

การหาคำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการความร้อนแบบไม่เชิงเส้น

นางสาววัลลภวดี เลียงตระกูลงาม

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ปีการศึกษา 2549

ลิขสิทธิ์ของสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ชื่อ : นางสาววัลลภวดี เลี้ยงตระกูลงาม
ชื่อวิทยานิพนธ์ : การหาคำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการ
ความร้อนแบบไม่เชิงเส้น
สาขาวิชา : คณิตศาสตร์ประยุกต์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ
ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ : ดร.มโหสถ ปิ่นโกษา
ปีการศึกษา : 2549

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้จะศึกษาหาคำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่น (traveling wave solution) ของสมการความร้อนซึ่งมีแหล่งกำเนิดความร้อนแบบไม่เชิงเส้นซึ่งอยู่ในรูป

$$u_t - u_{xx} - c_0 - c_1u - c_2u^2 - c_3u^3 = 0$$

ด้วยวิธีการที่เรียกว่า repeated homogeneous balance ซึ่งแสดงผลคำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปพหุนามของคำตอบของสมการรีกาคติและหาคำตอบเชิงตัวเลขด้วยวิธีการ Finite difference เพื่อเปรียบเทียบคำตอบเชิงตัวเลขที่ได้กับคำตอบเชิงวิเคราะห์

(วิทยานิพนธ์มีจำนวนทั้งสิ้น 97 หน้า)

คำสำคัญ : สมการความร้อนแบบไม่เชิงเส้น, Repeated homogeneous balance method

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์

Name : Miss Walwadee Liengtragulngam
Thesis Title : Exact Traveling Wave Solutions for a Nonlinear Heat Equation
Major Field : Applied Mathematics
King Mongkut's Institute of Technology North Bangkok
Thesis Advisor : Dr. Mahosut Punpocha
Academic Year : 2006

Abstract

This research will study about traveling wave solutions for a nonlinear heat equation, which is in the form

$$u_t - u_{xx} - c_0 - c_1u - c_2u^2 - c_3u^3 = 0$$

By assuming that the exact solutions are in the form of polynomial of solutions of riccati equation. Then repeated homogeneous balance method are applied. The approximate solutions are calculated by finite difference method for comparing the results with the exact solutions.

(Total 97 pages)

Keywords : Nonlinear heat equation , Repeated homogeneous balance method.

Advisor

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยความช่วยเหลืออย่างดียิ่งของอาจารย์ ดร.ม โสภ ปั่นโกษา อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ที่ได้ให้คำแนะนำ และข้อคิดเห็นต่างๆ ของการวิจัยมาโดยตลอด จึงขอขอบพระคุณเป็นอย่างยิ่ง

ผู้วิจัยกราบขอบพระคุณอาจารย์ ดร.สำเร็จ ชื่นรังสิกุล และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เสนอกุณประเสริฐ ในฐานะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่กรุณาตรวจแก้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

สุดท้ายนี้ผู้วิจัยใคร่ขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา ที่ส่งเสริมสนับสนุนการศึกษาในทุกๆ ด้าน รวมทั้งให้กำลังใจและห่วงใยผู้วิจัยเสมอมา ขอขอบคุณเพื่อนๆ พี่ๆ น้องๆ ที่ให้กำลังใจและให้ความช่วยเหลือที่ดีมาโดยตลอด

วัลค์วดี เลียงตระกูลงาม

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	ข
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	ค
กิตติกรรมประกาศ	ง
สารบัญตาราง	ช
สารบัญภาพ	ฅ
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญ	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย	2
1.3 ขอบเขตของการวิจัย	2
1.4 วิธีการวิจัย	3
1.5 ประโยชน์ของการวิจัย	3
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	5
2.1 Repeated homogeneous balance method	5
2.2 วิธีการคำนวณเชิงตัวเลขแบบ Finite difference method	10
บทที่ 3 วิธีการดำเนินการวิจัย	17
3.1 การหาคำตอบในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นโดยใช้ Repeated homogeneous balance method	17
3.2 การหาคำตอบในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นโดยวิธีการเชิงตัวเลข (Finite difference method)	25
บทที่ 4 ผลการวิจัย	27
4.1 คำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการความร้อนซึ่งมีแหล่งกำเนิดความร้อนแบบไม่เชิงเส้น	27
4.2 คำตอบเชิงตัวเลขในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการความร้อนซึ่งมีแหล่งกำเนิดความร้อนแบบไม่เชิงเส้น	37
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ	49
5.1 สรุปผลการวิจัย	49
5.2 ข้อเสนอแนะ	49

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
บรรณานุกรม	51
ภาคผนวก ก คำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการ	
$u_t - u_{xx} - c_0 - c_1u - c_2u^2 - c_3u^3 = 0$	
เมื่อให้ $\phi = \sum_{i=0}^m b_i \tanh^i \xi$	53
ภาคผนวก ข คำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการ	
$u_t - u_{xx} - c_0 - c_1u - c_2u^2 - c_3u^3 = 0$	
เมื่อให้ $\phi = \sum_{i=0}^m (A_i f^i(\xi) + B_i f^{i-1}(\xi)g(\xi))$	87
ประวัติผู้วิจัย	97

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
2-1 แสดงค่า U จากการหาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ ที่ $t = 0-0.02$	15
4-1 แสดงการเทียบคำตอบเชิงวิเคราะห์จากการใช้ Repeated homogeneous balance method และคำตอบเชิงวิเคราะห์จาก (3-12)	32
4-2 แสดงการเทียบคำตอบเชิงวิเคราะห์จากการใช้ Repeated homogeneous balance method ของสมการ (4-3) และ (4-4)	37

สารบัญภาพ

ภาพที่	หน้า
2-1 แสดงภาพประกอบหลักการ Finite difference method	11
2-2 แสดงภาพประกอบการแบ่งระนาบ x-t ของ Finite difference method	12
4-1 แสดงคำตอบเชิงวิเคราะห์ของ u_1, u_4 จากสมการ (4-1)	28
4-2 แสดงคำตอบเชิงวิเคราะห์ของ u_2, u_3 จากสมการ (4-1)	29
4-3 แสดงคำตอบเชิงวิเคราะห์ของ u_1, u_4 จากสมการ (4-2)	30
4-4 แสดงคำตอบเชิงวิเคราะห์ของ u_2, u_3 จากสมการ (4-2)	31
4-5 แสดงคำตอบเชิงวิเคราะห์จากสมการ (3-12)	32
4-6 แสดงคำตอบเชิงวิเคราะห์ของ u_1, u_4 จากสมการ (4-3)	34
4-7 แสดงคำตอบเชิงวิเคราะห์ของ u_2, u_3 จากสมการ (4-3)	34
4-8 แสดงคำตอบเชิงวิเคราะห์ของ u_1, u_4 จากสมการ (4-4)	36
4-9 แสดงคำตอบเชิงวิเคราะห์ของ u_2, u_3 จากสมการ (4-4)	36
4-10 แสดงคำตอบเชิงตัวเลขเมื่อให้ค่าเริ่มต้นเท่ากับ u_1 จากสมการ (4-1)	38
4-11 แสดงคำตอบเชิงตัวเลขเมื่อให้ค่าเริ่มต้นเท่ากับ u_2 จากสมการ (4-1)	38
4-12 แสดงการเปรียบเทียบคำตอบเชิงวิเคราะห์ภาพที่ 4-1 กับคำตอบเชิงตัวเลขภาพที่ 4-10	39
4-13 แสดงการเปรียบเทียบคำตอบเชิงวิเคราะห์ภาพที่ 4-2 กับคำตอบเชิงตัวเลขภาพที่ 4-11	40
4-14 แสดงค่าเริ่มต้นจากหัวข้อ 4.2.2	41
4-15 แสดงคำตอบเชิงตัวเลขเมื่อให้ค่าเริ่มต้นในหัวข้อ 4.2.2	42
4-16 แสดงคำตอบเชิงตัวเลขเมื่อให้ค่าเริ่มต้นเท่ากับ u_1 จากสมการ (4-3)	43
4-17 แสดงคำตอบเชิงตัวเลขเมื่อให้ค่าเริ่มต้นเท่ากับ u_2 จากสมการ (4-3)	43
4-18 แสดงการเปรียบเทียบคำตอบเชิงวิเคราะห์ภาพที่ 4-6 กับคำตอบเชิงตัวเลขภาพที่ 4-16	44
4-19 แสดงการเปรียบเทียบคำตอบเชิงวิเคราะห์ภาพที่ 4-7 กับคำตอบเชิงตัวเลขภาพที่ 4-17	45
4-20 แสดงค่าเริ่มต้นจากหัวข้อ 4.2.4	46
4-21 แสดงคำตอบเชิงตัวเลขเมื่อให้ค่าเริ่มต้นในหัวข้อ 4.2.4	47

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญ

สมการที่ใช้ในการอธิบายปรากฏการณ์ทางธรรมชาติ ส่วนมากมักจะเขียนอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear Partial Differential Equation) การหาคำตอบในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่น (Traveling wave solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น มีความสำคัญมากในงานประยุกต์ด้านวิศวกรรม เช่น ในการคำนวณการทำปฏิกิริยาของเชื้อเพลิงแข็ง คำตอบในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นจะทำให้เราทราบถึงความเร็วของบริเวณที่เกิดปฏิกิริยาว่ามีการเคลื่อนตัวอย่างไร

ในงานวิจัยนี้จะศึกษาการหาคำตอบในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการความร้อนซึ่งมีแหล่งกำเนิดความร้อนแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear heat equation) ที่อยู่ในรูป

$$u_t - u_{xx} - c_0 - c_1u - c_2u^2 - c_3u^3 = 0$$

เมื่อ c_0, c_1, c_2, c_3 เป็นค่าคงที่ใดๆ

เนื่องจากเป็นสมการความร้อนที่มีความสำคัญเพราะมีสมการความร้อนหลายสมการที่อยู่ในรูปนี้ เช่น สมการ Zel'dovich-Frank-Kamenetsky

$$u_t - u_{xx} - u^2(1-u) = 0$$

สมการ Fitzhugh-Nagumo

$$u_t - u_{xx} - u(u-a)(1-u) = 0$$

และสมการ Burgers-Huxley

$$u_t - u_{xx} - \beta u(1-u^\delta)(u^\delta - \gamma) = 0$$

ในกรณีนี้ $\delta = 1$

Wang (1995,1996) ได้ใช้ Homogeneous balance method ในการหาคำตอบในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการ Boussinesq และสมการ Kdv-Burgers และ Wang, Zhou, Li (1996) ได้ใช้วิธีการดังกล่าวหาคำตอบในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของระบบสมการ coupled KdV ต่อมา Fan, Zhang, (1998) ได้ใช้วิธีการดังกล่าวหาคำตอบในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการ Kdv-Burgers และต่อมา Zhao, Tang (2002) ได้ใช้วิธีการดังกล่าวหาคำตอบในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการ Boussinesq

Malfliet (1992) ได้ใช้ Tanh-function method ในการหาคำตอบในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการ Burgers และสมการ Fisher, Parkes ต่อมา Duffy (1996) ได้ใช้วิธีการดังกล่าวหาคำตอบในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการ KdV และต่อมา Fan (2000) ได้ใช้วิธีการดังกล่าวหาคำตอบในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการ Kdv-Burgers-Kuramoto

Fan, Benny (2002) ได้ใช้ Jacobi elliptic functions method ในการหาคำตอบในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของระบบสมการ Hirota-Satsuma coupled KdV

Zhao, Wang, Sun (2006) ได้ใช้ Repeated homogeneous balance method ในการหาคำตอบในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการ Burgers-Kdv และต่อมา Ding, Zhao (2006) ได้ใช้วิธีการดังกล่าวหาคำตอบในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการ Boussinesq

ในงานวิจัยนี้สนใจที่จะนำวิธี Repeated homogeneous balance method มาใช้หาคำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการความร้อนซึ่งมีแหล่งกำเนิดความร้อนแบบไม่เชิงเส้นข้างต้นเพราะเป็นวิธีการที่ทำให้ได้คำตอบในรูปแบบต่างๆ ได้หลายรูปแบบ

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1.2.1 เพื่อศึกษาสมการความร้อนซึ่งมีแหล่งกำเนิดความร้อน (Source term) แบบไม่เชิงเส้น

1.2.2 เพื่อศึกษาการหาคำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่น โดยใช้ Repeated homogeneous balance method

1.2.3 เพื่อหาคำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการความร้อนซึ่งมีแหล่งกำเนิดความร้อนแบบไม่เชิงเส้นที่อยู่ในรูป

$$u_t - u_{xx} - c_0 - c_1u - c_2u^2 - c_3u^3 = 0 \quad (1-1)$$

โดยใช้ Repeated homogeneous balance method

1.2.4 เพื่อหาคำตอบเชิงตัวเลขในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการความร้อนซึ่งมีแหล่งกำเนิดความร้อนแบบไม่เชิงเส้นของสมการ (1-1) โดยใช้ Finite difference method

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

ศึกษาและหาคำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการความร้อนซึ่งมีแหล่งกำเนิดความร้อนแบบไม่เชิงเส้นของสมการ (1-1) โดยใช้ Repeated homogeneous balance method และเปรียบเทียบผลที่ได้กับคำตอบเชิงตัวเลขจากการใช้ Finite difference method

1.4 วิธีการวิจัย

1.4.1 ศึกษาสมการความร้อนซึ่งมีแหล่งกำเนิดความร้อนแบบไม่เชิงเส้น

1.4.2 ศึกษาการหาคำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่น โดยใช้ Repeated homogeneous balance method

1.4.3 หาคำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการความร้อนซึ่งมีแหล่งกำเนิดความร้อนแบบไม่เชิงเส้นของสมการ (1-1) โดยใช้ Repeated homogeneous balance method

1.4.4 หาคำตอบเชิงตัวเลขในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการความร้อนซึ่งมีแหล่งกำเนิดความร้อนแบบไม่เชิงเส้นของสมการ (1-1) โดยใช้ Finite difference method

1.5 ประโยชน์ของการวิจัย

1.5.1 ได้ความรู้เกี่ยวกับสมการความร้อนซึ่งมีแหล่งกำเนิดความร้อนแบบไม่เชิงเส้น

1.5.2 ได้ความรู้เกี่ยวกับการหาคำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่น โดยใช้ Repeated homogeneous balance method

1.5.3 ได้คำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการความร้อนซึ่งมีแหล่งกำเนิดความร้อนแบบไม่เชิงเส้นที่อยู่ในรูป

$$u_t - u_{xx} - c_0 - c_1u - c_2u^2 - c_3u^3 = 0$$

โดยใช้ Repeated homogeneous balance method

1.5.4 ได้ความรู้เกี่ยวกับวิธีการเชิงตัวเลข (Finite difference method) และได้คำตอบเชิงตัวเลขในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการความร้อนซึ่งมีแหล่งกำเนิดความร้อนแบบไม่เชิงเส้น โดยใช้ Finite difference method

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 Repeated homogeneous balance method

จากผลงานของ Edward (1981) ได้แสดงให้เห็นว่าสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบไม่เชิงเส้นหลายสมการสามารถแปลงรูปเป็นระบบสมการรีกาคติได้ ซึ่งจากผลอันนี้นำมาสู่การสมมุติให้คำตอบเชิงวิเคราะห์ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบไม่เชิงเส้นให้อยู่ในรูป

$$u = \sum_{i=1}^n q_i \phi^i$$

เมื่อ ϕ เป็นคำตอบของ

$$\phi' = a\phi^2 + c$$

จากแนวความคิดนี้ได้นำมาประยุกต์ใช้ใน Repeated homogeneous balance method ซึ่งเป็นวิธีการที่ใช้ในการหาคำตอบเชิงวิเคราะห์ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย โดยที่ Repeated homogeneous balance method ได้ทำการปรับปรุงมาจาก Homogeneous balance method ซึ่งวิธีการ Homogeneous balance method มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 จากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยซึ่งอยู่ในรูป

$$P(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = 0 \quad (2-1)$$

พิจารณาคำตอบในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นในรูป

$$u(x, t) = u(\xi) \quad \text{โดยที่} \quad \xi = kx + lt + d$$

เมื่อ k, l, d เป็นค่าคงที่ใดๆ

โดยที่มีความเร็วในการเคลื่อนตัวของคลื่นเป็น $\left| \frac{1}{k} \right|$

จากสมการ (2-1) แปลงให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ซึ่งอยู่ในรูป

$$Q(u, u', u'', \dots) = 0 \quad (2-2)$$

ขั้นที่ 2 ให้คำตอบของสมการ (2-2) อยู่ในรูป

$$u = \sum_{i=0}^n q_i \phi^i \quad (2-3)$$

โดยที่ q_i เป็นค่าคงที่ใดๆ

และ ϕ เป็นคำตอบของสมการรีกาคติ

$$\phi' = a\phi^2 + c$$

ซึ่ง n หาจากการ balance ระหว่างกำลังของอนุพันธ์ที่มีอันดับสูงสุด กับกำลังสูงสุดของเทอม nonlinear ใน (2-2)

ขั้นที่ 3 หา q_i โดยการแทนค่า u และ ϕ' จากขั้นที่ 2 ในสมการ (2-2) และจัดสัมประสิทธิ์ของ ϕ^i ให้เป็นศูนย์ จากนั้นแก้ระบบสมการหาค่า q_i

ขั้นที่ 4 ให้คำตอบของสมการรีกาคาติอยู่ในรูป $\phi = c \tanh \xi$ หรือ $\phi = c \coth \xi$

ขั้นที่ 5 แทนค่า q_i และ ϕ จากขั้นตอนที่ 3 และ 4 ลงใน (2-3) จะได้ u ซึ่งเป็นคำตอบในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการ (2-1)

ซึ่ง Repeated homogeneous balance method ได้ปรับปรุงการหาคำตอบของสมการรีกาคาติโดยกำหนดให้คำตอบของสมการรีกาคาติอยู่ในรูปแบบต่างๆ

เช่นให้
$$\phi = \sum_{i=0}^m b_i \tanh^i \xi$$

โดยที่ b_i เป็นค่าคงที่ใดๆ

หรือ
$$\phi = \sum_{i=0}^m (A_i f^i(\xi) + B_i f^{i-1}(\xi)g(\xi))$$

เมื่อ
$$f(\xi) = \frac{1}{\cosh \xi + r}, \quad g(\xi) = \frac{\sinh \xi}{\cosh \xi + r}$$

โดยที่ A_i, B_i, r เป็นค่าคงที่ใดๆ

และใช้ Homogeneous balance method หาค่า ϕ ดังนั้นจึงเรียกวิธีนี้ว่า Repeated homogeneous balance method เนื่องจากมีการใช้ Homogeneous balance method สองครั้ง และจะเห็นได้ว่า Repeated homogeneous balance method ทำให้สามารถหาคำตอบในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยได้หลายแบบ ซึ่งจะสรุปขั้นตอนการหาคำตอบได้ดังนี้

ขั้นที่ 1 จากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอยู่ในรูป

$$P(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = 0 \quad (2-4)$$

พิจารณาคำตอบในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นในรูป

$$u(x, t) = u(\xi), \xi = kx + lt + d$$

เมื่อ k, l, d เป็นค่าคงที่ใดๆ

โดยที่มีความเร็วในการเคลื่อนตัวของคลื่นเป็น $\left| \frac{l}{k} \right|$

จากสมการ (2-4) แปลงให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ซึ่งอยู่ในรูป

$$Q(u, u', u'', \dots) = 0 \quad (2-5)$$

ขั้นที่ 2 ให้คำตอบของสมการ (2-5) อยู่ในรูป

$$u = \sum_{i=0}^n q_i \phi^i \quad (2-6)$$

โดยที่ q_i เป็นค่าคงที่ใดๆ

และ ϕ เป็นคำตอบของสมการรีกาคาตี

$$\phi' = a\phi^2 + c$$

ซึ่ง n มาจากการ balance ระหว่างกำลังของอนุพันธ์ที่มีอันดับสูงสุด กับกำลังสูงสุดของเทอม nonlinear ใน (2-5)

ขั้นที่ 3 หา q_i โดยการแทนค่า u และ ϕ' จากขั้นที่ 2 ในสมการ (2-5) และจัดสัมประสิทธิ์ของ ϕ^i ให้เป็นศูนย์ จากนั้นแก้ระบบสมการหาค่า q_i

ขั้นที่ 4 ให้คำตอบของสมการรีกาคาตีอยู่ในรูป

$$\phi = \sum_{i=0}^m b_i \tanh^i \xi$$

โดยที่ b_i เป็นค่าคงที่ใดๆ

$$\text{หรือ} \quad \phi = \sum_{i=0}^m (A_i f^i(\xi) + B_i f^{i-1}(\xi)g(\xi))$$

เมื่อ

$$f(\xi) = \frac{1}{\cosh \xi + r}, \quad g(\xi) = \frac{\sinh \xi}{\cosh \xi + r}$$

โดยที่ A_i, B_i, r เป็นค่าคงที่ใดๆ

ขั้นที่ 5 แทนค่า q_i และ ϕ จากขั้นตอนที่ 3 และ 4 ลงใน (2-6) จะได้ u ซึ่งเป็นคำตอบในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการ (2-4)

ตัวอย่างการหาคำตอบในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการ Burgers-KdV

$$u_t + uu_x - \alpha u_{xx} + \beta u_{xxx} = 0 \quad (2-7)$$

โดยใช้ Repeated homogeneous balance method ซึ่งหาโดย Zhao, Wang, Sun (2006)

พิจารณาคำตอบในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นในรูป

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = kx + lt + d \quad (2-8)$$

เมื่อ k, l, d เป็นค่าคงที่ใดๆ

ดังนั้นจากสมการที่ (2-7) จะได้

$$lu' + kuu' - \alpha k^2 u'' + \beta k^3 u''' = 0$$

อินทิเกรต จะได้

$$lu + \frac{k}{2} u^2 - \alpha k^2 u' + \beta k^3 u'' + D = 0 \quad (2-9)$$

เมื่อ D เป็นค่าคงที่ที่ได้จากการอินทิเกรต

ให้คำตอบของสมการที่ (2-9) อยู่ในรูป

$$u = \sum_{i=0}^n q_i \phi^i \quad (2-10)$$

โดยที่ q_i เป็นค่าคงที่ใดๆ

และ ϕ เป็นคำตอบของสมการรีกคาติ

$$\phi' = a\phi^2 + c \quad (2-11)$$

ให้ $n = 2$ เพื่อให้เลขยกกำลังของ ϕ ของอนุพันธ์อันดับสูงสุดซึ่งคือ u'' กับเทอมกำลังสูงสุดของ u ซึ่งคือ u^2 เท่ากัน

ดังนั้น

$$u = q_0 + q_1\phi + q_2\phi^2 \quad (2-12)$$

แทนในสมการ (2-9) ดังนั้น

$$\begin{aligned} lu + \frac{k}{2}u^2 - \alpha k^2 u' + \beta k^3 u'' + D \\ = l(q_0 + q_1\phi + q_2\phi^2) + \frac{k}{2}(q_0 + q_1\phi + q_2\phi^2)^2 \\ - \alpha k^2 (q_0 + q_1\phi + q_2\phi^2)' + \beta k^3 (q_0 + q_1\phi + q_2\phi^2)'' + D \\ = (6a^2 k^3 \beta q_2 + \frac{k}{2} q_2^2) \phi^4 + (2a^2 \beta k^3 q_1 - 2a\alpha k^2 q_2 + kq_1 q_2) \phi^3 \\ + (8ac\beta k^3 q_2 - a\alpha k^2 q_1 + kq_0 q_2 + \frac{k}{2} q_1^2 + lq_2) \phi^2 \\ + (2ac\beta k^3 q_1 - 2c\alpha k^2 q_2 + kq_0 q_1 + lq_1) \phi \\ + (2c^2 \beta k^3 q_2 - \alpha c q_1 k^2 + \frac{k}{2} q_0^2 + lq_0 + D) = 0 \end{aligned} \quad (2-13)$$

การที่ (2-13) จะเป็นจริงในทุกค่า ξ ของ $\phi(\xi)$ เมื่อสัมประสิทธิ์ของ ϕ^i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) เป็นศูนย์ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned} 6a^2 k^3 \beta q_2 + \frac{k}{2} q_2^2 &= 0 \\ 2a^2 \beta k^3 q_1 - 2a\alpha k^2 q_2 + kq_1 q_2 &= 0 \\ 8ac\beta k^3 q_2 - a\alpha k^2 q_1 + kq_0 q_2 + \frac{k}{2} q_1^2 + lq_2 &= 0 \\ 2ac\beta k^3 q_1 - 2c\alpha k^2 q_2 + kq_0 q_1 + lq_1 &= 0 \\ 2c^2 \beta k^3 q_2 - \alpha c q_1 k^2 + \frac{k}{2} q_0^2 + lq_0 + D &= 0 \end{aligned}$$

หาค่า q_0, q_1, q_2, l โดยใช้ MATLAB จะได้ว่า

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{1}{25k\beta} \left(k\alpha^2 - 200ack^3\beta^2 \pm \sqrt{k^2\alpha^4 + 1250D\beta^2k - 3400ack^4\alpha^2\beta^2 + 10000a^2c^2k^6\beta^4} \right) \\ q_1 &= \frac{12ak\alpha}{5}, \quad q_2 = -12a^2k^2\beta \end{aligned}$$

$$1 = \mp \frac{1}{25\beta} \sqrt{k^2\alpha^4 + 1250D\beta^2k - 3400ack^4\alpha^2\beta^2 + 10000a^2c^2k^6\beta^4}$$

จากสมการรีกคาตี (2-11) หา ϕ โดยใช้ Homogeneous balance method โดยให้คำตอบของสมการ (2-11) อยู่ในรูป

$$\phi = \sum_{i=0}^m b_i \tanh^i \xi$$

โดยที่ b_i เป็นค่าคงที่ใดๆ (2-14)

ให้ $m=1$ เพื่อให้ทำให้เลขยกกำลังของ $\tanh \xi$ ของอนุพันธ์อันดับสูงสุดซึ่งคือ ϕ' กับเทอมกำลังสูงสุดของ ϕ ซึ่งคือ ϕ^2 เท่ากัน
ดังนั้น

$$\phi = b_0 + b_1 \tanh \xi$$

แทนค่า ϕ ในสมการ (2-11)

จะได้

$$\phi = c \tanh \xi = -\frac{1}{a} \tanh \xi \quad (2-15)$$

เมื่อ $ac = -1$

แทนค่า q_0, q_1, q_2, ϕ ในสมการที่ (2-12)

ดังนั้นคำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการ (2-7) คือ

$$u = \frac{1}{25k\beta} \left(k\alpha^2 + 200k^3\beta^2 \pm \sqrt{k^2\alpha^4 + 1250kD\beta^2 + 3400k^4\alpha^2\beta^2 + 10000k^6\beta^4} \right) - \frac{12k\alpha}{5} \tanh \xi - 12k^2\beta \tanh^2 \xi$$

เมื่อ

$$\xi = kx \mp \frac{1}{25\beta} \sqrt{k^2\alpha^4 + 1250D\beta^2k + 3400k^4\alpha^2\beta^2 + 10000k^6\beta^4} t + d$$

ซึ่งเราสามารถให้คำตอบของสมการ (2-8) อยู่ในรูปอื่นๆได้อีก เช่น

$$\phi = \sum_{i=0}^m b_i \coth^i \xi$$

โดยที่ b_i เป็นค่าคงที่ใดๆ

หรือ
$$\phi = \sum_{i=0}^m (A_i f^i(\xi) + B_i f^{i-1}(\xi)g(\xi))$$

เมื่อ

$$f(\xi) = \frac{1}{\cosh \xi + r}, \quad g(\xi) = \frac{\sinh \xi}{\cosh \xi + r}$$

โดยที่ A_i, B_i, r เป็นค่าคงที่ใดๆ

ดังนั้นคำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการ (2-7) จึงอาจอยู่ในรูปแบบอื่นๆ ได้อีก จึงเป็นข้อดีของการใช้ Repeated homogeneous balance method เพราะทำให้ได้คำตอบในหลายรูปแบบ

เพื่อเป็นการตรวจสอบให้แน่ใจว่าคำตอบเชิงวิเคราะห์ที่หาได้เป็นคำตอบที่ถูกต้องสามารถทำได้หลายวิธี เช่นแทนคำตอบที่ได้ลงในสมการเริ่มต้นซึ่งในกรณีปัญหานี้ค่อนข้างยุ่งยากเพราะคำตอบที่ได้อยู่ในรูปสูตรที่ยาว ดังนั้นในงานวิจัยนี้จะตรวจสอบคำตอบเชิงวิเคราะห์ที่หาได้โดยใช้วิธีการเชิงตัวเลขซึ่งมีหลายวิธี ในที่นี้จะใช้ Finite difference method

2.2 วิธีการคำนวณเชิงตัวเลขแบบ Finite difference method

Finite difference method เป็นวิธีการเชิงตัวเลขที่ใช้ในการหาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ซึ่งมีหลักการดังนี้

เมื่อฟังก์ชัน U และอนุพันธ์ของฟังก์ชัน U เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วงจำกัด จากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของ $U(x+h)$ รอบจุด x จะได้ว่า

$$U(x+h) = U(x) + hU'(x) + \frac{1}{2}h^2U''(x) + \frac{1}{6}h^3U'''(x) + \dots \quad (2-16)$$

และจากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของ $U(x-h)$ รอบจุด x จะได้ว่า

$$U(x-h) = U(x) - hU'(x) + \frac{1}{2}h^2U''(x) - \frac{1}{6}h^3U'''(x) + \dots \quad (2-17)$$

นำสมการ (2-16)+(2-17) จะได้ว่า

$$U(x+h) + U(x-h) = 2U(x) + h^2U''(x) + O(h^4) \quad (2-18)$$

เมื่อ $O(h^4)$ แทนตั้งแต่เทอม h^4 เป็นต้นไป

$$U''(x) = \left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_{x=x} \simeq \frac{1}{h^2} (U(x+h) - 2U(x) + U(x-h)) \quad (2-19)$$

ซึ่งมีความคลาดเคลื่อน $O(h^2)$

นำสมการ (2-16)-(2-17) และตัดเทอม h^3 เป็นต้นไป จะได้

$$U'(x) = \left(\frac{dU}{dx} \right)_{x=x} \simeq \frac{1}{2h} (U(x+h) - U(x-h)) \quad (2-20)$$

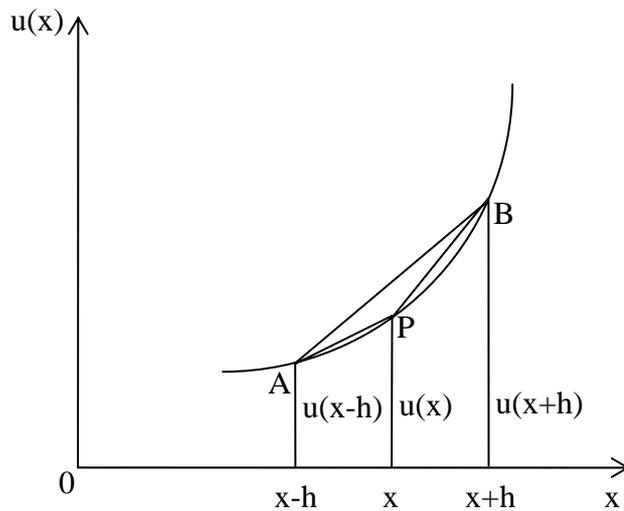
ซึ่งมีความคลาดเคลื่อน $O(h^2)$

จากสมการ (2-20) เป็นค่าประมาณของความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด P ซึ่งประมาณด้วยคอร์ด AB เรียกว่า Central-difference และเราสามารถประมาณค่าของความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด P ด้วยความชันของคอร์ด PB เรียกว่า Forward-difference ดังนี้

$$U'(x) \simeq \frac{1}{h} (U(x+h) - U(x)) \quad (2-21)$$

หรือประมาณค่าของความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด P ด้วยความชันของคอร์ด AP เรียกว่า backward-difference ดังนี้

$$U'(x) \approx \frac{1}{h}(U(x) - U(x-h)) \quad (2-22)$$

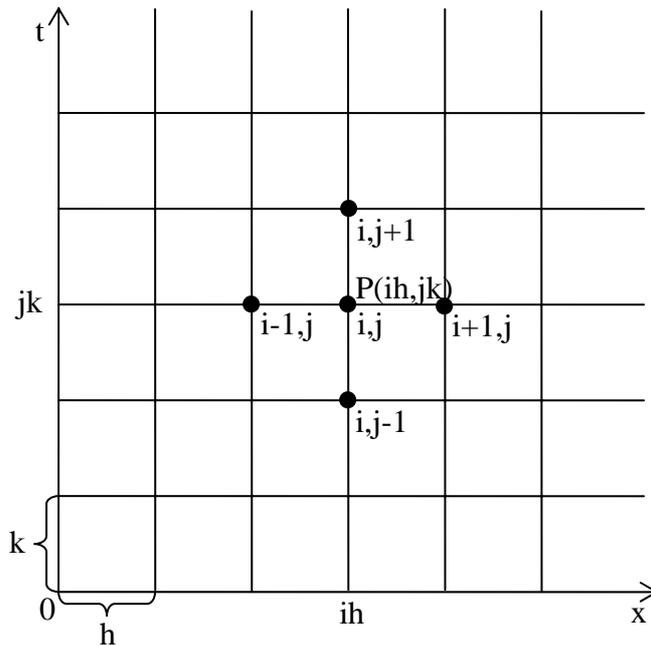


ภาพที่ 2-1 แสดงภาพประกอบหลักการ Finite difference method

จากสมการ (2-16) และ (2-17) ทำให้ได้สมการ (2-21) และ (2-22) โดยมองข้ามตั้งแต่เทอม h^2 เป็นต้นไป ดังนั้นจะได้ว่า Forward-difference และ Backward-difference มีความคลาดเคลื่อน $O(h)$

สัญลักษณ์สำหรับฟังก์ชันที่มีหลายตัวแปร

ให้ U เป็นฟังก์ชันที่มีตัวแปรอิสระเป็น x และ t และแบ่งระนาบ $x-t$ เป็นช่องสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีขนาดเท่าๆกัน โดยที่ $\Delta x = h$, $\Delta t = k$ ซึ่งกำหนดให้ $x_i = ih$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ และ $y_j = jk$, $j = 0, 1, 2, \dots$ ดังแสดงในภาพที่ 2-2



ภาพที่ 2-2 แสดงภาพประกอบการแบ่งระนาบ x-t ของ Finite difference method

ให้ค่าของ U ในแต่ละจุด $P(ih, jk)$ แทนด้วย

$$U_p = U(ih, jk) = U_{i,j}$$

ดังนั้นจากสมการ (2-19) จะได้

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_p = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{i,j} \approx \frac{U((i+1)h, jk) - 2U(ih, jk) + U((i-1)h, jk)}{h^2}$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \approx \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} \quad (2-23)$$

ซึ่งมีความคลาดเคลื่อน $O(h^2)$

ในทำนองเดียวกัน

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_{i,j} \approx \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{k^2} \quad (2-24)$$

ซึ่งมีความคลาดเคลื่อน $O(k^2)$

ดังนั้นสัญลักษณ์ของการประมาณค่าแบบ Forward-difference สำหรับ $\frac{\partial U}{\partial t}$ ที่จุด P คือ

$$\frac{\partial U}{\partial t} \approx \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} \quad (2-25)$$

ซึ่งมีความคลาดเคลื่อน $O(k)$

เงื่อนไขของการลู่เข้าของคำตอบจากการใช้วิธีการ **finite difference** เพื่อประมาณค่าคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบเชิงเส้น

ให้ U เป็นคำตอบเชิงวิเคราะห์ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบเชิงเส้น

u เป็นคำตอบเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบเชิงเส้นที่ได้จากการใช้
Finite difference method

พิจารณาสมการ

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, t > 0 \quad (2-26)$$

โดยทราบค่า U สำหรับ $0 \leq x \leq 1$ เมื่อ $t=0$, $x=0$ และ $x=1$ เมื่อ $t>0$

จาก Finite difference method ดังนั้นจากสมการ (2-26) จะได้

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} \quad (2-27)$$

ให้ e แทนค่าแตกต่างระหว่าง U กับ u

ดังนั้น

$$e = U - u$$

เพราะฉะนั้น

$$u_{i,j} = U_{i,j} - e_{i,j}, \quad u_{i,j+1} = U_{i,j+1} - e_{i,j+1}$$

ดังนั้นจากสมการ (2-27) จะได้

$$e_{i,j+1} = re_{i-1,j} + (1-2r)e_{i,j} + re_{i+1,j} + U_{i,j+1} - U_{i,j} \\ + r(2U_{i,j} - U_{i-1,j} - U_{i+1,j}) \quad (2-28)$$

เมื่อ

$$r = \frac{k}{h^2}$$

จากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ จะได้ว่า

$$U_{i+1,j} = U(x_i + h, t_j) = U_{i,j} + h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i,j} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_i + \theta_1 h, t_j)$$

$$U_{i-1,j} = U(x_i - h, t_j) = U_{i,j} - h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i,j} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_i - \theta_2 h, t_j)$$

$$U_{i,j+1} = U(x_i, t_j + k) = U_{i,j} + k \frac{\partial U}{\partial t}(x_i, t_j + \theta_3 k)$$

เมื่อ $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$ และ $0 < \theta_3 < 1$

แทนค่าในสมการ (2-28) จะได้

$$e_{i,j+1} = re_{i-1,j} + (1-2r)e_{i,j} + re_{i+1,j} + k \left(\frac{\partial U(x_i, t_j + \theta_3 k)}{\partial t} - \frac{\partial^2 U(x_i + \theta_4 h, t_j)}{\partial x^2} \right) \quad (2-29)$$

เมื่อ $-1 < \theta_4 < 1$

ให้ E_j เป็นค่าที่มากที่สุดของ $|e_{i,j}|$

และ M เป็นค่าที่มากที่สุดของ $\left(\frac{\partial U(x_i, t_j + \theta_3 k)}{\partial t} - \frac{\partial^2 U(x_i + \theta_4 h, t_j)}{\partial x^2} \right)$

เมื่อ $r \leq \frac{1}{2}$ จะได้ว่าสัมประสิทธิ์ของ e ในสมการ (2-28) เป็นบวกหรือศูนย์ดังนั้น

$$\begin{aligned} |e_{i,j+1}| &\leq r|e_{i-1,j}| + (1-2r)|e_{i,j}| + r|e_{i+1,j}| + kM \\ &\leq rE_j + (1-2r)E_j + rE_j + kM \\ &= E_j + kM \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$E_{j+1} \leq E_j + kM \leq (E_{j-1} + kM) + kM = E_{j-1} + 2kM$$

ดังนั้น

$$E_j \leq E_0 + jkM = tM$$

เพราะว่าค่าเริ่มต้นของ u และ U มีค่าเท่ากันดังนั้น $E_0 = 0$ เมื่อ h เข้าใกล้ศูนย์, $k = rh^2$ เข้าใกล้ศูนย์ดังนั้นจะได้ M คือ

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{i,j}$$

เมื่อ U เป็นคำตอบเชิงวิเคราะห์ของสมการ (2-26) ดังนั้น $E_{i,j}$ เป็นศูนย์

จาก $|U_{i,j} - u_{i,j}| \leq E_j$ ดังนั้น u จะลู่เข้าหา U เมื่อ h เข้าใกล้ศูนย์ สำหรับ $0 < r \leq \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น u จะลู่เข้าหา U เมื่อ h เข้าใกล้ศูนย์ สำหรับ $0 < \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$

ตัวอย่าง การใช้ Finite difference method หาคำตอบของสมการ

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (2-30)$$

เมื่อ (1) $U = 2x$, $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

(2) $U = 2(1-x)$, $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} = \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2}$$

$$U_{i,j+1} = \frac{k}{h^2} (U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}) + U_{i,j} \quad (2-31)$$

โดยที่ค่าขอบ คือ $U=0$ เมื่อ $x=0$ และ $x=1$ สำหรับ $t>0$

และค่าเริ่มต้น คือ $U=2x$ เมื่อ $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ และ $U = 2(1-x)$ เมื่อ $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ สำหรับ $t=0$

ให้ $h = \frac{1}{10}$, $k = \frac{1}{1000}$

จะได้ $\frac{k}{h^2} = \frac{1}{10}$ ซึ่งค่า $\frac{k}{h^2} < \frac{1}{2}$

ดังนั้นจากสมการ (2-31) จะได้ว่า

$$U_{i,j+1} = \frac{1}{10} (U_{i-1,j} + 8U_{i,j} + U_{i+1,j})$$

ดังนั้นจะได้ค่า U ดังตาราง (2-1)

ตารางที่ 2-1 แสดงค่า U จากการหาค่าตอบเชิงตัวเลขของสมการ $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ ที่ $t = 0-0.02$

	i=0 x=0	i=1 x=0.1	i=2 x=0.2	i=3 x=0.3	i=4 x=0.4	i=5 x=0.5	i=6 x=0.6
j=0,t=0.000	0	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	1.0000	0.8000
j=1,t=0.001	0	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	0.9600	0.8000
j=2,t=0.002	0	0.2000	0.4000	0.6000	0.7960	0.9280	0.7960
j=3,t=0.003	0	0.2000	0.4000	0.5996	0.7896	0.9016	0.7896
j=4,t=0.004	0	0.2000	0.4000	0.5986	0.7818	0.8792	0.7818
j=5,t=0.005	0	0.2000	0.3999	0.5971	0.7732	0.8597	0.7732
⋮							
j=10,t=0.01	0	0.1996	0.3968	0.5822	0.7281	0.7867	0.7281
⋮							
j=20,t=0.02	0	0.1938	0.3781	0.5373	0.6486	0.6891	0.6486

บทที่ 3

วิธีการดำเนินการวิจัย

ในบทนี้เราจะทำการหาคำตอบในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการความร้อนซึ่งมีแหล่งกำเนิดความร้อนแบบไม่เชิงเส้น ที่อยู่ในรูป

$$c_0 + c_1u + c_2u^2 + c_3u^3$$

ดังนั้นสมการที่สนใจคือ

$$u_t - u_{xx} - c_0 - c_1u - c_2u^2 - c_3u^3 = 0$$

โดยที่มีสมการความร้อนหลายสมการที่อยู่ในรูปนี้ เช่น สมการ Zel'dovich-Frank-Kamenestsky , สมการ Burger-Huxley และสมการ Fitzhugh-Nagumo เป็นต้น

3.1 การหาคำตอบในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นโดยใช้ Repeated homogeneous balance method

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาคำตอบในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการความร้อนซึ่งมีแหล่งกำเนิดความร้อนซึ่งมีแหล่งกำเนิดความร้อนแบบไม่เชิงเส้นซึ่งอยู่ในรูป

$$u_t - u_{xx} - c_0 - c_1u - c_2u^2 - c_3u^3 = 0 \quad (3-1)$$

โดยใช้ Repeated homogeneous balance method ซึ่งวิธีการดังกล่าวได้แสดงไว้แล้วในหัวข้อ

2.1 ดังนั้นจากสมการ (3-1)

พิจารณาคำตอบในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นในรูป

$$u(x,t) = u(\xi) \quad \text{โดย} \quad \xi = kx + lt + d \quad (3-2)$$

เมื่อ k, l, d เป็นค่าคงที่ใดๆ

ดังนั้นจากสมการที่ (3-1) จะได้

$$lu' - k^2u'' - c_0 - c_1u - c_2u^2 - c_3u^3 = 0 \quad (3-3)$$

จากตัวอย่างในหัวข้อ 2.1 มีการอินทิเกรตสมการหนึ่งครั้ง แต่สำหรับงานวิจัยนี้จะไม่มีการอินทิเกรตสมการ (3-3) เนื่องจากถ้าทำการอินทิเกรตสมการ (3-3) แล้วจะไม่สามารถทำการ balance ระหว่างกำลังของอนุพันธ์ที่มีอันดับสูงสุด กับกำลังสูงสุดของเทอม nonlinear ตามขั้นตอนในหัวข้อ 2.1 ได้

จากนั้นให้คำตอบของสมการที่ (3-3) อยู่ในรูป

$$u = \sum_{i=0}^n q_i \phi^i \quad (3-4)$$

โดยที่ q_i เป็นค่าคงที่ใดๆ และ ϕ เป็นคำตอบของสมการรีกาคาดี

$$\phi' = a\phi^2 + c \quad (3-5)$$

ให้ $n = 1$ เพื่อให้เลขยกกำลังของ ϕ ของอนุพันธ์อันดับสูงสุดซึ่งคือ u'' กับเทอมกำลังสูงสุดของ u ซึ่งคือ u^3 เท่ากัน

ดังนั้น

$$u = q_0 + q_1\phi \quad (3-6)$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} u' &= q_1\phi' = q_1(a\phi^2 + c) = aq_1\phi^2 + cq_1 \\ u'' &= 2aq_1\phi\phi' = 2aq_1\phi(a\phi^2 + c) = 2a^2q_1\phi^3 + 2acq_1\phi \\ u^2 &= q_0^2 + 2q_0q_1\phi + q_1^2\phi^2 \\ u^3 &= q_0^3 + 3q_0^2q_1\phi + 3q_0q_1^2\phi^2 + q_1^3\phi^3 \end{aligned}$$

แทนในสมการ (3-3)

ดังนั้น

$$\begin{aligned} lu' - k^2u'' - c_0 - c_1u - c_2u^2 - c_3u^3 &= l(aq_1\phi^2 + cq_1) - k^2(2a^2q_1\phi^3 + 2acq_1\phi) - c_0 \\ &\quad - c_1(q_0 + q_1\phi) - c_2(q_0^2 + 2q_0q_1\phi + q_1^2\phi^2) \\ &\quad - c_3(q_0^3 + 3q_0^2q_1\phi + 3q_0q_1^2\phi^2 + q_1^3\phi^3) \\ &= alq_1\phi^2 + clq_1 - 2a^2k^2q_1\phi^3 - 2ack^2q_1\phi - c_0 \\ &\quad - c_1q_0 - c_1q_1\phi - c_2q_0^2 - 2c_2q_0q_1\phi - c_2q_1^2\phi^2 \\ &\quad - c_3q_0^3 - 3c_3q_0^2q_1\phi - 3c_3q_0q_1^2\phi^2 - c_3q_1^3\phi^3 \\ &= (-2a^2k^2q_1 - c_3q_1^3)\phi^3 + (alq_1 - c_2q_1^2 - 3c_3q_0q_1 \\ &\quad + (-2ack^2q_1 - c_1q_1 - 2c_2q_0q_1 - 3c_3q_0^2q_1)\phi \\ &\quad + (clq_1 - c_0 - c_1q_0 - c_2q_0^2 - c_3q_0^3) = 0 \quad (3-7) \end{aligned}$$

การที่ (3-7) จะเป็นจริงในทุกค่า ξ ของ $\phi(\xi)$ เมื่อสัมประสิทธิ์ของ ϕ^i ($i = 0, 1, 2, 3$) เป็นศูนย์ ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned} -2a^2k^2q_1 - c_3q_1^3 &= 0 \\ alq_1 - c_2q_1^2 - 3c_3q_0q_1 &= 0 \\ -2ack^2q_1 - c_1q_1 - 2c_2q_0q_1 - 3c_3q_0^2q_1 &= 0 \\ clq_1 - c_0 - c_1q_0 - c_2q_0^2 - c_3q_0^3 &= 0 \end{aligned}$$

หาค่า q_0, q_1, k, l โดยใช้ MATLAB

และจากสมการรีกาคาดี (3-5) หาค่า ϕ โดยให้คำตอบของสมการอยู่ในรูป

$$\phi = \sum_{i=0}^m b_i \tanh^i \xi$$

โดยที่ b_i เป็นค่าคงที่ใดๆ

ให้ $m=1$ เพื่อให้เลขยกกำลังของ $\tanh \xi$ ของอนุพันธ์อันดับสูงสุดซึ่งคือ ϕ' กับเทอมกำลัง

สูงสุดของ ϕ ซึ่งคือ ϕ^2 เท่ากัน

ดังนั้น

$$\phi = b_0 + b_1 \tanh \xi$$

จะได้ว่า

$$\phi' = b_1 \operatorname{sech}^2 \xi = b_1(1 - \tanh^2 \xi)$$

$$\phi^2 = b_0^2 + 2b_0b_1 \tanh \xi + b_1^2 \tanh^2 \xi$$

แทนค่าในสมการที่ (3-5)

$$\begin{aligned} \phi' - a\phi^2 - c &= b_1(1 - \tanh^2 \xi) - ab_0^2 - 2ab_0b_1 \tanh \xi - ab_1^2 \tanh^2 \xi - c \\ &= (-b_1 - ab_1^2) \tanh^2 \xi + (-2ab_0b_1) \tanh \xi \\ &\quad + (b_1 - ab_0^2 - c) = 0 \end{aligned} \quad (3-8)$$

การที่ (3-8) จะเป็นจริงในทุกค่า ξ ของ $\phi(\xi)$ เมื่อสัมประสิทธิ์ของ $\tanh^i \xi$ ($i = 0,1,2$) เป็นศูนย์ดังนั้นจะได้

$$-b_1 - ab_1^2 = 0$$

$$-2ab_0b_1 = 0$$

$$b_1 - ab_0^2 - c = 0$$

หาค่า b_0, b_1 โดยใช้ MATLAB จะได้

$$b_0 = 0$$

$$b_1 = c = -\frac{1}{a}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\phi = c \tanh \xi = -\frac{1}{a} \tanh \xi$$

เมื่อ $ac = -1$

จากนั้นแทนค่า q_0, q_1, ϕ ในสมการที่ (3-6)

จะได้ u ซึ่งเป็นคำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่น ดังจะแสดงไว้ในภาคผนวก ก

นอกจากนี้ยังสามารถกำหนดให้คำตอบของสมการ (3-5) อยู่ในรูปอื่นๆได้อีกเช่น

ให้คำตอบของสมการ (3-5) อยู่ในรูป

$$\phi = \sum_{i=0}^m (A_i f^i(\xi) + B_i f^{i-1}(\xi) g(\xi))$$

เมื่อ

$$f(\xi) = \frac{1}{\cosh \xi + r}, \quad g(\xi) = \frac{\sinh \xi}{\cosh \xi + r}$$

โดยที่ A_i, B_i, r เป็นค่าคงที่ใดๆ

และ

$$\begin{aligned} f'(\xi) &= -f(\xi)g(\xi) \\ g'(\xi) &= 1 - g^2(\xi) - rf(\xi) \\ g^2(\xi) &= 1 - 2rf(\xi) + (r^2 - 1)f^2(\xi) \end{aligned}$$

ให้ $m=1$ เพื่อให้เลขยกกำลังของ $f(\xi)g(\xi)$ ของอนุพันธ์อันดับสูงสุดซึ่งคือ ϕ' กับเทอมกำลังสูงสุดของ ϕ ซึ่งคือ ϕ^2 เท่ากัน

ดังนั้น

$$\phi = A_0 + A_1 f(\xi) + B_1 g(\xi)$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \phi' &= (A_0 + A_1 f(\xi) + B_1 g(\xi))' \\ &= A_1 f'(\xi) + B_1 g'(\xi) \\ &= A_1 (-f(\xi)g(\xi)) + B_1 (1 - g^2(\xi) - rf(\xi)) \\ &= -A_1 f(\xi)g(\xi) + B_1 - B_1 g^2(\xi) - B_1 rf(\xi) \\ &= -A_1 f(\xi)g(\xi) + B_1 - B_1 (1 - 2rf(\xi) + (r^2 - 1)f^2(\xi)) - B_1 rf(\xi) \\ &= -A_1 f(\xi)g(\xi) + B_1 - B_1 + 2B_1 rf(\xi) - (r^2 - 1)B_1 f^2(\xi) \\ &\quad - B_1 rf(\xi) \\ &= -A_1 f(\xi)g(\xi) + rB_1 f(\xi) - (r^2 - 1)B_1 f^2(\xi) \\ \phi^2 &= (A_0 + A_1 f(\xi) + B_1 g(\xi))^2 \\ &= A_0^2 + A_1^2 f^2(\xi) + B_1^2 g^2(\xi) + 2A_0 A_1 f(\xi) + 2A_0 B_1 g(\xi) \\ &\quad + 2A_1 B_1 f(\xi)g(\xi) \\ &= A_0^2 + A_1^2 f^2(\xi) + B_1^2 (1 - 2rf(\xi) + (r^2 - 1)f^2(\xi)) + 2A_0 A_1 f(\xi) \\ &\quad + 2A_0 B_1 g(\xi) + 2A_1 B_1 f(\xi)g(\xi) \\ &= A_0^2 + A_1^2 f^2(\xi) + B_1^2 - 2rB_1^2 f(\xi) + (r^2 - 1)B_1^2 f^2(\xi) \\ &\quad + 2A_0 A_1 f(\xi) + 2A_0 B_1 g(\xi) + 2A_1 B_1 f(\xi)g(\xi) \end{aligned}$$

แทนค่าในสมการที่ (3-5)

$$\begin{aligned} \phi' - a\phi^2 - c &= -A_1 f(\xi)g(\xi) + B_1 - B_1 + 2B_1 rf(\xi) - (r^2 - 1)B_1 f^2(\xi) \\ &\quad - B_1 rf(\xi) - a(A_0^2 + A_1^2 f^2(\xi) + B_1^2 - 2rB_1^2 f(\xi) \\ &\quad + (r^2 - 1)B_1^2 f^2(\xi) + 2A_0 A_1 f(\xi) + 2A_0 B_1 g(\xi) \\ &\quad + 2A_1 B_1 f(\xi)g(\xi)) - c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -A_1 f(\xi)g(\xi) + B_1 - B_1 + 2B_1 r f(\xi) - (r^2 - 1)B_1 f^2(\xi) \\
&\quad - B_1 r f(\xi) - aA_0^2 - aA_1^2 f^2(\xi) - aB_1^2 + 2arB_1^2 f(\xi) \\
&\quad - a(r^2 - 1)B_1^2 f^2(\xi) - 2aA_0 A_1 f(\xi) - 2aA_0 B_1 g(\xi) \\
&\quad - 2aA_1 B_1 f(\xi)g(\xi) - c \\
&= A_1 f(\xi)g(\xi) - 2B_1 r f(\xi) + (r^2 - 1)B_1 f^2(\xi) + B_1 r f(\xi) \\
&\quad + aA_0^2 + aA_1^2 f^2(\xi) + aB_1^2 - 2arB_1^2 f(\xi) + a(r^2 - 1)B_1^2 f^2(\xi) \\
&\quad + 2aA_0 A_1 f(\xi) + 2aA_0 B_1 g(\xi) + 2aA_1 B_1 f(\xi)g(\xi) + c \\
&= (aA_1^2 + (r^2 - 1)B_1 + a(r^2 - 1)B_1^2) f^2(\xi) \\
&\quad + (A_1 + 2aA_1 B_1) f(\xi)g(\xi) \\
&\quad + (-2B_1 r + B_1 r - 2arB_1^2 + 2aA_0 A_1) f(\xi) \\
&\quad + (2aA_0 B_1) g(\xi) + aA_0^2 + aB_1^2 + c = 0 \tag{3-9}
\end{aligned}$$

การที่ (3-9) จะเป็นจริงในทุกค่า ξ ของ $\phi(\xi)$ เมื่อสัมประสิทธิ์ของ $f^i(\xi)g^j(\xi)$

($i = 0,1,2; j = 0,1$) เป็นศูนย์ดังนั้นก็จะได้

$$aA_1^2 + (r^2 - 1)B_1 + a(r^2 - 1)B_1^2 = 0$$

$$A_1 + 2aA_1 B_1 = 0$$

$$-2B_1 r + B_1 r - 2arB_1^2 + 2aA_0 A_1 = 0$$

$$2aA_0 B_1 = 0$$

$$aA_0^2 + aB_1^2 + c = 0$$

หาค่า A_0, A_1, B_1 โดยใช้ MATLAB จะได้

$$A_0 = 0$$

$$A_1 = \pm \sqrt{\frac{r^2 - 1}{4a^2}}$$

$$B_1 = -\frac{1}{2a}$$

$$ac = -\frac{1}{4}$$

$$\text{ดังนั้น } \phi = \pm \sqrt{\frac{r^2 - 1}{4a^2}} \frac{1}{\cosh \xi + r} - \frac{1}{2a} \frac{\sinh \xi}{\cosh \xi + r} = \frac{1 \pm \sqrt{r^2 - 1} - \sinh \xi}{2a \cosh \xi + r}$$

แทนค่า q_0, q_1, ϕ ในสมการที่ (3-6)

จะได้ u ซึ่งเป็นคำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นซึ่งจะแสดงไว้ในภาคผนวก ข

3.1.1 การทดสอบคำตอบเชิงวิเคราะห์ที่หาได้

ในที่นี้จะทดสอบคำตอบเชิงวิเคราะห์ที่หาได้จากการใช้ Repeated homogeneous balance method กับสมการ Zel'dovich-Frank-Kamenestsky มีรูปสมการเป็น

$$u_t - u_{xx} - u^2 + u^3 = 0$$

ดังนั้นจาก (3-1) แสดงว่าค่า $c_0 = 0$, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = -1$

แทนค่า c_0, c_1, c_2, c_3 ในคำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นซึ่งแสดงไว้ใน

ภาคผนวก ก ดังนั้นจะได้คำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการ

Zel'dovich-Frank-Kamenestsky คือ

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} + \frac{\tanh(\xi_1)}{2} \\ u_2 &= \frac{1}{2} - \frac{\tanh(\xi_2)}{2} \\ u_3 &= \frac{1}{2} + \frac{\tanh(\xi_3)}{2} \\ u_4 &= \frac{1}{2} - \frac{\tanh(\xi_4)}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3-10)$$

โดยที่

$$\xi_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{4}t + d$$

$$\xi_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}x - \frac{1}{4}t + d$$

$$\xi_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{4}t + d$$

$$\xi_4 = \frac{1}{2\sqrt{2}}x - \frac{1}{4}t + d$$

และเมื่อแทนค่า c_0, c_1, c_2, c_3 ในคำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นซึ่งแสดงไว้

ในภาคผนวก ข จะได้คำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการ Zel'dovich-

Frank-Kamenestsky คือ

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - 1} - \sinh(\xi_1)}{2(\cosh(\xi_1) + r)} \\ u_2 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2 - 1} - \sinh(\xi_2)}{2(\cosh(\xi_2) + r)} \\ u_3 &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - 1} - \sinh(\xi_3)}{2(\cosh(\xi_3) + r)} \\ u_4 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2 - 1} - \sinh(\xi_4)}{2(\cosh(\xi_4) + r)} \end{aligned} \right\} \quad (3-11)$$

โดยที่

$$\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}t + d$$

$$\xi_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{2}t + d$$

$$\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}t + d$$

$$\xi_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{2}t + d$$

และสามารถหาความเร็วของสมการข้างต้น ได้ดังนี้

จากบทที่ 2 ความเร็วในการเคลื่อนตัวของคลื่นเท่ากับ $\left| \frac{1}{k} \right|$

แทนค่า c_0, c_1, c_2, c_3 ใน 1, k ซึ่งอยู่ในภาคผนวก ก

ดังนั้นจะได้ว่าสมการข้างต้นมีความเร็วในการเคลื่อนตัวของคลื่นเป็น $\frac{\sqrt{2}}{2}$

ซึ่งสมการ Zel'dovich-Frank-Kamenetsky มีการหาคำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นไว้แล้ว โดยกล่าวไว้ในงานวิจัยของ Giuggioli, Kalay and Kenkre (2006) มีคำตอบเป็น

$$u(\xi) = \frac{1}{1 + e^{\xi\sqrt{\frac{1}{2}}}} \quad (3-12)$$

เมื่อ

$$\xi = x - \sqrt{\frac{1}{2}}t$$

และมีความเร็วในการเคลื่อนตัวของคลื่นเป็น $\frac{\sqrt{2}}{2}$

โดยจะนำผลของคำตอบเชิงวิเคราะห์นี้ มาเปรียบเทียบกับผลของคำตอบเชิงวิเคราะห์จากการใช้ Repeated homogeneous balance method เพื่อแสดงความถูกต้องของคำตอบเชิงวิเคราะห์ที่ได้จากการใช้ Repeated homogeneous balance method โดยจะแสดงผลการเปรียบเทียบในบทที่ 4

จากนั้นทำการทดสอบคำตอบเชิงวิเคราะห์ที่หาได้กับสมการที่ยังไม่ทราบคำตอบเชิงวิเคราะห์ ดังนั้นในการทดสอบนี้จะใช้คำตอบเชิงตัวเลขเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบเชิงวิเคราะห์ที่ได้ ซึ่งจะแสดงการหาคำตอบเชิงตัวเลขในหัวข้อถัดไปและแสดงผลการเปรียบเทียบในบทที่ 4

โดยจะทดสอบคำตอบเชิงวิเคราะห์ที่ได้ กับสมการที่อยู่ในรูป

$$u_t - u_{xx} - 1 - u + u^2 + u^3 = 0$$

ซึ่งกรณีนี้ไม่ทราบคำตอบเชิงวิเคราะห์ว่าอยู่ในแบบใด

ดังนั้นจาก (3-1) แสดงว่าค่า $c_0 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = -1$

แทนค่า c_0, c_1, c_2, c_3 ในคำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นซึ่งแสดงไว้ในภาคผนวก ก ดังนั้นจะได้คำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการดังกล่าวคือ

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \tanh(\xi_1) \\ u_2 &= \tanh(\xi_2) \\ u_3 &= -\tanh(\xi_3) \\ u_4 &= -\tanh(\xi_4) \end{aligned} \right\} \quad (3-13)$$

โดยที่

$$\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + t + d$$

$$\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}x + t + d$$

$$\xi_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x - t + d$$

$$\xi_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}x - t + d$$

แทนค่า c_0, c_1, c_2, c_3 ใน 1, k ซึ่งอยู่ในภาคผนวก ก

ดังนั้นจะได้ว่าสมการข้างต้นมีความเร็วในการเคลื่อนตัวของคลื่นเป็น $\sqrt{2}$

และเมื่อแทนค่า c_0, c_1, c_2, c_3 ในคำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นซึ่งแสดงไว้ในภาคผนวก ข จะได้คำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการดังกล่าวคือ

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -\frac{\sqrt{r^2 - 1} - \sinh(\xi_1)}{\cosh(\xi_1) + r} \\ u_2 &= -\frac{\sqrt{r^2 - 1} - \sinh(\xi_2)}{\cosh(\xi_2) + r} \\ u_3 &= \frac{\sqrt{r^2 - 1} - \sinh(\xi_3)}{\cosh(\xi_3) + r} \\ u_4 &= \frac{\sqrt{r^2 - 1} - \sinh(\xi_4)}{\cosh(\xi_4) + r} \end{aligned} \right\} \quad (3-14)$$

โดยที่

$$\xi_1 = -\sqrt{2}x + 2t + d$$

$$\xi_2 = \sqrt{2}x + 2t + d$$

$$\xi_3 = -\sqrt{2}x - 2t + d$$

$$\xi_4 = \sqrt{2}x - 2t + d$$

แทนค่า c_0, c_1, c_2, c_3 ใน l, k ซึ่งอยู่ในภาคผนวก ก

ดังนั้นจะได้ว่าสมการข้างต้นมีความเร็วในการเคลื่อนตัวของคลื่นเป็น $\sqrt{2}$

ซึ่งจะแสดงกราฟของคำตอบไว้ในบทที่ 4

3.2 การหาคำตอบในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นโดยวิธีการเชิงตัวเลข (Finite difference method)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาคำตอบเชิงตัวเลขในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการความร้อนซึ่งมีแหล่งกำเนิดความร้อนแบบไม่เชิงเส้นโดยใช้ Finite difference method ซึ่งเป็นวิธีการที่ใช้ในการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย เพื่อนำคำตอบที่ได้จากวิธีการนี้มาเปรียบเทียบกับ การหาคำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นจากการใช้ Repeated homogeneous balance method โดยในที่นี้จะใช้ Forward-difference ซึ่งมีสูตรดังนี้

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

ดังนั้นจากสมการความร้อนซึ่งมีแหล่งกำเนิดความร้อนแบบไม่เชิงเส้นซึ่งอยู่ในรูป

$$u_t - u_{xx} - c_0 - c_1 u - c_2 u^2 - c_3 u^3 = 0 \quad (3-15)$$

จะได้ว่า

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} - \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} - c_0 - c_1 u_{i,j} - c_2 u_{i,j}^2 - c_3 u_{i,j}^3 = 0$$

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + c_0 + c_1 u_{i,j} + c_2 u_{i,j}^2 + c_3 u_{i,j}^3$$

$$u_{i,j+1} - u_{i,j} = \frac{k}{h^2} (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + kc_0 + kc_1 u_{i,j} + kc_2 u_{i,j}^2 + kc_3 u_{i,j}^3$$

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \frac{k}{h^2} (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + kc_0 + kc_1 u_{i,j} + kc_2 u_{i,j}^2 + kc_3 u_{i,j}^3 \quad (3-16)$$

เนื่องจากไม่ได้มีการวิเคราะห์เงื่อนไขของการลู่เข้าของคำตอบจากการใช้ Finite difference method เพื่อประมาณค่าคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น แต่จากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบเชิงเส้นมีเงื่อนไขของการลู่เข้าของคำตอบคือ $0 < \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ ดังนั้นจึงเลือก h, k ที่

$$\text{ทำให้ค่า } \frac{k}{h^2} \ll \frac{1}{2}$$

ซึ่งจะใช้วิธีการนี้ในการหาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ

$$u_t - u_{xx} - u^2 + u^3 = 0$$

จาก (3-16) แสดงว่า $c_0 = 0$, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = -1$

จะได้ว่า

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \frac{k}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + ku_{i,j}^2 - ku_{i,j}^3$$

และสมการ

$$u_t - u_{xx} - 1 - u + u^2 + u^3 = 0$$

จาก (3-16) แสดงว่า $c_0 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = -1$

จะได้ว่า

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \frac{k}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + k + ku_{i,j} - ku_{i,j}^2 - ku_{i,j}^3$$

จากนั้นเปรียบเทียบผลที่ได้กับคำตอบเชิงวิเคราะห์ ซึ่งจะแสดงผลการเปรียบเทียบไว้ในบทที่ 4

บทที่ 4

ผลการวิจัย

ในบทนี้จะกล่าวถึงการแสดงผลของคำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นและคำตอบเชิงตัวเลขในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการความร้อนซึ่งมีแหล่งกำเนิดความร้อนแบบไม่เชิงเส้น โดยจะแสดงผลในรูปกราฟของคำตอบ

4.1 คำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการความร้อนซึ่งมีแหล่งกำเนิดความร้อนแบบไม่เชิงเส้น

ในหัวข้อนี้ได้แสดงผลของคำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการความร้อนซึ่งมีแหล่งกำเนิดความร้อนแบบไม่เชิงเส้น โดยใช้ Repeated homogeneous balance method ซึ่งได้แสดงการหาคำตอบไว้ในหัวข้อ 3.1

4.1.1 คำตอบเชิงวิเคราะห์ของสมการ Zel'dovich-Frank-Kamenetsky

$$u_t - u_{xx} - u^2 + u^3 = 0$$

สามารถแสดงคำตอบได้ 2 รูปแบบดังนี้

รูปแบบที่ 1 โดยให้ $\phi = \sum_{i=0}^m b_i \tanh^i \xi$

โดยที่ b_i เป็นค่าคงที่ใดๆ

ซึ่งจะได้

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} + \frac{\tanh(\xi_1)}{2} \\ u_2 &= \frac{1}{2} - \frac{\tanh(\xi_2)}{2} \\ u_3 &= \frac{1}{2} + \frac{\tanh(\xi_3)}{2} \\ u_4 &= \frac{1}{2} - \frac{\tanh(\xi_4)}{2} \end{aligned} \right\} \quad (4-1)$$

โดยที่

$$\xi_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{4}t + d$$

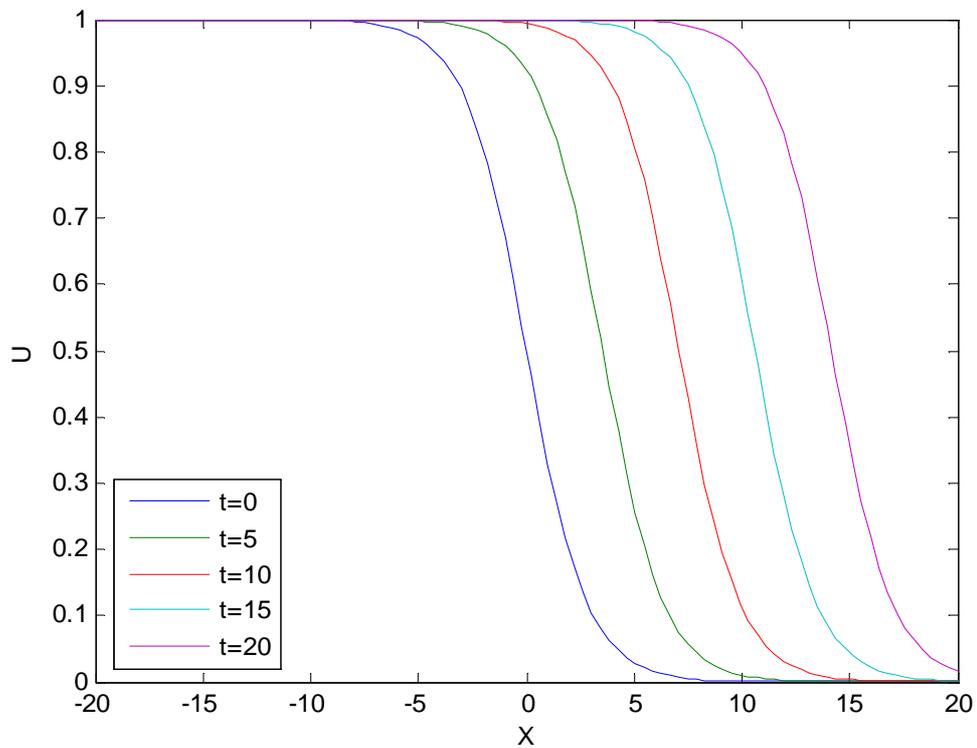
$$\xi_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}x - \frac{1}{4}t + d$$

$$\xi_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{4}t + d$$

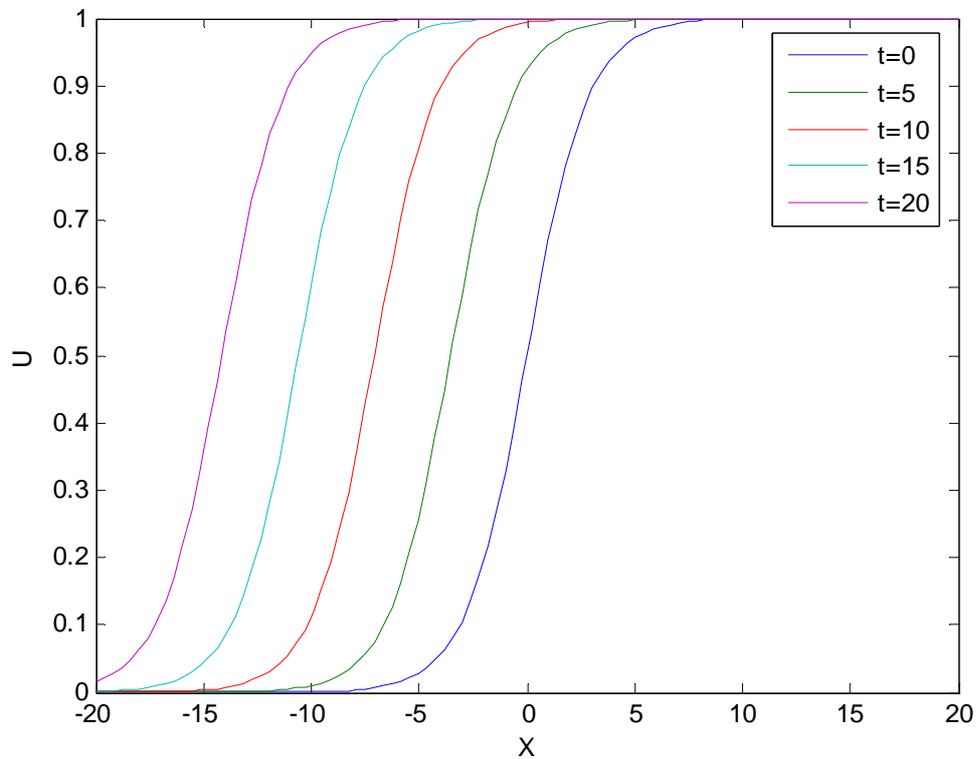
$$\xi_4 = \frac{1}{2\sqrt{2}}x - \frac{1}{4}t + d$$

และมีความเร็วในการเคลื่อนตัวของคลื่นเป็น $\frac{\sqrt{2}}{2}$

ซึ่งสามารถแสดงกราฟของคำตอบได้ดังนี้



ภาพที่ 4-1 แสดงคำตอบเชิงวิเคราะห์ห้ของ u_1 , u_4 จากสมการ (4-1)



ภาพที่ 4-2 แสดงคำตอบเชิงวิเคราะห์ของ u_2 , u_3 จากสมการ (4-1)

รูปแบบที่ 2 โดยให้ $\phi = \sum_{i=0}^m (A_i f^i(\xi) + B_i f^{i-1}(\xi) g(\xi))$

เมื่อ

$$f(\xi) = \frac{1}{\cosh \xi + r}, \quad g(\xi) = \frac{\sinh \xi}{\cosh \xi + r}$$

โดยที่ A_i, B_i, r เป็นค่าคงที่ใดๆ

ซึ่งจะได้

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - 1} - \sinh(\xi_1)}{2(\cosh(\xi_1) + r)} \\ u_2 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2 - 1} - \sinh(\xi_2)}{2(\cosh(\xi_2) + r)} \\ u_3 &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - 1} - \sinh(\xi_3)}{2(\cosh(\xi_3) + r)} \\ u_4 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2 - 1} - \sinh(\xi_4)}{2(\cosh(\xi_4) + r)} \end{aligned} \right\} \quad (4-2)$$

โดยที่

$$\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}t + d$$

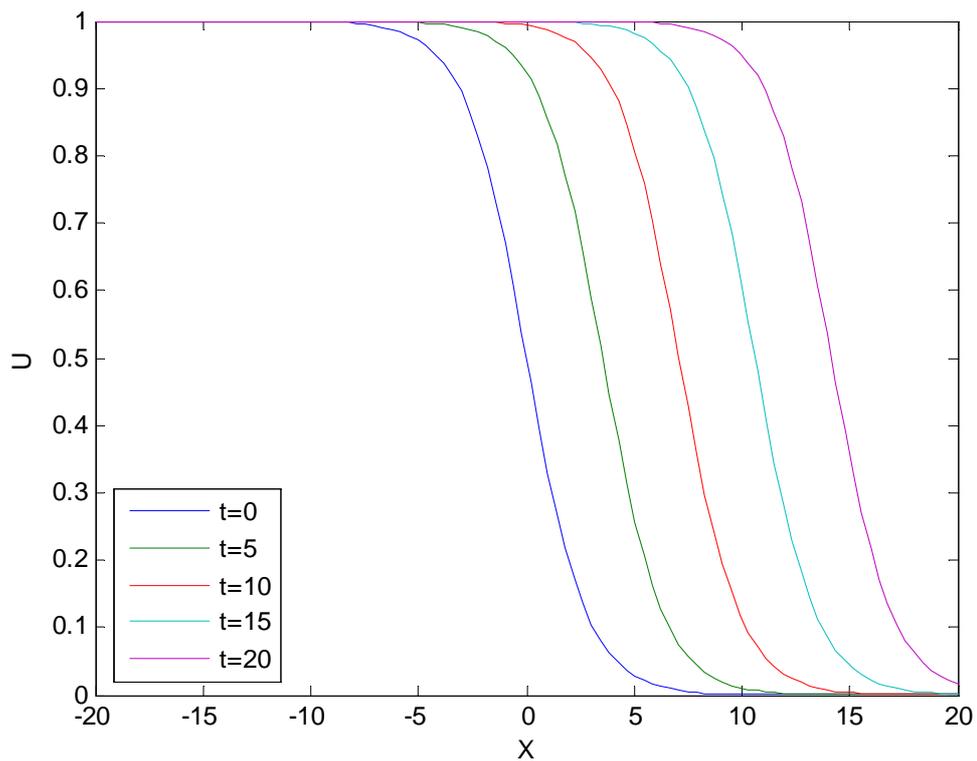
$$\xi_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{2}t + d$$

$$\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}t + d$$

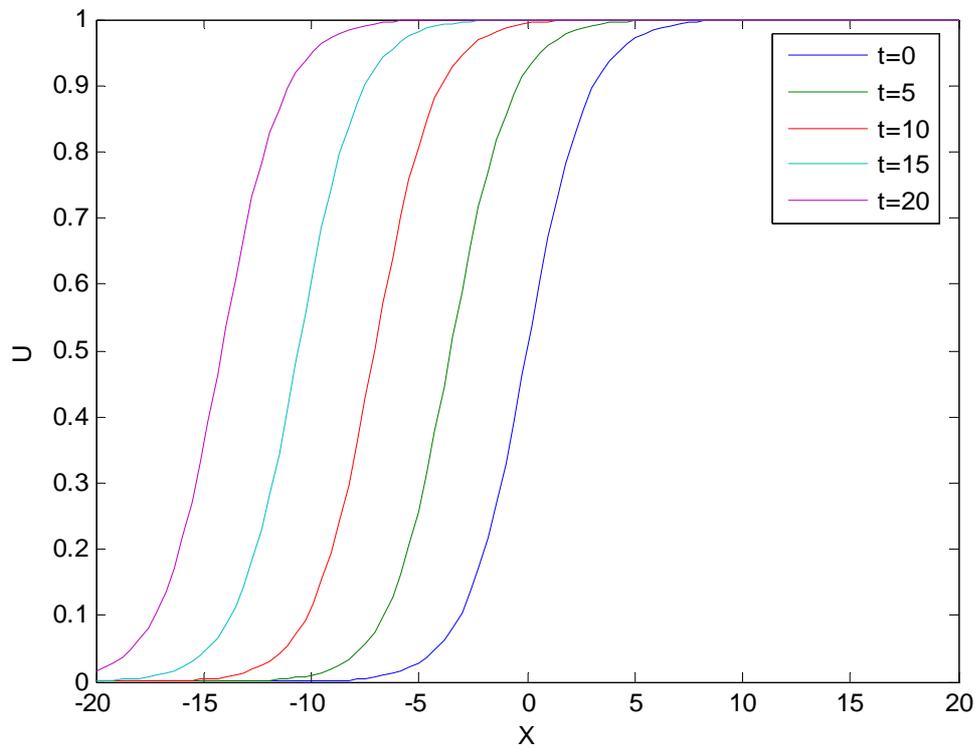
$$\xi_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{2}t + d$$

และมีความเร็วในการเคลื่อนตัวของคลื่นเป็น $\frac{\sqrt{2}}{2}$

ซึ่งสามารถแสดงกราฟของคำตอบได้ดังนี้



ภาพที่ 4-3 แสดงคำตอบเชิงวิเคราะห์ ของ u_1 , u_4 จากสมการ (4-2)



ภาพที่ 4-4 แสดงคำตอบเชิงวิเคราะห์ของ u_2 , u_3 จากสมการ (4-2)

ซึ่งคำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการข้างต้นนี้จาก (3-12) คือ

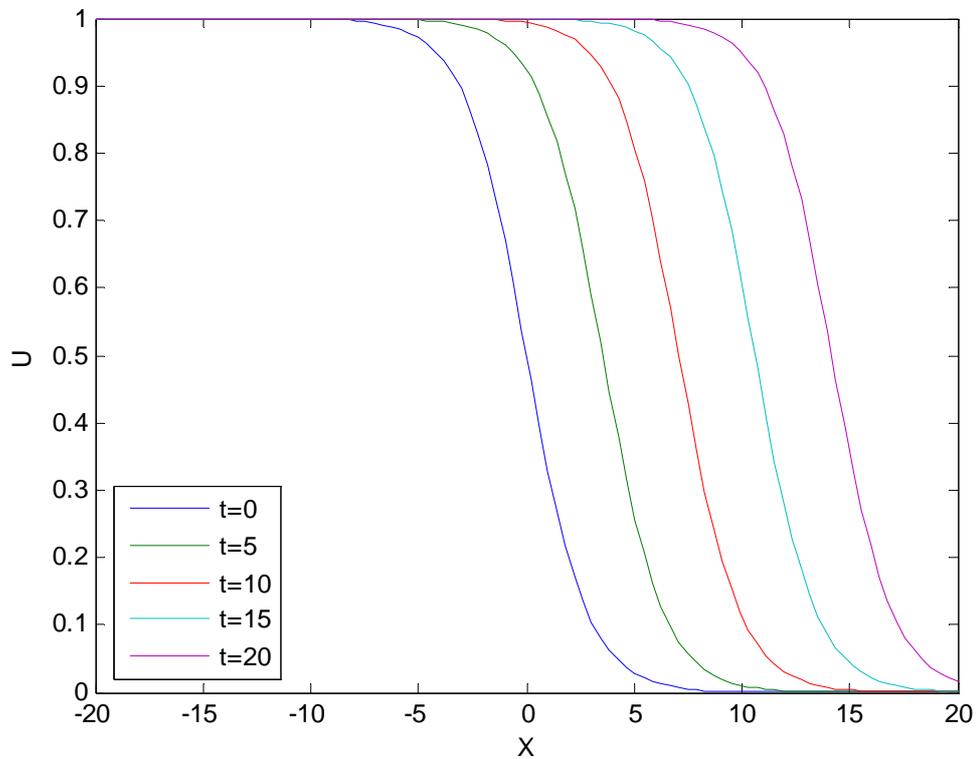
$$u(\xi) = \frac{1}{1 + e^{\xi\sqrt{\frac{1}{2}}}}$$

เมื่อ

$$\xi = x - \sqrt{\frac{1}{2}}t$$

และมีความเร็วในการเคลื่อนตัวของคลื่นเป็น $\frac{\sqrt{2}}{2}$

สามารถแสดงกราฟของคำตอบได้ดังนี้



ภาพที่ 4-5 แสดงคำตอบเชิงวิเคราะห์จากสมการ (3-12)

และเมื่อทำการเทียบคำตอบเชิงวิเคราะห์จากการใช้ Repeated homogeneous balance method และคำตอบเชิงวิเคราะห์จาก (3-12) จะได้

ตารางที่ 4-1 แสดงการเทียบคำตอบเชิงวิเคราะห์จากการใช้ Repeated homogeneous balance method และคำตอบเชิงวิเคราะห์จาก (3-12)

ค่า x เมื่อ $t=0$, $d=0$	คำตอบเชิงวิเคราะห์ u_1 จาก (4-1)	คำตอบเชิงวิเคราะห์ u_1 จาก (4-2)	คำตอบเชิงวิเคราะห์ จาก (3-12)
0	0.5000	0.5000	0.5000
0.5	0.4125	0.4125	0.4125
1.0	0.3302	0.3302	0.3302
1.5	0.2572	0.2572	0.2572
2.0	0.1956	0.1956	0.1956
2.5	0.1458	0.1458	0.1458
3.0	0.1070	0.1070	0.1070
3.5	0.0766	0.0766	0.0766
4.0	0.0558	0.0558	0.0558
4.5	0.0398	0.0398	0.0398
5.0	0.0283	0.0283	0.0283

ดังนั้นจะเห็นว่าคำตอบในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการความร้อนซึ่งมีแหล่งกำเนิดความร้อนแบบโพลีโนเมียลดีกรีสามของตัวแปรตาม (U) ที่หาได้จากการใช้ Repeated homogeneous balance method มีค่าเท่ากับคำตอบเชิงวิเคราะห์จาก (3-12)

4.1.2 คำตอบเชิงวิเคราะห์ของ $u_t - u_{xx} - 1 - u + u^2 + u^3 = 0$ สามารถแสดงคำตอบได้ 2 รูปแบบดังนี้

รูปแบบที่ 1 โดยให้ $\phi = \sum_{i=0}^m b_i \tanh^i \xi$

โดยที่ b_i เป็นค่าคงที่ใดๆ

ซึ่งจะได้

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \tanh(\xi_1) \\ u_2 &= \tanh(\xi_2) \\ u_3 &= -\tanh(\xi_3) \\ u_4 &= -\tanh(\xi_4) \end{aligned} \right\} \quad (4-3)$$

โดยที่

$$\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + t + d$$

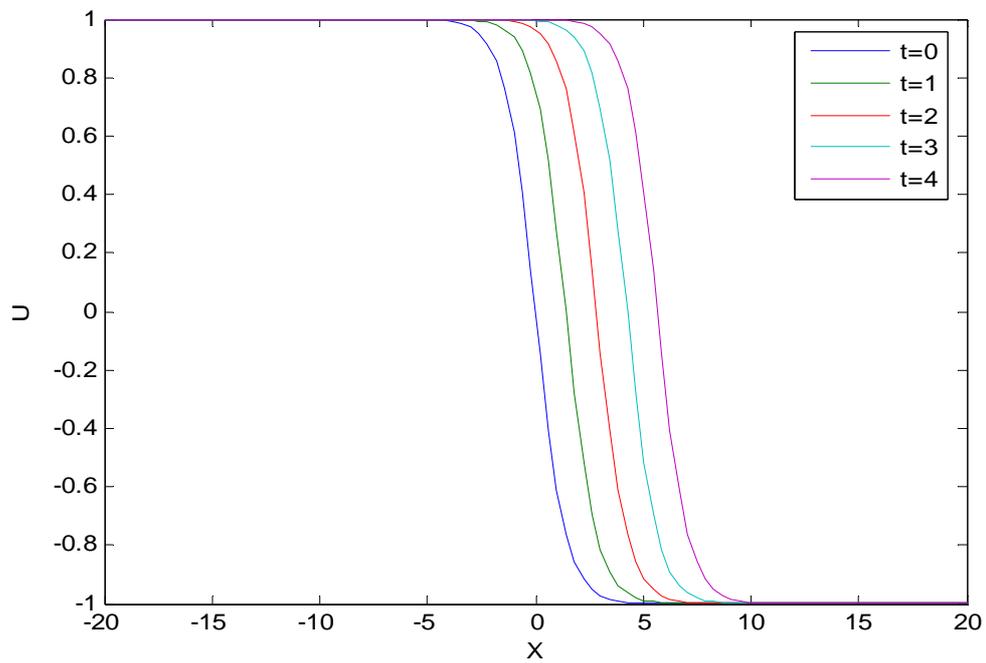
$$\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}x + t + d$$

$$\xi_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x - t + d$$

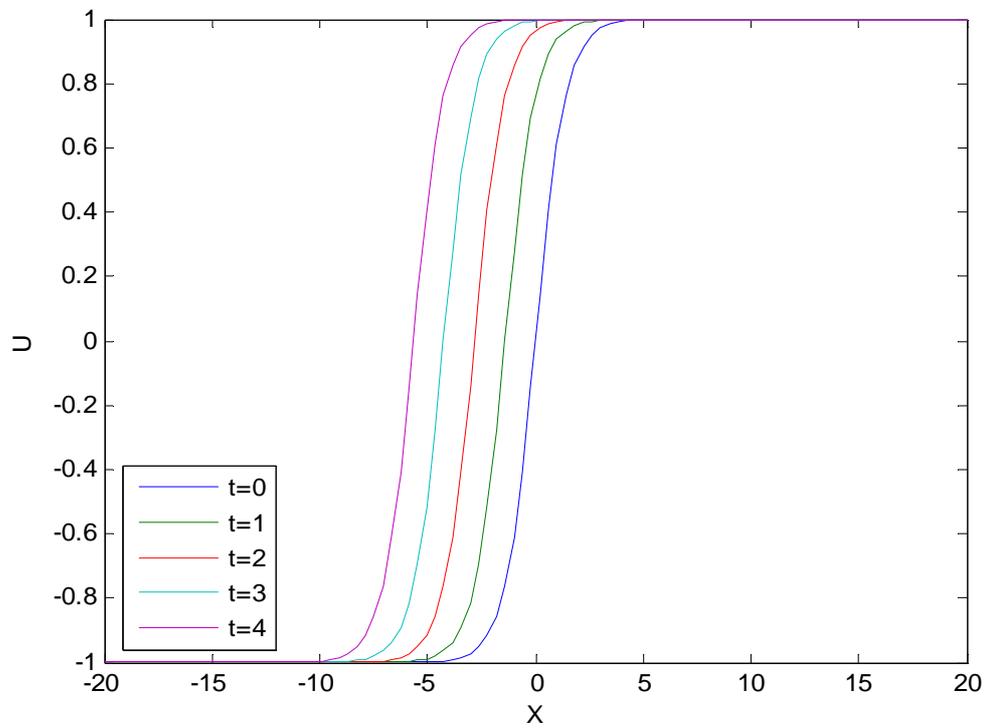
$$\xi_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}x - t + d$$

และมีความเร็วในการเคลื่อนตัวของคลื่นเป็น $\sqrt{2}$

ซึ่งสามารถแสดงกราฟของคำตอบได้ดังนี้



ภาพที่ 4-6 แสดงคำตอบเชิงวิเคราะห์ห้ของ u_1 , u_4 จากสมการ (4-3)



ภาพที่ 4-7 แสดงคำตอบเชิงวิเคราะห์ห้ของ u_2 , u_3 จากสมการ (4-3)

รูปแบบที่ 2 โดยให้ $\phi = \sum_{i=0}^m (A_i f^i(\xi) + B_i f^{i-1}(\xi)g(\xi))$

เมื่อ

$$f(\xi) = \frac{1}{\cosh \xi + r}, \quad g(\xi) = \frac{\sinh \xi}{\cosh \xi + r}$$

โดยที่ A_i, B_i, r เป็นค่าคงที่ใดๆ

ซึ่งจะได้

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -\frac{\sqrt{r^2 - 1} - \sinh(\xi_1)}{\cosh(\xi_1) + r} \\ u_2 &= -\frac{\sqrt{r^2 - 1} - \sinh(\xi_2)}{\cosh(\xi_2) + r} \\ u_3 &= \frac{\sqrt{r^2 - 1} - \sinh(\xi_3)}{\cosh(\xi_3) + r} \\ u_4 &= \frac{\sqrt{r^2 - 1} - \sinh(\xi_4)}{\cosh(\xi_4) + r} \end{aligned} \right\} \quad (4-4)$$

โดยที่

$$\xi_1 = -\sqrt{2}x + 2t + d$$

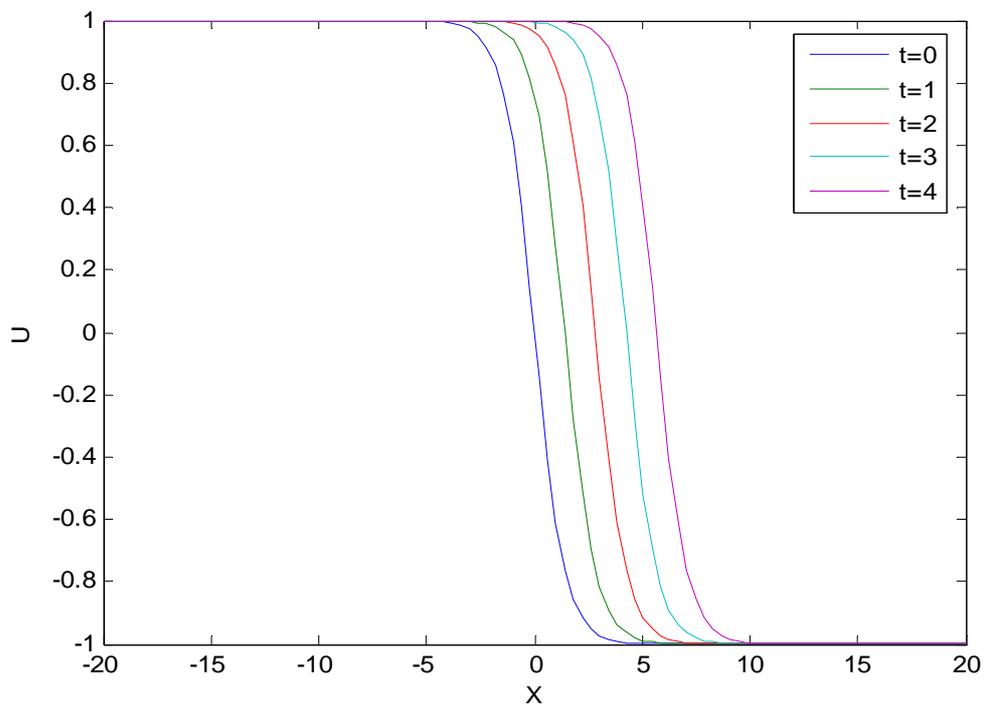
$$\xi_2 = \sqrt{2}x + 2t + d$$

$$\xi_3 = -\sqrt{2}x - 2t + d$$

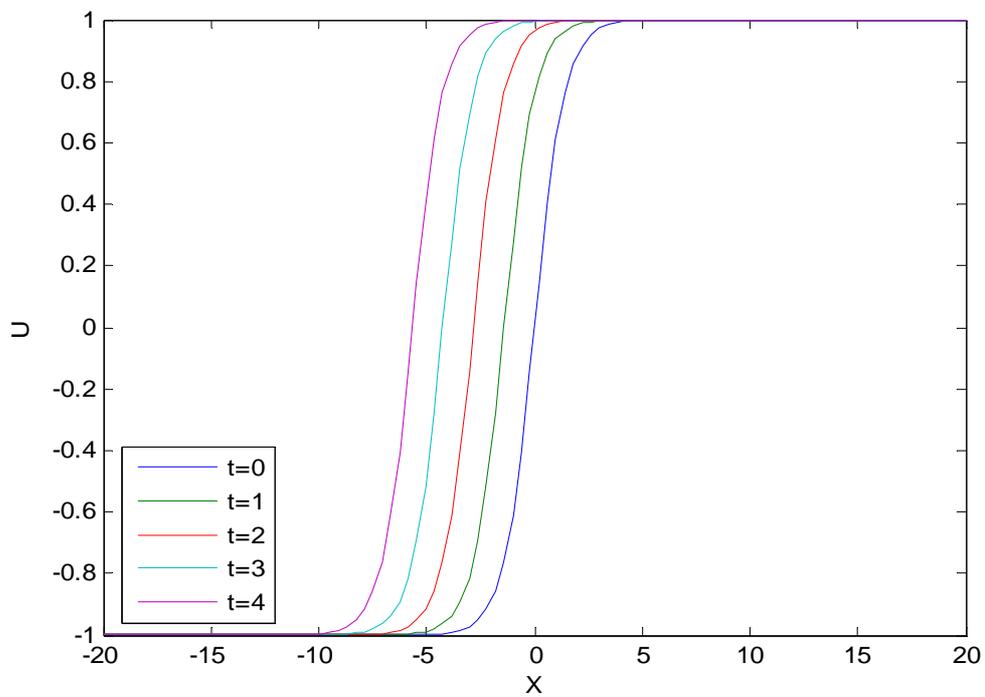
$$\xi_4 = \sqrt{2}x - 2t + d$$

และมีความเร็วในการเคลื่อนตัวของคลื่นเป็น $\sqrt{2}$

ซึ่งสามารถแสดงกราฟของคำตอบได้ดังนี้



ภาพที่ 4-8 แสดงคำตอบเชิงวิเคราะห์ ของ u_1, u_4 จากสมการ (4-4)



ภาพที่ 4-9 แสดงคำตอบเชิงวิเคราะห์ของ u_2, u_3 จากสมการ (4-4)

และเมื่อทำการเทียบคำตอบเชิงวิเคราะห์จากการใช้ Repeated homogeneous balance method จากสมการ (4-3) และ (4-4) จะได้

ตารางที่ 4-2 แสดงการเทียบคำตอบเชิงวิเคราะห์จากการใช้ Repeated homogeneous balance method ของสมการ (4-3) และ (4-4)

ค่า x เมื่อ $t=0, d=0$	คำตอบเชิงวิเคราะห์ u_1 จาก (4-3)	คำตอบเชิงวิเคราะห์ u_1 จาก (4-4)
0	0	0
0.5	-0.3395	-0.3395
1.0	-0.6089	-0.6089
1.5	-0.785	-0.785
2.0	-0.8884	-0.8884
2.5	-0.9434	-0.9434
3.0	-0.9717	-0.9717
3.5	-0.9859	-0.9859
4.0	-0.9930	-0.9930
4.5	-0.9966	-0.9966
5.0	-0.9983	-0.9983

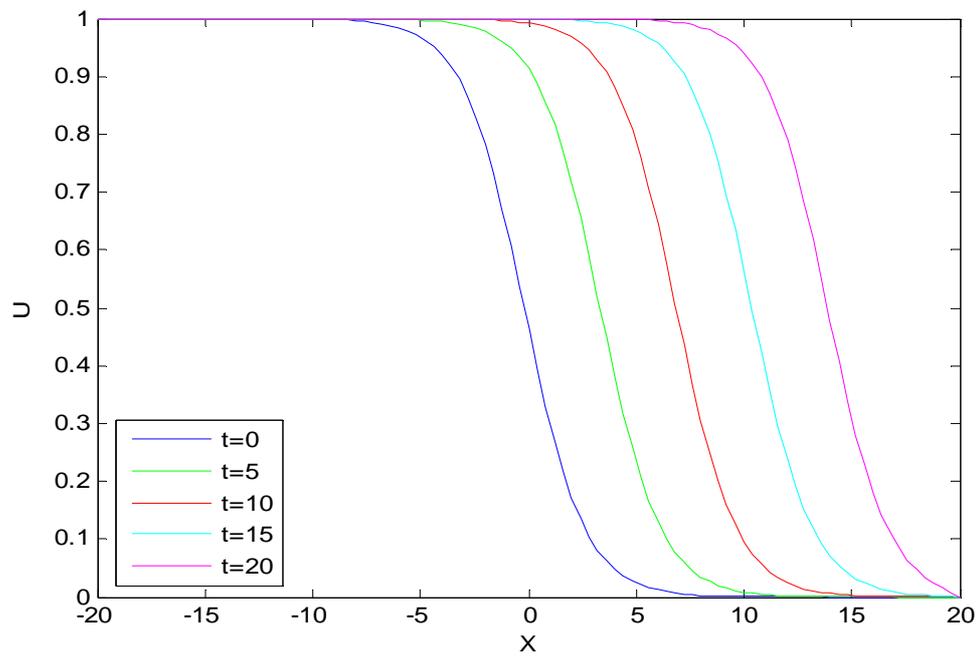
ดังนั้นจะเห็นว่าคำตอบในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการความร้อนซึ่งมีแหล่งกำเนิดความร้อนแบบโพลีโนเมียลดีกรีสามของตัวแปรตาม (U) ที่หาได้จากการใช้ Repeated homogeneous balance method ทั้งรูปแบบที่ 1 และรูปแบบที่ 2 มีค่าเท่ากัน

4.2 คำตอบเชิงตัวเลขในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการความร้อนซึ่งมีแหล่งกำเนิดความร้อนแบบไม่เชิงเส้น

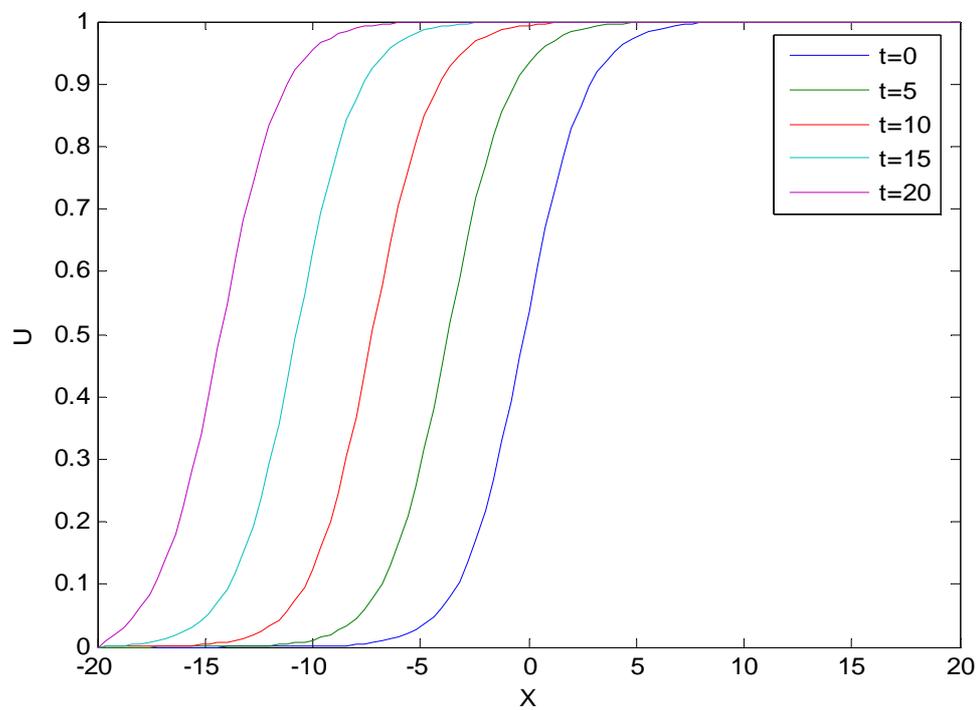
ในหัวข้อนี้ได้แสดงคำตอบเชิงตัวเลขในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการความร้อนซึ่งมีแหล่งกำเนิดความร้อนแบบไม่เชิงเส้นโดยใช้วิธีการเชิงตัวเลข Finite difference method ซึ่งจากการหาคำตอบเชิงตัวเลขในหัวข้อ 3.2 โดยให้ $h=0.4$ และ $k=0.02$ จะได้ $\frac{k}{h^2} = \frac{1}{8}$ โดยที่ $0 < \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ และได้ผลของคำตอบดังนี้

พิจารณาสมการ
$$u_t - u_{xx} - u^2 + u^3 = 0$$

4.2.1 เมื่อให้ค่าเริ่มต้น เท่ากับ u จากการใช้ Repeated homogeneous balance method (ที่ $t=0$) ซึ่งสามารถแสดงกราฟของคำตอบได้ดัง ภาพที่ 4-10 และภาพที่ 4-11

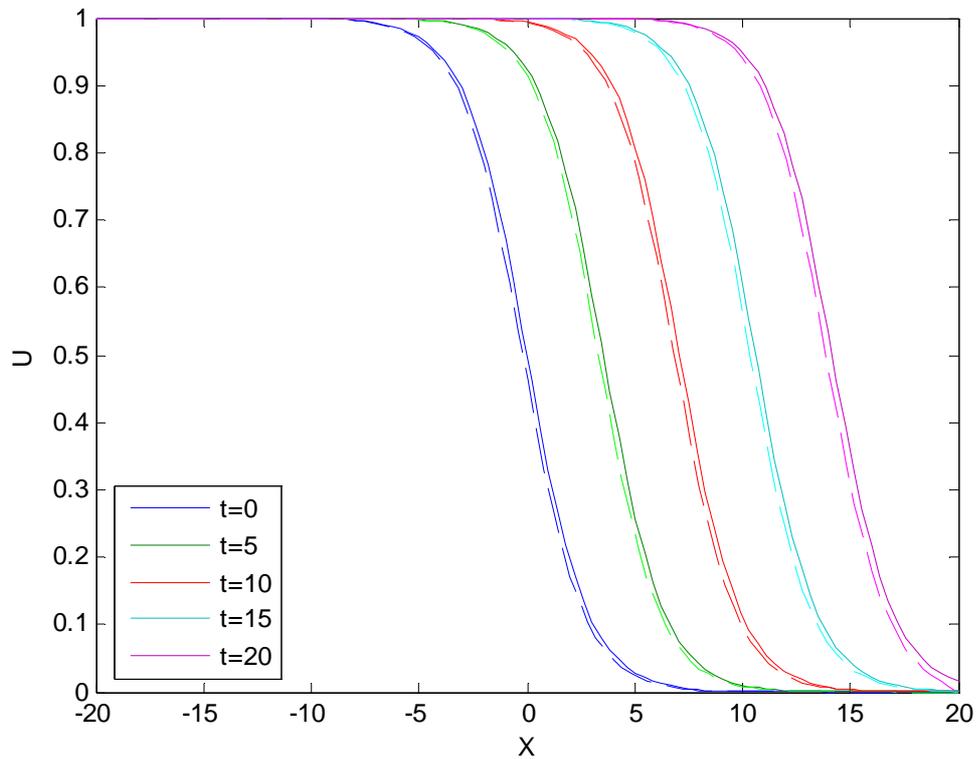


ภาพที่ 4-10 แสดงคำตอบเชิงตัวเลขเมื่อให้ค่าเริ่มต้นเท่ากับ u_1 จากสมการ (4-1)



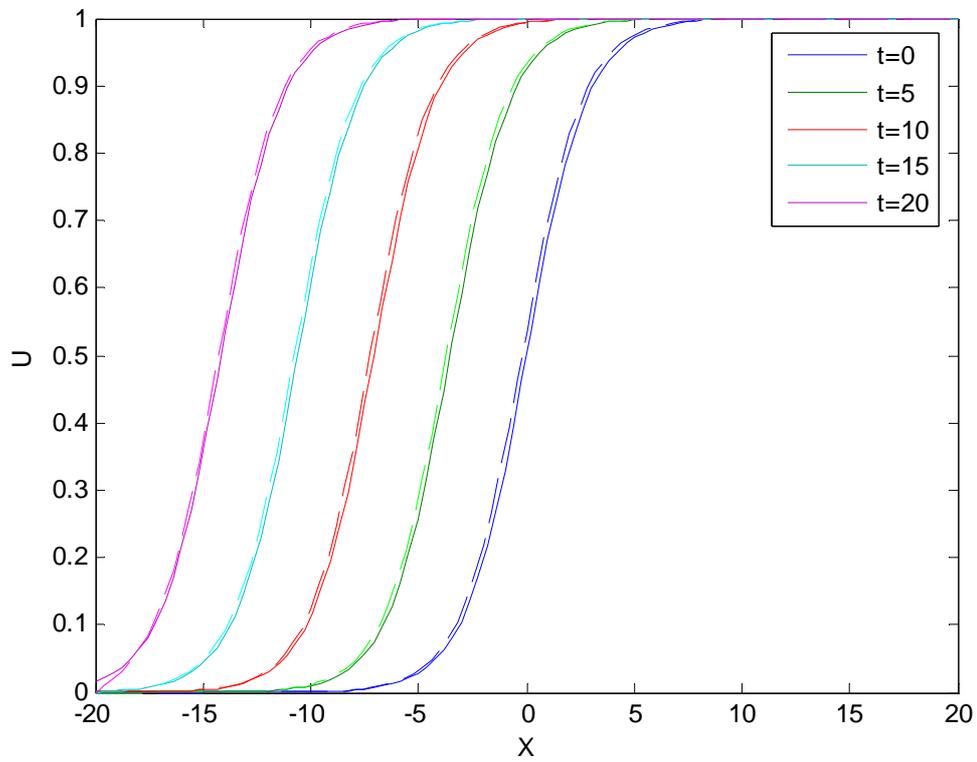
ภาพที่ 4-11 แสดงคำตอบเชิงตัวเลขเมื่อให้ค่าเริ่มต้นเท่ากับ u_2 จากสมการ (4-1)

และเมื่อนำกราฟของคำตอบที่ได้จากการใช้ Repeated homogeneous balance method กับ Finite difference method มาเปรียบเทียบกันจะเห็นว่ากราฟมีความใกล้เคียงกันดังแสดงในภาพที่ 4-12 และ ภาพที่ 4-13



ภาพที่ 4-12 แสดงการเปรียบเทียบคำตอบเชิงวิเคราะห์ภาพที่ 4-1 กับคำตอบเชิงตัวเลขภาพที่ 4-10

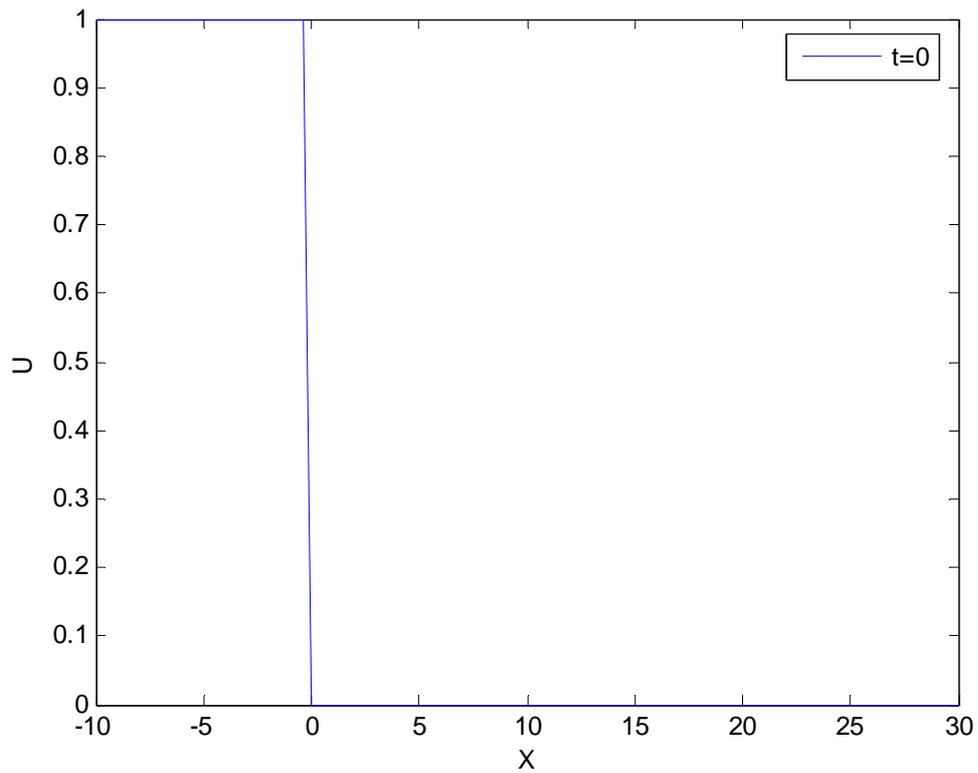
เมื่อ — แสดง Repeated homogeneous balance method
 --- แสดง Finite difference method



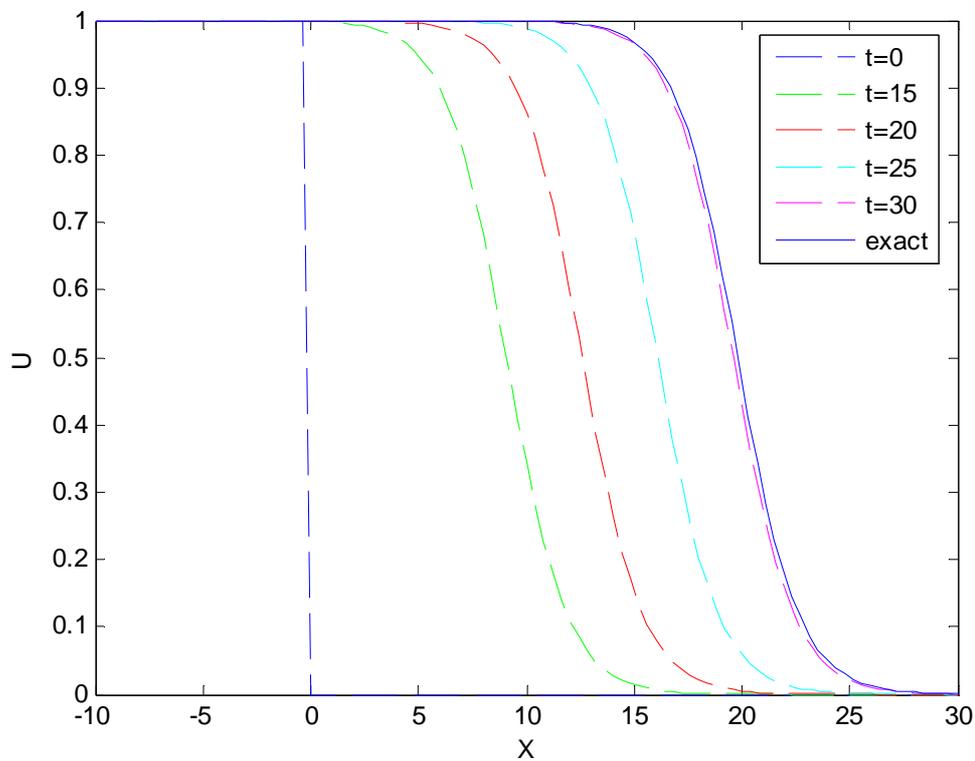
ภาพที่ 4-13 แสดงการเปรียบเทียบคำตอบเชิงวิเคราะห์ภาพที่ 4-2 กับคำตอบเชิงตัวเลขภาพที่ 4-11

เมื่อ — แสดง Repeated homogeneous balance method
 --- แสดง Finite difference method

4.2.2 เมื่อให้ค่าเริ่มต้น คือ $u=1$ เมื่อ $-10 \leq x \leq 0$ และ $u=0$ เมื่อ $0 < x \leq 30$ สำหรับ $t=0$ ซึ่งสามารถแสดงกราฟของคำตอบได้ดังนี้



ภาพที่ 4-14 แสดงค่าเริ่มต้นจากหัวข้อ 4.2.2

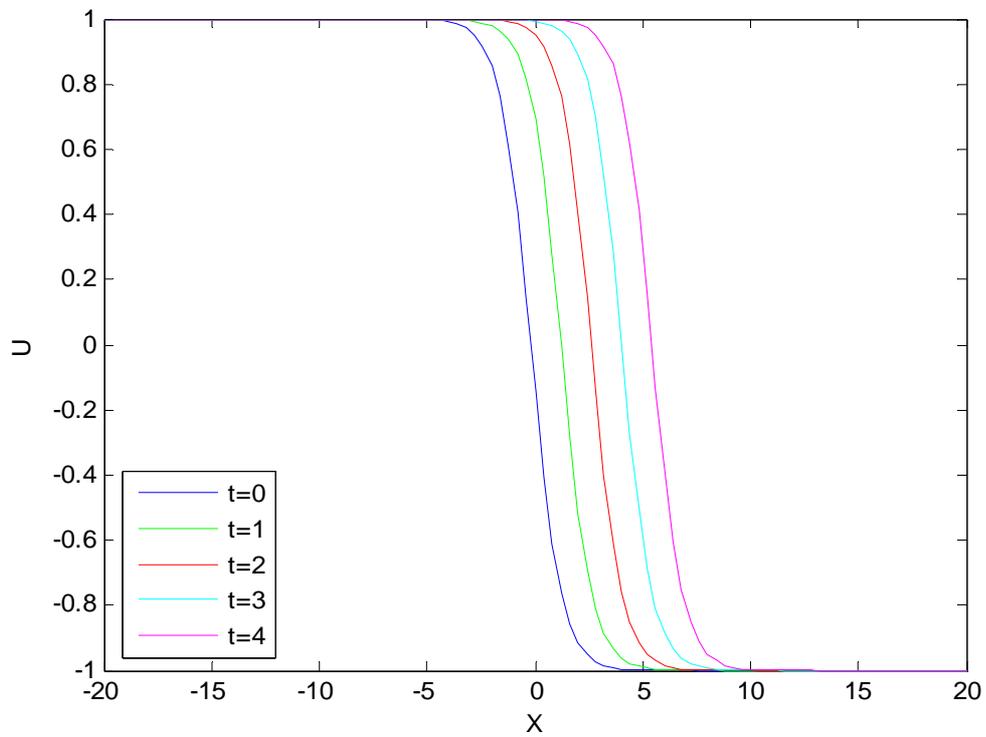


ภาพที่ 4-15 แสดงคำตอบเชิงตัวเลขเมื่อให้ค่าเริ่มต้นในหัวข้อ 4.2.2

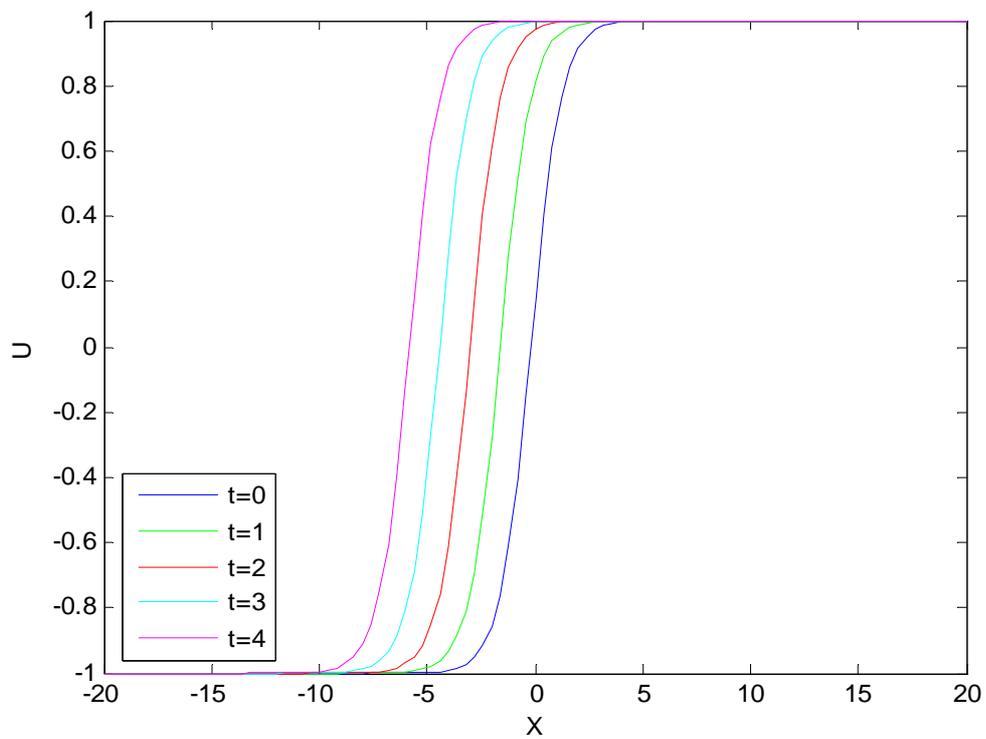
เมื่อ — แสดง Repeated homogeneous balance method
 --- แสดง Finite difference method

จากสมการ $u_t - u_{xx} - 1 - u + u^2 + u^3 = 0$

4.2.3 เมื่อให้ค่าเริ่มต้นเท่ากับ u ที่ $t=0$ จาก Repeated homogeneous balance method ซึ่งสามารถแสดงกราฟของคำตอบได้ดัง ภาพที่ 4-16 และภาพที่ 4-17

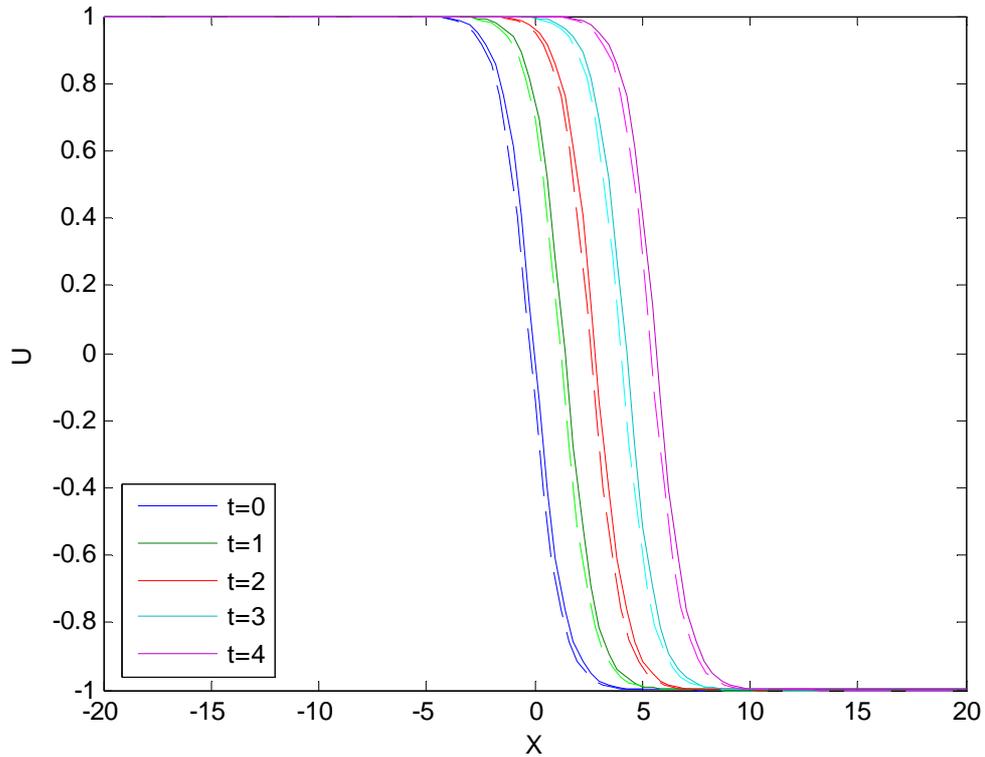


ภาพที่ 4-16 แสดงคำตอบเชิงตัวเลขเมื่อให้ค่าเริ่มต้นเท่ากับ u_1 จากสมการ (4-3)



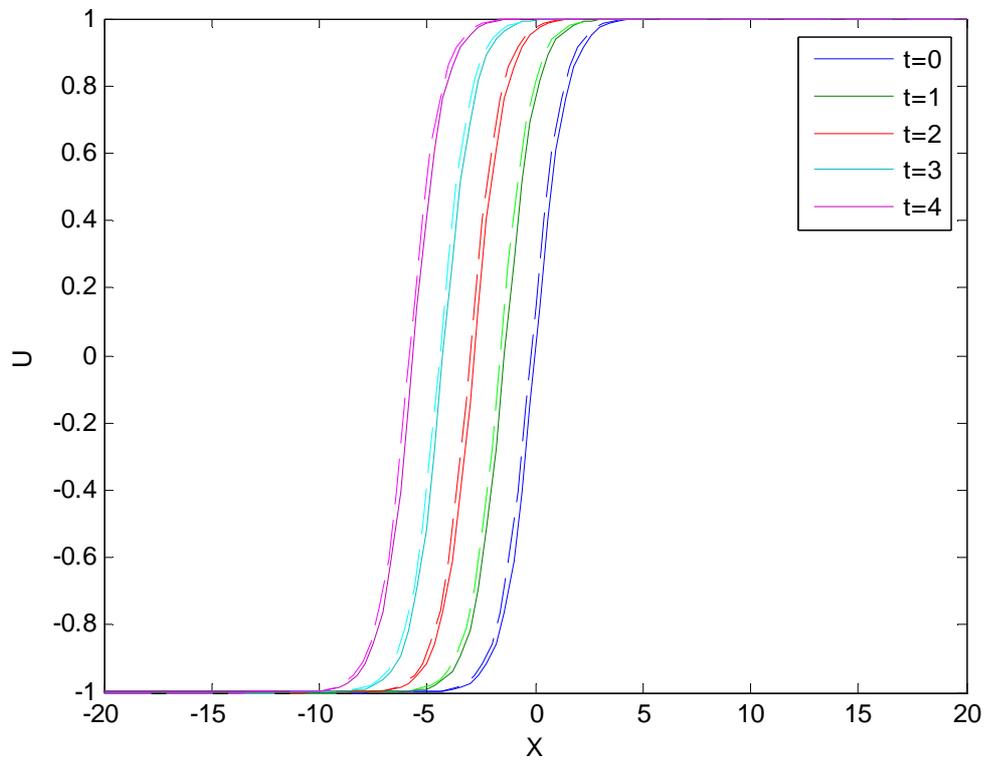
ภาพที่ 4-17 แสดงคำตอบเชิงตัวเลขเมื่อให้ค่าเริ่มต้นเท่ากับ u_2 จากสมการ (4-3)

และเมื่อนำกราฟของคำตอบที่ได้จากการใช้ Repeated homogeneous balance method กับ Finite difference method มาเปรียบเทียบกันจะเห็นว่ากราฟมีความใกล้เคียงกันดังแสดงในภาพที่ 4-18 และ ภาพที่ 4-19



ภาพที่ 4-18 แสดงการเปรียบเทียบคำตอบเชิงวิเคราะห์ภาพที่ 4-6 กับคำตอบเชิงตัวเลขภาพที่ 4-16

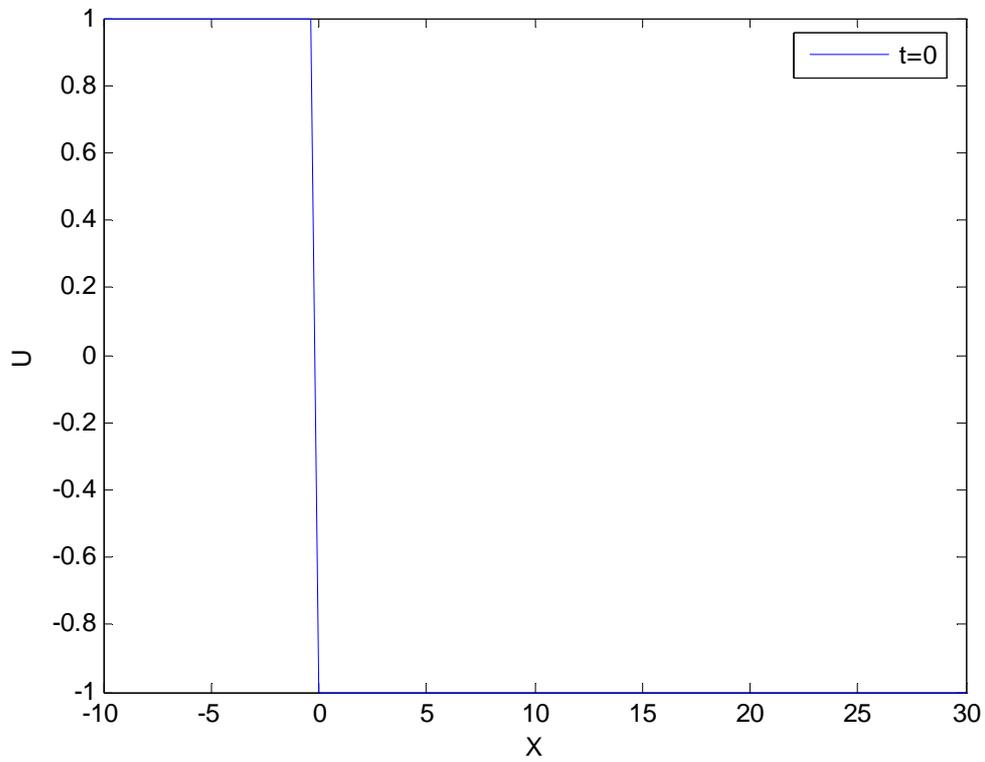
เมื่อ — แสดง Repeated homogeneous balance method
 --- แสดง Finite difference method



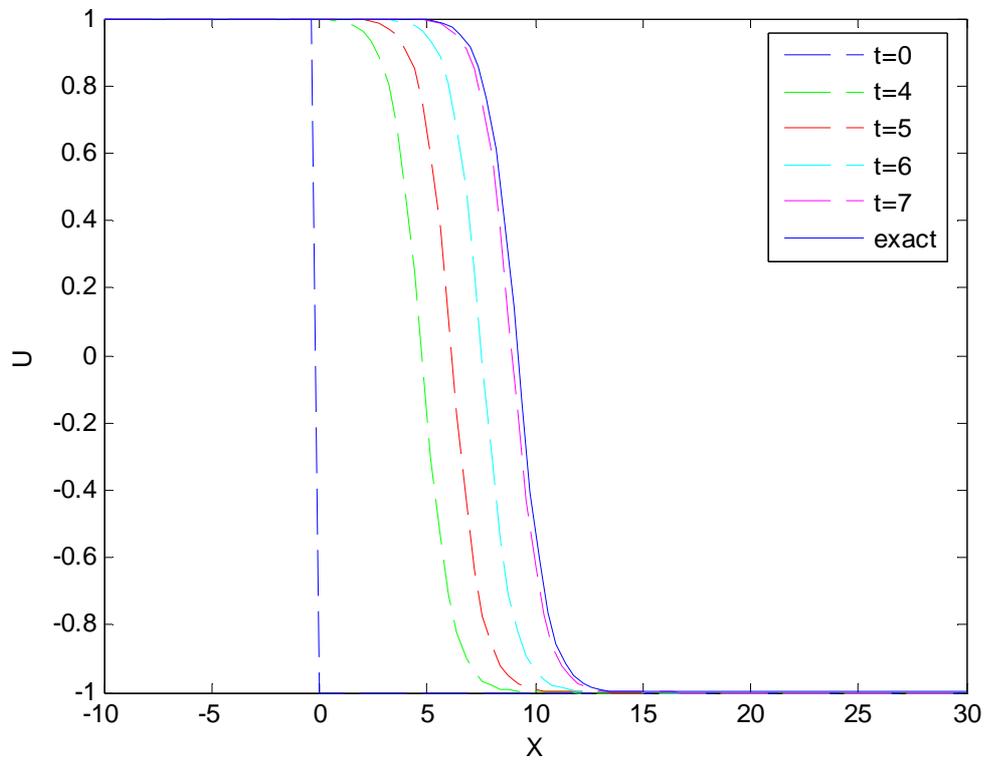
ภาพที่ 4-19 แสดงการเปรียบเทียบคำตอบเชิงวิเคราะห์ภาพที่ 4-7 กับคำตอบเชิงตัวเลขภาพที่ 4-17

เมื่อ — แสดง Repeated homogeneous balance method
 --- แสดง Finite difference method

4.2.4 เมื่อให้ค่าเริ่มต้น คือ $u=1$ เมื่อ $-10 \leq x \leq 0$ และ $u=-1$ เมื่อ $0 < x \leq 30$ สำหรับ $t=0$ ซึ่งสามารถแสดงกราฟของคำตอบได้ดังนี้



ภาพที่ 4-20 แสดงค่าเริ่มต้นจากหัวข้อ 4.2.4



ภาพที่ 4-21 แสดงคำตอบเชิงตัวเลขเมื่อให้ค่าเริ่มต้นในหัวข้อ 4.2.4

เมื่อ — แสดง Repeated homogeneous balance method
 --- แสดง Finite difference method

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

การวิจัยนี้มุ่งศึกษาและหาคำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการความร้อนซึ่งมีแหล่งกำเนิดความร้อนแบบไม่เชิงเส้น โดยใช้ Repeated homogeneous balance method และเปรียบเทียบคำตอบที่ได้กับคำตอบเชิงตัวเลขที่คำนวณได้จาก Finite difference method

5.1 สรุปผลการวิจัย

จากการหาคำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการความร้อนซึ่งมีแหล่งกำเนิดความร้อนแบบไม่เชิงเส้น โดยใช้ Repeated homogeneous balance method จะพบว่า สามารถหาคำตอบได้หลายรูปแบบ ซึ่งเป็นข้อดีของ Repeated homogeneous balance method

ในงานวิจัยนี้ให้แหล่งกำเนิดความร้อนอยู่ในรูปโพลีโนเมียลดีกรีสามของตัวแปรตาม (U) ดังนั้นผลของคำตอบที่ได้จากงานวิจัยนี้สามารถนำไปใช้ได้กับสมการความร้อนซึ่งมีแหล่งกำเนิดความร้อนแบบไม่เชิงเส้นที่อยู่ในรูปโพลีโนเมียลดีกรีไม่เกินสามของตัวแปรตาม (U)

5.2 ข้อเสนอแนะ

5.2.1 ในงานวิจัยครั้งต่อไปอาจใช้ Repeated homogeneous balance method หาคำตอบในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการความร้อนซึ่งมีแหล่งกำเนิดความร้อนแบบไม่เชิงเส้น เมื่อแหล่งกำเนิดความร้อนอยู่ในรูปโพลีโนเมียลของตัวแปรตาม (U) ที่มีดีกรีมากกว่าสาม โดยการดำเนินการตามขั้นตอนการหาคำตอบที่ได้กล่าวไว้แล้วในบทที่ 3

5.2.2 วิธีการนี้อาจสามารถใช้กับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้นอื่นๆได้ ถ้าสมการนั้นบรรยายปรากฏการณ์ทางธรรมชาติที่มีลักษณะการเคลื่อนตัวของคลื่นเกิดขึ้น

บรรณานุกรม

- Ding, S. S. and Zhao, X. Q. "Exact traveling wave solutions of the Boussinesq equation." **Chaos, Solitons and Fractals** 29(2006) : 1032-1036.
- Fan, E. G. and Zang, H. Q. "A note on the homogeneous balance method." **Physics Letters A** 246(1998) : 403-406.
- Fan, E. G. "Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations." **Physics Letters A** 277(2000) : 212-218.
- Fan, E. G. and Hon-Benny, Y. C. "Double periodic solutions with Jacobi elliptic functions for two generalized Hirota-Satsuma coupled KdV systems." **Physics Letters A** 292(2002) : 335-337.
- Giuggioli, L. Kalay, Z. and Kenkre, V.M. "Study of transients in the propagation of nonlinear waves in some reaction systems." **USA** : University of new Mexico, 2006.
- Kerner, E. H. "Universal formats for nonlinear ordinary differential systems." **J. Math. Phys.** 22(1981) : 1366-1371.
- Malfliet, W. "Solitary wave solutions of nonlinear wave equations." **Am. J. Phys.** 60(1992) : 650-654.
- Parkes, E. J. and Duffy, B. R. "An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to non-linear evolution equations." **Comp. Phys Comm** 98(1996) : 288-300.
- Smith, G. D. **Numerical solution of partial differential equations.** 3rded. New York : Oxford University Press., 1985.
- Wang, M. L. "Solitary wave solutions for variant Boussinesq." **Physics Letters A** 199(1995) : 169-172.
- Wang, M. L. "Exact solutions for a compound KdV-Burgers equation." **Physics Letters A** 213(1996) : 279-287.
- Wang, M. L., Zhou, Y. B. and Li, Z. B. "Application of a homogeneous balance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physics." **Physics Letters A** 216(1996) : 67-75.

Zhao, X. Q. "A new note on a homogeneous balance method." **Physics Letters A** 297(2002) : 59-67.

Zhao, X. Q., Wang, L. M. and Sun, W. J. "The repeated homogeneous balance method and its applications to nonlinear partial differential equations." **Chaos, Solitons and Fractals** 28(2006) : 448-453.

ภาคผนวก ก

คำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการ

$$u_t - u_{xx} - c_0 - c_1 u - c_2 u^2 - c_3 u^3 = 0$$

$$\text{เมื่อให้ } \phi = \sum_{i=0}^m b_i \tanh^i \xi$$

ในภาคผนวก ก. นี้จะแสดงผลของคำตอบเชิงวิเคราะห์ที่ได้จากการหาคำตอบโดยวิธีการ
repeated homogeneous balance ของสมการ

$$u_t - u_{xx} - c_0 - c_1 u - c_2 u^2 - c_3 u^3 = 0$$

โดยให้ $u = \sum_{i=0}^n q_i \phi^i$ และ $\phi = \sum_{i=0}^m b_i \tanh^i \xi$ เมื่อ $\xi = kx + lt + d$

โดยได้แสดงวิธีการหาคำตอบไว้แล้วในบทที่ 3 ซึ่งจะได้ผลของคำตอบดังนี้

$$\begin{aligned} u_1 = & -(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\ & + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\ & / (24c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (6c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\ & + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)}) \\ & - \frac{c_2}{3c_3} + i\sqrt{3}((-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\ & + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\ & / (12c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\ & + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)})) \\ & / 2 - \frac{1}{24}\sqrt{6}(c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\ & + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\ & a(96c_1c_3c_2^2 - (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\ & + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\ & + 48c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\ & + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\ & - 16c_2^4 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\ & + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\ & \sqrt{3} - 96ic_1c_3\sqrt{3}c_2^2 - 144c_1^2c_3^2 - 16c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\ & + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\ & + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} + 16ic_2^4\sqrt{3}))^{(1/2)} \tanh(\xi_1) / (cc_3(-36c_2c_1c_3 \\ & + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} a) \\ u_2 = & -(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\ & + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\ & / (24c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (6c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)} \\
& - \frac{c_2}{3c_3} + i\sqrt{3}((-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)} \\
& / (12c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)})) \\
& / 2 - \frac{1}{24}\sqrt{6}(c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& a(96c_1c_3c_2^2 - (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(4/3)} \\
& + 48c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& - 16c_2^4 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(4/3)} \\
& \sqrt{3} - 96ic_1c_3\sqrt{3}c_2^2 - 144c_1^2c_3^2 - 16c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} + 16ic_2^4\sqrt{3}))^{(1/2)} \tanh(\xi_2) / (cc_3(-36c_2c_1c_3 \\
& + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} a) \\
u_3 = & -(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)} \\
& / (24c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (6c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)})) \\
& - \frac{c_2}{3c_3} + i\sqrt{3}((-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)} \\
& / (12c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)})) \\
& / 2 + \frac{1}{24}\sqrt{6}(c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a(96c_1c_3c_2^2 - (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& + 48c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& - 16c_2^4 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& \sqrt{3} - 96ic_1c_3\sqrt{3c_2^2} - 144c_1^2c_3^2 - 16c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} + 16ic_2^4\sqrt{3})^{(1/2)} \tanh(\xi_3)/(cc_3(-36c_2c_1c_3 \\
& + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_4 = & -(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (24c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2)/(6c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)}) \\
& - \frac{c_2}{3c_3} + i\sqrt{3}((-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (12c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)})) \\
& / 2 + \frac{1}{24}\sqrt{6}(c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& a(96c_1c_3c_2^2 - (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& + 48c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& - 16c_2^4 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& \sqrt{3} - 96ic_1c_3\sqrt{3c_2^2} - 144c_1^2c_3^2 - 16c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +144ic_1^2c_2^2\sqrt{3}+16ic_2^4\sqrt{3})^{(1/2)} \tanh(\xi_4)/(cc_3(-36c_2c_1c_3 \\
& +108c_0c_3^2+8c_2^3+12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3-c_1^2c_2^2-18c_2c_1c_3c_0+27c_0^2c_3^2+4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} a) \\
u_5 = & -(-36c_2c_1c_3+108c_0c_3^2+8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3-c_1^2c_2^2-18c_2c_1c_3c_0+27c_0^2c_3^2+4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& /(24c_3)+(3c_1c_3-c_2^2)/(6c_3(-36c_2c_1c_3+108c_0c_3^2+8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3-c_1^2c_2^2-18c_2c_1c_3c_0+27c_0^2c_3^2+4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)}) \\
& -\frac{c_2}{3c_3}+i\sqrt{3}((-36c_2c_1c_3+108c_0c_3^2+8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3-c_1^2c_2^2-18c_2c_1c_3c_0+27c_0^2c_3^2+4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& /(12c_3)+(3c_1c_3-c_2^2)/(3c_3(-36c_2c_1c_3+108c_0c_3^2+8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3-c_1^2c_2^2-18c_2c_1c_3c_0+27c_0^2c_3^2+4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)})) \\
& /2-\frac{1}{24}(-6c(-36c_2c_1c_3+108c_0c_3^2+8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3-c_1^2c_2^2-18c_2c_1c_3c_0+27c_0^2c_3^2+4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& a(-96c_1c_3c_2^2+(-36c_2c_1c_3+108c_0c_3^2+8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3-c_1^2c_2^2-18c_2c_1c_3c_0+27c_0^2c_3^2+4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& -48c_1c_3(-36c_2c_1c_3+108c_0c_3^2+8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3-c_1^2c_2^2-18c_2c_1c_3c_0+27c_0^2c_3^2+4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& +16c_2^4-i(-36c_2c_1c_3+108c_0c_3^2+8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3-c_1^2c_2^2-18c_2c_1c_3c_0+27c_0^2c_3^2+4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& \sqrt{3}-96ic_1c_3\sqrt{3}c_2^2+144c_1^2c_3^2-16c_2^2(-36c_2c_1c_3+108c_0c_3^2+8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3-c_1^2c_2^2-18c_2c_1c_3c_0+27c_0^2c_3^2+4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& +144ic_1^2c_2^2\sqrt{3}+16ic_2^4\sqrt{3})^{(1/2)} \tanh(\xi_5)/(cc_3(-36c_2c_1c_3 \\
& +108c_0c_3^2+8c_2^3+12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3-c_1^2c_2^2-18c_2c_1c_3c_0+27c_0^2c_3^2+4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} a) \\
u_6 = & -(-36c_2c_1c_3+108c_0c_3^2+8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3-c_1^2c_2^2-18c_2c_1c_3c_0+27c_0^2c_3^2+4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& /(24c_3)+(3c_1c_3-c_2^2)/(6c_3(-36c_2c_1c_3+108c_0c_3^2+8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3-c_1^2c_2^2-18c_2c_1c_3c_0+27c_0^2c_3^2+4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)}) \\
& -\frac{c_2}{3c_3}+i\sqrt{3}((-36c_2c_1c_3+108c_0c_3^2+8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3-c_1^2c_2^2-18c_2c_1c_3c_0+27c_0^2c_3^2+4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& / (12c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)}) \\
& / 2 + \frac{1}{24}(-6c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& a(-96c_1c_3c_2^2 + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& - 48c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + 16c_2^4 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& \sqrt{3} - 96ic_1c_3\sqrt{3}c_2^2 + 144c_1^2c_3^2 + 16c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} + 16ic_2^4\sqrt{3}))^{(1/2)} \tanh(\xi_6) / (cc_3(-36c_2c_1c_3 \\
& + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} a) \\
u_7 = & -(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (24c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (6c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)}) \\
& - \frac{c_2}{3c_3} + i\sqrt{3}((-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (12c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)}) \\
& / 2 - \frac{1}{24}(-6c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& a(-96c_1c_3c_2^2 + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& - 48c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +16c_2^4 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& \sqrt{3} - 96ic_1c_3\sqrt{3}c_2^2 + 144c_1^2c_3^2 + 16c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} + 16ic_2^4\sqrt{3}))^{(1/2)} \tanh(\xi_7) / (cc_3(-36c_2c_1c_3 \\
& + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} a) \\
u_8 = & -(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (24c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (6c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)}) \\
& - \frac{c_2}{3c_3} + i\sqrt{3}((-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (12c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)})) \\
& / 2 - \frac{1}{24}(-6c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& a(-96c_1c_3c_2^2 + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& - 48c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + 16c_2^4 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& \sqrt{3} - 96ic_1c_3\sqrt{3}c_2^2 + 144c_1^2c_3^2 + 16c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} + 16ic_2^4\sqrt{3}))^{(1/2)} \tanh(\xi_8) / (cc_3(-36c_2c_1c_3 \\
& + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} a) \\
u_9 = & (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& / (12c_3) - (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)}) \\
& - \frac{c_2}{3c_3} - \frac{1}{12}\sqrt{3}(c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)}) \\
& a(144c_1^2c_3^2 + 24c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)}) \\
& - 8c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)}) \\
& + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)}) \\
& - 96c_1c_3c_2^2 + 16c_2^4)^{(1/2)} \tanh(\xi_9) / (cc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 8c_2^3 + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)}) a) \\
u_{10} = & (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (12c_3) - (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)}) \\
& - \frac{c_2}{3c_3} + \frac{1}{12}\sqrt{3}(c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)}) \\
& a(144c_1^2c_3^2 + 24c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)}) \\
& - 8c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)}) \\
& + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)}) \\
& - 96c_1c_3c_2^2 + 16c_2^4)^{(1/2)} \tanh(\xi_{10}) / (cc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 8c_2^3 + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)}) a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{11} = & (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (12c_3) - (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)}) \\
& - \frac{c_2}{3c_3} - \frac{1}{12}\sqrt{3}(c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& a(144c_1^2c_3^2 + 24c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& - 8c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& - 96c_1c_3c_2^2 + 16c_2^4))^{(1/2)} \tanh(\xi_{11}) / (cc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 8c_2^3 + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} a) \\
u_{12} = & (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (12c_3) - (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)}) \\
& - \frac{c_2}{3c_3} + \frac{1}{12}\sqrt{3}(c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& a(144c_1^2c_3^2 + 24c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& - 8c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& - 96c_1c_3c_2^2 + 16c_2^4))^{(1/2)} \tanh(\xi_{12}) / (cc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 8c_2^3 + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} a)
\end{aligned}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}
\xi_1 = & (-3acc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& (96c_1c_3c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& + 48c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& - 16c_2^4 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& \sqrt{3} - 96ic_1c_3c_2^2 - 144c_1^2c_3^2 - 16c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} + 16ic_2^4\sqrt{3}))^{(1/2)} \times / (24acc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 8c_2^3 + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/2)}) \\
& + \sqrt{6}(c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& a(96c_1c_3c_2^2 - (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& + 48c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& - 16c_2^4 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& \sqrt{3}ic_1c_3\sqrt{3}c_2^2 - 144c_1^2c_3^2 - 16c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} + 16ic_2^4\sqrt{3}))^{(1/2)} (c_2 + 3c_3(-(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 8c_2^3 + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (24c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (6c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)}) \\
& - \frac{c_2}{3c_3} + i\sqrt{3}((-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)} \\
& / (12c_3(3c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)})) / 2)) \\
& t / (24cc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} a) + d \\
\xi_2 = & (-3acc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& (96c_1c_3c_2^2 - (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(4/3)} \\
& + 48c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& - 16c_2^4 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(4/3)} \\
& \sqrt{3} - 96ic_1c_3\sqrt{3}c_2^2 - 144c_1^2c_3^2 - 16c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} + 16ic_2^4\sqrt{3}))^{(1/2)} \times / (24acc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 8c_2^3 + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)}) \\
& + \sqrt{6}(c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& a(96c_1c_3c_2^2 - (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(4/3)} \\
& + 48c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& - 16c_2^4 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(4/3)} \\
& \sqrt{3} - 96ic_1c_3\sqrt{3}c_2^2 - 144c_1^2c_3^2 - 16c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} + 16ic_2^4\sqrt{3}))^{(1/2)} (c_2 + 3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 8c_2^3 + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& / (24c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (6c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)}) \\
& - \frac{c_2}{3c_3} + i\sqrt{3} ((-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)}) \\
& / (12c_3 + (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)})) / 2)) \\
& t / (24cc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)}) \text{ a) + d} \\
\xi_3 = & (-3 a c c_3 (-36 c_2 c_1 c_3 + 108 c_0 c_3^2 + 8 c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)}) \\
& (96c_1c_3c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)}) \\
& + 48c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)}) \\
& - 16c_2^4 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)}) \\
& \sqrt{3} - 96ic_1c_3\sqrt{3}c_2^2 - 144c_1^2c_3^2 - 16c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)}) \\
& + 144i c_1^2c_3^2\sqrt{3} + 16ic_2^4\sqrt{3}))^{(1/2)} \times / (24acc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 8c_2^3 + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)}) \\
& - \sqrt{6}(c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)}) \\
& a(96c_1c_3c_2^2 - (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)}) \\
& + 48c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)}) \\
& - 16c_2^4 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{3} - 96ic_1c_3\sqrt{3c_2^2} - 144c_1^2c_3^2 - 16c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} + 16ic_2^4\sqrt{3})^{(1/2)} (c_2 + 3c_3(-(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 8c_2^3 + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (24c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (6c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)}) \\
& - \frac{c_2}{3c_3} + i\sqrt{3}((-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (12c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)})) / 2)) \\
& t / (24cc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} a) + d \\
\xi_4 = & (-3acc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& (96c_1c_3c_2^2 - (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& + 48c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& - 16c_2^4 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& \sqrt{3} - 96ic_1c_3\sqrt{3c_2^2} - 144c_1^2c_3^2 - 16c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} + 16ic_2^4\sqrt{3})^{(1/2)} x / (24acc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 8c_2^3 + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& - \sqrt{6}(c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& a(96c_1c_3c_2^2 - (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 48c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& - 16c_2^4 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& \sqrt{3} - 96ic_1c_3\sqrt{3c_2^2} - 144c_1^2c_3^2 - 16c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} + 16ic_2^4\sqrt{3})^{(1/2)} (c_2 + 3c_3(-(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 8c_2^3 + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (24c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (6c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)})) \\
& - \frac{c_2}{3c_3} + i\sqrt{3}((-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (12c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)})) / 2)) \\
& t / (24cc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} a) + d \\
\xi_5 = & \sqrt{3}(\text{acc}_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& (-96c_1c_3c_2^2 + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& - 48c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + 16c_2^4 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& \sqrt{3} - 96ic_1c_3\sqrt{3c_2^2} + 144c_1^2c_3^2 + 16c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + 44ic_1^2c_3^2\sqrt{3} + 16ic_2^4\sqrt{3})^{(1/2)} x / (24\text{acc}_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 8c_2^3 + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (-6c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& a(-96c_1c_3c_2^2 + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& - 48c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + 16c_2^4 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& \sqrt{3} - 96ic_1c_3\sqrt{3}c_2^2 + 144c_1^2c_3^2 + 16c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} + 16ic_2^4\sqrt{3}))^{(1/2)} (c_2 + 3c_3(-(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 8c_2^3 + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (24c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (6c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)})) \\
& - \frac{c_2}{3c_3} - i\sqrt{3}((-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (12c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)})) / 2)) \\
& t / (24cc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} a) + d \\
\xi_6 = & \sqrt{3}(acc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& (-96c_1c_3c_2^2 + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& - 48c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + 16c_2^4 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{3} - 96ic_1c_3\sqrt{3c_2^2} + 144c_1^2c_3^2 + 16c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} + 16ic_2^4\sqrt{3})^{(1/2)} \times / (24acc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 8c_2^3 + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)}) \\
& - (-6c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& a(-96c_1c_3c_2^2 + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& - 48c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + 16c_2^4 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& \sqrt{3} - 96ic_1c_3\sqrt{3c_2^2} + 144c_1^2c_3^2 + 16c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} + 16ic_2^4\sqrt{3})^{(1/2)} (c_2 + 3c_3(-(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 8c_2^3 + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (24c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (6c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)})) \\
& - \frac{c_2}{3c_3} - i\sqrt{3}((-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (12c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)})) / 2)) \\
& t / (24cc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} a) + d \\
\xi_7 = & \sqrt{3}(acc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& (-96c_1c_3c_2^2 + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -48c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + 16c_2^4 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& \sqrt{3} - 96ic_1c_3\sqrt{3c_2^2} + 144c_1^2c_3^2 + 16c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} + 16ic_2^4\sqrt{3})^{(1/2)} \times / (24acc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 8c_2^3 + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)}) \\
& + (-6c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& a(-96c_1c_3c_2^2 + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& - 48c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + 16c_2^4 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& \sqrt{3} - 96ic_1c_3\sqrt{3c_2^2} + 144c_1^2c_3^2 + 16c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} + 16ic_2^4\sqrt{3})^{(1/2)} (c_2 + 3c_3(-(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 8c_2^3 + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (24c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (6c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)}) \\
& - \frac{c_2}{3c_3} - i\sqrt{3}((-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (12c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)})) / 2)) \\
& t / (24cc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} a) + d
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_8 = & -\sqrt{3}(\text{acc}_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& (-96c_1c_3c_2^2 + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& - 48c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + 16c_2^4 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& \sqrt{3} - 96ic_1c_3\sqrt{3}c_2^2 + 144c_1^2c_3^2 + 16c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} + 16ic_2^4\sqrt{3}))^{(1/2)} \times / (24\text{acc}_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 8c_2^3 + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)}) \\
& - (-6c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& a(-96c_1c_3c_2^2 + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& - 48c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + 16c_2^4 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& \sqrt{3} - 96ic_1c_3\sqrt{3}c_2^2 + 144c_1^2c_3^2 + 16c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} + 16ic_2^4\sqrt{3}))^{(1/2)} (c_2 + 3c_3(-(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 8c_2^3 + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (24c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (6c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)}) \\
& - \frac{c_2}{3c_3} - i\sqrt{3}((-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& / (12c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)})) / 2)) \\
& t / (24cc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} a) + d \\
\xi_9 = & (-6acc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& 144c_1^2c_3^2 + 24c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)}) \\
& - 8c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& - 96c_1c_3c_2^2 + 16c_2^4))^{(1/2)} x / (24acc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)}) \\
& + \sqrt{3}(c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& 144c_1^2c_3^2 + 24c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& - 8c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& - 96c_1c_3c_2^2 + 16c_2^4))^{(1/2)} (c_2 + 3c_3((-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / 12c_3) - 3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)}) \\
& - \frac{c_2}{3c_3})t / (12cc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} a) + d
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_{10} = & (-6acc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& (144c_1^2c_3^2 + 24c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)}) \\
& - 8c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& - 96c_1c_3c_2^2 + 16c_2^4) \quad (1/2) \quad x / (24acc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)}) \\
& - \sqrt{3}(c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& a(144c_1^2c_3^2 + 24c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& - 8c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& - 96c_1c_3c_2^2 + 16c_2^4) \quad (1/2) \quad (c_2 + 3c_3((-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / 12c_3) - 3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)}) \\
& - \frac{c_2}{3c_3})t / (12cc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \quad a) + d \\
\xi_{11} = & (-6acc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& (144c_1^2c_3^2 + 24c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)}) \\
& - 8c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(4/3)} \\
& - 96c_1c_3c_2^2 + 16c_2^4))^{(1/2)} x / (24acc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)}) \\
& + \sqrt{3}(c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& a(144c_1^2c_3^2 + 24c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& - 8c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(4/3)} \\
& - 96c_1c_3c_2^2 + 16c_2^4))^{(1/2)} (c_2 + 3c_3((-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)} \\
& / 12c_3) - 3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)}) \\
& - \frac{c_2}{3c_3}))t / (12cc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} a) + d \\
\xi_{12} = & (-6acc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& (144c_1^2c_3^2 + 24c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)}) \\
& - 8c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(4/3)} \\
& - 96c_1c_3c_2^2 + 16c_2^4))^{(1/2)} x / (24acc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\sqrt{3}(c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& a(144c_1^2c_3^2 + 24c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& - 8c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& - 96c_1c_3c_2^2 + 16c_2^4))^{(1/2)} (c_2 + 3c_3((-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / 12c_3) - 3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)}) \\
& - \frac{c_2}{3c_3})t / (12cc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} a) + d
\end{aligned}$$

โดยที่ k, l คือ

$$\begin{aligned}
k_1 &= (-3acc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& (96c_1c_3c_2^2 + 48(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& c_1c_3 - 16c_2^4 - (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& + 16ic_2^4\sqrt{3} - 96ic_1c_3\sqrt{3}c_2^2 + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 8c_2^3 + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)}\sqrt{3} \\
& - 144c_1^2c_3^2 - 16(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} c_2^2))^{(1/2)} \\
& / (24acc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)}) \\
k_2 &= (-3acc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (96c_1c_3c_2^2 + 48(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& c_1c_3 - 16c_2^4 - (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& + 16ic_2^4\sqrt{3} - 96ic_1c_3\sqrt{3}c_2^2 + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 8c_2^3 + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)}\sqrt{3} \\
& - 144c_1^2c_3^2 - 16(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} c_2^2))^{(1/2)} \\
& / (24acc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)}) \\
k_3 = & -(-3acc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& (96c_1c_3c_2^2 + 48(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& c_1c_3 - 16c_2^4 - (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& + 16ic_2^4\sqrt{3} - 96ic_1c_3\sqrt{3}c_2^2 + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 8c_2^3 + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)}\sqrt{3} \\
& - 144c_1^2c_3^2 - 16(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} c_2^2))^{(1/2)} \\
& / (24acc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)}) \\
k_4 = & -(-3acc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& (96c_1c_3c_2^2 + 48(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& c_1c_3 - 16c_2^4 - (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& + 16ic_2^4\sqrt{3} - 96ic_1c_3\sqrt{3}c_2^2 + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 8c_2^3 + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}) \\
& \quad^{(4/3)} \sqrt{3} - 144c_1^2c_3^2 - 16(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} c_2^2)) \\
& \quad^{(1/2)} / (24acc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)}) \\
k_5 = & \sqrt{3} (a c c_3 (-36 c_2 c_1 c_3 + 108 c_0 c_3^2 + 8 c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& (144c_1^2c_3^2 + 16(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& c_2^2 - 48(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& c_1c_3 - 96c_1c_3c_2^2 - 96ic_1c_3\sqrt{3}c_2^2 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& \sqrt{3} + 144ic_1^2c_3^2 + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& + 16ic_2^4\sqrt{3} + 16c_2^4))^{(1/2)} / (24acc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)}) \\
k_6 = & \sqrt{3}(acc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& (144c_1^2c_3^2 + 16(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& c_2^2 - 48(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& c_1c_3 - 96c_1c_3c_2^2 - 96ic_1c_3\sqrt{3}c_2^2 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& \sqrt{3} + 144ic_1^2c_3^2 + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& + 16ic_2^4\sqrt{3} + 16c_2^4))^{(1/2)} / (24acc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_7 = & -\sqrt{3}(\text{acc}_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& (144c_1^2c_3^2 + 16(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& c_2^2 - 48(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& c_1c_3 - 96c_1c_3c_2^2 - 96ic_1c_3\sqrt{3}c_2^2 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& \sqrt{3} + 144ic_1^2c_3^2 + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& + 16ic_2^4\sqrt{3} + 16c_2^4))^{(1/2)} / (24\text{acc}_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)}) \\
k_8 = & -\sqrt{3}(\text{acc}_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& (144c_1^2c_3^2 + 16(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& c_2^2 - 48(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& c_1c_3 - 96c_1c_3c_2^2 - 96ic_1c_3\sqrt{3}c_2^2 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& \sqrt{3} + 144ic_1^2c_3^2 + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& + 16ic_2^4\sqrt{3} + 16c_2^4))^{(1/2)} / (24\text{acc}_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)}) \\
k_9 = & (-6\text{acc}_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& (144c_1^2c_3^2 + 24(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 c_3 - 8(-36c_2 c_1 c_3 + 108c_0 c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3 c_3 - c_1^2 c_2^2 - 18c_2 c_1 c_3 c_0 + 27c_0^2 c_3^2 + 4c_0 c_2^3 c_3})^{(2/3)} \\
& c_2^2 + (-36c_2 c_1 c_3 + 108c_0 c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3 c_3 - c_1^2 c_2^2 - 18c_2 c_1 c_3 c_0 + 27c_0^2 c_3^2 + 4c_0 c_2^3 c_3})^{(4/3)} \\
& - 96c_1 c_3 c_2^2 + 16c_2^4))^{(1/2)} / (24acc_3(-36c_2 c_1 c_3 + 108c_0 c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3 c_3 - c_1^2 c_2^2 - 18c_2 c_1 c_3 c_0 + 27c_0^2 c_3^2 + 4c_0 c_2^3 c_3})^{(2/3)}) \\
k_{10} = & -(-6acc_3(-36c_2 c_1 c_3 + 108c_0 c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3 c_3 - c_1^2 c_2^2 - 18c_2 c_1 c_3 c_0 + 27c_0^2 c_3^2 + 4c_0 c_2^3 c_3})^{(2/3)} \\
& (144c_1^2 c_3^2 + 24(-36c_2 c_1 c_3 + 108c_0 c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3 c_3 - c_1^2 c_2^2 - 18c_2 c_1 c_3 c_0 + 27c_0^2 c_3^2 + 4c_0 c_2^3 c_3})^{(2/3)} \\
& c_1 c_3 - 8(-36c_2 c_1 c_3 + 108c_0 c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3 c_3 - c_1^2 c_2^2 - 18c_2 c_1 c_3 c_0 + 27c_0^2 c_3^2 + 4c_0 c_2^3 c_3})^{(2/3)} \\
& c_2^2 + (-36c_2 c_1 c_3 + 108c_0 c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3 c_3 - c_1^2 c_2^2 - 18c_2 c_1 c_3 c_0 + 27c_0^2 c_3^2 + 4c_0 c_2^3 c_3})^{(4/3)} \\
& - 96c_1 c_3 c_2^2 + 16c_2^4))^{(1/2)} / (24acc_3(-36c_2 c_1 c_3 + 108c_0 c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3 c_3 - c_1^2 c_2^2 - 18c_2 c_1 c_3 c_0 + 27c_0^2 c_3^2 + 4c_0 c_2^3 c_3})^{(2/3)}) \\
k_{11} = & (-6acc_3(-36c_2 c_1 c_3 + 108c_0 c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3 c_3 - c_1^2 c_2^2 - 18c_2 c_1 c_3 c_0 + 27c_0^2 c_3^2 + 4c_0 c_2^3 c_3})^{(2/3)} \\
& (144c_1^2 c_3^2 + 24(-36c_2 c_1 c_3 + 108c_0 c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3 c_3 - c_1^2 c_2^2 - 18c_2 c_1 c_3 c_0 + 27c_0^2 c_3^2 + 4c_0 c_2^3 c_3})^{(2/3)} \\
& c_1 c_3 - 8(-36c_2 c_1 c_3 + 108c_0 c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3 c_3 - c_1^2 c_2^2 - 18c_2 c_1 c_3 c_0 + 27c_0^2 c_3^2 + 4c_0 c_2^3 c_3})^{(2/3)} \\
& c_2^2 + (-36c_2 c_1 c_3 + 108c_0 c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3 c_3 - c_1^2 c_2^2 - 18c_2 c_1 c_3 c_0 + 27c_0^2 c_3^2 + 4c_0 c_2^3 c_3})^{(4/3)} \\
& - 96c_1 c_3 c_2^2 + 16c_2^4))^{(1/2)} / (24acc_3(-36c_2 c_1 c_3 + 108c_0 c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3 c_3 - c_1^2 c_2^2 - 18c_2 c_1 c_3 c_0 + 27c_0^2 c_3^2 + 4c_0 c_2^3 c_3})^{(2/3)}) \\
k_{12} = & -(-6acc_3(-36c_2 c_1 c_3 + 108c_0 c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3 c_3 - c_1^2 c_2^2 - 18c_2 c_1 c_3 c_0 + 27c_0^2 c_3^2 + 4c_0 c_2^3 c_3})^{(2/3)} \\
& (144c_1^2 c_3^2 + 24(-36c_2 c_1 c_3 + 108c_0 c_3^2 + 8c_2^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& c_1c_3 - 8(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& c_2^2 + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(4/3)} \\
& - 96c_1c_3c_2^2 + 16c_2^4))^{(1/2)} / (24acc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)}) \\
I_1 = & -\sqrt{6}(c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& a(96c_1c_3c_2^2 + 48(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& c_1c_3 - 16c_2^4 - (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(4/3)} \\
& + 16ic_2^4\sqrt{3} - 96ic_1c_3\sqrt{3}c_2^2 + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 8c_2^3 + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(4/3)}\sqrt{3} \\
& - 144c_1^2c_3^2 - 16(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)}c_2^2))^{(1/2)} \\
& (c_2 + 3c_3(-(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)} \\
& / (24c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (6c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)})) \\
& - \frac{c_2}{3c_3} + i\sqrt{3}((-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)} \\
& / (12c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)})) / 2)) \\
& / (24cc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_2 = & -\sqrt{6}(c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& a(96c_1c_3c_2^2 + 48(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& c_1c_3 - 16c_2^4 - (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& + 16ic_2^4\sqrt{3} - 96ic_1c_3\sqrt{3c_2^2} + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 8c_2^3 + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)}\sqrt{3} \\
& - 144c_1^2c_3^2 - 16(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)}c_2))^{(1/2)} \\
& (c_2 + 3c_3(-(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (24c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (6c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)})) \\
& - \frac{c_2}{3c_3} + i\sqrt{3}((-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (12c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)})) / 2)) \\
& / (24cc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_3 = & \sqrt{6}(c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& a(96c_1c_3c_2^2 + 48(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& c_1c_3 - 16c_2^4 - (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& + 16ic_2^4\sqrt{3} - 96ic_1c_3\sqrt{3c_2^2} + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 8c_2^3 + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)}\sqrt{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -144c_1^2c_3^2 - 16(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} c_2^{(1/2)})^{(1/2)} \\
& (c_2 + 3c_3(-(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (24c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (6c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)})) \\
& - \frac{c_2}{3c_3} + i\sqrt{3}((-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (12c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)})) / 2)) \\
& / (24cc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} a) \\
I_4 = & -\sqrt{6}(c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& a(96c_1c_3c_2^2 + 48(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& c_1c_3 - 16c_2^4 - (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& + 16ic_1^4\sqrt{3} - 96ic_1c_3\sqrt{3}c_2^2 + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 8c_2^3 + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)}\sqrt{3} \\
& - 144c_1^2c_3^2 - 16(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} c_2^{(1/2)})^{(1/2)} \\
& (c_2 + 3c_3(-(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (24c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (6c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)})) \\
& - \frac{c_2}{3c_3} + i\sqrt{3}((-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & / (12c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\ & + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)})) / 2)) \\ & / (24cc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\ & + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \text{ a)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_5 = & (-6c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\ & + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\ & a(144c_1^2c_3^2 + 16(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\ & + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\ & c_2^2 - 48(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\ & + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\ & c_1c_3 - 96c_1c_3c_2^2 - 96ic_1c_3\sqrt{3}c_2^2 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\ & + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\ & \sqrt{3} + 144i c_1^2 c_3^2 \sqrt{3} + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\ & + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\ & + 16ic_2^4\sqrt{3} + 16c_2^4))^{(1/2)} (c_2 + 3c_3(-(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\ & + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\ & / (24c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (6c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\ & + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)}) \\ & - \frac{c_2}{3c_3} - i\sqrt{3}((-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\ & + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\ & / (12c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\ & + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)})) / 2)) \\ & / (24cc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\ & + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \text{ a)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_6 = & -(-6c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\ & + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\ & a(144c_1^2c_3^2 + 16(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\ & + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2^2 - 48(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& c_1c_3 - 96c_1c_3c_2^2 - 96ic_1c_3\sqrt{3}c_2^2 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& \sqrt{3} + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& + 16ic_2^4\sqrt{3} + 16c_2^4))^{(1/2)} (c_2 + 3c_3(-(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (24c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (6c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)}) \\
& - \frac{c_2}{3c_3} - i\sqrt{3}((-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (12c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)})) / 2)) \\
& / (24cc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \text{ a)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_7 = & (-6c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& a(144c_1^2c_3^2 + 16(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& c_2^2 - 48(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& c_1c_3 - 96c_1c_3c_2^2 - 96ic_1c_3\sqrt{3}c_2^2 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& \sqrt{3} + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& + 16ic_2^4\sqrt{3} + 16c_2^4))^{(1/2)} (c_2 + 3c_3(-(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (24c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (6c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)} \\
& - \frac{c_2}{3c_3} - i\sqrt{3}((-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)} \\
& / (12c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)})) / 2)) \\
& / (24c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \text{ a)} \\
I_8 = & -(-6c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& a(144c_1^2c_3^2 + 16(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& c_2^2 - 48(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& c_1c_3 - 96c_1c_3c_2^2 - 96ic_1c_3\sqrt{3}c_2^2 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(4/3)} \\
& \sqrt{3} + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(4/3)} \\
& +16ic_2^4\sqrt{3} + 16c_2^4))^{(1/2)} (c_2 + 3c_3(-(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)} \\
& / (24c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (6c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)})) \\
& - \frac{c_2}{3c_3} - i\sqrt{3}((-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)} \\
& / (12c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)})) / 2)) \\
& / (24cc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \text{ a)} \\
I_9 = & -\sqrt{3}(c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& a(144c_1^2c_3^2 + 24(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& c_1c_3 - 8(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& c_2^2 + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(4/3)} \\
& - 96c_1c_3c_2^2 + 16c_2^4)) \\
I_{10} = & \sqrt{3}(c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& a(144c_1^2c_3^2 + 24(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& c_1c_3 - 8(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& c_2^2 + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(4/3)} \\
& - 96c_1c_3c_2^2 + 16c_2^4)) \\
I_{11} = & -\sqrt{3}(c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& a(144c_1^2c_3^2 + 24(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& c_1c_3 - 8(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& c_2^2 + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(4/3)} \\
& - 96c_1c_3c_2^2 + 16c_2^4))^{(1/2)} (c_2 + 3c_3((-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)} \\
& / (12c_3) - (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{c_2}{3c_3}) / (12cc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \text{ a)} \\
I_{12} = & -\sqrt{3}(c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& a(144c_1^2c_3^2 + 24(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& c_1c_3 - 8(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& c_2^2 + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& - 96c_1c_3c_2^2 + 16c_2^4))^{(1/2)} (c_2 + 3c_3((-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (12c_3) - (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)}) \\
& -\frac{c_2}{3c_3}) / (12cc_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \text{ a)}
\end{aligned}$$

ภาคผนวก ข

คำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการ

$$u_t - u_{xx} - c_0 - c_1 u - c_2 u^2 - c_3 u^3 = 0$$

$$\text{เมื่อให้ } \phi = \sum_{i=0}^m (A_i f^i(\xi) + B_i f^{i-1}(\xi) g(\xi))$$

ในภาคผนวก ข. นี้จะแสดงผลของคำตอบเชิงวิเคราะห์ที่ได้จากการหาคำตอบโดยวิธีการ
repeated homogeneous balance ของสมการ

$$u_t - u_{xx} - c_0 - c_1 u - c_2 u^2 - c_3 u^3 = 0$$

โดยให้ $u = \sum_{i=0}^n q_i \phi^i$ และ $\phi = \sum_{i=0}^m (A_i f^i(\xi) + B_i f^{i-1}(\xi) g(\xi))$

โดยที่ $f(\xi) = \frac{1}{\cosh \xi + r}$, $g(\xi) = \frac{\sinh \xi}{\cosh \xi + r}$

เมื่อ $\xi = kx + lt + d$

โดยได้แสดงวิธีการหาคำตอบไว้แล้วในบทที่ 3 ซึ่งจะได้ผลของคำตอบดังนี้

$$\begin{aligned} u_1 = & -(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\ & + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\ & / (24c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (6c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\ & + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)}) \\ & - \frac{c_2}{3c_3} + i\sqrt{3}((-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\ & + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\ & / (12c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\ & + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)}) \\ & - 8c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\ & + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)}) \\ & / 2 + \frac{1}{48}\sqrt{6}(c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\ & + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\ & a(96c_1c_3c_2^2 - (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\ & + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\ & + 48c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\ & + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\ & - 16c_2^4 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\ & + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\ & \sqrt{3} - 96ic_1c_3\sqrt{3}c_2^2 - 144c_1^2c_3^2 - 16c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\ & + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} + 16ic_2^4\sqrt{3}))^{(1/2)} (\sqrt{r^2 - 1} - \sinh(\xi_1)) / (cc_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} a(\cosh(\xi_1) + r)) \\
u_2 = & -(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (24c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (6c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)}) \\
& - \frac{c_2}{3c_3} + i\sqrt{3}((-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (12c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)})) \\
& / 2 + \frac{1}{48}\sqrt{6}(c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& a(96c_1c_3c_2^2 - (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& + 48c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& - 16c_2^4 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& \sqrt{3} - 96ic_1c_3\sqrt{3}c_2^2 - 144c_1^2c_3^2 - 16c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} + 16ic_2^4\sqrt{3}))^{(1/2)} (\sqrt{r^2 - 1} - \sinh(\xi_2)) / (cc_3 \\
& (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} a(\cosh(\xi_2) + r)) \\
u_3 = & -(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (24c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (6c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)}) \\
& - \frac{c_2}{3c_3} + i\sqrt{3}((-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)} \\
& / (12c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)})) \\
& / 2 - \frac{1}{48}\sqrt{6}(c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& a(96c_1c_3c_2^2 - (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(4/3)} \\
& + 48c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& - 16c_2^4 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(4/3)} \\
& \sqrt{3} - 96ic_1c_3\sqrt{3}c_2^2 - 144c_1^2c_3^2 - 16c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} + 16ic_2^4\sqrt{3}))^{(1/2)} (\sqrt{r^2 - 1} - \sinh(\xi_3)) / (cc_3 \\
& (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} a(\cosh(\xi_3) + r)) \\
u_4 = & -(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)} \\
& / (24c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (6c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)})) \\
& - \frac{c_2}{3c_3} + i\sqrt{3}((-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)} \\
& / (12c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)})) \\
& / 2 - \frac{1}{48}\sqrt{6}(c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& a(96c_1c_3c_2^2 - (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(4/3)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 48c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3) \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& - 16c_2^4 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3) \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(4/3)} \\
& \sqrt{3} - 96ic_1c_3\sqrt{3}c_2^2 - 144c_1^2c_3^2 - 16c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3) \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} + 16ic_2^4\sqrt{3} \Big) \Big)^{(1/2)} (\sqrt{r^2 - 1} - \sinh(\xi_4)) / (cc_3 \\
& (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3) \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} a(\cosh(\xi_4) + r)) \\
u_5 = & -(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3) \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)} \\
& / (24c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (6c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3) \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)}) \\
& - \frac{c_2}{3c_3} + i\sqrt{3}((-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3) \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)} \\
& / (12c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3) \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)})) \\
& / 2 + \frac{1}{48}(-6c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3) \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& a(-96c_1c_3c_2^2 + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3) \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(4/3)} \\
& - 48c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3) \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& + 16c_2^4 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3) \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(4/3)} \\
& \sqrt{3} - 96ic_1c_3\sqrt{3}c_2^2 + 144c_1^2c_3^2 + 16c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3) \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} + 16ic_2^4\sqrt{3} \Big) \Big)^{(1/2)} (\sqrt{r^2 - 1} - \sinh(\xi_5)) / (cc_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} a(\cosh(\xi_5) + r)) \\
u_6 = & -(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (24c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (6c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)}) \\
& - \frac{c_2}{3c_3} + i\sqrt{3}((-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (12c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)})) \\
& / 2 - \frac{1}{48}(-6c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& a(-96c_1c_3c_2^2 + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& - 48c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + 16c_2^4 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& \sqrt{3} - 96ic_1c_3\sqrt{3}c_2^2 + 144c_1^2c_3^2 + 16c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} + 16ic_2^4\sqrt{3}))^{(1/2)} (\sqrt{r^2 - 1} - \sinh(\xi_6)) / (cc_3 \\
& (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} a(\cosh(\xi_6) + r)) \\
u_7 = & -(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (24c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (6c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)}) \\
& - \frac{c_2}{3c_3} + i\sqrt{3}((-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)} \\
& / (12c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)})) \\
& / 2 + \frac{1}{48}(-6c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& a(-96c_1c_3c_2^2 + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(4/3)} \\
& - 48c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& +16c_2^4 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(4/3)} \\
& \sqrt{3} - 96ic_1c_3\sqrt{3}c_2^2 + 144c_1^2c_3^2 + 16c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& +144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} + 16ic_2^4\sqrt{3}))^{(1/2)} (\sqrt{r^2 - 1} - \sinh(\xi_7)) / (cc_3 \\
& (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} a(\cosh(\xi_7) + r)) \\
u_8 = & -(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)} \\
& / (24c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (6c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)})) \\
& - \frac{c_2}{3c_3} + i\sqrt{3}((-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)} \\
& / (12c_3) + (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)})) \\
& / 2 - \frac{1}{48}(-6c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& a(-96c_1c_3c_2^2 + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& +12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(4/3)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -48c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3) \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& + 16c_2^4 - i(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3) \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(4/3)} \\
& \sqrt{3} - 96ic_1c_3\sqrt{3}c_2^2 + 144c_1^2c_3^2 + 16c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3) \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& + 144ic_1^2c_3^2\sqrt{3} + 16ic_2^4\sqrt{3} \Big)^{(1/2)} (\sqrt{r^2 - 1} - \sinh(\xi_8)) / (cc_3 \\
& (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3) \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} a(\cosh(\xi_8) + r)) \\
u_9 = & (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3) \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)} \\
& / (12c_3) - (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3) \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)}) \\
& - \frac{c_2}{3c_3} + \frac{1}{24}\sqrt{3}(c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3) \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& a(144c_1^2c_3^2 + 24c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3) \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& - 8c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3) \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3) \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(4/3)} \\
& - 96c_1c_3c_2^2 + 16c_2^4) \Big)^{(1/2)} (\sqrt{r^2 - 1} - \sinh(\xi_9)) / (cc_3(-36c_2c_1c_3 \\
& + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3) \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(2/3)} \\
& a(\cosh(\xi_9) + r)) \\
u_{10} = & (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3) \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)} \\
& / (12c_3) - (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3) \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3}^{(1/3)})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{c_2}{3c_3} - \frac{1}{24}\sqrt{3}(c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& a(144c_1^2c_3^2 + 24c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& - 8c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& - 96c_1c_3c_2^2 + 16c_2^4))^{(1/2)} (\sqrt{r^2 - 1} - \sinh(\xi_{10})) / (cc_3(-36c_2c_1c_3 \\
& + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& a(\cosh(\xi_{10}) + r)) \\
u_{11} = & (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (12c_3) - (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)}) \\
& - \frac{c_2}{3c_3} + \frac{1}{24}\sqrt{3}(c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& a(144c_1^2c_3^2 + 24c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& - 8c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& - 96c_1c_3c_2^2 + 16c_2^4))^{(1/2)} (\sqrt{r^2 - 1} - \sinh(\xi_{11})) / (cc_3(-36c_2c_1c_3 \\
& + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& a(\cosh(\xi_{11}) + r))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{12} = & (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)} \\
& / (12c_3) - (3c_1c_3 - c_2^2) / (3c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(1/3)}) \\
& - \frac{c_2}{3c_3} - \frac{1}{24} \sqrt{3}(c(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& a(144c_1^2c_3^2 + 24c_1c_3(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& - 8c_2^2(-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& + (-36c_2c_1c_3 + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(4/3)} \\
& - 96c_1c_3c_2^2 + 16c_2^4))^{(1/2)} (\sqrt{r^2 - 1} - \sinh(\xi_{12})) / (cc_3(-36c_2c_1c_3 \\
& + 108c_0c_3^2 + 8c_2^3 \\
& + 12\sqrt{3}\sqrt{4c_1^3c_3 - c_1^2c_2^2 - 18c_2c_1c_3c_0 + 27c_0^2c_3^2 + 4c_0c_2^3c_3})^{(2/3)} \\
& a(\cosh(\xi_{12}) + r))
\end{aligned}$$

เมื่อค่า ξ , k , l เท่ากับค่า ξ , k , l ในภาคผนวก ก

ประวัติผู้วิจัย

- ชื่อ : นางสาววัลลัฏฐิ์ เลียงตระกูลงาม
ชื่อวิทยานิพนธ์ : การหาคำตอบเชิงวิเคราะห์ในรูปการเคลื่อนตัวของคลื่นของสมการ
ความร้อนแบบไม่เชิงเส้น
สาขาวิชา : คณิตศาสตร์ประยุกต์

ประวัติ

ประวัติส่วนตัวเกิดวันที่ 4 มีนาคม พ.ศ. 2524

ประวัติการศึกษา สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรี วิทยาศาสตร์บัณฑิต (วท.บ.) จากสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ ในปี พ.ศ.2546 และเข้าศึกษาในหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต ในสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ ในปีการศึกษา 2546