วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh 62(692) May–Aug, 2017
โดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
http://MathThai.Org MathThaiOrg@gmail.com

อสมการแอร์ดิช-มอร์เดล

Erdös-Mordell Inequality

ภัคคินี ชิตสกุล
Pakkinee Chitsakul

Retired Associate Professor
Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang
Chalongkrung Rd., Bangkok, 10520, Thailand

Email: jimreivat99@gmail.com

บทคัดย่อ

บทความนี้แสดงวิธีการพิสูจน์อสมการแอร์ดิช-มอร์เดล ซึ่งกล่าวว่าสำหรับสามเหลี่ยมใดๆ ที่มีจุดหนึ่งอยู่ภายในสามเหลี่ยมนั้นแล้ว ผลบวกของระยะตั้งฉากจากจุดนั้นไปยังด้านทั้งสามของสามเหลี่ยม มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับครึ่งหนึ่งของผลบวกของระยะจากจุดนั้นไปยังจุดยอดทั้งสามของสามเหลี่ยม โดยใช้การพิสูจน์ของ คลาวดิ แอลซินา และ โรเจอร์ บี เนลสัน ซึ่งตีพิมพ์ใน Forum Geometricorum V7(2007) 99-102 เป็นเอกสารอ้างอิงหลัก

คำสำคัญ: อสมการแอร์ดิช-มอร์เดล ด้านตรงข้ามมุมฉาก สามเหลี่ยมคล้าย

ABSTRACT

The article shows the proof of Erdös-Mordell inequality for any triangle, there exist a point inside the triangle which the sum of the orthogonal projection from the point to all three sides is less than or equal to half of the sum of the distance from the point to the three vertices of the triangle. The proof is based on the work of Claudi Alsina and Roger B. Nelson which published in Forum Geometricorum V7(2007) 99-102.

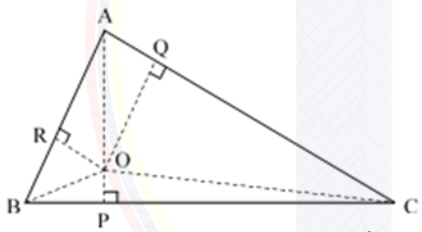
Keywords: Erdös-Mordell Inequality, Hypotenuse, Similar Triangle

1. บทนำ

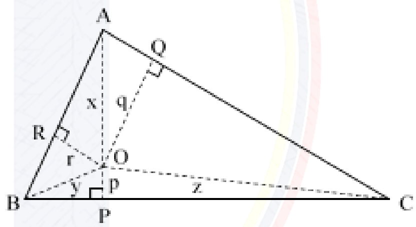
ให้ ΔABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ ให้ O เป็นจุดภายใน ΔABC ซึ่ง OP OQ และ OR ตั้งฉากกับด้าน BC CA และ AB ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า
$OA + OB + OC \geq 2\,(OP + OQ + OR)$ (รูปที่ 1)

ปัญหานี้ พอล แอร์ดิช แห่งมหาวิทยาลัยแมนเชสเตอร์ สหราชอาณาจักร ได้นำเสนอใน American Mathematical Monthly ในปี 1935 [1] และ แอล ทีมอร์เดล ร่วมกับ ดี เอฟ แบร์โรว์ ได้แสดงวิธีการพิสูจน์โดยนำเสนอใน American Mathematical Monthly ในปี 1937 [2] ถ้าแทนความยาวของเส้นตรง OP OQ และ OR ด้วย p q และ r ตามลำดับ และแทนความยาวของเส้นตรง OA OB และ OC ด้วย x y และ z ตามลำดับ ดังรูปที่ 2 แล้ว อสมการแอร์ดิช-มอร์เดล จะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$x + y + z \geq 2\,(p + q + z)$$



รูปที่ 1 ΔABC มี OP OQ และ OR ตั้งฉากด้าน BC CA และ AB



รูปที่ 2 x y z และ p q r ในอสมการแอร์ดิช-มอร์เดล

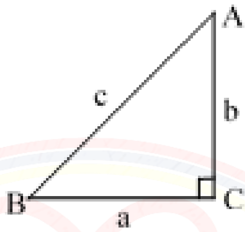
ในบทความนี้แสดงการพิสูจน์อสมการแอร์ดิช-มอร์เดล โดยใช้วิธีการพิสูจน์ของ คลาวดิ แอลชินา ร่วมกับ โรเจอร์ บี เนลสัน ซึ่งนำเสนอใน Forum geometricrum ในปี 2007 [3]

2. ด้านตรงข้ามมุมฉาก

บทตั้ง 1 ในสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ ด้านตรงข้ามมุมฉากเป็นด้านที่ยาวที่สุด

<u>สิ่งที่กำหนดให้</u> 1. ให้ ΔABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี $\hat{C} = 90^{o}$

2. ให้ a b และ c เป็นความยาวของด้านที่รองรับ $\hat{A}$ $\hat{B}$ และ $\hat{C}$ ตามลำดับดังรูปที่ 3 เรียก c ว่าด้านตรงข้ามมุมฉาก เรียก a และ b ว่าด้านประกอบมุมฉาก



รูปที่ 3 สิ่งที่กำหนดให้ตามบทตั้ง 1

<u>สิ่งที่ต้องการพิสูจน์</u> $c \geq a$ และ $c \geq b$

พิสูจน์

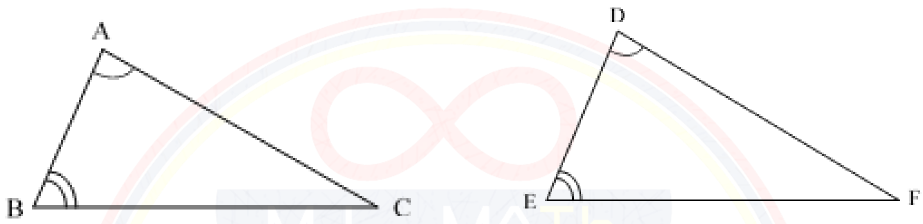
ข้อความพิสูจน์	เหตุผล
1. $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^{\circ}$	1. ผลบวกของมุมภายในทุกมุมของสามเหลี่ยมมีค่า 180°
2. $\hat{C} = 90^{\circ}$	2. กำหนดให้
3. $\hat{A} + \hat{B} = 90^{\circ}$	3. จาก 1 และ 2
4. $0 \leq \hat{A} \leq 90^{\circ}$ และ $0 \leq \hat{B} \leq 90^{\circ}$	4. จาก 3
5. $0 \leq \sin A \leq 1$ และ $0 \leq \sin B \leq 1$	5. จาก 4 ดำเนินการหาค่าไซน์
6. $\sin A = \frac{a}{c}$ และ $\sin B = \frac{b}{c}$	6. นิยามไซน์จากรูปที่ 3
7. $0 \leq \frac{a}{c} \leq 1$ และ $0 \leq \frac{b}{c} \leq 1$	7. จาก 5 และ 6
8. $a \leq c$ หรือ $c \geq a$ $b \leq c$ หรือ $c \geq b$	8. จาก 7

3. สามเหลี่ยมคล้าย

บทตั้ง 2 สามเหลี่ยมสองรูปที่มีมุมภายในสองมุมเท่ากันมุมต่อมุมแล้วสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเป็นสามเหลี่ยมคล้าย และการอ้างอิงบทตั้งนี้จะใช้ว่า มุม-มุม

<u>สิ่งที่กำหนดให้</u> 1. ให้ ΔABC และ ΔDEF เป็นสามเหลี่ยมใดๆ สองรูป

2. ให้ $\hat{A} = \hat{D}$ และ $\hat{B} = \hat{E}$ ดังรูปที่ 4



รูปที่ 4 สิ่งที่กำหนดให้ตามบทตั้ง 2

<u>สิ่งที่ต้องการพิสูจน์</u> ΔABC □ ΔDEF

พิสูจน์

ข้อความพิสูจน์	เหตุผล
1. $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$	1. ผลบวกของมุมภายในทุกมุมของสามเหลี่ยมมีค่า 180°
2. $\hat{D} + \hat{E} + \hat{F} = 180^\circ$	2. ในทำนองเดียวกับ 1
3. $\hat{A} = \hat{D}$ และ $\hat{B} = \hat{E}$	3. กำหนดให้
4. $\hat{C} = \hat{F}$	4. จาก 1 2 และ 3
5. ΔABC □ ΔDEF	5. จาก 1 2 และ 3

4. อสมการที่ช่วยในการพิสูจน์อสมการแอร์ดิช-มอร์เดล

บทตั้ง 3 สำหรับ ΔABC ดังรูปที่ 2 อสมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$ax \geq br + cq$$

$$by \geq ar + cp$$

$$cz \geq aq + bp$$

<u>สิ่งที่กำหนดให้</u> 1. ให้ ΔABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ ที่มี a b และ c เป็นความยาวของด้าน BC CA และ AB ตามลำดับ

2. ให้ O เป็นจุดใดๆ ภายใน ΔABC

3. ให้ $OP \perp BC$ $OQ \perp CA$ และ $OR \perp AB$

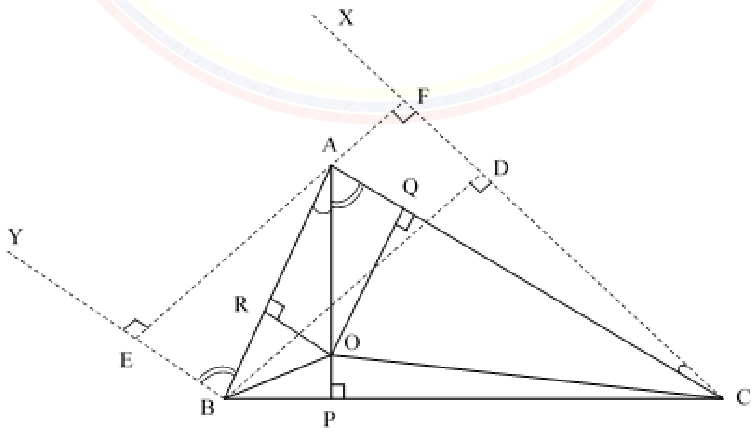
4. ให้ p q และ r เป็นความยาวของ OP OQ และ OR ตามลำดับ

5. ให้ x y และ z เป็นความยาวของ OA OB และ OC ตามลำดับ

<u>สิ่งที่ต้องการพิสูจน์</u> $ax \geq br + cq$

สำหรับการพิสูจน์ $by \geq ar + cp$ และ $cz \geq aq + bp$ สามารถดำเนินการได้ในทำนองเดียวกัน

<u>สร้างเพื่อการพิสูจน์</u>



รูปที่ 5 สร้างเพื่อการพิสูจน์สำหรับบทตั้ง 3

1. ลาก CX ให้ $O\hat{A}B = A\hat{C}X$
2. ลาก BY ให้ $O\hat{A}C = A\hat{B}Y$
3. ลาก $AF \perp CX$ ที่ F
4. ลาก $AE \perp BY$ ที่ E
5. ลาก $BD \perp CF$ ที่ D ดังรูปที่ 5

พิสูจน์

ข้อความพิสูจน์	**เหตุผล**
1. $O\hat{A}R = A\hat{C}F$	1. สร้างเพื่อการพิสูจน์
2. $O\hat{R}A = A\hat{F}C$	2. กำหนดให้แต่ละมุมมีค่า 90^o
3. ΔORA □ ΔAFC	3. มุม-มุม จาก 1 และ 2
4. $\frac{OA}{AC} = \frac{OR}{AF}$	4. จาก 3 สมบัติของสามเหลี่ยมคล้าย อัตราส่วนความยาวของด้านที่สมนัยกันทุกคู่เป็นอัตราส่วนที่เท่ากัน
5. ΔOQA □ ΔAEB	5. ในทำนองเดียวกับ 3 ($O\hat{A}Q = A\hat{B}Y$ และ $O\hat{Q}A = A\hat{E}B = 90^\circ$)
6. $\frac{OA}{AB} = \frac{OQ}{AE}$	6. จาก 5 ในทำนองเดียวกับ 4
7. $O\hat{A}R + O\hat{R}A + A\hat{O}R = 180^o$	7. มุมภายในของสามเหลี่ยมรวมกันมีค่า 180° (ΔORA)
8. $O\hat{A}R + A\hat{O}R = 90^o$	8. จาก 7 เมื่อ $O\hat{R}A = 90^\circ$
9. $A\hat{O}R = C\hat{A}F$	9. จาก 3 มุมที่สมนัยกันของสามเหลี่ยมคล้าย
10. $O\hat{A}R + C\hat{A}F = 90^o$	10. จาก 8 และ 9
11. $O\hat{A}Q + B\hat{A}E = 90^o$	11. ในทำนองเดียวกับ 10
12. $B\hat{A}E + O\hat{A}R + O\hat{A}Q + C\hat{A}F = 180^o$	12. จาก 10 และ 11 รวมกัน

13. EF = AE + AF	13. จาก 12 มุม 180˚ คือมุมบนเส้นตรง
14. EF $\perp$ CX และ EF $\perp$ BY	14. จาก 13 และสร้างเพื่อการพิสูจน์
15. $F\hat{E}B + E\hat{F}C = 180^{o}$	15. จาก 14
16. CX // BY มี EF เป็นเส้นตัดขวาง	16. สมบัติของเส้นขนาน ผลบวกของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดขวางเส้นตรงสองเส้นมีค่ารวมกัน 180˚ แล้วเส้นตรงสองเส้นขนานกัน
17. $B\hat{D}C = 90^{o}$, $E\hat{F}C = 90^{o}$	17. สร้างเพื่อการพิสูจน์
18. EF // BD มี CX เป็นเส้นตัดขวาง	18. จาก 14 สมบัติของเส้นขนาน มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดขวางเส้นตรงสองเส้นมีค่าเท่ากัน แล้วเส้นตรงสองเส้นขนานกัน
19. EF = BD	19. จาก 16 ระยะตั้งฉากระหว่างเส้นคู่ขนานมีค่าคงที่ (CX // BY)
20. BC $\geq$ BD	20. จากบทตั้ง 1 เมื่อ ΔBDC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี $B\hat{D}C$ เป็นมุมฉาก และ BC เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก
21. BC $\geq$ EF	21. จาก 19 และ 20
22. OA • AF = OR • AC	22. จาก 4
23. OA • AE = OQ • AB	23. จาก 6
24. OA (AF + AE) = OR • AC + OQ • AB	24. นำ 22 และ 23 บวกกัน
25. OA • EF = OR • AC + OQ • AB	25. จาก 13 และ 24
26. OA • BC $\geq$ OA • EF	26. จาก 21

27. $OA \cdot BC \geq OR \cdot AC + OQ \cdot AB$ หรือ $ax \geq br + cq$	27. จาก 25 และ 26

5. อสมการแอร์ดิช-มอร์เดล

ทฤษฎีหลัก ให้ ΔABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ ที่มี O เป็นจุดภายในสามเหลี่ยม p q และ r เป็นระยะตั้งฉากจากจุด O ไปยังด้านทั้งสามของสามเหลี่ยม x y และ z เป็นระยะจากจุด O ไปยังจุดยอดทั้งสามของสามเหลี่ยมแล้ว $x + y + z \geq 2(p + q + r)$

พิสูจน์ สำหรับ $a > 0$, $b > 0$ และ $c > 0$ เมื่อ a, b และ c เป็นความยาวของด้านที่รองรับ $\hat{A}$, $\hat{B}$ และ $\hat{C}$ ของ ΔABC ตามลำดับ จะได้

$$(a - c)^2 = a^2 - 2ac + c^2 \geq 0$$
$$(b - c)^2 = b^2 - 2bc + c^2 \geq 0$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

จัดสมการใหม่จะได้อสมการ ดังนี้

$$a^2 + c^2 \geq 2ac$$
$$b^2 + c^2 \geq 2bc$$
$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

หรือ

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2 \quad (1)$$
$$\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2 \quad (2)$$
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \quad (3)$$

จากบทตั้ง 3

$$ax \geq br + cq$$
$$by \geq ar + cp$$
$$cz \geq aq + bp$$

จัดอสมการใหม่ จะได้
$$x \ge \frac{b}{a}r + \frac{c}{a}q \qquad (4)$$
$$y \ge \frac{a}{b}r + \frac{c}{b}p \qquad (5)$$
$$z \ge \frac{a}{c}q + \frac{b}{c}p \qquad (6)$$

นำ (4) + (5) + (6) จะได้
$$x + y + z \ge (\frac{b}{a} + \frac{a}{b})r + (\frac{c}{a} + \frac{a}{c})q + (\frac{c}{b} + \frac{b}{c})p \qquad (7)$$

จาก (1), (2), (3) จะได้
$$(\frac{b}{a} + \frac{a}{b})r + (\frac{c}{a} + \frac{a}{c})q + (\frac{c}{b} + \frac{b}{c})p \ge 2(r+q+p)$$

ดังนั้น $x + y + z \ge 2\,(r + p + q)$

หรือ $r + p + q \le \frac{1}{2}(x + y + z)$

6. กรณีเท่ากันในอสมการแอร์ดิช-มอร์เดล

บทแทรก ให้ ΔABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มี O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม ลาก AO, BO และ CO ไปตัด BC, CA และ AB ที่ P, Q และ R ตามลำดับ

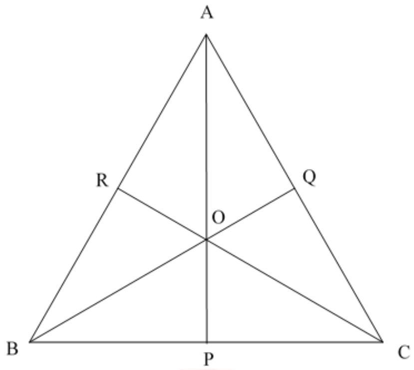
<u>จงพิสูจน์ว่า</u> 1. OP OQ และ OR ตั้งฉากกับ BC CA และ AB ตามลำดับ

2. AO + BO + CO = 2 (OP + OQ + OR)

<u>สิ่งที่กำหนดให้</u> 1. ΔABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า

2. O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบ ΔABC

3. ลาก AO, BO และ CO ไปตัด BC, CA และ AB ที่ P, Q และ R ตามลำดับ ดังรูปที่ 6



รูปที่ 6 สิ่งที่กำหนดให้ตามบทแทรก

<u>สิ่งที่ต้องการพิสูจน์</u> 1. $OP \perp BC$, $OQ \perp CA$ และ $OR \perp AB$

2. $AO + BO + CO = 2\,(OP + OQ + OR)$

พิสูจน์

ข้อความพิสูจน์	เหตุผล
1. $BO = CO$	1. รัศมีของวงกลมเดียวกันย่อมเท่ากัน
2. $AB = AC$	2. ด้านของ ΔABC ซึ่งเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า
3. $\Delta AOB \cong \Delta AOC$	3. ด้าน – ด้าน – ด้าน จาก 1, 2 และมี AO เป็นด้านร่วม
4. $O\hat{A}B = O\hat{A}C$	4. จาก 3 มุมในลำดับเดียวกันของสามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการย่อมเท่ากัน
5. $A\hat{B}P = A\hat{C}P$	5. มุมของ ΔABC ซึ่งเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า
6. $\Delta ABP \cong \Delta ACP$	6. มุม – ด้าน – มุม จาก 4, 2 และ 5
7. $BP = CP$	7. จาก 6 ด้านในลำดับเดียวกันของสามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการย่อมเท่ากัน
8. $A\hat{P}B = A\hat{P}C$	8. จาก 6 มุมในลำดับเดียวกันของสามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการย่อมเท่ากัน

9. $A\hat{P}B + A\hat{P}C = 180^\circ$	9. เส้นตรงเส้นหนึ่งตั้งอยู่บนเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง มุมประชิดรวมกันมีค่า 180° (เส้นตรง AP ตั้งอยู่บนเส้นตรง BC ณ จุด P)
10. $A\hat{P}B = A\hat{P}C = 90^\circ$	10. จาก 8 และ 9
11. $OP \perp BC$	11. จาก 10
12. $OQ \perp CA$ $OR \perp AB$	12. ในทำนองเดียวกับ 11
13. $A\hat{P}B = A\hat{Q}O = 90^\circ$	13. จาก 11 และ 12
14. $\Delta ABP \sim \Delta AOQ$	14. มุม – มุม จาก 4 และ 13
15. $\frac{AB}{AO} = \frac{BP}{OQ}$	15. จาก 14 ด้านที่อยู่ในลำดับเดียวกันของสามเหลี่ยมคล้ายเป็นสัดส่วนเท่ากัน
16. $BP + CP = BC$	16. ให้ P เป็นจุดบน BC
17. $BC = AB$	17. ด้านของ ΔABC ซึ่งเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า
18. $BP = \frac{1}{2}AB$	18. จาก 7, 16 และ 17
19. $AO = 2OQ$	19. จาก 15 และ 18
20. $BO = 2OR$ $CO = 2OP$	20. ในทำนองเดียวกับ 19
21. $AO + BO + CO = 2(OP + OR + OQ)$	21. จาก 19 และ 20

7. บทสรุป

อสมการแอร์ดิช-มอร์เดล สำหรับสามเหลี่ยมใดๆ ที่มีจุดหนึ่งจุดอยู่ภายในสามเหลี่ยมนั้นแล้ว ผลบวกของระยะทางจากจุดนั้นไปยังจุดยอดทั้งสามของสามเหลี่ยมมากกว่า หรือ เท่ากับสองเท่าของระยะตั้งฉากจากจุดนั้นไปยังด้านทั้ง

สามของสามเหลี่ยม โดยกรณีเท่ากันจะเป็นจริงเมื่อ สามเหลี่ยมเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า และจุดหนึ่งจุดภายในสามเหลี่ยมด้านเท่าต้องเป็นศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม

วิธีการที่ใช้ในการพิสูจน์อสมการแอร์ดิช-มอร์เดล ที่นำเสนอในบทความนี้ เป็นวิธีการที่ใช้ความรู้ทางเรขาคณิต และพีชคณิตที่ไม่ซับซ้อน ง่ายแก่การทำความเข้าใจ สำหรับการพิสูจน์ที่แตกต่างไปจากวิธีที่นำเสนอ ผู้สนใจสามารถศึกษาจาก [4] และ [5]

เอกสารอ้างอิง

[1] Paul Erdős, "American Mathematical Monthly," *Problem 3740*, vol. 42, pp. 396, 1935.

[2] Mordell L. J. and Barrow D. F., "American Mathematical Monthly," *Solution to 3740*, vol. 44, pp. 252-254, 1937.

[3] Claudi Alsina and Roger B. Nelsen, "Forum Geometricorum," *A Visual Proof of the Erdös-Mordell Inequality*, vol. 7, pp. 99-102, 2007.

[4] Michigan Math J., "The Michigan Mathematical Journal," *A Simple Proof of the Erdős-Mordell Inequality for Triangles*, vol. 4, pp. 97-98, 1957.

[5] Jian Liu, "International Electronic Journal," *A New Proof of the Erdős-Mordell Inequality*, vol. 4, no. 2, pp. 114-119, 2011.