บทที่ 4
ฟังก์ชันวิเคราะห์
(ANALYTIC FUNCTIONS)

ในบทที่ 3 เราได้ยกตัวอย่างฟังก์ชัน f ซึ่งมีอนุพันธ์ที่ z_0 และทุกอาณาเขตของ z_0 นี้จะมีจุดซึ่ง f ไม่มีอนุพันธ์ที่จุดเหล่านี้ ในบทนี้เราจะศึกษาฟังก์ชันซึ่งมีคุณสมบัติแตกต่างจากที่กล่าวมาข้างต้น กล่าวคือ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์ที่ z_0 และมีอาณาเขตของ z_0 ซึ่งฟังก์ชัน มีอนุพันธ์ที่ทุกจุดในอาณาเขตนี้ เราเรียกฟังก์ชันเชิงซ้อนลักษณะนี้ว่า ฟังก์ชันวิเคราะห์

4.1 บทนิยามของฟังก์ชันวิเคราะห์ *(Definition of Analytic Functions)*

ในหัวข้อนี้จะนิยามฟังก์ชันวิเคราะห์ และยกตัวอย่างฟังก์ชันวิเคราะห์

บทนิยาม 4.1.1 : ให้ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน D และ $z_o \in D^\circ$ เรากล่าวว่า f **วิเคราะห์ได้ที่ z_o** ***(analytic at z_0)*** ถ้ามี $r > 0$ ซึ่ง f มีอนุพันธ์ที่ทุกจุดใน $N(z_o, r)$

เขียนแทนความหมายตามบทนิยามด้วยสัญลักษณ์ $f \in A(z_o)$

ถ้า f วิเคราะห์ได้ที่ทุกจุดใน S แล้วเรากล่าวว่า f **วิเคราะห์ได้ใน S** ***(analytic in S)*** และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f \in A(S)$

ถ้า $f \in A(\mathbf{R}^2)$ แล้วเราเรียก f ว่า **ฟังก์ชันเอนไทร์** ***(entire function)*** ตัวอย่างของฟังก์ชันเอนไทร์ เช่น โพลิโนเมียล หรือ $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$ เป็นต้น

ข้อสังเกต 4.1.2 :

(1) ถ้า f วิเคราะห์ได้ที่ z_0 แล้ว f มีอนุพันธ์ที่ z_0

(2) ถ้า f มีอนุพันธ์ที่ z_0 แล้ว ไม่จำเป็นที่ f จะวิเคราะห์ได้ที่ z_0 เช่น $f(z) = x^2 - iy^2$ ในตัวอย่าง 3.3.17

ตัวอย่าง 4.1.3 : จงแสดงว่า $f \in A(\mathbf{R}^2)$ เมื่อ f นิยามดังต่อไปนี้

(1) $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$

(2) $f(z) = e^x \sin y - ie^x \cos y$

พิสูจน์ : (1) กำหนด $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y = u(x, y) + iv(x, y)$ เมื่อ $z = (x, y)$ เราได้ว่า

$$u(x, y) = e^x \cos y \text{ และ } v(x, y) = e^x \sin y$$

ดังนั้น

$$u_x = e^x \cos y \quad , \quad u_y = -e^x \sin y$$

$$v_x = e^x \sin y \quad , \quad v_y = e^x \cos y$$

เราจะเห็นว่า u และ v ต่อเนื่องที่ทุก $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ รวมทั้งอนุพันธ์ย่อย u_x , u_y , v_x, v_y ต่อเนื่อง และสอดคล้องกับสมการโคชี-รีมันน์ ที่ทุก $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ นั่นคือ

$$u_x = v_y \text{ และ } u_y = -v_x \text{ ที่ทุก } (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบท 3.3.13 f มีอนุพันธ์ที่ทุก $(x, y) \in \mathbf{R}^2$

ดังนั้น $f \in A(\mathbf{R}^2)$

(2) กำหนด $f(z) = e^x \sin y - ie^x \cos y = u(x, y) + iv(x, y)$ เมื่อ $z = (x, y)$ เราได้ว่า

$$u(x, y) = e^x \sin y \text{ และ } v(x, y) = -e^x \cos y$$

ดังนั้น

$$u_x = e^x \sin y \quad , \quad u_y = e^x \cos y$$

$$v_x = -e^x \cos y \quad , \quad v_y = e^x \sin y$$

เราจะเห็นว่า u และ v รวมทั้งอนุพันธ์ย่อย u_x , u_y , v_x, v_y ต่อเนื่อง และสอดคล้องกับสมการโคชี-รีมันน์ ที่ทุก $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ นั่นคือ

$$u_x = v_y \text{ และ } u_y = -v_x \text{ ที่ทุก } z \in \mathbf{R}^2$$

เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบท 3.3.13 f มีอนุพันธ์ที่ทุก $z \in \mathbf{R}^2$

ดังนั้น $f \in A(\mathbf{R}^2)$ ●

4.2 คุณสมบัติพื้นฐานของฟังก์ชันวิเคราะห์ *(Basic Properties of Analytic Functions)*

ทฤษฎีบทต่อไปนี้กล่าวถึงคุณสมบัติทั่วไปของฟังก์ชันวิเคราะห์ ซึ่งเป็นผลที่ได้จากทฤษฎีบท 3.3.5

ทฤษฎีบท 4.2.1 : ถ้า f และ g วิเคราะห์ได้ที่ z_0 แล้วฟังก์ชันต่อไปนี้วิเคราะห์ได้ที่ z_0

(1) $f+g$

(2) $f-g$

(3) $f.g$

(4) f/g ถ้า $g(z_0)\neq 0$

(5) gof ถ้า g วิเคราะห์ได้ที่ $f(z_0)$

ถ้า $f(z)=c$ ทุก $z\in S$ แล้วเราจะเขียนแทนความหมายนี้โดย $f(z)\equiv c$ บน S หรือ $f\equiv c$ บน S และกล่าวว่า f **มีค่าคงที่บน S** นอกจากนี้ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อน ซึ่ง $f(z)=g(z)$ ทุก $z\in S$ เราจะเขียนแทนโดย $f\equiv g$ บน S

ทฤษฎีบท 4.2.2 : กำหนดให้ S เป็นโดเมน และ $f\in A(S)$

(1) ถ้า $f'(z)\equiv 0$ บน S แล้ว f มีค่าคงที่บน S

(2) ถ้าฟังก์ชัน $R(f)$ หรือ $I(f)$ มีค่าคงที่บน S แล้ว f มีค่าคงที่บน S

พิสูจน์ : (1) ให้ $z_0=a+ib\in S$ เราได้ $f'(z_0)=0$ เมื่อ $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

ดังนั้น

$$u_x\equiv v_y\equiv 0 \quad \text{และ} \quad v_x\equiv -u_y\equiv 0$$

นั่นคือ

$$u_x\equiv 0\equiv u_y \quad \text{บน } S$$

และสรุปได้ว่า u มีค่าคงที่บนส่วนของเส้นตรงใน S ซึ่งขนานกับแกน X หรือขนานกับแกน Y

เพราะฉะนั้น u มีค่าคงที่บน S

ในทำนองเดียวกันเราสรุปได้ว่า v เป็นค่าคงที่บน S

ดังนั้น f มีค่าคงที่บน S

(2) ให้ $R(f(z)) = u(x,y)$ มีค่าคงที่บน S ดังนั้น

$u_x \equiv u_y \equiv 0$ บน S

โดยสมการโคชี-รีมันน์ จะได้ $v_x \equiv -u_y \equiv 0$ บน S และ $f'(z) = u_x + iv_x \equiv 0$ บน S
โดย (1) เราสรุปได้ว่า f มีค่าคงที่บน S

ให้ $I(f(z)) = v(x,y)$ มีค่าคงที่บน S ดังนั้น

$v_x \equiv v_y \equiv 0$ บน S

โดยสมการโคชี-รีมันน์ จะได้ $v_x \equiv -u_y \equiv 0$ บน S และ $f'(z) = v_y - iu_y \equiv 0$ บน S
โดย (1) เราสรุปได้ว่า f มีค่าคงที่บน S ■

บทแทรก 4.2.3 : ให้ S เป็นโดเมน และ $f \in A(S)$, $g \in A(S)$ ถ้า $f' \equiv g'$ บน S แล้ว $f - g$ มีค่าคงที่บน S

พิสูจน์ : ให้ $f' \equiv g'$ บน S โดยทฤษฎีบท 3.3.5 (2) จะได้ว่า

$(f-g)' \equiv 0$ บน S

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 4.2.2 (1) สรุปได้ว่า $f - g$ มีค่าคงที่บน S ■

ทฤษฎีบท 4.2.4 : (1) ให้ $f(z) = u(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อน บนโดเมน S ถ้า $f \in A(S)$ แล้ว f มีค่าคงที่บน S

(2) ให้ $f(z) = iv(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อน บนโดเมน S ถ้า $f \in A(S)$ แล้ว f มีค่าคงที่บน S

พิสูจน์ : (1) ให้ $z = x + iy$ และ พิจารณา $f(z) = u + iv$ เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อน บน S เมื่อ $v \equiv 0$
เนื่องจาก $f \in A(S)$ โดยทฤษฎีบท 3.3.9 จะได้ว่า $u_x \equiv v_y \equiv 0$ บน S และ $u_y \equiv -v_x \equiv 0$ บน S ดังนั้น

$f'(z) = u_x + iv_x \equiv 0$ บน S

โดยทฤษฎีบท 4.2.2 (1) สรุปได้ว่า f มีค่าคงที่บน S

(2) ให้ $z = x + iy$ และพิจารณา $f(z) = u + iv$ เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อน บน S เมื่อ $u \equiv 0$

เนื่องจาก $f \in A(S)$ โดยทฤษฎีบท 3.3.9 จะได้ว่า $u_x \equiv v_y \equiv 0$ บน S และ $u_y \equiv -v_x \equiv 0$ บน S ดังนั้น

$$f'(z) = v_y - iu_y \equiv 0 \quad \text{บน } S$$

โดยทฤษฎีบท 4.2.2 (1) สรุปได้ว่า f มีค่าคงที่บน S ■

ทฤษฎีบท 4.2.5 : ให้ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบนโดเมน S ถ้า f และ $\overline{f}$ วิเคราะห์ได้ในโดเมน S แล้ว f มีค่าคงที่บน S

พิสูจน์ : ให้ $z = x + iy$ และ $f(z) = u + iv$ เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อน บน S ถ้า $f, \overline{f} \in A(S)$ โดยทฤษฎีบท 4.2.1 เราได้

$$f + \overline{f} = 2u \in A(S)$$

โดยทฤษฎีบท 4.2.4(1) สรุปได้ว่า $u(x, y)$ มีค่าคงที่บน S

ดังนั้น f มีค่าคงที่บน S ■

ทฤษฎีบท 4.2.6 : ให้ S เป็นโดเมน และ $f \in A(S)$

(1) ถ้า $|f|$ มีค่าคงที่บน S แล้ว f มีค่าคงที่บน S

(2) ถ้า $Arg\, f$ มีค่าคงที่บน S แล้ว f มีค่าคงที่บน S

พิสูจน์ : (1) ให้ $|f(z)| = \gamma$ บน S

กรณีที่ 1 $\gamma = 0$ เราได้ $f(z) \equiv 0$ บน S ดังนั้น f มีค่าคงที่บน S

กรณีที่ 2 $\gamma \neq 0$ พิจารณา $f(z).\overline{f}(z) = |f(z)|^2 = \gamma^2$ เราได้

$$f(z) = \frac{\gamma^2}{\overline{f}(z)} \in A(S)$$

และ

$$\overline{f}(z) = \frac{\gamma^2}{f(z)} \in A(S)$$

โดย ทฤษฎีบท 4.2.5 จะได้ว่า f มีค่าคงที่บน S

(2) ให้ $Arg\, f(z) = \gamma$ บน S พิจารณา $f(z) = |f(z)|\, cis\gamma$
เนื่องจาก $(cis\gamma)(cis(-\gamma)) = 1$ เราได้ $f(z)\, cis(-\gamma) = |f(z)|$
และจะได้

$$|f(z)| \in A(S)$$

โดย (1) สรุปได้ว่า f มีค่าคงที่บน S ■

ทฤษฎีบท 4.2.7 : ให้ $f, g \in A(D)$ เมื่อ D เป็นโดเมน ถ้า $z_0 \in D$ ซึ่ง $f(z_0) = g(z_0) = 0$ และ $g'(z_0) \neq 0$ แล้ว

$$\lim_{z \to z_0} \left(\frac{f(z)}{g(z)} \right) = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)} \quad (L'\,Hôpital's\ rule)$$

พิสูจน์ : ประการแรกเราจะแสดงว่ามีอาณาเขต $N'(z_0, \delta)$ ซึ่ง $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ วิเคราะห์ได้ในอาณาเขตนี้ และ $g(z) \neq 0$ ทุก $z \in N'(z_0, \delta)$

เนื่องจาก $f(z)$ และ $g(z)$ วิเคราะห์ได้ที่ z_0 ดังนั้นมีอาณาเขต $N(z_0, \delta_1)$ ซึ่ง $f(z)$ และ $g(z)$ ต่างก็วิเคราะห์ได้ใน $N(z_0, \delta_1)$

เพราะว่า $g(z)$ วิเคราะห์ได้ที่ z_0 และ $g'(z_0) \neq 0$ ดังนั้นจะมี $0 < \delta < \delta_1$ ซึ่ง

$\left| \dfrac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} - g'(z_0) \right| \quad < \quad \dfrac{1}{2}|g'(z_0)|$ เมื่อ $z \in N'(z_0, \delta)$ หรือ

$|g(z) - g'(z_0)(z - z_0)| \quad < \quad \dfrac{1}{2}|g'(z_0)||z - z_0|$ นั่นคือทุก $z \in N'(z_0, \delta)$ จะมี

$\eta = \eta(z, z_0)$ ซึ่ง $|\eta| < \dfrac{1}{2}|g'(z_0)|$ และ $g(z) - g'(z_0)(z - z_0) = \eta(z - z_0)$ หรือ

$g(z) = [g'(z_0) + \eta](z - z_0)$ ทุก $z \in N'(z_0, \delta)$

พิจารณา $z \in N'(z_0, \delta)$ เราได้

$$|g'(z_0) + \eta| \ \geq\ |g'(z_0)| - |\eta| \ >\ |g'(z_0)| - \frac{1}{2}|g'(z_0)| = \frac{1}{2}|g'(z_0)| > 0$$

ดังนั้น $g'(z_0) + \eta \neq 0$ ทำให้ $g(z) \neq 0$ ในอาณาเขต $N'(z_0, \delta)$ นั่นคือ

$\dfrac{f(z)}{g(z)}$ วิเคราะห์ได้ในอาณาเขต $N'(z_0, \delta)$ และ $z \in N'(z_0, \delta)$ เราได้

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z)(z - z_0)}{g(z)(z - z_0)} = \frac{[f(z) - 0](z - z_0)}{[g(z) - 0](z - z_0)}$$

$$= \frac{[f(z) - f(z_0)](z - z_0)}{[g(z) - g(z_0)](z - z_0)}$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$ และ $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = g'(z_0) \neq 0$

ดังนั้น

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}{\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)} \qquad \blacksquare$$

4.3 ความต่อเนื่องและการเป็นเซตคอมแพกต์ *(Continuity and Compactness)*

คุณสมบัติประการหนึ่งของฟังก์ชันเชิงซ้อนซึ่งเป็นที่ต้องการ คือความต่อเนื่องที่จุดใดจุดหนึ่ง หรือที่ทุกจุดในสับเซตหนึ่งของโดเมน ในหัวข้อนี้จะศึกษาผลทางโทโพโลยีที่ได้จากคุณสมบัติของความต่อเนื่อง หรือความต่อเนื่องแบบยูนิฟอร์ม

บทนิยาม 4.3.1 : ให้ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน D และ $S \subset D$ เรากล่าวว่า $\boldsymbol{f}$ **มีความต่อเนื่องแบบยูนิฟอร์มใน** $\boldsymbol{S}$ ***(f is uniformly continuous in S)*** ก็ต่อเมื่อ ให้ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งสอดคล้องว่า ถ้า $z_1 , z_2 \in S$ และ $| z_1 - z_2 | < \delta$ แล้ว

$$| f(z_1) - f(z_2) | < \varepsilon$$

เราเขียนแทนความหมายนี้โดยสัญลักษณ์ $f \in UC(S)$

ข้อสังเกต 4.3.2 : ถ้า $f \in UC(S)$ แล้ว $f \in C(S)$

บทกลับของข้อสังเกต 4.3.2 ไม่เป็นจริง ดังแสดงให้เห็นด้วยตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.3.3 : ให้ $D = \{z : 0 < | z | \leq 1\}$ และ $f : D \to R^2$ นิยามโดย $f(z) = \dfrac{1}{z}$ จงแสดงว่า $f \in C(D)$ แต่ $f \notin UC(D)$

วิธีทำ : โดยทฤษฎีบท 3.2.12 สรุปได้ว่า f มีความต่อเนื่องใน D ต่อไปจะแสดงว่า $f \notin UC(D)$

พิจารณา $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$ และทุก δ ซึ่ง $0 < \delta < 1$ ให้ $z_1 = \delta$, $z_2 = \dfrac{9}{10}\delta$ และ $z_1, z_2 \in D \cap N(z, \delta)$ แล้ว

$$| z_1 - z_2 | = \frac{1}{10}\delta < \delta$$

แต่

$$\left| f(z_1) - f(z_2) \right| = \left| \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right| = \frac{1}{9\delta} > \frac{1}{10} = \varepsilon$$

นั่นคือ

$$f \notin UC(D)$$

●

ทฤษฎีบท 4.3.4 : ถ้า $f \in C(S)$ เมื่อ $S \neq \phi$ และ S เป็นเซตคอมแพกต์ แล้ว f มีความต่อเนื่องแบบยูนิฟอร์มใน S

พิสูจน์ : กำหนด $\varepsilon > 0$ ให้ $z \in S$ เนื่องจาก f ต่อเนื่องที่ z ดังนั้นมี $\delta_z > 0$ ซึ่ง ถ้า $t \in N(z, \delta_z) \cap S$ แล้ว $f(t) \in N(f(z), \frac{\varepsilon}{2})$ เห็นได้ว่า

$$\mathcal{C} = \{ N(z, \frac{1}{2}\delta_z) : z \in S \}$$ เป็นเซตปกคลุมเปิดสำหรับ S

ดังนั้น $\mathcal{C}$ มีเซตปกคลุมย่อยจำกัด สมมติเป็น

$$\mathcal{D} = \{ N(z_1, \frac{1}{2}\delta_{z_1}), \cdots, N(z_n, \frac{1}{2}\delta_{z_n}) \}$$ ซึ่งเป็นเซตปกคลุมสำหรับ S

ให้ $2\delta = min\{ \delta_{z_1}, \delta_{z_2}, \cdots, \delta_{z_n} \}$ แล้ว $\delta > 0$ พิจารณา $z, w \in S$ ซึ่ง $| z - w | < \delta$ เนื่องจาก $z \in S$ และ $\mathcal{D}$ เป็นเซตปกคลุม ดังนั้น มี $k \in \{1,2,3, \cdots, n\}$ ซึ่ง $z \in N(z_k, \frac{1}{2}\delta_{z_k})$ ดังนั้น

$$| w - z_k | \leq | w - z | + | z - z_k | < \delta + \frac{1}{2}\delta_{z_k} \leq \frac{1}{2}\delta_{z_k} + \frac{1}{2}\delta_{z_k} = \delta_{z_k}$$

เพราะฉะนั้น $w \in N(z_k, \delta_{z_k})$ และ

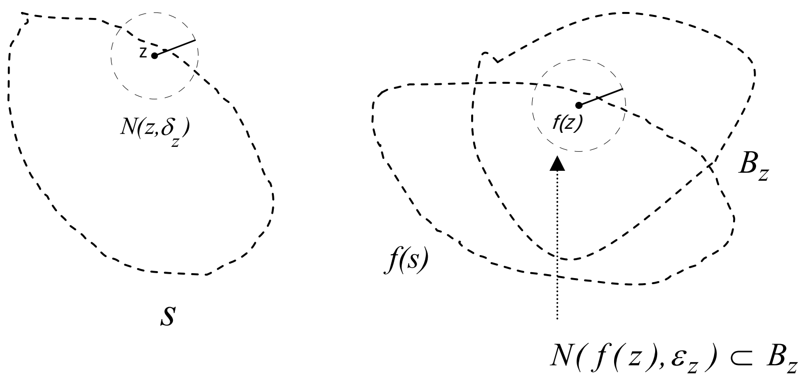
$$| f(z) - f(w) | \leq | f(z) - f(z_k) | + | f(z_k) - f(w) | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ดังนั้น f มีความต่อเนื่องแบบยูนิฟอร์มใน S ■

ทฤษฎีบท 4.3.5 : ให้ $f \in C(S)$ เมื่อ $S \neq \phi$ ถ้า S เป็นเซตคอมแพกต์ แล้ว $f(S)$ เป็นเซตคอมแพกต์

พิสูจน์ : ให้ $\mathcal{C}$ เป็นเซตปกคลุมเปิดสำหรับ $f(S)$ แต่ละ $z \in S$ จะมี $B_z \in \mathcal{C}$ ซึ่ง $f(z) \in B_z$ เนื่องจาก B_z เป็นเซตเปิด ดังนั้น จะมี $\varepsilon_z > 0$ ซึ่ง $N(f(z), \varepsilon_z) \subset B_z$ เมื่อ f ต่อเนื่องที่ z เพราะฉะนั้น จะมี $\delta_z > 0$ ซึ่ง

$$f(N(z,\delta_z) \cap S) \subset N(f(z),\varepsilon_z) \subset B_z \qquad \text{(ดูรูป 4.3)}$$



รูป 4.3 : $f(N(z,\delta_z) \cap S) \subset N(f(z),\varepsilon_z) \subset B_z$

พิจารณา $\mathcal{D} = \{ N(z,\delta_z) : z \in S \}$ ซึ่งเป็นเซตปกคลุมเปิดสำหรับ $f(S)$ เนื่องจาก S เป็นเซตคอมแพกต์ ดังนั้น $\mathcal{D}$ มีเซตปกคลุมย่อยจำกัดของ S สมมติเป็น $\{ N(z_1,\delta_{z_1}), N(z_2,\delta_{z_2}), \cdots, N(z_k,\delta_{z_k}) \}$ สำหรับบางค่าของจำนวนเต็มบวก k

เราจะแสดงว่า $\{B_{z_1}, B_{z_2}, \cdots, B_{z_k}\}$ เป็นเซตปกคลุมสำหรับ $f(S)$

ให้ $w \in f(S)$ ดังนั้น $w = f(z)$ เมื่อ $z \in S$ จะมี $j \in \{1,2,3, \ldots ,k\}$ ซึ่ง $z \in N(z_j,\delta_{z_j})$ เพราะฉะนั้น

$$f(z) \in f(N(f(z_j),\varepsilon_{z_j}) \cap S) \subset N(f(z_j),\varepsilon_{z_j}) \subset B_{z_j}$$

นั่นคือ $\{B_{z_1}, B_{z_2}, \cdots, B_{z_k}\}$ เป็นเซตปกคลุมย่อยจำกัดของ $\mathcal{C}$ สำหรับ $f(S)$ ดังนั้น $f(S)$ เป็นเซตคอมแพกต์ ■

ทฤษฎีบท 4.3.6 : ถ้า E เป็นเซตคอมแพกต์ $E \neq \phi$ และ $E \subset R$ แล้ว $lub\, E \in E$ และ $glb\, E \in E$

พิสูจน์ : ให้ E เป็นเซตคอมแพกต์ $E \neq \phi$ และ $E \subset R$

เราจะพิจารณา 2 กรณี ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

กรณีที่ 1 $(lub\,E) \in E^*$

ถ้า $(lub\,E) \in E^*$ และ $E^* \subset E$ แล้ว $(lub\,E) \in E$ ดังนั้น E เป็นเซตปิด

กรณีที่ 2 $(lub\,E) \notin E^*$

ถ้า $(lub\,E) \notin E^*$ โดยบทนิยามของ $lub\,E$ จะได้ว่า $(lub\,E) \in E$

เราสรุปได้ว่า

$$(lub\,E) \in E$$

โดย การพิสูจน์ในทำนองเดียวกันสรุปได้ว่า $(glb\,E) \in E$ ■

ต่อไปเราจะกล่าวถึงสัจพจน์ความบริบูรณ์ซึ่งจะนำไปใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.3.7

สัจพจน์ความบริบูรณ์ ของ $\boldsymbol{R}$ ถ้า S เป็นสับเซตของ $\boldsymbol{R}$, $S \neq \phi$ และ S มีขอบเขตบน แล้ว S มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด

ทฤษฎีบท 4.3.7 : ให้ $S \neq \phi$ และ S เป็นเซตคอมแพกต์ ถ้า $f \in C(S)$ และ $f(S) \subset \boldsymbol{R}$ แล้ว f จะมีค่าสูงสุด และค่าต่ำสุดบน S

พิสูจน์ : เราจะแสดงว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันค่าจริง และ $f \in C(S)$, $S \neq \phi$ เป็นเซตคอมแพกต์ แล้วจะมี $z_1, z_2 \in S$ ซึ่ง $f(z_1) \leq f(z) \leq f(z_2)$ สำหรับทุก $z \in S$

โดยทฤษฎีบท 2.21 สรุปได้ว่า S เป็นเซตปิดและเป็นเซตมีขอบเขต โดยทฤษฎีบท 4.3.5 จะได้ $f(S)$ เป็นเซตคอมแพกต์ โดยทฤษฎีบท 2.21 สรุปได้ว่า $f(S)$ มีขอบเขต

นั่นคือ $f(S)$ มีขอบเขตบน และมีขอบเขตล่าง

ถ้าฟังก์ชันค่าจริง f ซึ่งเป็นฟังก์ชันสองตัวแปร ต่อเนื่องใน S ซึ่งเป็นเซตปิดและมีขอบเขต $S \neq \phi$ แล้ว f จะมีค่าสูงสุด และค่าต่ำสุดบน S

โดยทฤษฎีบท 4.3.5 ทำให้ได้ว่า ถ้า $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ และ $f \in C(S)$ แล้ว $u \in C(S)$ และ $v \in C(S)$

เนื่องจาก S เป็นเซตปิดและมีขอบเขต ให้ $z_1, z_2 \in S$, $u \in C(S)$ และ $v \in C(S)$ จะได้ว่า

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq |u(x_2,y_2) - u(x_1,y_1)| + |v(x_2,y_2) - v(x_1,y_1)|$$

ดังนั้น

f มีความต่อเนื่องแบบยูนิฟอร์มใน S จะได้ว่า $f(S)$ เป็นเซตคอมแพกต์

โดยทฤษฎีบท 4.3.6

ถ้าให้ $z_1, z_2 \in S$ ซึ่ง $f(z_1) = glb\, f(z)$ และ $f(z_2) = lub\, f(z)$ ดังนั้น

$$f(z_1) \le f(z) \le f(z_2) \text{ สำหรับทุก } z \in S$$ ■

ตัวอย่าง 4.3.8 : ให้ $f : D \to R^2$ เมื่อ $D \subset R^2$ และ $f \in C(D)$

(1) จงพิสูจน์ว่า $|f| \in C(D)$

(2) จงพิสูจน์ว่า ถ้า D เป็นเซตคอมแพกต์ แล้วจะมี $z_0 \in D$ ซึ่ง $|f(z)| \le |f(z_0)|$ สำหรับทุก $z \in D$

(3) จงพิสูจน์ว่า ถ้า D เป็นเซตคอมแพกต์ และ $f(z) \ne 0$ บน D แล้วจะมี $z_1 \in D$ ซึ่ง $0 < |f(z_1)| \le |f(z)|$ สำหรับทุก $z \in D$

พิสูจน์ : (1) ให้ $z_0 \in D$ เราจะแสดงว่า $|f|$ ต่อเนื่องที่ z_0 พิจารณา $f \in C(D)$

ให้ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $z \in D$ และ $|z - z_0| < \delta$ แล้ว $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

เนื่องจาก $\big|\, |f(z)| - |f(z_0)| \,\big| \le |f(z) - f(z_0)|$ ดังนั้น

$$\big|\, |f(z)| - |f(z_0)| \,\big| < \varepsilon$$

นั่นคือ

$$|f| \text{ ต่อเนื่องที่ } z_0$$

เพราะฉะนั้น $|f| \in C(D)$

(2) พิจารณา $|f| \in C(D)$ โดยตัวอย่าง 4.3.8 (1) และ D เป็นเซตคอมแพกต์ เราได้ว่า $|f|$ มีค่าสูงสุดบน D โดยทฤษฎีบท 4.3.6

เพราะฉะนั้น จะมี $z_0 \in D$ ซึ่ง $|f|(z) \le |f|(z_0)$ สำหรับทุก $z \in D$

โดยทฤษฎีบท 4.3.7 นั่นคือ

$$|f(z)| \le |f(z_0)|$$

(3) ให้ D เป็นเซตคอมแพกต์ $z_1 \in D$ และ $f(z_1) \ne 0$ ดังนั้น $|f(z_1)| > 0$

โดยตัวอย่าง 4.3.8 (1) $|f| \in C(D)$ เราได้ว่า $|f|$ มีค่าต่ำสุดบน D

เพราะฉะนั้น จะมี $z_1 \in D$ ซึ่ง $|f|(z_1) \le |f|(z)$ สำหรับทุก $z \in D$

โดยทฤษฎีบท 4.3.7 นั่นคือ

$$0 < |f(z_1)| \le |f(z)|$$ ●