วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh 62(692) May–Aug, 2017
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
http://MathThai.Org MathThaiOrg@gmail.com

จำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
Isosceles Triangular Numbers

สมพงค์ จิตต์มั่น กำพล อวชัย และ พุทธิชัย ตันลา
Somphong Jitman[1] Kampon Awachai[2] and Phutthichai tanla[3]

[1-3]Department of Mathematics, Faculty of Science, Silpakorn University,
Nakhon Pathom 73000, Thailand

Email: [1]sjitman@gmail.com [2]kumpalow1994@gmail.com [3]okipanza21@gmail.com

บทคัดย่อ

จำนวนสามเหลี่ยมเป็นจำนวนที่น่าสนใจและมีการศึกษาอย่างต่อเนื่องมายาวนาน ในงานวิจัยนี้เราสนใจจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วซึ่งเป็นนัยทั่วไปของจำนวนสามเหลี่ยม พิจารณาสมบัติต่างๆ ของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และเงื่อนไขจำเป็นสำหรับจำนวนเต็มบวกที่เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จำแนกจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคู่และจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคี่ นอกจากนี้ยังได้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วและจำนวนหลายเหลี่ยมด้านเท่าอีกด้วย

คำสำคัญ: จำนวนสามเหลี่ยม จำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จำนวนหลายเหลี่ยมด้านเท่า

ABSTRACT

Triangular numbers have been of interest and extensively studied. In this work, we focus on an isosceles triangular number which is a generalization of a triangular number. Properties of isosceles triangular numbers have been determined together with a necessary condition for a positive integer to be isosceles triangular. Characterizations of odd and even isosceles triangular numbers have been also provided. Finally, links between isosceles triangular numbers and regular polygonal numbers has been given as well.

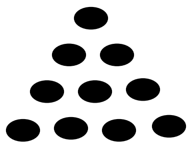
Keywords: Triangular Numbers, Isosceles Triangular Numbers, Regular Polygonal Numbers

1. บทนำ

จำนวนสามเหลี่ยม คือ จำนวนเชิงรูป (Figurate Number) ซึ่งสามารถเขียนแทนด้วยจุดในระนาบเรียงกันเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า [1-3] อีกนัยหนึ่ง จำนวนสามเหลี่ยมอันดับที่ n คือจำนวนของจุดในสามเหลี่ยมด้านเท่าที่แต่ละด้านยาว n ซึ่งมีค่าเท่ากับผลรวมของจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง n เรานิยมเขียนแทนจำนวนสามเหลี่ยมอันดับที่ n ด้วย

$$T(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

จำนวนสามเหลี่ยมถูกศึกษามาอย่างยาวนานตั้งแต่สมัยกรีกโบราณ ดังเห็นได้จากที่สำนักปีทาโกเรียนเคารพรูป Tetractys ซึ่งเป็นรูปจำนวนสามเหลี่ยม $T(4) = 1 + 2 + 3 + 4$ ซึ่งประกอบด้วยจุดทั้งหมด 10 จุด ดังรูปที่ 10



รูปที่ 1 Tetractys

ใน [4] ได้มีการศึกษาสมบัติต่างที่น่าสนใจของจำนวนสามเหลี่ยมซึ่งสรุปได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.1 สำหรับแต่ละจำนวนนับ n ได้ว่าจำนวนสามเหลี่ยมอันดับที่ n คือ

$$T(n) = \frac{(n+1)n}{2} = \binom{n+1}{2}$$

เมื่อ $\binom{n+1}{2}$ คือสัมประสิทธิ์ทวินาม

ทฤษฎีบท 1.2 ผลรวมของจำนวนสามเหลี่ยม 2 จำนวนที่เรียงติดกันเป็นกำลังสองสมบูรณ์

ทฤษฎีบท 1.3 ให้ N เป็นจำนวนนับ จะได้ว่า N เป็นจำนวนสามเหลี่ยมก็ต่อเมื่อ $8N + 1$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์

เรากล่าวว่า จำนวนสามเหลี่ยม N เป็นจำนวนสามเหลี่ยมคู่ ถ้า N เป็นจำนวนคู่ และกล่าวว่าจำนวนสามเหลี่ยม N เป็นจำนวนสามเหลี่ยมคี่ ถ้า N เป็นจำนวนคี่ ใน [4] ได้จำแนกจำนวนสามเหลี่ยมคู่และจำนวนสามเหลี่ยมคี่ไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.4 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก ได้ว่า T(n) เป็นจำนวนสามเหลี่ยมคู่ ก็ต่อเมื่อ $n \equiv 0 \bmod 4$ หรือ $n \equiv 3 \bmod 4$

ทฤษฎีบท 1.5 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก ได้ว่า T(n) เป็นจำนวนสามเหลี่ยมคี่ ก็ต่อเมื่อ $n \equiv 1 \bmod 4$ หรือ $n \equiv 2 \bmod 4$

นอกจากนี้มีการศึกษาเอกลักษณ์ต่าง ๆ ของจำนวนสามเหลี่ยมใน [3] ศึกษาและประยุกต์ใช้จำนวนสามเหลี่ยมทางทฤษฎีจำนวนใน [5-6]

งานวิจัยนี้เราสนใจจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วซึ่งเป็นนัยทั่วไปของจำนวนสามเหลี่ยม เรากล่าวถึงสมบัติพื้นฐานและเงื่อนไขจำเป็นสำหรับการเป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วในหัวข้อที่ 2 ศึกษาจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคู่และจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคี่ในหัวข้อที่ 3 นอกจากนี้เราได้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วและจำนวนหลายเหลี่ยมด้านเท่าในหัวข้อที่ 4

2. จำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ในหัวข้อนี้เราแนะนำและศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว พร้อมทั้งให้เงื่อนไขที่จำเป็นของการเป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วไว้ด้วย

สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n และ l จำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว – l อันดับที่ n (n^{th} l-isosceles Triangular Number) คือ จำนวนเต็มบวกซึ่งอยู่ในรูปอนุกรมเลขคณิต

$$1+(1+l)+(1+2l)+\ldots+(1+(n-1)l)$$

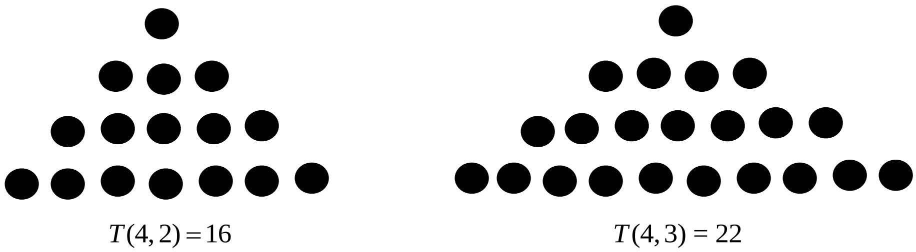
ในที่นี้จะเขียนแทนด้วย $T(n, l)$ นั่นคือ

$$T(n,l)=\sum_{i=1}^{n}\left(1+(i-1)l\right)=1+(1+l)+(1+2l)+\ldots+(1+(n-1)l)$$

ในกรณีที่ n และ l ไม่เฉพาะเจาะจงหรือมีความชัดเจนในบริบทที่กำลังพิจารณาเราจะเรียกจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $-l$ ว่า จำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว สำหรับกรณี $l = 1$ เราจะเห็นได้ชัดว่า $T(n, 1)$ คือ จำนวนสามเหลี่ยม $T(n)$

จากนิยามข้างต้นสังเกตได้ว่าจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว N สามารถแสดงได้ด้วยการเรียงของจุด N จุดในระนาบเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ซึ่งสอดคล้องกับการกำหนดชื่อของจำนวนชนิดนี้

ตัวอย่าง 2.1 พิจารณา $T(4, 2) = 1+3+5+7 = 16$ และ $T(4, 3) = 1+4+7+10 = 22$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วซึ่งแสดงด้วยจุดบนระนาบดังรูปที่ 2



รูปที่ 2 T(4, 2) = 16 และ T(4, 3) = 22

เราสามรถจัดรูปผลรวมในอนุกรมเลขคณิตของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้ดังนี้

บทตั้ง 2.2 สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n และ l ได้ว่า

$$T(n,l) = n + \frac{n(n-1)l}{2}$$

พิสูจน์ ให้ n และ l เป็นจำนวนเต็มบวก ได้ว่า

$$\begin{aligned} T(n,l) &= 1+(1+l)+(1+2l)+\ldots+(1+(n-1)l) \\ &= n+l(1+2+3+\ldots+(n-1)) \\ &= n+\frac{n(n-1)l}{2} \end{aligned}$$ ■

จำนวนสามเหลี่ยมและจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีความสัมพันธ์กันดังแสดงในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.3 สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n และ $l > i$ ได้ว่า

$$T(n,l) = iT(n-1) + T(n,l-i)$$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเต็มบวก n, l และ i โดยที่ $l > i$ จากบทนิยามของจำนวนสามเหลี่ยมและจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} iT(n-1)+T(n,l-i) &= i\frac{n(n-1)}{2}+n+\frac{n(n-1)(l-i)}{2} \\ &= n+\frac{n(n-1)(i+l-i)}{2} \\ &= n+\frac{n(n-1)l}{2} \\ &= T(n,l) \end{aligned}$$

■

เมื่อพิจารณาทฤษฎีบท 2.3 ในกรณี $i = l$ เราได้บทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 2.4 สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n และ $l \geq 2$ ได้ว่า

$$T(n,l) = T(n-1) + T(n,l-1)$$

<u>ตัวอย่าง 2.5</u> พิจารณา $n = 5$ และ $l = 4$ ได้ว่า

$$45 = T(5,4) = T(4) + T(5,3) = 2T(4) + T(5,2) = 3T(4) + T(5,1)$$

ต่อไปเราจะพิจารณาเงื่อนไขจำเป็นสำหรับการเป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ทฤษฎีบท 2.6 ให้ l และ N เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า N เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว – l แล้ว $8lN + (l\text{-}2)^2$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์

พิสูจน์ สมมติให้ N เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว – l ได้ว่า $N = n+\frac{n(n-1)l}{2}$ สำหรับบางจำนวนนับ n ซึ่งทำให้

$$\begin{aligned} 8lN+(l-2)^2 &= 8ln+4n(n-1)l^2+(l-2)^2 \\ &= 4n^2l^2-4nl(l-2)+(l-2)^2 \\ &= (2nl-(l-2))^2 \end{aligned}$$

นั้นคือ $8lN + (l\text{-}2)^2$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์ตามต้องการ ■

สำหรับกรณี $l = 1$ เราได้ว่าเงื่อนไขจำเป็นในทฤษฎีบท 2.6 เป็นเงื่อนไขเพียงพอด้วยซึ่งเห็นได้จากทฤษฎีบท 1.3

3. จำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคู่และจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคี่

ในหัวข้อนี้เราพิจารณาภาวะคู่-คี่ของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และได้จำแนกจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคู่และจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคี่ไว้ด้วย

สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n และ l เรากล่าวว่าจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $T(n, l)$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคู่ ก็ต่อเมื่อ $T(n, l)$ เป็นจำนวนเต็มคู่ และกล่าวว่า $T(n, l)$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคี่ ก็ต่อเมื่อ $T(n, l)$ เป็นจำนวนเต็มคี่

เราสามารถจำแนกภาวะคู่–คี่ของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วตามภาวะคู่–คี่ของ l ได้ดังนี้

สำหรับกรณี l เป็นจำนวนคู่ เราได้ว่า $T(n, l)$ มีภาวะคู่หรือคี่เช่นเดียวกับ l ดังแสดงในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และให้ l เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ จะได้ว่า

1. $T(n, l)$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคู่ ก็ต่อเมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคู่
2. $T(n, l)$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคี่ ก็ต่อเมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่

พิสูจน์ เนื่องจาก l เป็นจำนวนเต็มคู่ ได้ว่า $l = 2m$ บางจำนวนนับ m
เพื่อจะพิสูจน์ข้อความ 1. สมมติให้ n เป็นจำนวนเต็มคี่ ได้ว่า $n = 2k + 1$ บาง $k \in \mathbb{N}$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} T(2k+1, 2m) &= (2k+1) + \frac{(2k)(2k+1)(2m)}{2} \\ &= 2k+1+(4k^2+2k)m \\ &= 4mk^2+2mk+2k+1 \\ &= 2(2mk^2+mk+k)+1 \end{aligned}$$

ในทางกลับกัน สมมติให้ n เป็นจำนวนเต็มคู่ ได้ว่า $n = 2k$ บาง $k \in \mathbb{N}$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} T(2k, 2m) &= 2k + \frac{(2k-1)(2k)(2m)}{2} \\ &= 2k+(2k^2-k)(2m) \\ &= 4mk^2-2mk+2k \\ &= 2(2mk^2-km+k) \end{aligned}$$

ดังนั้น $T(n, l)$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคู่

เนื่องจากข้อความ 2. และข้อความ 1. สมมูลกัน ดังนั้นการพิสูจน์จึงเสร็จสิ้นสมบูรณ์ ■

สำหรับกรณีที่ l เป็นจำนวนเต็มคี่ เราได้ผลลัพธ์ในทำนองเดียวกับกรณี $l = 1$ ในทฤษฎีบท 1.4 และทฤษฎีบท 1.5 ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.2 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และให้ l เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ จะได้ว่า

1. $T(n, l)$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคู่ ก็ต่อเมื่อ $n \equiv 0 \bmod 4$ หรือ $n \equiv 3 \bmod 4$
2. $T(n, l)$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคี่ ก็ต่อเมื่อ $n \equiv 1 \bmod 4$ หรือ $n \equiv 2 \bmod 4$

พิสูจน์ เนื่องจาก l เป็นจำนวนเต็มคู่ ได้ว่า $l = 2m + 1$ บางจำนวนนับ m เพื่อจะพิสูจน์ข้อความ 1. สมมติให้ $n \not\equiv 0 \bmod 4$ และ $n \not\equiv 3 \bmod 4$ ทำให้ได้ว่า $n = 4k + 1$ หรือ $n = 4k + 2$ สำหรับบางจำนวนเต็ม k

กรณีที่ 1 $n = 4k + 1$ ได้ว่า

$$\begin{aligned} T(n,l) &= T(4k+1, 2m+1) \\ &= 4k+1+\frac{(4k)(4k+1)(2m+1)}{2} \\ &= 4k+1+(8k+2)(2m+1) \\ &= 16km+4m+12k+3 \\ &= 4m(4k+1)+3(4k+1) \end{aligned}$$

นั่นคือ $T(n, l)$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคี่

กรณีที่ 2 $n = 4k + 2$ ได้ว่า

$$\begin{aligned} T(n,l) &= T(4k+2, 2m+1) \\ &= 4k+2+\frac{(4k+1)(4k+2)(2m+1)}{2} \\ &= 4k+2+(14k+1)(2m+1) \\ &= 28km+2m+18k+3 \\ &= 2m(14k+1)+18k+3 \end{aligned}$$

นั้นคือ $T(n, l)$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคี่

ในทางกลับกันสมมุติให้ $n \equiv 0 \bmod 4$ หรือ $n \equiv 3 \bmod 4$ ทำให้ได้ว่า $n = 4k$ หรือ $n = 4k + 3$ สำหรับบางจำนวนเต็ม k

กรณีที่ 1 $n = 4k$ ได้ว่า

$$\begin{aligned}
T(n,l) &= T(4k, 2m+1) \\
&= 4k + \frac{(4k-1)(4k)(2m+1)}{2} \\
&= 4k + 16mk2 - 4km - 2k \\
&= 2k(8mk - 2m - 1)
\end{aligned}$$

นั่นคือ $T(n, l)$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคู่

กรณีที่ 2 $n = 4k + 3$ ได้ว่า

$$\begin{aligned}
T(n,l) &= T(4k+3, 2m+1) \\
&= 4k + 3 + \frac{(4k+2)(4k+3)(2m+1)}{2} \\
&= 16mk^2 + 20mk + 22k + 6m + 6 \\
&= 2(8mk^2 + 10mk + 11k + 3m + 3)
\end{aligned}$$

นั่นคือ $T(n, l)$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วคู่

เนื่องจากข้อความ 2. และข้อความ 1. สมมูลกัน ดังนั้นการพิสูจน์จึงเสร็จสิ้นสมบูรณ์ ■

เมื่อพิจารณาผลบวกของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว–l สองจำนวนที่เรียงถัดกัน $T(n, l) + T(n+1, l)$ เราพบว่าสำหรับกรณีที่ l เป็นจำนวนคู่ โดยทฤษฎีบท 3.1 ได้ว่าผลรวมดังกล่าวเป็นจำนวนคี่เสมอ

บทแทรก 3.3 ให้ l เป็นจำนวนคู่ ได้ว่า $T(n, l) + T(n+1, l)$ เป็นจำนวนคี่ทุกจำนวนนับ n

สำหรับกรณี l เป็นจำนวนคี่ โดยทฤษฎีบท 3.2 เราได้ว่าผลบวกของจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $T(n, l) + T(n+1, l)$ มีภาวะคู่คี่ ดังแสดงในบทแทรกต่อไปนี้

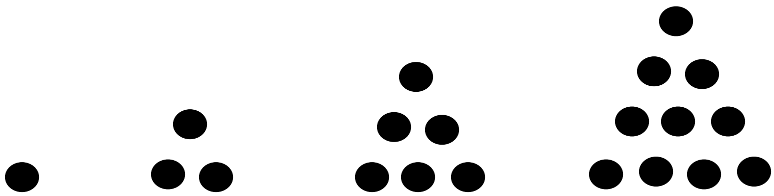
บทแทรก 3.4 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และให้ l เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ ได้ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

1. ถ้า $n \equiv 0 \bmod 4$ แล้ว $T(n, l) + T(n+1, l)$ เป็นจำนวนคี่
2. ถ้า $n \equiv 1 \bmod 4$ แล้ว $T(n, l) + T(n+1, l)$ เป็นจำนวนคู่
3. ถ้า $n \equiv 2 \bmod 4$ แล้ว $T(n, l) + T(n+1, l)$ เป็นจำนวนคี่
4. ถ้า $n \equiv 3 \bmod 4$ แล้ว $T(n, l) + T(n+1, l)$ เป็นจำนวนคู่

4. จำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วและจำนวน *m* เหลี่ยมด้านเท่า

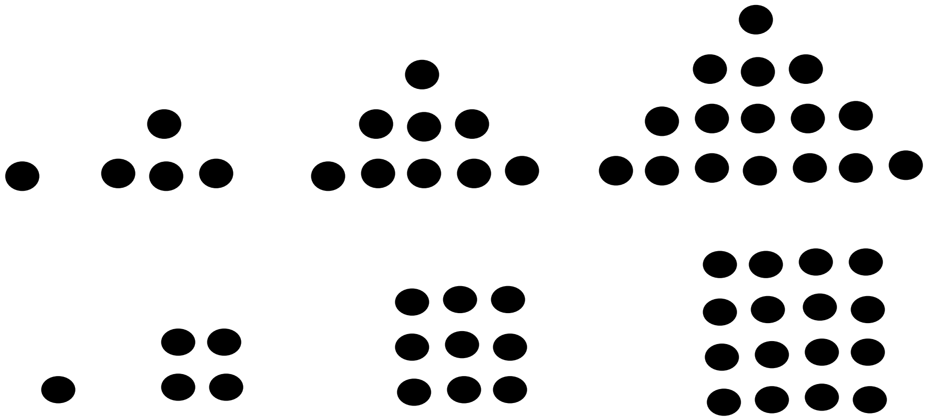
ในหัวข้อนี้เรากล่าวถึงจำนวนหลายเหลี่ยมด้านเท่า [1] และแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนหลายเหลี่ยมด้านเท่าและจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่วไว้ด้วย

เมื่อเราพิจารณาจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $T(n, 1)$ พบว่าเป็นจำนวนสามเหลี่ยม (ด้านเท่า) $T(n)$ เมื่อนับจำนวนจุดบนระนาบซึ่งเขียนแทนจำนวนสามเหลี่ยมดังกล่าวได้เป็นลำดับ 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, … ซึ่งเรียกว่าลำดับของจำนวนสามเหลี่ยมด้านเท่า [7, Sloane’s A000217] ดังตัวอย่างในรูปที่ 3



รูปที่ 3 จำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $T(n, 1)$ หรือจำนวนสามเหลี่ยมด้านเท่า
เมื่อ n = 1, 2, 3 และ 4 ตามลำดับ

เราเรียกจำนวนเต็มบวกซึ่งเป็นกำลังสองสมบูรณ์ได้ว่า*จำนวนสี่เหลี่ยมด้านเท่า* ซึ่งสามารถเขียนแทนด้วยจุดบนระนาบเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่านั่นเอง เมื่อเราพิจารณาจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $T(n, 2)$ ได้ $T(n, 2)$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์ซึ่งสามารถเขียนแทนด้วยจุดบนระนาบเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งลำดับของจำนวนคือ 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, . . . ซึ่งเรียกว่าลำดับจำนวนสี่เหลี่ยมด้านเท่า [7, Sloane’s A000290]



รูปที่ 4 จำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $T(n, 2)$ หรือจำนวนสี่เหลี่ยมด้านเท่า

เมื่อ n = 1, 2, 3 และ 4 ตามลำดับ

เราได้ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนสี่เหลี่ยมด้านเท่าและจำนวนสามเหลี่ยมคางหมู $T(n, 2)$ ดังนี้

บทตั้ง 4.1 สำหรับแต่ละจำนวนนับ n ได้ว่า $T(n, 2)$ เป็นจำนวนสี่เหลี่ยมด้านเท่า

พิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก ได้ว่า

$$T(n,2) = n + \frac{n(n-1)2}{2} = n + n^2 - n = n^2$$

ซึ่งเป็นจำนวนสี่เหลี่ยมด้านเท่าตามต้องการ ■

สำหรับกรณีทั่วไปเราจะพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนหลายเหลี่ยมด้านเท่าและจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จำนวนหลายเหลี่ยมด้านเท่าเป็นอนุกรมเลขคณิตซึ่งกล่าวถึงใน [1] สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n และ m จำนวน m เหลี่ยมด้านเท่าอันดับที่ n (n^{th} m-Gonal Number) คือ จำนวนในรูปอนุกรมเลขคณิต

$$S(n,m) = 1 + (1+(m-2)) + (1+2(m-2)) + \ldots + (1+(n-1)(m-2))$$

จาก [1] ได้ว่าจำนวนจุดของจำนวน m เหลี่ยมด้านเท่าอันดับที่ n สามารถจัดเรียงเป็นรูป m เหลี่ยมด้านเท่าซึ่งด้านยาวด้านละ n นอกจากนี้เราได้

ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน m เหลี่ยมด้านเท่า และจำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว–l ดังนี้

ทฤษฎีบท 4.2 สำหรับจำนวนเต็มบวก n และ l ได้ว่า

$$S(n,l+2)=T(n,l)$$

พิสูจน์ เมื่อคำนวณผลรวมของอนุกรม $S(n, l+2)$ ได้ว่า

$$\begin{aligned} S(n.l+2) &= \frac{n(1+1+(l+2-2)(n-1))}{2} \\ &= \frac{n(l(n-1)+2)}{2} \\ &= n+\frac{n(n-1)l}{2} \\ &= T(n,l) \end{aligned}$$

ตามต้องการ ■

เอกสารอ้างอิง

[1] E. Deza and M. M. Deza, *Figurate Numbers*, Singapore: World Scientific Publishing Company, 2012.

[2] J. L. Pietempol, “Square triangular numbers,” *The American Mathematical Monthly*, vol. 169, pp. 168-169, 1962.

[3] T. J. Trotter, “Some identities for the triangular numbers” *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 6, pp. 128-135, 1973.

[4] P. J. Berana, J. Montalbo and D. Magpantay, “On triangular and trapezoidal numbers,” *Asia Pacific Journal of Multidisciplinary Research*, vol. 3, pp.76-81, 2015.

[5] H. Hindin, “Stars, hexes, triangular numbers and Pythagorean triples,” *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 16, pp. 191-193, 1983-1984.

[6] W. L. McDaniel, “Triangular numbers in the Pell sequence,” *The Fibonacci Quarterly*, vol. 34, pp. 105-107, 1996.

[7] N. J. A. Sloane. 2017. *On-line encyclopedia of integer sequences*. Retrieved 2 May 2017 from http://oeis.org/