บทที่ 5
ฟังก์ชันพื้นฐาน
(ELEMENTARY FUNCTIONS)

ในบทที่ 4 เราได้ศึกษาฟังก์ชันวิเคราะห์ และคุณสมบัติพื้นฐานของฟังก์ชันวิเคราะห์ นอกจากนั้นเรายังศึกษาความเกี่ยวข้องระหว่างฟังก์ชันวิเคราะห์ การมีคุณสมบัติของความต่อเนื่อง และคุณสมบัติการเป็นเซตคอมแพกต์ ในบทนี้เราจะศึกษาฟังก์ชันพื้นฐาน ซึ่งเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ที่มีการประยุกต์ในสาขาวิชาต่าง ๆ ได้แก่ ฟังก์ชันชี้กำลัง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก และฟังก์ชันลอการิทึม

5.1 ฟังก์ชันชี้กำลัง *(Exponential Functions)*

ในหัวข้อนี้จะนิยามฟังก์ชันชี้กำลังของจำนวนเชิงซ้อน และศึกษาคุณสมบัติพื้นฐานของฟังก์ชัน นอกจากนี้เราจะศึกษาอิมเมจของสับเซตใน $\boldsymbol{R}^2$ ภายใต้ฟังก์ชันชี้กำลัง

บทนิยาม 5.1.1 : ฟังก์ชันชี้กำลัง e^z หรือ $exp(z)$ นิยามสำหรับทุก $z = (x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ ดังนี้

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

สำหรับกรณีที่ $z = iy$ เราได้

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

ทฤษฎีบท 5.1.2 : ฟังก์ชันชี้กำลัง e^z มีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

(1) e^z เป็นฟังก์ชันเอนไทร์ และสอดคล้องกับ

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z$$

(2) $\cos y = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy})$

$\sin y = \frac{1}{2i}(e^{iy} - e^{-iy})$

(3) $| e^z | = e^x$

(4) $e^{z_1} . e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$

(5) $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$

(6) $e^z \neq 0$ สำหรับทุก $z = (x, y) \in \boldsymbol{R}^2$

(7) $e^{z + i2n\pi} = e^z$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม n

พิสูจน์ : ให้ $z = (x, y) \in \boldsymbol{R}^2$

(1) พิจารณา $e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = u(x, y) + iv(x, y)$

เมื่อ $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \sin y$

เราได้ว่า $u_x = e^x \cos y$, $u_y = -e^x \sin y$

$$v_x = e^x \sin y \quad , \quad v_y = e^x \cos y$$

นั่นคือ

$$u_x = v_y \quad \text{และ} \quad u_y = -v_x$$

ดังนั้น $u(x, y)$, $v(x, y)$ รวมทั้งอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งทั้งหมด เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และสอดคล้องกับสมการโคชีรีมันน์ โดยทฤษฎีบท 3.3.9 เราได้ว่า e^z มีอนุพันธ์ที่ทุก $z \in \boldsymbol{R}^2$ นั่นคือ e^z เป็นฟังก์ชันเอนไทร์ และ

$$\frac{d}{dz}(e^z) = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$$

(2) เนื่องจาก $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ และ

$$e^{-iy} = \cos(-y) + i \sin(-y)$$
$$= \cos y - i \sin y$$

เราได้ว่า $e^{iy} + e^{-iy} = 2 \cos y$ นั่นคือ

$$\cos y = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy})$$

ดังนั้น $e^{iy} - e^{-iy} = 2i \sin y$ เพราะฉะนั้น

$$\sin y = \frac{1}{2i}(e^{iy} - e^{-iy})$$

(3) พิจารณา $| e^z | = | e^x(\cos y + i \sin y) | = | e^x || \cos y + i \sin y |$

$$= e^x . 1 = e^x$$

(4) ให้ $z_1 = x_1 + iy_1$ และ $z_2 = x_2 + iy_2$ ดังนั้น

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ และ

$$\begin{aligned} e^{z_1}.e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1).e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) \\ &= e^{x_1}.e^{x_2}(\cos y_1 + i\sin y_1)(\cos y_2 + i\sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2)] \\ &= e^{z_1+z_2} \end{aligned}$$

(5) เนื่องจาก $-z = -x - iy$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} e^{-z} &= e^{-x}[\cos(-y) + i\sin(-y)] \\ &= e^{-x}(\cos y - i\sin y) \\ &= \frac{1}{e^x}\cdot\frac{(\cos y - i\sin y)(\cos y + i\sin y)}{\cos y + i\sin y} \\ &= \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{e^x(\cos y + i\sin y)} \quad = \frac{1}{e^z} \end{aligned}$$

(6) เนื่องจาก $|e^z| = e^x > 0$ เมื่อ $z = (x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ โดยข้อสังเกต 2.7 (1)

เราได้ว่า $e^z \neq 0$

(7) ให้ n เป็นจำนวนเต็ม และ $e^{i2n\pi} = \cos(2n\pi) + i\sin(2n\pi) = 1$

ดังนั้น $e^{z+i2n\pi} = e^z.e^{i2n\pi} = e^z$ ■

ตัวอย่าง 5.1.3 : จงแสดงว่า ถ้า $e^{z_1} = e^{z_2}$ แล้ว $z_2 = z_1 + 2n\pi i$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

วิธีทำ : ให้ $z_1 = x_1 + iy_1$ และ $z_2 = x_2 + iy_2$ แล้ว

$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$ และ $e^{z_1-z_2} = e^{z_1}.e^{-z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = 1$

เนื่องจาก $e^{z_1-z_2} = e^{x_1-x_2}cis(y_1 - y_2)$ ดังนั้น

$$e^{x_1-x_2}\cos(y_1 - y_2) = 1 \quad \text{และ} \quad e^{x_1-x_2}\sin(y_1 - y_2) = 0$$

เนื่องจาก $e^{x_1-x_2} \neq 0$ เพราะฉะนั้น $\sin(y_1 - y_2) = 0$ นั่นคือ มีจำนวนเต็ม n ซึ่ง

$$y_2 = y_1 + 2n\pi$$

นอกจากนี้จะได้ว่า $\cos(y_1 - y_2) = 1$ และ $e^{x_1-x_2} = 1$ ดังนั้น $x_1 = x_2$

นั่นคือ $z_2 = z_1 + 2n\pi i$ ●

ตัวอย่าง 5.1.4 : ให้ n เป็นจำนวนเต็ม จงแสดงว่า

(1) $e^{2n\pi i} = 1$ (2) $e^{n\pi i} = (-1)^n$

(3) $e^{\frac{n\pi}{2}i} = i^n$ (4) $| e^{iy} | = 1$

วิธีทำ : (1) เราจะเห็นได้ว่า $e^{2n\pi i} = cos(2n\pi) + i\,sin(2n\pi) = 1$

(2) จะแสดงว่า $e^{\pi in} = (-1)^n$ โดยแยกพิจารณา 2 กรณี ต่อไปนี้

กรณี 1 ถ้า $n = 2k$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม แล้ว

$$\begin{aligned} e^{\pi in} &= cos(n\pi) + i\,sin(n\pi) \\ &= cos(2k\pi) + i\,sin(2k\pi) \\ &= 1 = (-1)^{2k} \end{aligned}$$

ดังนั้น $e^{\pi in} = (-1)^n$

กรณี 2 ถ้า $n = 2k + 1$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม แล้ว

$$\begin{aligned} e^{\pi in} &= e^{\pi i(2k+1)} \\ &= e^{\pi i 2k}.e^{\pi i} \\ &= 1.(cos\,\pi + i\,sin\,\pi) \\ &= -1 = (-1)^{2k+1} \end{aligned}$$

ดังนั้น $e^{\pi in} = (-1)^n$

(3) จะแสดงว่า $e^{(\pi in)/2} = i^n$ โดยแยกพิจารณา 2 กรณี ต่อไปนี้

กรณี 1 ถ้า $n = 2k$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม แล้ว

$$\begin{aligned} e^{(\pi in)/2} &= e^{\pi ik} \\ &= (-1)^k \\ &= (-1)^{n/2} \\ &= [(-1)^{1/2}]^n \\ &= i^n \end{aligned}$$

กรณี 2 ถ้า $n = 2k + 1$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม แล้ว

$$\begin{aligned} e^{(\pi in)/2} &= e^{[\pi i(2k+1)]/2} \\ &= e^{\pi ik + i(\pi/2)} \\ &= e^{\pi ik}.e^{i(\pi/2)} \end{aligned}$$

$$= \quad (-1)^k.(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$$
$$= \quad i(-1)^k$$
$$= \quad i(i^2)^{(n-1)/2}$$
$$= \quad i(i)^{n-1} = i^n$$

(4) เป็นผลที่ได้จากทฤษฎีบท 5.1.2 (4) เราจะได้ $|e^{iy}| = e^0 = 1$ ●

ข้อสังเกต 5.1.5 : ถ้า z เขียนในรูปพิกัดเชิงขั้ว คือ $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ แล้วเราสามารถเขียน z ในรูปฟังก์ชันชี้กำลังได้ คือ $z = |z|e^{i\theta}$

ตัวอย่าง 5.1.6 : จงหา z ทั้งหมดที่เป็นไปได้และสอดคล้องกับสมการ $e^z = 1 + i$

วิธีทำ : ให้ $z = x + iy$ เนื่องจาก $|e^z| = e^x$ ดังนั้น

$$e^x = |1 + i| = \sqrt{2}$$

และจะได้ $x = \frac{1}{2}\ln 2$

เนื่องจาก $e^z = 1 + i = |i + i|.e^{i\arg(1+i)}$

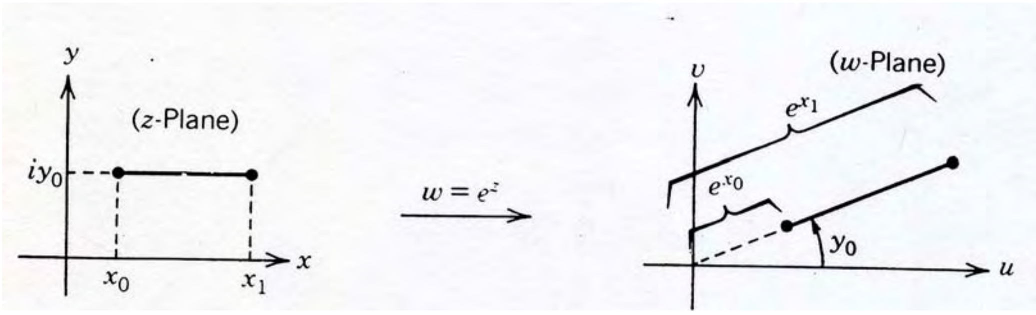
$$= e^x.e^{i\arg(1+i)}$$

แต่ $e^z = e^x.e^{iy}$ เพราะฉะนั้น $e^{iy} = e^{i\arg(1+i)}$

นั่นคือ $y = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม ●

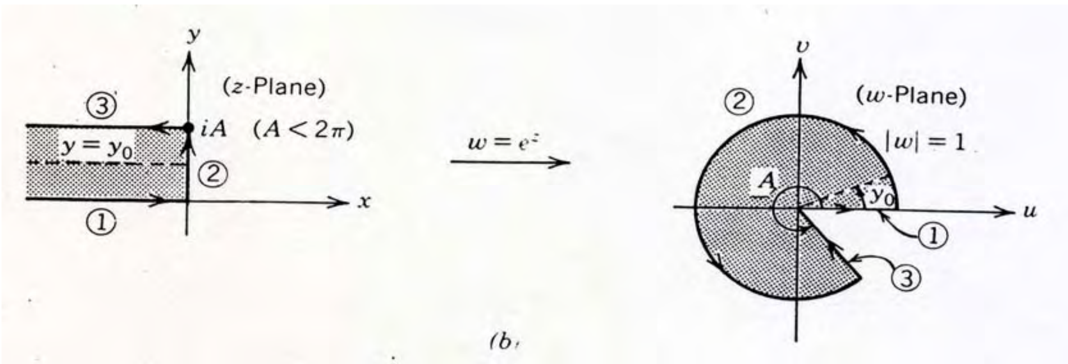
หมายเหตุ : ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นอิมเมจของเซตต่าง ๆ บนระนาบเชิงซ้อนภายใต้ฟังก์ชัน e^z

ตัวอย่าง 5.1.7 : จงหาอิมเมจภายใต้ฟังก์ชัน $w = e^z$ ของส่วนของเส้นตรงที่ขนานกับแกน x (เมื่อ $y = y_0$ และ $x_0 < x < x_1$) ดูรูป 5.1 (ก) และหาอิมเมจภายใต้ฟังก์ชัน $w = e^z$ ของบริเวณแรเงาต่าง ๆ ในรูป 5.2 (ก) และ 5.3 (ก)



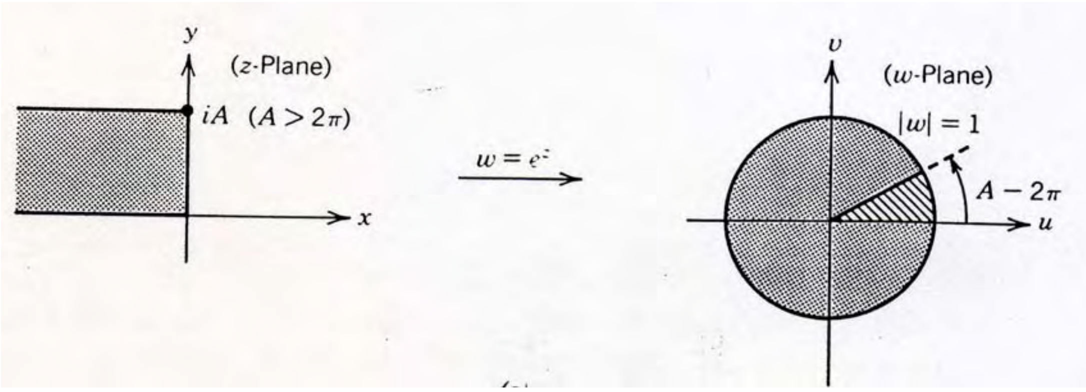
(ก) (ข)

รูป 5.1



(ก) (ข)

รูป 5.2



(ก) (ข)

รูป 5.3

วิธีทำ : ประการแรกจะหาอิมเมจของส่วนของเส้นตรงในรูป 5.1 (ก)

ให้ $z = x + iy$ พิจารณา $w = e^z$ จะได้

$$|w| = e^x \text{ และ } arg(w) = y + 2n\pi \text{ เมื่อ } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ดังนั้น เมื่อ z อยู่บนส่วนของเส้นตรงในรูป 5.1 (ก) แล้ว w จะอยู่บนรังสีในรูป 5.1 (ข)

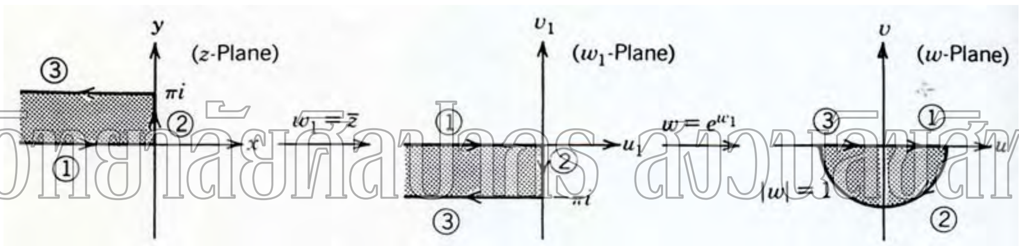
กล่าวคือ $e^{x_0} < |w| < e^{x_1}$ และ $arg(w) = y_0$

ต่อไปจะหาอิมเมจของบริเวณแรเงาในรูป 5.2 (ก)

เมื่อ $z = x + iy$ อยู่ในบริเวณแรเงาของรูป 5.2 (ก) แล้ว $\left| e^z \right| = e^x$
ดังนั้น เมื่อ $x \in (-\infty,0]$ เราจะได้ $e^x \in (0,1]$ นอกจากนี้
$arg(e^z) = y$ ดังนั้น เมื่อ $y \in [0,2\pi)$ แล้ว $arg(e^z) \in [0,2\pi)$
เพราะฉะนั้น อิมเมจของบริเวณแรเงาในรูป 5.2 (ก) จะได้ดังรูป 5.2 (ข)

สุดท้ายหาอิมเมจของบริเวณแรเงาในรูป 5.3 (ก) ได้เช่นเดียวกับอิมเมจของรูป 5.2 (ก) ดังแสดงในรูป 5.3 (ข) ●

ตัวอย่าง 5.1.8 : จงหาอิมเมจของบริเวณแรเงาในรูป 5.4 (ก) ข้างล่างนี้ ภายใต้ฟังก์ชัน $w = e^{\bar{z}}$



(ก) (ข) (ค)

รูป 5.4

วิธีทำ : จะพิจารณาฟังก์ชัน $w = e^{\bar{z}}$ เป็นฟังก์ชันคอมโพสิท ของ fog เมื่อ $g(z) = \bar{z}$ และ $f(z) = e^z$

ดังนั้น บริเวณแรเงาในรูป 5.4 (ก) จะถูกส่งด้วยฟังก์ชัน g ไปเป็นบริเวณแรเงาในรูป 5.4 (ข) และโดยการใช้ผลจากตัวอย่าง 5.1.7 เราได้ว่า แถบรูป 5.4 (ข) จะถูกส่งไปเป็นครึ่งวงกลม ดังรูป 5.4 (ค) ●

5.2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ และฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก *(Trigonometric and Hyperbolic Functions)*

ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงบทนิยาม คุณสมบัติบางประการของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก เอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

บทนิยาม 5.2.1 : ฟังก์ชันตรีโกณมิติ sin , cos ของจำนวนเชิงซ้อน z นิยาม ดังนี้

$$\begin{aligned}
sin\, z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\
cos\, z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\
tan\, z &= \frac{sin\, z}{cos\, z} && \text{ถ้า } cos\, z \neq 0 \\
sec\, z &= \frac{1}{cos\, z} && \text{ถ้า } cos\, z \neq 0 \\
cot\, z &= \frac{cos\, z}{sin\, z} && \text{ถ้า } sin\, z \neq 0 \\
csc\, z &= \frac{1}{sin\, z} && \text{ถ้า } sin\, z \neq 0
\end{aligned}$$

เราได้ว่าฟังก์ชัน $sin\, z$ และ $cos\, z$ ต่างเป็นฟังก์ชันเอนไทร์ ส่วนฟังก์ชัน tan และ ฟังก์ชัน sec วิเคราะห์ได้ทุก $z \in R^2$ ยกเว้นที่ z ซึ่ง $cos\, z = 0$ ในขณะที่ฟังก์ชัน cot กับฟังก์ชัน csc วิเคราะห์ได้ที่ทุก $z \in R^2$ ยกเว้นที่ z ซึ่ง $sin\, z = 0$

บทนิยาม 5.2.2 : ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก sin , cos ของจำนวนเชิงซ้อน z กำหนดดังต่อไปนี้

$$sinh\, z = \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z}) \qquad \text{และ}$$

$$cosh\, z = \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z})$$

จากบทนิยาม เราได้ $sinh\, z = -i\, sin(iz)$ และ $cosh\, z = cos(iz)$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นคุณสมบัติของฟังก์ชัน sin และฟังก์ชัน cos

ทฤษฎีบท 5.2.3 : คุณสมบัติของฟังก์ชัน sin และฟังก์ชัน cos

ให้ z, z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $z = x + iy$

(1) สำหรับฟังก์ชันตรีโกณมิติ และฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก

$cosh\, y = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})$ และ $sinh\, y = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$ จะได้ว่า

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

(2) $sin\, z$ และ $cos\, z$ เป็นฟังก์ชันเอนไทร์ และ

$$\frac{d}{dz}(\sin z) = \cos z$$

$$\frac{d}{dz}(\cos z) = -\sin z$$

(3) $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$

$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$

(4) $sin\, z$ และ $cos\, z$ เป็นฟังก์ชันคาบ โดยที่

$$\sin(z + 2\pi n) = \sin z$$

$\cos(z + 2\pi n) = \cos z$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

(5) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ สำหรับทุก $z \in R^2$

(6) $\sin(-z) = -\sin z$ และ $\cos(-z) = \cos z$

(7) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$

$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$

(8) สำหรับจำนวนเต็ม n

(8.1) ถ้า $\sin z = 0$ แล้ว $z = n\pi$

(8.2) ถ้า $\cos z = 0$ แล้ว $z = (n + \frac{1}{2})\pi$

(9) $\sin(iy) = i.\sinh y$ และ $\cos(iy) = \cosh y$

การพิสูจน์ทำได้โดยตรงจากบทนิยาม และจะขอละการพิสูจน์

ตัวอย่าง 5.2.4 : จงหาคำตอบของสมการ $\sin z = 4$

วิธีทำ : ให้ $z = x + iy$ เนื่องจาก $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = 4$ เพราะฉะนั้น

$$\sin x \cosh y = 4 \tag{5.1}$$

$$\cos x \sinh y = 0 \tag{5.2}$$

โดย (5.2) เราได้ $\sinh y = 0$ หรือ $\cos x = 0$

นั่นคือ $y = 0$ หรือ $x = (n + \frac{1}{2})\pi$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

ถ้านำ $y = 0$ แทนใน (5.1) จะทำให้ได้ $\sin x = 4$ เป็นไปไม่ได้

ดังนั้น เลือก $x = (n + \frac{1}{2})\pi$ แทนลงใน (5.1) จะได้

$$\sin(n + \frac{1}{2})\pi \cosh y = 4$$

เนื่องจาก $\cosh y > 0$ ดังนั้น $\sin(n + \frac{1}{2})\pi > 0$

นั่นคือ $n = 2k$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม และ $\cosh y = 4$

ดังนั้น คำตอบของสมการ คือ $z = \frac{\pi}{2} + 2\pi k + i \cosh^{-1} 4$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม ●

ตัวอย่างต่อไปนี้เราจะแสดงถึงลักษณะของอิมเมจภายใต้ฟังก์ชัน $\sin z$

ตัวอย่าง 5.2.5 : จงหาอิมเมจของแกน x แกน y ภายใต้ฟังก์ชัน $w = \sin z$

วิธีทำ : ให้ $w = u + iv = \sin(x + iy)$ เนื่องจาก $\sin(iy) = i \sinh y$ และ $\cos(iy) = \cosh y$ ดังนั้น

$$u + iv = \sin(x + iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sinh(iy)$$

$$= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

นั่นคือ $u = \sin x \cosh y$ และ $v = \cos x \sinh y$

(ก) อิมเมจของแกน y หาได้ดังนี้

ให้ $x = 0$ เพราะฉะนั้น $u = 0$ และ $v = \sinh y$ เมื่อ y มีค่าอยู่ระหว่าง $-\infty$ กับ ∞ จะเห็นว่า $\sinh y$ มีค่าอยู่ระหว่าง $-\infty$ กับ ∞ ดังนั้น แกน y จะถูกส่งไปเป็นแกน v ในระนาบ w

(ข) อิมเมจของแกน x หาได้ดังนี้

ให้ $y = 0$ ดังนั้น $u = \sin x$ และ $v = 0$ ซึ่งจะได้อิมเมจเป็นช่วงปิด [-1 , 1] บนแกน u ●

สำหรับอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ หาได้ดังจะกล่าวในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.2.6 : ให้ $z = x + iy$

(1) $\dfrac{d}{dz}(\sin z) = \cos z$

(2) $\dfrac{d}{dz}(\cos z) = -\sin z$

(3) $\dfrac{d}{dz}(\tan z) = \sec^2 z$

(4) $\dfrac{d}{dz}(\sec z) = \sec z \tan z$

(5) $\dfrac{d}{dz}(\csc z) = -\csc z \cot z$

(6) $\dfrac{d}{dz}(\cot z) = -\csc^2 z$

จะพิสูจน์เฉพาะ (1) และ (2)

พิสูจน์ : (1)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}(\sin z) &= \frac{d}{dz}\left[\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right] \\
&= \frac{1}{2i}(ie^{iz} + ie^{-iz}) \\
&= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \\
&= \cos z
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}(\cos z) &= \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})\right] \\
&= \frac{1}{2}(ie^{iz} - ie^{-iz}) \\
&= \frac{i}{2}(e^{iz} - e^{-iz}) \\
&= -\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \\
&= -\sin z
\end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 5.2.7 : จงหา z ที่สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

(1) $sin(e^z) = 0$ (2) $cosh\, z = 0$ (3) $sinh\, z = 0$

วิธีทำ : (1) พิจารณา $sin(e^z) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $e^z = n\pi \quad , n = \pm 1, \pm 2, \ldots$

เนื่องจาก $e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y = n\pi$ ดังนั้น

$e^x \cos y = n\pi$ และ $e^x \sin y = 0$

พิจารณา $e^x \sin y = 0$ จะได้ $\sin y = 0$ นั่นคือ

$y = r\pi \quad , r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

เพราะฉะนั้น $e^x(-1)^k = n\pi$ สำหรับจำนวนเต็ม k

ดังนั้น $$e^x = \begin{cases} n\pi & , n > 0 \\ -n\pi & , n < 0 \end{cases}$$

$$e^x = |\, n \,|\, \pi$$

$$x = ln(|\, n \,|\, \pi)$$

$$z = ln(|\, n \,|\, \pi) + 2\pi ik + i\begin{cases} 0 \ , n > 0 \\ \pi \ , n < 0 \end{cases} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots \ , k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

(2) เราพิจารณา $cosh\, z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = 0$

เพราะฉะนั้น $e^z + e^{-z} = 0$ เราได้ว่า $\frac{e^{2z} + 1}{e^z} = 0$ ดังนั้น

$$e^{2z} = -1$$

เนื่องจาก $e^{2z} = e^{2x}(\cos 2y + i \sin 2y) = -1$ จะได้ว่า

$$e^{2x} \cos 2y = -1 \quad \text{และ} \quad \sin 2y = 0$$

เราได้ว่า $e^{2x} > 0$ ดังนั้น $\cos 2y < 0$ และ $\sin 2y = 0$

เพราะฉะนั้น $2y = (2n + 1)\pi \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$y = (n + \frac{1}{2})\pi$$

นั่นคือ $z = (n + \frac{1}{2})\pi i \quad , n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

(3) เราพิจารณา $sinh\, z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = 0$ จะได้ $e^z = e^{-z}$

เพราะฉะนั้น $e^{2z} = 1$ แต่ $e^{2z} = e^{2x}(\cos 2y + i \sin 2y) = 1$

ดังนั้น

$$e^{2x} \cos 2y = 1 \quad \text{และ} \quad \sin 2y = 0$$

เนื่องจาก $e^{2x} > 0$ จะได้ $\cos 2y > 0$ และ $\sin 2y = 0$

นั่นคือ $2y = 2n\pi \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$y = n\pi$$

เพราะฉะนั้น $e^{2x} = 1$ จะได้ว่า $x = 0$

ดังนั้น $z = n\pi i$ เมื่อ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ●

5.3 ฟังก์ชันลอการิทึม *(The Logarithmic Functions)*

ในหัวข้อนี้จะนิยามฟังก์ชันลอการิทึมของจำนวนเชิงซ้อน และศึกษาคุณสมบัติพื้นฐานของฟังก์ชัน นอกจากนี้เราจะศึกษาอิมเมจของสับเซตใน $\boldsymbol{R}^2$ ภายใต้ฟังก์ชันลอการิทึม

บทนิยาม 5.3.1 : กำหนด z เป็นจำนวนเชิงซ้อน เรากล่าวว่า **ลอการิทึมของ z *(logarithm of z)*** เขียนแทนโดย $\log z$ เมื่อ $z \neq 0$ นิยามค่าดังนี้

$$\log z \quad = \quad \ln |z| + i \arg(z)$$

เห็นได้ว่า $\log z$ มีค่าได้หลายค่าเนื่องจาก $\arg(z)$ มีค่าหลายค่า

ตัวอย่าง 5.3.2 : จงหาค่าของ

(1) $\log 1$ (2) $\log(1+i)$

วิธีทำ : (1) พิจารณา $\log 1 \quad = \quad \ln 1 + i \arg(1)$

เนื่องจาก $\ln 1 = 0$ และ $\arg(1) = 2\pi n$ เมื่อ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

ดังนั้น $\log 1 \quad = \quad 2\pi ni$ เมื่อ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

(2) พิจารณา $\log(1+i) \quad = \quad \ln |1+i| + i \arg(1+i)$

$$= \quad \frac{1}{2} \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right), \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$ ●

สำหรับ $z \neq 0$ ถ้าเราเจาะจง $\arg(z)$ ให้มีค่าอยู่ในช่วงซึ่งกว้าง 2π ช่วงใดก็ได้แล้ว $\log z$ จะมีค่าเพียงค่าเดียว และเราจะกล่าวว่าช่วงที่เลือกสำหรับ $\arg(z)$ เป็นแขนงของลอการิทึม

บทนิยาม 5.3.3 : ลอการิทึมสำคัญ *(principal logarithm)* เขียนแทนโดย $Log\ z$ นิยามดังนี้

$$Log\ z \quad = \quad ln\,|\,z\,| + iArg(z) \quad , \quad z \neq 0$$

เมื่อ $Arg(z)$ เป็นอาร์กิวเมนต์ของ z และ $-\pi < Arg(z) \leq \pi$

ตัวอย่าง 5.3.4 : สำหรับ $z = x$ เมื่อ x มีค่าเป็นจำนวนจริงบวก เราได้ $Arg(z) = 0$ และ $Log\ z = ln\,x$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับ $z = x$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงที่มีค่าเป็นลบ เราได้ $Arg(z) = \pi$ และ

$$Log\ x = ln(-x) + \pi\, i$$

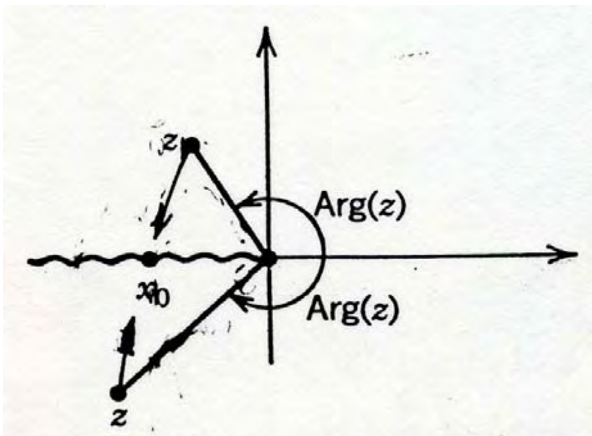
นอกจากนี้ เราจะได้ $\quad Log(-i) \quad = \quad -\dfrac{\pi\, i}{2}$ ●

ข้อสังเกต 5.3.5 : $Log\ z$ ไม่ต่อเนื่อง สำหรับ $z = x_0$ เมื่อ $x_0 < 0$ เนื่องจาก

$$\lim_{z \to x_0} Arg(z) = \begin{cases} \pi & , Im(z) > 0 \\ -\pi & , Im(z) < 0 \end{cases}$$

ดังแสดงด้วยรูป 5.5 เราเรียกเส้นหยักในรูป 5.5 ว่าเป็น**แขนงตัด (*branch cut*)** ของ $Log\ z$

นอกจากนี้เราได้ว่า $Log\ z$ ต่อเนื่องที่ทุก z ซึ่งไม่เป็นจุดบนแขนงตัด



รูป 5.5 : แขนงตัดของ $Log\ z$

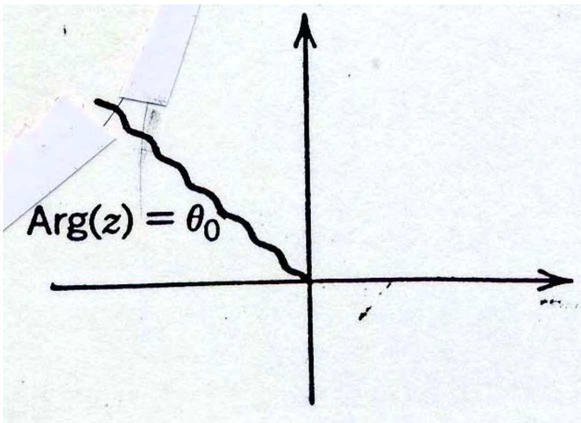
เราเห็นได้จากตัวอย่าง 5.3.4 และตัวอย่าง 5.3.5 ว่า ถ้า x เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว

$$Log\ x = ln\,x$$

แต่ $\log x \neq \ln x$ เมื่อ $\log x$ ไม่เป็นแขนงสำคัญ

สำหรับแขนงทั่วไปของ $\log z$ เมื่อ $\theta_0 < arg(z) \leq \theta_0 + 2\pi$ แล้วแขนงตัดของ $\log z$ คือเส้นหยักในรูป 5.6

หมายเหตุ เราเรียกจุดบนแขนงตัดว่าบรานช์พอยนท์ (*branch point*)



รูป 5.6 : แขนงทั่วไปของ $\log z$

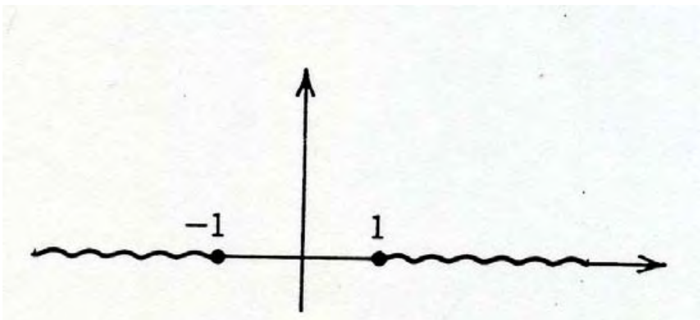
ตัวอย่าง 5.3.6 : กำหนดให้ $f(z) = Log(1 - z^2)$ จงหาแขนงตัดของ $f(z)$

วิธีทำ : พิจารณาแขนงสำคัญของฟังก์ชัน จะได้ว่า $Log(1 - z^2)$ ไม่ต่อเนื่อง เมื่อ $1 - z^2$ เป็นจำนวนจริง และมีค่าน้อยกว่าศูนย์

ให้ $z = x + iy$ จะได้ว่า $1 - z^2$ เป็นจำนวนจริง ซึ่งมีค่าน้อยกว่าศูนย์ เมื่อ $xy = 0$ และ $x^2 - y^2 > 1$

พิจารณา $xy = 0$ จะได้ $x = 0$ หรือ $y = 0$

ถ้า $x = 0$ จะได้ $-y^2 > 1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ดังนั้น $y = 0$ และจะได้ $x^2 > 1$ นั่นคือ แขนงตัดที่ประกอบด้วยจุด $z = x$ เมื่อ $x \in (-\infty,-1]$ หรือ $x \in [1,\infty)$ (ดูรูป 5.7)



รูป 5.7 : แขนงตัด สำหรับ $Log(1 - z^2)$

ทฤษฎีบท 5.3.7 : ลอการิทึมเป็นฟังก์ชันหลายค่า มีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

(1) $e^{\log z} = z$ สำหรับทุกแขนงของ $\log z$

(2) $\log(e^z) = z + 2\pi in$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

(3) มีแขนงของ $\log(z_1)$, $\log(z_2)$ และ $\log(z_1.z_2)$ ที่ทำให้

$$\log(z_1.z_2) = \log z_1 + \log z_2$$

(4) สำหรับแขนงทั่วไปของ $\log z$ วิเคราะห์ได้ เมื่อ $\arg(z) \neq \theta_0$ และ

$$\frac{d}{dz}[\log z] = \frac{1}{z} \quad \text{เมื่อ } z \neq 0 \text{ และ } \theta_0 < \arg(z) < \theta_0 + 2\pi$$

พิสูจน์ : (1) พิจารณา $e^{\log z} = e^{\ln|z|}.e^{i(\arg z)} = |z|.e^{i(\arg z)} = z$

(2) ให้ $z = x + iy$ ดังนั้น

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

และ $\arg(e^z) = y + 2n\pi$ เมื่อ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

เพราะฉะนั้น $\log(e^z) = \ln|e^z| + i(y + 2n\pi)$

$$= \ln e^x + i(y + 2n\pi)$$

$$= x + iy + i2n\pi$$

$$= z + i2n\pi \quad \text{เมื่อ } n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

(3) ให้ $\arg z_1 = \theta_0$, $0 < \theta_0 \leq 2\pi$ เลือก $\arg z_2 \in [-\theta_0, -\theta_0 + 2\pi)$

เราได้ $0 < \arg z_1 + \arg z_2 \leq 2\pi$

พิจารณา
$$\begin{aligned}\log(z_1.z_2) &= \ln|z_1.z_2| + i\arg(z_1.z_2) \\ &= \ln[|z_1|.|z_2|] + i[\arg(z_1) + \arg(z_2)] \\ &= \ln|z_1| + \ln|z_2| + i\arg(z_1) + i\arg(z_2) \\ &= [\ln|z_1| + i\arg(z_1)] + [\ln|z_2| + i\arg(z_2)] \\ &= \log(z_1) + \log(z_2)\end{aligned}$$

(4) ให้ $\log z = \hat{u}(r,\theta) + i\hat{v}(r,\theta)$ เมื่อ $\hat{u}(r,\theta) = \ln r$ และ

$\hat{v}(r,\theta) = \theta = \arg(z)$

สำหรับ $r > 0$ จะได้ว่าอนุพันธ์ของ $\hat{u}$ และ $\hat{v}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และสอดคล้อง เมื่อ $-\pi < \theta \leq \pi$ นั่นคือ $\hat{u}_r = \frac{1}{r}\hat{v}_\theta$, $\hat{u}_\theta = -r\hat{v}_r$

โดยทฤษฎีบท 3.3.18 เราได้ว่า $\log z$ มีอนุพันธ์ และ

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}[\log z] &= (\hat{u}_r + i\hat{v}_r)(\cos\theta - i\sin\theta)\\ &= \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)\\ &= \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)}\\ &= \frac{1}{z}\end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 5.3.8 : จงยกตัวอย่างที่แสดงว่าทฤษฎีบท 5.3.7 (3) ไม่จริง ถ้าเลือกแขนงเดียวกัน สำหรับค่า $Log(z_1)$, $Log(z_2)$ และ $Log(z_1.z_2)$

วิธีทำ : ให้ $z_1 = z_2 = -1 + i$ แล้ว $z_1.z_2 = -2i$ ดังนั้น

$Log\ z_1 = Log\ z_1 = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{3}{4}i\pi$ และ $Log\ (z_1 .z_1) = \ln 2 - \frac{1}{2}i\pi$

เพราะฉะนั้น $Log\ z_1 + Log\ z_1 = \ln 2 + \frac{3}{2}i\pi$ ดังนั้น

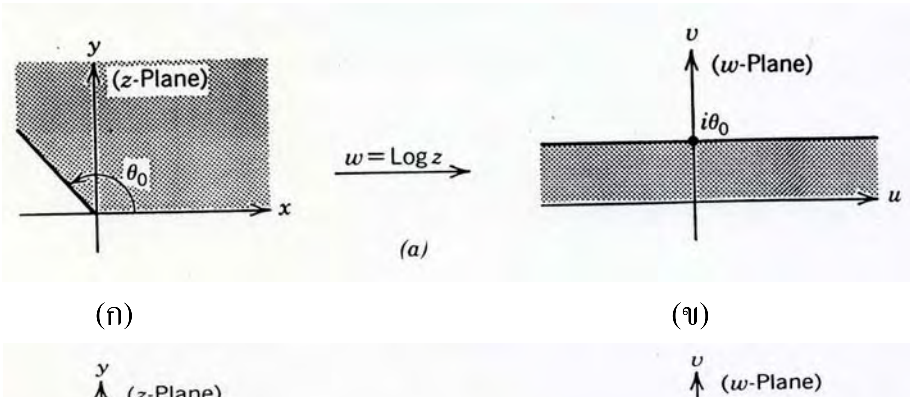
$$Log\ (z_1 .z_1) \neq Log\ (z_1) + Log(z_2)$$

●

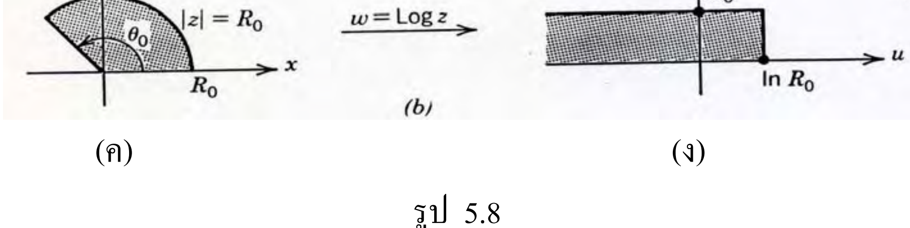
ตัวอย่าง 5.3.9 : กำหนดให้ $w = Log\ (z)$ จงหาอิมเมจในระนาบ w ของบริเวณซึ่งกำหนดโดย

(1) $0 < |z| < \infty$, $0 < Arg(z) < \theta_0$ (ดูรูป 5.8 (ก))

(2) $0 < |z| < R_0$, $0 < Arg(z) < \theta_0$ (ดูรูป 5.8 (ค))



(ก) (ข)



(ค) (ง)

รูป 5.8

วิธีทำ : (1) สำหรับ z ในรูป 5.8 (ก) เราจะเห็นได้ว่า $0<|z|<\infty$

กำหนดให้ $w = Log\, z = u + iv$ เมื่อ $u = ln\,|\,z\,|$ และ $v = Arg(z)$

จะได้ว่า $-\infty < u < \infty \quad , \quad 0 < v < \theta_0$

ดังนั้นอิมเมจของบริเวณในรูป 5.8 (ก) คือแถบบนระนาบ w ในรูป 5.8 (ข)

(2) สำหรับ z ในรูป 5.8 (ค) เราได้ $0<|z|<R_0 \;,\; 0<Arg(z)<\theta_0$

ดังนั้น $-\infty < u < ln\,R_0 \quad , \quad 0 < v < \theta_0$

นั่นคือ อิมเมจของบริเวณในรูป 5.8 (ค) คือแถบบนระนาบ w ในรูป 5.8 (ง) ●

ตัวอย่าง 5.3.10 : จงหา z ซึ่งทำให้ฟังก์ชันต่อไปนี้ไม่วิเคราะห์ได้

(1) $Log(e^z + 1)$

(2) $log(1 - z^2)$ เมื่อแขนงของ $log\, z$ คือ $-\dfrac{3\pi}{2} < arg(z) \le \dfrac{\pi}{2}$

(3) $Log[z(1 + z^2)]$

วิธีทำ : (1) จะแสดงว่า $Log(e^z + 1)$ ไม่วิเคราะห์ได้ เมื่อ $e^z + 1$ เป็นจำนวนจริงลบ

ให้ $z = x + iy$ ดังนั้น
$$\begin{aligned} e^z + 1 &= e^{x+iy} + 1 \\ &= e^x(\cos y + i \sin y) + 1 \\ &= (e^x \cos y + 1) + ie^x \sin y \end{aligned}$$

ดังนั้น ถ้า $e^z + 1$ เป็นจำนวนจริงลบ จะได้ $e^x \sin y = 0$ และ

$$e^x \cos y + 1 < 0$$

เนื่องจาก $e^x > 0$ ดังนั้น $\sin y = 0$ และ $e^x \cos y < -1$ นั่นคือ

$y = n\pi$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม ต่อไปพิจารณา $e^x \cos y < -1$

ถ้า $\cos y = 1$ จะได้ $e^x < -1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ถ้า $\cos y = -1$ จะได้ $e^x > 1$ ดังนั้น $x > 0$

เพราะฉะนั้น $z = x + iy$ เมื่อ $x > 0$ และ $y = n\pi$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

ทำให้ $Log(e^z + 1)$ ไม่วิเคราะห์ได้

(2) ให้ $z = x + iy$ พิจารณา $log(1 - z^2)$ ไม่วิเคราะห์ได้ เมื่อ $1 - z^2$ เป็นจำนวนจริงลบ

เนื่องจาก $1 - z^2 = 1 - x^2 + y^2 - 2ixy$ เราได้ว่า $1 - x^2 + y^2 < 0$ และ $xy = 0$

เพระฉะนั้น $1 + y^2 < x^2$ จะเห็นได้ว่า $x \neq 0$ ดังนั้น $y = 0$

นั่นคือ $x^2 > 1$ จะได้ $x > 1$ หรือ $x < -1$

ดังนั้น $z = x$ เมื่อ $x > 1$ หรือ $x < -1$ ทำให้ $log(1 - z^2)$ ไม่วิเคราะห์ได้

(3) ให้ $z = x + iy$

พิจารณา $z(1 + z^2) = (x^3 - 3xy^2 + x) + i(3x^2y - y^3 - y)$

เราจะได้ $Log[z(1 + z^2)]$ ไม่วิเคราะห์ได้ เมื่อ $z(1 + z^2)$ เป็นจำนวนจริงลบ

นั่นคือ $3x^2y - y^3 - y = 0$ และ $x^3 - 3xy^2 + x < 0$

พิจารณา $3x^2y - y^3 - y = 0$ จะได้ $y(3x^2 - y^2 - 1) = 0$ ดังนั้น

ถ้า $y = 0$ จะได้ $x^3 + x < 0$ หรือ $x(x^2 + 1) < 0$

นั่นคือ ถ้า $y = 0$ แล้ว $x < 0$

ถ้า $x = 0$ จะได้ $y = 0$ และ $x^3 - 3xy^2 + x < 0$ เป็นไปไม่ได้

ดังนั้น $z = x$ เมื่อ $x < 0$ ทำให้ $Log[z(1 + z^2)]$ ไม่วิเคราะห์ได้ ●