songkla University

IIR NOTCH FILTER DESIGN WITH IMPROVE FREQUENCY RESPONSE

Paolo Mongkudvisut*[1] ,Surapun Yimman[2],Manoon Puangpool[1]**
[1]Dept. of Electrical Engineering,Faculty of Engineering,
[2]Dept. of Industrial Physics & Medical Instrumentation,Faculty of Applied Science,
King Mongkut's Institute of Technology North Bangkok,Bangkok 10800, Thailand
EMAIL:elane408@hotmail.com*,sym_imi@yahoo.com**

Abstract: *This paper is present IIR notch filter design. In general,a notch filter that was made by IIR is the second order equation. When considered pass-band gain and transitional gain of cut-off frequency,it is not symmetrical.Those improving with the second order equation is difficult. This paper,non-symmetry that had been improved by poles-zeros addition into the unit circle on Z-plane with pole-zero placement method. We had derived new position of poles-zeros and have been implemented on TMS320C31. We used Matlab for simulation, the results of pass-band gain and transitional gain had better symmetry.*

Key Words: ***Notch filter,IIR, TMS320C31,Pole-zero Placement***

1. INTRODUCTION

IIR notch filter seems kind of band-reject filter but it has praticular frequency on bandwidth frequency,shown in fig 1. IIR notch filter is useful for reduced noise and hamonic which interferes in electrical signal such as a signal 50 Hz of power line into the electrocardiogram of equipments' medical(ECG) etc.

For equation of IIR notch filter is relation equation (1)

$$H(z) = b_0 \frac{1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r\cos\omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}} \qquad (1)$$

where:

b_0 is gain of tranfer function

ω_0 is cut-off frequency of Notch filter

$z = e^{j\omega}$

In fig. 1.show general IIR notch filter,the second order equation,in case of pass-band gain:

$$|H(e^{j0})| \neq |H(e^{j\pi})|$$

while fig 2. ,the second order equation is the same as fig. 1.,is previous design[2] which improved

$$|H(e^{j0})| = |H(e^{j\pi})|$$

but transitional gain of cut-off frequency at $\omega = 0$ and $\omega = 0.6\pi$ by select $\omega_0 = 0.3\pi$ has not symmetry which $|H(\omega_0 - \Delta\omega)|$ could be as $|H(\omega_0 + \Delta\omega)|$

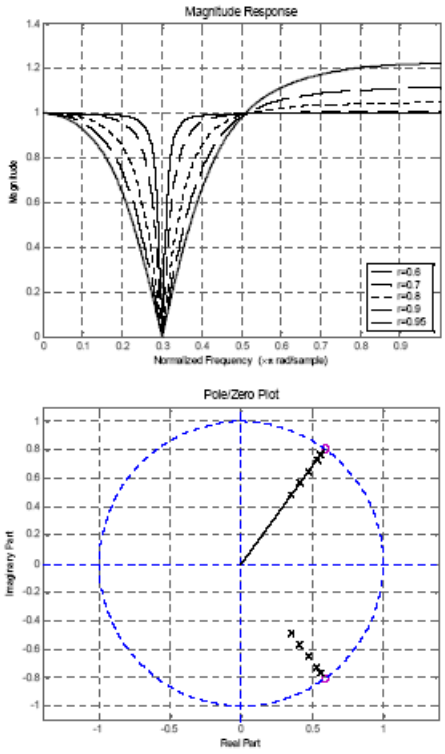


Fig. 1. General IIR notch filter with second order equation.

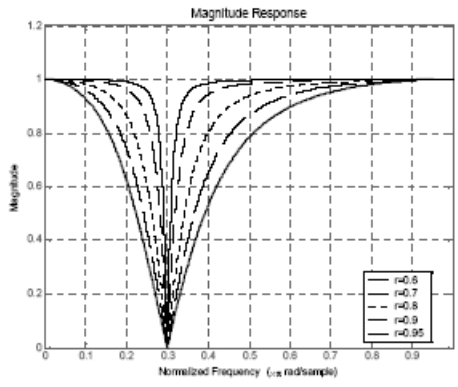


Fig.2. Frequency response of pevious design.

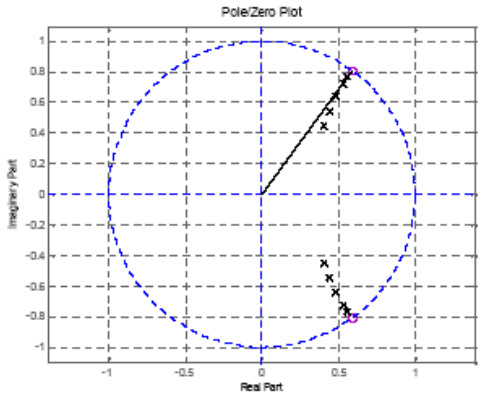


Fig. 3. Polt/Zero plot of pevious design.

2. PROPOSED METHOD

According to the second order notch filter is not enough for : $|H(\omega_0-\Delta\omega)|=|H(\omega_0+\Delta\omega)|$, because position of pole was adjusted for pass-band gain at $\omega=0$ and $\omega=\pi$. From equation (1),we add pole-zero with $H(z)_{Add}$

$$H(z)=b_0\frac{1-2\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2}}{1-2r\cos(\omega_0+\phi)z^{-1}+r^2z^{-2}} \quad (2)$$

$$H(z)_{Add}=b_0\frac{1-2r\cos\omega_0 z^{-1}+r^2z^{-2}}{1-2r\cos(\omega_0-\phi)z^{-1}+r^2z^{-2}} \quad (3)$$

$$\hat{H(z)}=H(z)H(z)_{Add}$$

when

$\hat{H(z)}$ is proposed transfer function

We will adjust angle ω_0 of pole at both $H(z)_1$ and $H(z)_{Add}$ with ϕ and $-\phi$

$$\hat{H(z)}=b_0\frac{1-2\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2}}{1-2r\cos(\omega_0+\phi)z^{-1}+r^2z^{-2}}\frac{1-2r\cos\omega_0 z^{-1}+r^2z^{-2}}{1-2r\cos(\omega_0-\phi)z^{-1}+r^2z^{-2}} \quad (4)$$

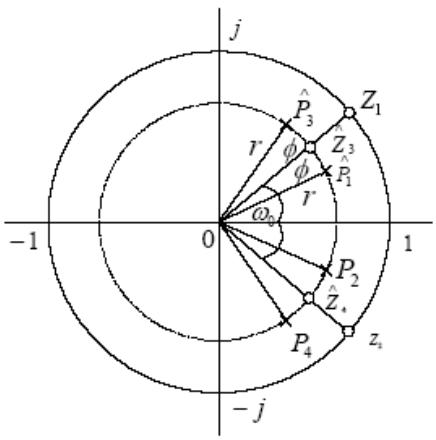


Fig. 4. Form of Added the pole-zero on Z-plane.

Where size of ϕ is equal ,but sign is different. So we have find ϕ only. We let

$$\hat{H(e^{j0})}=\hat{H(e^{j\pi})} \quad (5)$$

$$\hat{H(e^{j0})}=b_0\frac{2-2\cos\omega_0}{1-2r\cos(\omega_0+\phi)+r^2}\frac{1-2r\cos\omega_0+r^2}{1-2r\cos(\omega_0-\phi)+r} \quad (6)$$

And

$$\hat{H(e^{j\pi})}=b_0\frac{2+2\cos\omega_0}{1+2r\cos(\omega_0+\phi)+r^2}\frac{1+2r\cos\omega_0+r^2}{1+2r\cos(\omega_0-\phi)+r} \quad (7)$$

We define

$$\left.\begin{aligned}A_1&=\cos(\omega_0)\\A_2&=\cos(\omega_0+\phi)\\A_3&=\cos(\omega_0-\phi)\\A&=(2-2A_1)(1-2rA_1+r^2)\\B&=(2+2A_1)(1+2rA_1+r^2)\\C&=1+r^2\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

(6), (7), (8) into (5):

$$\frac{A}{(C-2rA_2)(C-2rA_3)}=\frac{B}{(C+2rA_2)(C+2rA_3)} \quad (9)$$

Find factor at A_2 and A_3 , which is variable for ϕ ,

$$(2rAC+2rBC)A_2+(2rAC+2rBC)A_3+(4r^2A-4r^2B)A_2A_3-BC^2+AC^2=0 \quad (10)$$

Thus, reduce (10) to

$$C_1A_2+C_2A_3+C_3A_2A_3+C_4=0 \quad (11)$$

where

$$\left.\begin{aligned}C_1&=C_2=2rAC+2rBC\\C_3&=4r^2A-4r^2B\\C_4&=-BC^2+AC^2\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

From (8), in case of $\cos(\omega_0+\phi)$ and $\cos(\omega_0-\phi)$ insert with

$$\cos(\omega_0+\phi)=\cos(\omega_0)\cos(\phi)-\sin(\omega_0)\sin(\phi) \quad (13)$$

and

$$\cos(\omega_0-\phi)=\cos(\omega_0)\cos(\phi)+\sin(\omega_0)\sin(\phi) \quad (14)$$

reduce (13), (14) are

$$\left.\begin{aligned}\cos(\omega_0)\cos(\phi)&=M\\\sin(\omega_0)\sin(\phi)&=N\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

thus replace equation (15) into equation (8)

$$\left.\begin{aligned}A_2&=\cos(\omega_0+\phi)=M-N\\A_3&=\cos(\omega_0-\phi)=M+N\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

That (11) is

$$C_1(M-N)+C_2(M+N)+C_3(M+N)(M-N)+C_4=0$$

$$2C_1M+C_3M^2-C_3N^2+C_4=0 \quad (17)$$

thus, replace equation (15) into equation (17)

$$2C_1\cos(\omega_0)\cos(\phi)+C_3\cos^2(\omega_0)\cos^2(\phi) \quad (18)$$
$$-C_3\sin^2\omega_0\sin^2(\phi)+C_4=0$$

when

$$\sin^2(\omega_0)\sin^2(\phi)=(1-\cos^2(\omega_0))(1-\cos^2(\phi) \quad (19)$$

and from (16), (17) can find $\cos(\phi)$ thus

$$\cos^2(\phi)+\frac{2C_1}{C_3}\cos(\phi)\cos(\omega_0)+\cos^2(\omega_0)+\frac{C_4}{C_3}-1=0 \quad (20)$$

From $ax^2+bx+c=0; x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (21)

when

$$\left.\begin{aligned} a&=1\\ b&=2\frac{C_1}{C_3}\cos(\omega_0)\\ c&=\cos^2(\omega_0)+\frac{C_4}{C_3}-1\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

and from (8) insert $A_1=\cos(\omega_0)$ into (12) :

$$b=\frac{4r(AC+BC)}{(4r^2A-4r^2B)}\cos(\omega_0)=\frac{4rC(A+B)}{4r^2(A-B)}\cos(\omega_0)$$
$$=\frac{C(A+B)}{r(A-B)}\cos(\omega_0)$$
$$c=\frac{-BC^2+AC^2}{(4r^2A-4r^2B)}+\cos^2(\omega_0)-1=\frac{C^2(A-B)}{4r^2(A-B)}+\cos^2(\omega_0)-1$$
$$=\frac{C^2}{4r^2}+\cos^2(\omega_0)-1$$

Form A and B in (8) can reduce is

$$\left.\begin{aligned} A&=(2-2A_1)(C-2rA_1)=2C-2CA_1-4rA_1+4rA_1^2\\ B&=(2+2A_1)(C+2rA_1)=2C+2CA_1+4rA_1+4rA_1^2\\ A-B&=-4CA_1-8rA_1\\ A+B&=4C+8rA_1^2\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

then

$$a=1$$
$$b=\frac{(1+r^2)(4C+8rA_1^2)}{r(-4CA_1-8rA_1)}\cos(\omega_0)$$
$$=\frac{(1+r^2)4(C+2rA_1^2)}{4r(-C-2r)A_1}\cos(\omega_0)$$
$$=\frac{(1+r^2)(C+2rA_1^2)}{r(-C-2r)}=\frac{(1+r^2)(1+r^2+2r\cos^2(\omega_0))}{-r(1+r^2+2r)}$$
$$=\frac{(1+r^2)(1+r^2+2r\cos^2(\omega_0))}{-r(r+1)^2}$$
$$c=\frac{C^2}{4r^2}+\cos^2(\omega_0)-1=\frac{(1+r^2)^2}{4r^2}-\sin^2\omega_0 \quad (24)$$

Form (21) insert $x=\cos(\phi)$

$$\cos(\phi)=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}$$

$$\phi=\cos^{-1}\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}\right) \quad (25)$$

when

$$\left.\begin{aligned} b&=-\frac{(1+r^2)(1+r^2+2r\cos^2(\omega_0))}{r(r+1)^2}\\ c&=\frac{(1+r^2)^2}{4r^2}-\sin^2(\omega_0)\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

$\phi=\cos^{-1}\left(\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}\right)$ for ,from simulation can not improve frequency response.

We find b_0 from (6), (7)

$$\hat{H}(e^{j0})=b_0a_1=k$$

$$\hat{H}(e^{j\pi})=b_0a_2=k$$

when

$$a_1=\frac{2-2\cos\omega_0}{1-2r\cos(\omega_0+\phi)+r^2}\frac{1-2r\cos\omega_0+r^2}{1-2r\cos(\omega_0-\phi)+r^2}$$

$$a_2=\frac{2+2\cos\omega_0}{1+2r\cos(\omega_0+\phi)+r^2}\frac{1+2r\cos\omega_0+r^2}{1+2r\cos(\omega_0-\phi)+r^2}$$

Then

$$b_0=\frac{k}{a_1}=\frac{k}{a_2} \quad (27)$$

From (25),manigtude response could be that $\left|\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}\right|\le 1$

find relation between r and ω_0 for real condition

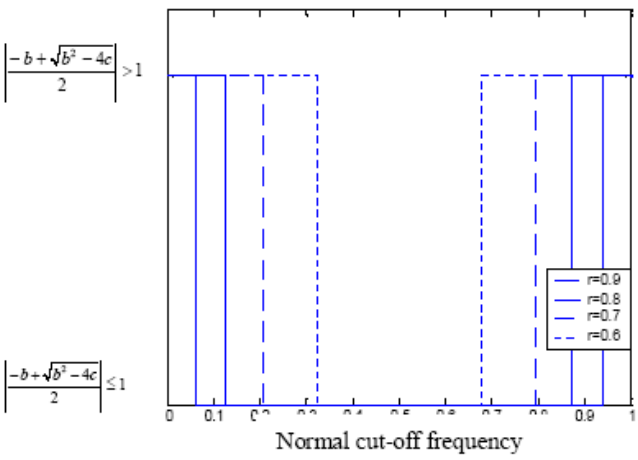


Fig. 5. Relation between r and ω_0 .

3. EXAMPLE AND RESULT

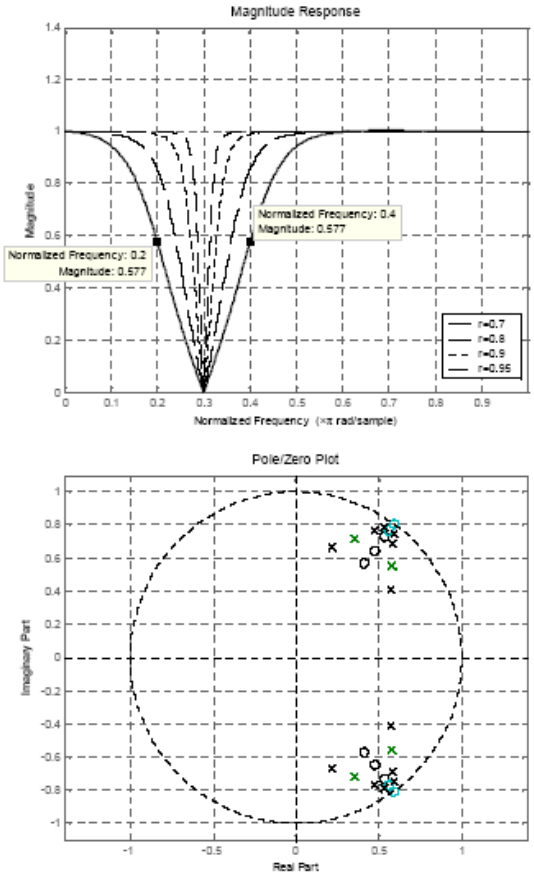


Fig. 6. Frequency respond and pole/zero plot of proposed design.

In fig.6, these show frequency respond and a pole/zero plot that have new design at several frequencies. Observed magnitude of normal frequency at $\omega = 0.2\pi$ and $\omega = 0.4\pi$, $r = 0.7$, has gain symmetry. For fig. 7. Each of the design methods is compared magnitude respond, which proposed design has transitional gain better then others.

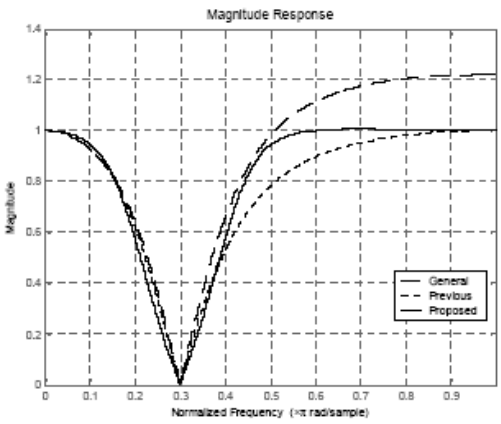


Fig. 7. Comparison of magnitude response.

For example and to implement on TMS320C31 show in fig. 10.

Lets: $f_c = 500Hz, f_s = 15.943kHz, r = 0.925$

Form (25) has $\omega_0 = 1000\pi$, $\phi = 0.0213\pi$

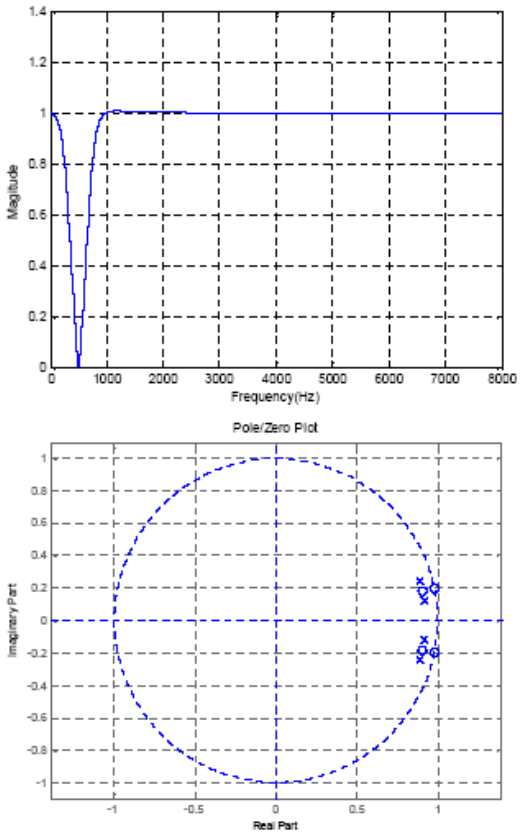


Fig. 8. The result of Matlab simulation at $f_c = 500Hz, f_s = 15.943kHz, r = 0.925$.

We selected cut-off frequency at 500 Hz ,that was compared result in fig. 9.

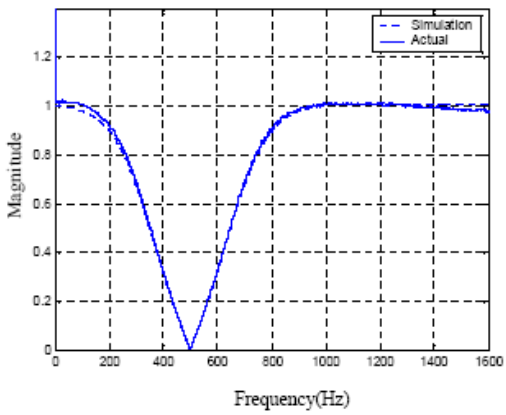


Fig. 9. The result between Matlab simulation and implemented on TMS320C31.

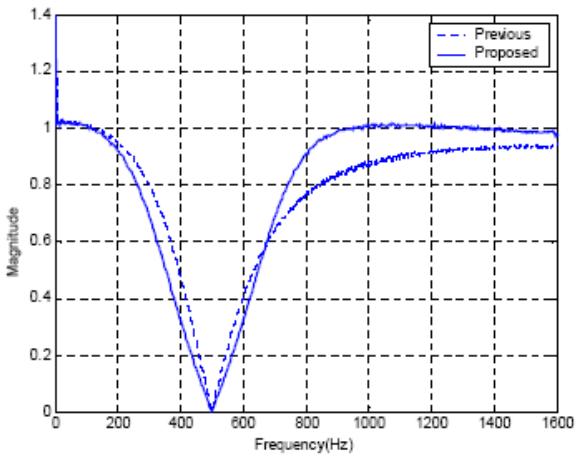


Fig. 10. The result between previous and new proposed on TMS320C31.

4. CONCLUSION

This paper is present IIR notch filter design. The pass-band gain and transitional gain of cut-off frequency transition had been impoved by poles-zeros addition into the unit circle on Z-plane with pole-zero placement method. We had derived new position of poles-zeros and summary equation that was shown in Appendix A. From simulation, new position Pole-zero, can improve satisfactorily, and the results of implemented on TMS320C31 have resemble with Matlab simulation.

4. REFERENCES

[1] S. J. Orfandis, "Introduction to Signal Processing", Prentice Hall, 1996.

[2] S. Yimman, W. Hinjit, S. Sriboonsong, M. Puangpool, and K. Dejhan, "IIR Notch Filter Design With Modified Pole-Zero Placements Algorithm", IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology, 822-825,2003.

[3] Texas Instrument Incorporated. "TMS320C3X/C4X Optimizing C Compiler User's Guie", 1998.

[4] G.J. Borse, "Numerical Methods with Matlab", PWS Publishing, 1997.

5. Appendices

A: Equation for improved frequency response:

$$\hat{H(z)} = b_0 \frac{1-2\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2}}{1-2r\cos(\omega_0+\phi)z^{-1}+r^2z^{-2}} \frac{1-2r\cos\omega_0 z^{-1}+r^2z^{-2}}{1-2r\cos(\omega_0-\phi)z^{-1}+r^2z^{-2}}$$

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}\right)$$

When

$$b = -\frac{(1+r^2)(1+r^2+2r\cos^2(\omega_0))}{r(r+1)^2}$$

$$c = \frac{(1+r^2)^2}{4r^2} - \sin^2(\omega_0)$$

And

$$b_0 = \frac{k}{a_1} = \frac{k}{a_2}$$

When

$$a_1 = \frac{2-2\cos\omega_0}{1-2r\cos(\omega_0+\phi)+r^2} \frac{1-2r\cos\omega_0+r^2}{1-2r\cos(\omega_0-\phi)+r^2}$$

$$a_2 = \frac{2+2\cos\omega_0}{1+2r\cos(\omega_0+\phi)+r^2} \frac{1+2r\cos\omega_0+r^2}{1+2r\cos(\omega_0-\phi)+r^2}$$

B: Transfer function in fig. 7.

$$H(z) = \frac{-0.68+0.7994z^{-1}-0.68z^{-2}}{1-0.7994z^{-1}+0.36z^2}$$

$$H(z) = \frac{-0.7941+0.9335z^{-1}-0.7941z^{-2}}{1-0.7053z^{-1}+0.36z^{-2}}$$

$$\hat{H(z)} = \frac{0.6862-1.3713z^{-1}+1.6862z^{-2}-0.9599z^{-3}+0.3362z^{-4}}{1-1.5646z^{-1}+1.4686z^{-2}-0.7667z^{-3}+0.2401z^{-4}}$$

ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ : นายเปาโล มงกุฎวิสุทธิ์

ชื่อวิทยานิพนธ์ : การออกแบบตัวกรองเชิงเลขไอไออาร์แบบนอตช์ที่ปรับปรุงผลตอบสนองทางความถี่

สาขาวิชา : วิศวกรรมไฟฟ้า

ประวัติ

ประวัติส่วนตัว เกิดเมื่อวันที่ 1 มกราคม พ.ศ. 2524 ที่ อำเภอเบตง จังหวัดยะลา

ประวัติการศึกษา

ระดับปริญญาตรี (เกียรตินิยมอันดับ 2) สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะครุศาสตร์อุตสาหกรรม สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ ปีการศึกษา 2545

ประกาศนียบัตรวิชาชีพ สาขาช่างอิเล็กทรอนิกส์ จากวิทยาลัยเทคนิคยะลา จังหวัดยะลา ปีการศึกษา 2541

มัธยมศึกษาตอนต้น จากโรงเรียนธีรวิทยา อำเภอเบตง จังหวัดยะลา ปีการศึกษา 2538