บทที่ 3
ฟังก์ชันเชิงซ้อน
(COMPLEX FUNCTIONS)

ผู้อ่านคงคุ้นเคยกับฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของ **R** มาแล้ว ในที่นี้เราจะศึกษาฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของ $\boldsymbol{R}^2$ ซึ่งเราจะเรียกว่า ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน หรือฟังก์ชันค่าเชิงซ้อนของตัวแปรเชิงซ้อน หรือฟังก์ชันเชิงซ้อน ในที่นี้เราขอเรียกว่า ฟังก์ชันเชิงซ้อน ในบทนี้เราจะศึกษาแนวคิดของลิมิต ความต่อเนื่อง และอนุพันธ์ของฟังก์ชันเชิงซ้อน

3.1 บทนิยามของฟังก์ชันเชิงซ้อน *(Definition of Complex Functions)*

บทนิยาม 3.1.1 : ให้ $D \subset \boldsymbol{R}^2$ เราจะเรียก $f: D \rightarrow \boldsymbol{R}^2$ ว่า **ฟังก์ชันเชิงซ้อนบน *D (complex function on D)***

สำหรับแต่ละ $z = (x,y) \in D$ จะเขียนแทนส่วนจริงและส่วนจินตภาพ ของ $f(z)$ ด้วย $R(f(z)) = u(x,y)$ และ $I(f(z)) = v(x,y)$

ดังนั้น $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ตัวอย่าง เช่น ถ้า $f(z) = x - iy$ จะได้ว่า $u(x,y) = x$ และ $v(x,y) = -y$ และ ถ้า $f(z) = x^2 + y^2$ จะได้ว่า $u(x,y) = x^2 + y^2$ และ $v(x,y) = 0$

บางครั้งเราอาจเขียน $f(z) = u + iv$ แทนฟังก์ชันเชิงซ้อน

ในทางเรขาคณิตเราไม่สามารถแทนฟังก์ชันเชิงซ้อนบนระนาบเดียวได้ แต่จะต้องแทนโดเมนของฟังก์ชันบนระนาบหนึ่ง เรียกว่าระนาบ z และแทนเรนจ์ของฟังก์ชันบนอีกระนาบหนึ่ง เรียกว่าระนาบ w และจะพิจารณาฟังก์ชันนี้ว่าเป็น *mapping* ของจุดบนระนาบ z ไปยังจุดบนระนาบ w

ตัวอย่าง 3.1.2 : ให้ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อน ซึ่งกำหนดโดย $f(z) = z^2$ ดังนั้น

$$w = f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i(2xy)$$

และจะได้

$$u(x,y) = x^2 - y^2 \ , \quad v(x,y) = 2xy$$

●

ตัวอย่าง 3.1.3 : ให้ $w = f(z) = u + iv = \sqrt{4x^2 + 9y^2} - 3iy$ จงหา $f(R^2)$

วิธีทำ : ให้ $E = \{(x,y) : 4x^2 + 9y^2 = c^2\}$ เมื่อ $c \geq 0$ พิจารณา

$$4x^2 + 9y^2 = c^2$$

จะได้

$$4x^2 = c^2 - (-3y)^2$$

ดังนั้น

$$c^2 \geq (-3y)^2$$

หรือ

$$-c \leq -3y = v \leq c$$

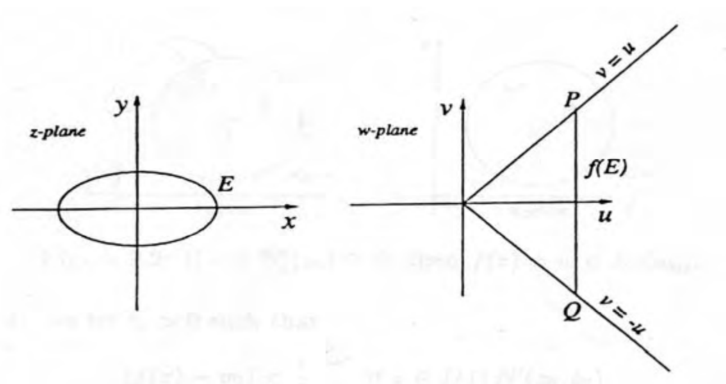
เพราะฉะนั้น $f(E) = \{(u,v) : u = c$ และ $-c \leq v \leq c\}$ นั่นคือ

$f(E)$ จะเป็นเส้นแนวตั้ง *(vertical line)* ที่มีจุดปลายอยู่บนเส้นตรง $v = \pm u$ เมื่อ $u \geq 0$ ดังรูป 3.1 และ

$$f(E) = \{(u,v) : u = c\ , |v| \leq u\}$$

เมื่อ c แปรค่าอยู่ในเซตของจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ และ E แปรค่าอยู่ใน $\boldsymbol{R}^2$ เพราะฉะนั้น

$$f(\boldsymbol{R}^2) = \{(u,v) \mid u \geq 0\ , |v| \leq u\}$$ ●



รูป 3.1 : $f(E)$ = ส่วนของเส้นตรง PQ

บทนิยาม 3.1.4 : โพลิโนเมียล *(polynomial)* คือ ฟังก์ชันเชิงซ้อน f นิยามดังนี้

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$$

สำหรับแต่ละ $z \in \boldsymbol{R}^2$ เมื่อ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นค่าคงตัวซึ่งเป็นจำนวนเชิงซ้อน

ฟังก์ชันตรรกยะ *(rational function)* คือ ฟังก์ชัน $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ เมื่อ $P(z)$ และ $Q(z)$ เป็นโพลิโนเมียล โดยที่โดเมนของ $P(z)$ และ $Q(z)$ คือ $\boldsymbol{R}^2$ และ โดเมนของ $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ คือ $\boldsymbol{R}^2 - \{ z : Q(z) = 0 \}$

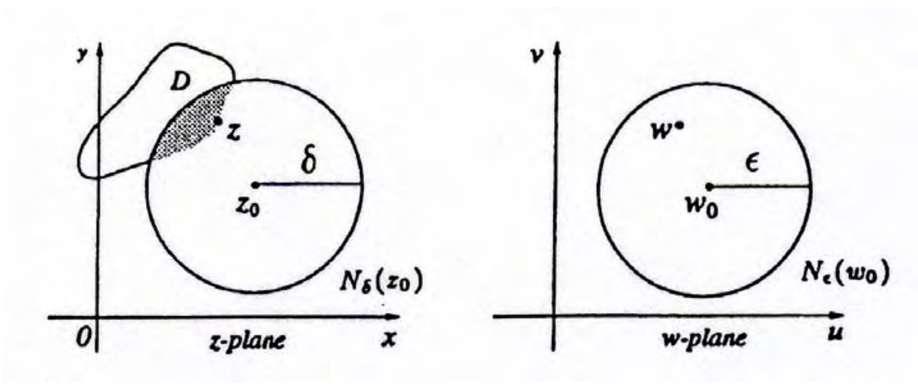
3.2 ลิมิตและความต่อเนื่อง *(Limits and Continuity)*

ในหัวข้อนี้จะศึกษาลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันเชิงซ้อน ซึ่งนิยามในทำนองเดียวกับของฟังก์ชันตัวแปรเดียว และได้ผลสรุปในทำนองเดียวกันเช่นกัน นอกจากนี้ลิมิตของฟังก์ชันเชิงซ้อนมีความสัมพันธ์กับลิมิตของฟังก์ชันสองตัวแปร

บทนิยาม 3.2.1 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน D ให้ $z_0 \in D^*$ และ $w_0 \in \boldsymbol{R}^2$ เรากล่าวว่า w_0 เป็น**ลิมิตของ $f(z)$ เมื่อ z เข้าใกล้ z_0 *(limit of f(z) as z approaches z_0)*** ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $f(z) \in N(w_0, \varepsilon)$ สำหรับทุก $z \in N'(z_0, \delta) \cap D$

เขียนแทนความหมายตามบทนิยามด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ และถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งสอดคล้องบทนิยาม 3.2.1 เราจะกล่าวว่า $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ **หาค่าได้ (exist)**

ข้อสังเกต 3.2.2 : ให้สังเกตว่า z_0 อาจไม่เป็นสมาชิกของ D และกรณีนี้อาจมีสมาชิกของ $N'(z_0, \delta)$ ซึ่งไม่เป็นสมาชิกของ D ดังนั้นเราจึงต้องใส่เงื่อนไขว่า $z \in N'(z_0, \delta) \cap D$ ในบทนิยาม 3.2.1 (ดูรูป 3.2)



รูป 3.2 ถ้า $z \in N'(z_0, \delta) \cap D$ แล้ว $f(z) = w \in N(w_0, \varepsilon)$

เห็นได้ชัดว่า ถ้า $f(z) = c$ ทุก $z \in \mathbf{R}^2$ แล้ว $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = c$ ทุก $z_0 \in \boldsymbol{R}^2$

ตัวอย่าง 3.2.3 : จงแสดงว่า $\lim\limits_{z \to -i} (z + i) = 0$

พิสูจน์ : ให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta = \varepsilon$ สำหรับ z ใด ๆ ซึ่ง $0 < |z + i| < \delta$ จะได้ว่า

$$|z + i - 0| < \delta = \varepsilon$$

ดังนั้น

$$\lim_{z \to -i} (z + i) = 0$$ ●

ตัวอย่าง 3.2.4 : จงแสดงว่า $\lim\limits_{z \to 1+i} (2z - 3) = -1 + 2i$

พิสูจน์ : ให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ สำหรับ z ใด ๆ ซึ่ง $0 < |z - (1 + i)| < \delta$ จะได้ว่า

$$|(2z - 3) - (-1 + 2i)| = |2z - 2 - 2i| = 2|z - 1 - i| < 2\delta = 2.\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ดังนั้น

$$\lim_{z \to 1+i} (2z - 3) = -1 + 2i$$ ●

ตัวอย่าง 3.2.5 : จงแสดงว่า $\lim\limits_{z \to 1} \dfrac{z^3 - 1}{z - 1} = 3$

พิสูจน์ : ให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta = min\{1, \frac{\varepsilon}{4}\}$ สำหรับ z ใด ๆ ซึ่ง $0 < |z - 1| < \delta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \left| \frac{z^3 - 1}{z - 1} - 3 \right| &= |z^2 + z - 2| = |(z - 1)^2 + 3(z - 1)| \\ &< |z - 1|^2 + 3|z - 1| \\ &< \delta^2 + 3\delta = \delta(\delta + 3) \le \delta.4 \le \varepsilon \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\lim_{z \to 1} \frac{z^3 - 1}{z - 1} = 3$$ ●

ทฤษฎีบท 3.2.6 : ให้ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน D และ $z_0 \in D^*$ ถ้า $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ หาค่าได้ แล้ว ลิมิตมีเพียงค่าเดียว

พิสูจน์ : สมมติ $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ และ $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_1$

ให้ $\varepsilon > 0$ ดังนั้นมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง $|f(z) - w_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ สำหรับทุก $z \in N'(z_0, \delta_1) \cap D$ และมี $\delta_2 > 0$ ซึ่ง $|f(z) - w_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ สำหรับทุก $z \in N'(z_0, \delta_2) \cap D$

ให้ $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ถ้า $z \in N'(z_0, \delta) \cap D$ แล้ว

$$|w_1 - w_0| \leq |w_1 - f(z)| + |f(z) - w_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ดังนั้น

$$w_1 = w_0$$

นั่นคือ

ถ้า $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ หาค่าได้ แล้วลิมิตจะมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น ■

ทฤษฎีบท 3.2.7 : กำหนดให้ $f(z) = u + iv$ เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน D ถ้า $z_0 = (x_0, y_0) \in D^*$ แล้ว

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = u_0 + iv_0 = w_0 \tag{3.1}$$

ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{z \to z_0} u(x, y) = u_0 \text{ และ } \lim_{z \to z_0} v(x, y) = v_0 \tag{3.2}$$

พิสูจน์ : กำหนดให้ (3.1) เป็นจริง ให้ $\varepsilon > 0$ ดังนั้นมี $\delta > 0$ ซึ่ง ถ้า $z \in N'(z_0, \delta) \cap D$ แล้ว

$$\varepsilon > |f(z) - w_0| = |(u - u_0) + i(v - v_0)| \geq \begin{cases} |u - u_0| \\ |v - v_0| \end{cases}$$

และดังนั้น (3.2) เป็นจริง

กำหนดให้ (3.2) เป็นจริง ให้ $\varepsilon > 0$ ดังนั้นมี $\delta_1 > 0$ และ $\delta_2 > 0$ ซึ่ง

ถ้า $z \in N'(z_0, \delta_1) \cap D$ แล้ว $|u - u_0| < \frac{\varepsilon}{2}$

และ

ถ้า $z \in N'(z_0,\delta_2) \cap D$ แล้ว $|v-v_0| < \frac{\varepsilon}{2}$

เลือก $\delta = min\{\delta_1,\delta_2\}$ ถ้า $z \in N'(z_0,\delta) \cap D$ แล้ว

$$|\, f(z)-(u_0+i\,v_0)\,| = |\,(u-u_0)+i\,(v-v_0)\,| < |\,u-u_0| + |\,v-v_0| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น (3.1) เป็นจริง และการพิสูจน์ทฤษฎีบทสมบูรณ์ ■

ข้อสังเกต 3.2.8 : ให้ F เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน D

(1) ถ้า $\lim_{z\to z_0} F(z) = W_0$ แล้วจะมี $B>0$ และ $\delta>0$ ซึ่ง $|F(z)| < B$ เมื่อ $z \in N'(z_0,\delta) \cap D$

(2) ถ้า $\lim_{z\to z_0} F(z) = W_0$ และ $W_0 \neq 0$ แล้วจะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง $F(z) \neq 0$ สำหรับทุก ๆ $z \in N'(z_0,\delta_1) \cap D$ และ $|F(z)| > \frac{1}{2}|W_0|$

(3) ถ้า F เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน D และ $\lim_{z\to z_0} F(z) = W_0$, $W_0 \neq 0$ แล้ว $z_0 \in E^*$ เมื่อ $E = \{z : z \in D$ และ $F(z) \neq 0\}$

พิสูจน์ : (1) ให้ $\varepsilon = 1$ เนื่องจาก $\lim_{z\to z_0} F(z) = W_0$ ดังนั้น จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$|F(z)-W_0| < 1 \text{ สำหรับทุก } z \in N'(z_0,\delta) \cap D$$

ให้ $B = 1+|W_0|$ และ $z \in N'(z_0,\delta) \cap D$ จะได้ว่า

$$|F(z)| = |F(z)-W_0+W_0| \leq |F(z)-W_0| + |W_0| < 1+|W_0| = B$$

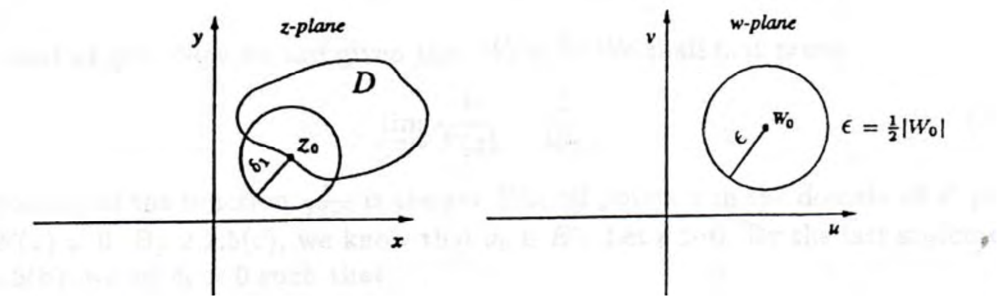
(2) ให้ $\varepsilon = \frac{1}{2}|W_0| > 0$ จากบทนิยาม 3.2.1 จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง $F(z) \in N(W_0,\varepsilon)$ เมื่อ $z \in N'(z_0,\delta_1) \cap D$ เนื่องจาก $0 \notin N(W_0,\varepsilon)$ (ดูรูป 3.3)

ดังนั้น

ถ้า $z \in N'(z_0,\delta_1) \cap D$ แล้ว $F(z) \neq 0$ สำหรับ $z \in N'(z_0,\delta_1) \cap D$ เราได้

$$\begin{aligned} |W_0| - |F(z)| &\leq \big||W_0| - |F(z)|\big| \\ &\leq |W_0 - F(z)| \\ &< \frac{1}{2}|W_0| \end{aligned}$$

นั่นคือ $|F(z)| > \frac{1}{2}|W_0|$



รูป 3.3 : ถ้า $z \in D \cap N'(z_0, \delta_1)$ แล้ว $F(z) \in N(W_0, \varepsilon)$

(3) ให้ $\varepsilon > 0$ โดย (2) จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $|F(z)| > \frac{1}{2}|W_0|$ และ $F(z) \neq 0$ สำหรับทุก ๆ $z \in N'(z_0, \delta) \cap D$

ให้ $r = min\{\varepsilon, \delta\}$ เนื่องจาก $z_0 \in D^*$ ดังนั้น $D \cap N'(z_0, r) \neq \phi$ นอกจากนี้ $F(z) \neq 0$ สำหรับทุก ๆ $z \in N'(z_0, r) \cap D$ เนื่องจาก $N'(z_0, r) \cap D \subseteq N'(z_0, \delta)$ ดังนั้น มี

$$z \in N'(z_0, r) \cap D \subset N'(z_0, \varepsilon) \cap D$$

เพราะฉะนั้น $z_0 \in E^*$ ■

ทฤษฎีบท 3.2.9 : กำหนดให้ f และ F เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อน และ $z_0 \in D^*$ เมื่อ $D = \{z : z \in D_f \cap D_F\}$ ถ้า $\lim\limits_{Z \to Z_0} f(z) = w_0$ และ $\lim\limits_{Z \to Z_0} F(z) = W_0$ แล้ว

(1) $\lim\limits_{z \to z_0} [f(z) \pm F(z)] = w_0 \pm W_0$

(2) $\lim\limits_{z \to z_0} [f(z).F(z)] = w_0.W_0$

(3) $\lim\limits_{z \to z_0} [\frac{f(z)}{F(z)}] = \frac{w_0}{W_0}$ เมื่อ $W_0 \neq 0$

พิสูจน์ : (1) ให้ $\varepsilon > 0$ โดยบทนิยาม 3.2.1 จะมี $\delta_1, \delta_2 > 0$ ซึ่ง

$$|f(z) - w_0| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ เมื่อ } z \in N'(z_0, \delta_1) \cap D_f \text{ และ}$$

$$|F(z) - W_0| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ เมื่อ } z \in N'(z_0, \delta_2) \cap D_F$$

เลือก $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ ถ้า $z \in N'(z_0, \delta) \cap D$ แล้ว

$$|[f(z) + F(z)] - [w_0 + W_0]| = |[f(z) - w_0] + [F(z) - W_0]|$$

$$\leq |f(z)-w_0| + |F(z)-W_0|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ดังนั้น

$$\lim_{z\to z_0} [\, f(z)+F(z)] = w_0 + W_0$$

(2) ให้ $\varepsilon > 0$ โดยข้อสังเกต 3.2.8 (1) จะมี $B > 0$ และ $\delta > 0$ ซึ่ง $|F(z)| < B$ ถ้า $z \in N'(z_0,\delta_1) \cap D$

เนื่องจาก $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$ และ $\lim\limits_{z\to z_0} F(z) = W_0$ ดังนั้น มี $\delta_2 > 0, \delta_3 > 0$ ซึ่ง

$$|f(z)-w_0| < \frac{\varepsilon}{2B} \quad \text{ถ้า} \quad z \in N'(z_0,\delta_2) \cap D$$

$$|F(z)-W_0| < \frac{\varepsilon}{2(1+|w_0|)} \quad \text{ถ้า} \quad z \in N'(z_0,\delta_3) \cap D$$

ให้ $\delta = min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$ ถ้า $z \in N'(z_0,\delta) \cap D$ แล้ว

$$|f(z).F(z) - w_0.W_0| = |[\, f(z).F(z) - w_0F(z)] + [\, w_0F(z) - w_0W_0\,]|$$

$$\leq |F(z)|.|f(z)-w_0| + |w_0||F(z)-W_0|$$

$$< B.\frac{\varepsilon}{2B} + \frac{|w_0|}{1+|w_0|}.\frac{\varepsilon}{2}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ดังนั้น

$$\lim_{z\to z_0} [\, f(z).F(z)] = w_0.W_0$$

(3) ประการแรกจะแสดงให้เห็นว่า $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{1}{F(z)} = \frac{1}{W_0}$ เมื่อ $W_0 \neq 0$ โดยการพิสูจน์ในข้อสังเกต 3.2.8 (3) จะได้ว่า $z_0 \in E^*$ เมื่อ $E = \{\, z : z$ อยู่ในโดเมนของ F และ $F(z) \neq 0\,\}$

ให้ $\varepsilon > 0$ โดยข้อสังเกต 3.2.8 (2) จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง $|F(z)| > \frac{1}{2}|W_0|$ ถ้า $z \in N'(z_0,\delta_1) \cap E$ โดยบทนิยาม 3.2.1 จะมี $\delta_2 > 0$ ซึ่ง

$$|F(z)-W_0| < \frac{1}{2}|W_0|^2\varepsilon \quad \text{ถ้า} \quad z \in N'(z_0,\delta_2) \cap E$$

ให้ $\delta = min\{\delta_1,\delta_2\}$ ถ้า $z \in N'(z_0,\delta) \cap E$ แล้ว

$$\left|\frac{1}{F(z)} - \frac{1}{W_0}\right| = \frac{|W_0 - F(z)|}{|F(z)|.|W_0|}$$

$$< \frac{\frac{1}{2}.|W_0|^2\varepsilon}{|F(z)|.|W_0|} = \frac{\frac{1}{2}.|W_0|\varepsilon}{|F(z)|} < \frac{\frac{1}{2}.|W_0|\varepsilon}{\frac{1}{2}.|W_0|} = \varepsilon$$

ดังนั้น $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{1}{F(z)} = \dfrac{1}{W_0}$ เมื่อ $W_0 \neq 0$ โดยข้อสรุป (2) จะได้ว่า

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{F(z)} = \lim_{z \to z_0} f(z).(\frac{1}{F(z)}) = w_0(\frac{1}{W_0}) = \frac{w_0}{W_0} \text{ เมื่อ } W_0 \neq 0$$ ■

ผลของทฤษฎีบท 3.2.9 สรุปได้ว่า $\lim\limits_{z \to z_0} z^n = z_0^n$

บทนิยาม 3.2.10 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน D และ $z_0 \in D$ เรากล่าวว่า f **ต่อเนื่องที่ z_0 *(continuous at z_0)*** ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง ถ้า $z \in D \cap N(z_0, \delta)$ แล้ว

$$f(z) \in N(f(z_0), \varepsilon)$$

นั่นคือ

$$f[D \cap N(z_0, \delta)] \subset N(f(z_0), \varepsilon)$$

เขียนแทนความหมายตามบทนิยามด้วยสัญลักษณ์ $f \in C(z_0)$ และถ้า $f \in C(z_0)$ สำหรับทุก $z_0 \in D$ แล้วเรากล่าวว่า f **ต่อเนื่องใน** D และเขียนแทนโดย $f \in C(D)$

ข้อสังเกต 3.2.11 : (1) ให้ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน D และ $z_0 \in D \cap D^*$ โดยบทนิยาม 3.2.1 และ 3.2.10 สรุปได้ว่าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ z_0 ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

(2) ถ้า $z_0 \in (D - D^*)$ แล้ว f สอดคล้องบทนิยาม 3.2.10 ดังนั้น f ต่อเนื่องที่ z_0

ทฤษฎีบท 3.2.12 : ให้ f, g เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน D และ $z_0 \in D$ ถ้า f และ g ต่อเนื่องที่ $z = z_0$ แล้ว $f + g$, $f - g$, fg ต่อเนื่องที่ z_0 และถ้า $g(z_0) \neq 0$ แล้ว $\dfrac{f}{g}$ ต่อเนื่องที่ z_0

พิสูจน์ : เป็นผลที่ได้จากทฤษฎีบท 3.2.9 และข้อสังเกต 3.2.11 ■

ตัวอย่าง 3.2.13 : จงแสดงว่า

(1) $f(z) = |z|$ ต่อเนื่องที่ทุก $z \in \mathbf{R}^2$

(2) $f(z) = |z|^2$ ต่อเนื่องที่ทุก $z \in \mathbf{R}^2$

พิสูจน์ : (1) ให้ $z_0 \in \mathbf{R}^2$ และ $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta = \varepsilon$ ทุก ๆ $z \in D \cap N(z_0, \delta)$ จะได้ว่า

$$|z - z_0| < \delta \text{ และ } \big||z| - |z_0|\big| < |z - z_0| < \delta = \varepsilon$$

ดังนั้น

$$f(z) \in N(f(z_0), \delta)$$

นั่นคือ

$$f \text{ ต่อเนื่องที่ทุก } z \in \mathbf{R}^2$$

(2) โดยทฤษฎีบท 3.2.12 และ (1) สรุปได้ว่า $f(z) = |z|^2$ ต่อเนื่องที่ทุก $z \in \mathbf{R}^2$ ●

ทฤษฎีบท 3.2.14 : ให้ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน D และ $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ให้ $z_0 = (x_0, y_0) \in D$ แล้ว f ต่อเนื่องที่ z_0 ก็ต่อเมื่อ u และ v ต่อเนื่องที่ z_0

พิสูจน์ : ($\Longrightarrow$) ให้ $f: D \longrightarrow \mathbf{R}^2$ และ f ต่อเนื่องที่ z_0

กรณีที่ 1 : ถ้า $z_0 \in D - D^*$ ดังนั้นมี $\delta > 0$ ซึ่งสอดคล้องว่า $N'(z_0, \delta) \cap D = \phi$ เพราะฉะนั้น $f(N(z_0, \delta) \cap D) \subset N(f(z_0), \varepsilon)$ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ และสรุปได้ว่า f ต่อเนื่องที่ z_0 ก็ต่อเมื่อ u และ v ต่อเนื่องที่ z_0

กรณีที่ 2 : ถ้า $z_0(x_0, y_0) \in D^*$ ดังนั้น โดยข้อสังเกต 3.2.11 และทฤษฎีบท 3.2.7 ได้ว่า

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) &= f(z_0) \\ &= \lim_{z \to z_0} f(z) \\ &= \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} [u(x,y) + iv(x,y)] \\ &= \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} u(x,y) + i \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} v(x,y) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} u(x,y) = u(x_0, y_0)$ และ

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} v(x,y) = v(x_0, y_0)$$

นั่นคือ

$$u \text{ และ } v \text{ มีความต่อเนื่องที่ } z_0$$

($\Longleftarrow$) ให้ u และ v มีความต่อเนื่องที่ $z_0 = (x_0, y_0)$ ดังนั้น

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} u(x,y) = u(x_0, y_0) \text{ และ } \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} v(x,y) = v(x_0, y_0)$$

เนื่องจาก $\displaystyle\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} [u(x,y) + iv(x,y)]$

$$= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) + i \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)$$

โดยทฤษฎีบท 3.2.7

$$= u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0)$$

$$= f(z_0)$$

สรุปได้ว่า f ต่อเนื่องที่ z_0 ■

ทฤษฎีบท 3.2.15 : ให้ n เป็นจำนวนเต็ม ที่ไม่เป็นลบ ถ้า $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นค่าคงที่เชิงซ้อน แล้วโพลิโนเมียล $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$ ต่อเนื่องที่ทุก $z \in \mathbf{R}^2$

พิสูจน์ : เป็นผลที่ได้จากทฤษฎีบท 3.2.12 และความจริงว่าฟังก์ชันคงตัว และ $f(z) = z$ ต่อเนื่องที่ทุก $z \in \mathbf{R}^2$ ■

นอกจากนี้เราได้

ทฤษฎีบท 3.2.16 : ถ้า $P(z)$ และ $Q(z)$ เป็นโพลิโนเมียล แล้ว ฟังก์ชัน $\frac{P}{Q}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุก $z \in \mathbf{R}^2$ เมื่อ $Q(z) \neq 0$

บทนิยาม 3.2.17 : ให้ g และ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน X และบน Y ตามลำดับ นิยาม **ฟังก์ชันคอมโพสิท (*composite function*)** $f o g$ ดังนี้

$(fog)(p) = f(g(p))$ สำหรับแต่ละ $p \in X$ ซึ่ง $g(p) \in Y$

ทฤษฎีบท 3.2.18 : กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน D และบน E ตามลำดับ ให้ $z_0 \in D$ ถ้า g ต่อเนื่องที่ z_0 และ f ต่อเนื่องที่ $g(z_0)$ แล้ว $f o g$ ต่อเนื่องที่ z_0

พิสูจน์ : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งต่อเนื่องที่ $g(z_0)$

ให้ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง $f(w) \in N(f(g(z_0)),\delta_1)$ เมื่อ $w \in E \cap N(g(z_0),\delta_1)$

เนื่องจาก g ต่อเนื่องที่ z_0 ดังนั้น

มี $\delta > 0$ ซึ่ง $g(z) \in N(g(z_0),\delta_1)$ เมื่อ $z \in D \cap N(z_0,\delta)$

นั่นคือ $f(g(z)) \in N(f(g(z_0)),\varepsilon)$ สำหรับ $z \in H \cap N(z_0,\delta)$ เมื่อ H เป็นโดเมนของ fog

เพราะฉะนั้น fog ต่อเนื่องที่ z_0 ■

3.3 อนุพันธ์ *(The Derivative)*

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเชิงซ้อน และจะศึกษาเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับการมีอนุพันธ์ ซึ่งคือการสอดคล้องสมการโคชี-รีมันน์ นอกจากนี้เราจะแสดงว่าการสอดคล้องสมการโคชี-รีมันน์ และการมีอนุพันธ์ย่อยที่ต่อเนื่องของส่วนจริงและส่วนจินตภาพของฟังก์ชันเป็นเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการมีอนุพันธ์

บทนิยาม 3.3.1 : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน D และ $z \in D^o$ ถ้า $\lim\limits_{t \to z} \dfrac{f(t) - f(z)}{t - z}$ หาค่าได้แล้ว จะเรียกลิมิตนี้ว่า **อนุพันธ์ของ f ที่ z *(derivative of f at z)*** และ

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f'(z)$ หรือ $\dfrac{df(z)}{dz}$

เมื่อ $f'(z)$ หาค่าได้ เราจะกล่าวว่า f **มีอนุพันธ์ที่ z *(f is differentiable at z)*** ถ้า f มีอนุพันธ์ที่ทุก $z \in S$ แล้วเราจะกล่าวว่า f **มีอนุพันธ์ใน S *(f is differentiable in S)***

ข้อสังเกต 3.3.2 : ให้ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน D และ $E = \{ z \in D^o : f'(z) \text{ หาค่าได้ } \}$ เรียกฟังก์ชันซึ่งนิยามสำหรับทุก $z \in E$ ด้วย $f'(z)$ ว่า**อนุพันธ์ของ f *(derivative of f)*** และเขียนแทนฟังก์ชันนี้ด้วย f'

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถนิยาม f'' โดยการแทน f ด้วย f' และนิยาม f''' โดยการแทน f ด้วย f'' ในลักษณะเช่นนี้ จะสามารถนิยามอนุพันธ์อันดับสูง $f^{(n)}$ เมื่อ $f^{(n-1)}$ หาค่าได้ สำหรับ n ซึ่งเป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

ให้สังเกตว่าเราอาจเขียน $\lim\limits_{t \to z} \dfrac{f(t) - f(z)}{t - z}$ ได้อีกรูปหนึ่ง คือ $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(z+h) - f(z)}{h}$

ทฤษฎีบท 3.3.3 : ให้ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อน ถ้า $f'(z)$ หาค่าได้ แล้ว f ต่อเนื่องที่ z

พิสูจน์ : กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อน ถ้า $f'(z)$ หาค่าได้ แล้ว

$$f'(z) = \lim_{t \to z} \frac{f(t) - f(z)}{t - z}$$

เนื่องจาก

$$f(t) - f(z) = \frac{[f(t) - f(z)]}{t - z} . (t - z) \quad ; \quad t \neq z$$

ดังนั้น

$$\lim_{t\to z}[f(t)-f(z)] = \lim_{t\to z}\left[\frac{f(t)-f(z)}{t-z}.(t-z)\right]$$
$$= \lim_{t\to z}\left[\frac{f(t)-f(z)}{t-z}\right].\lim_{t\to z}(t-z)$$
$$= f'(z).0 = 0$$

เพราะฉะนั้น $$\lim_{t\to z} f(t) = \lim_{t\to z}[f(t)-f(z)+f(z)]$$
$$= 0 + f(z) = f(z)$$

นั่นคือ

f ต่อเนื่องที่ z ■

ข้อสังเกต 3.3.4 : บทกลับของทฤษฎีบท 3.3.3 ไม่จริง

พิสูจน์ : พิจารณาฟังก์ชัน $f(z)=|z|^2$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องทุก z ใน $\mathbf{R}^2$ จะแสดงว่า ถ้า $f'(z)$ หาค่าได้ แล้ว $z=0$

กำหนดให้ $z=(x,y)$ และ $t=(u,v)\neq z$ ดังนั้น

$$f'(z) = \lim_{t\to z}\frac{|t|^2-|z|^2}{t-z} = \lim_{t\to z}\frac{t.\bar{t}-z.\bar{z}}{t-z}$$
$$= \lim_{t\to z}\frac{t.\bar{t}-z\bar{t}+z\bar{t}-z.\bar{z}}{t-z}$$
$$= \lim_{t\to z}\bar{t} + \lim_{t\to z}\frac{z(\bar{t}-\bar{z})}{t-z}$$
$$= \lim_{t\to z}(x-iy) + z\lim_{t\to z}\frac{i(y-v)}{i(v-y)}$$

พิจารณาการหาลิมิตในแนวดิ่ง นั่นคือ $u=x$ และ $v\to y$ ดังนั้น

$$f'(z) = \lim_{v\to y}(x-iv) + z.\lim_{v\to y}\frac{i(y-v)}{i(v-y)}$$
$$= (x-iy)+z(-1)$$
$$= \bar{z}-z = -2iy \qquad (3.3)$$

พิจารณาการหาลิมิตในแนวนอน นั่นคือ $v=y$ และ $u\to x$ ดังนั้น

$$f'(z) = \lim_{u\to x}(u-iy) + z.\lim_{u\to x}\frac{u-x}{u-x}$$
$$= (x-iy)+z = \bar{z}+z = 2x \qquad (3.4)$$

จาก (3.3) และ (3.4) จะได้ว่า $-2iy = 2x$ และสรุปได้ว่า $x=0$, $y=0$

ดังนั้น $f'(z)$ หาค่าได้ เมื่อ $z = 0$ เท่านั้น
นั่นคือ

$$f(z) = |z|^2 \text{ ต่อเนื่องที่ทุก } z \neq 0 \text{ แต่ } f'(z) \text{ หาค่าไม่ได้ที่ } z \neq 0$$ ■

ทฤษฎีบท 3.3.5 : ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อน ถ้า $f'(z)$ และ $g'(z)$ หาค่าได้ ที่จุด z แล้วจะได้ว่า

(1) $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$

(2) $(f-g)'(z) = f'(z) - g'(z)$

(3) $(f.g)'(z) = f(z).g'(z) + g(z).f'(z)$

(4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(z) = \dfrac{g(z).f'(z) - f(z).g'(z)}{g^2(z)}$ ถ้า $g(z) \neq 0$

พิสูจน์ : จะพิสูจน์ทฤษฎีบท เฉพาะ (3) กำหนดให้ $P = f.g$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\frac{P(z+h)-P(z)}{h} &= \frac{f(z+h).g(z+h)-f(z).g(z)}{h}\\ &= \frac{f(z+h).g(z+h)-f(z+h).g(z)+f(z+h)g(z)-f(z).g(z)}{h}\\ &= f(z+h).\frac{g(z+h)-g(z)}{h}+g(z).\frac{f(z+h)-f(z)}{h} \qquad (3.5)\end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$\lim_{h\to 0} f(z+h) = f(z) \quad , \quad \lim_{h\to 0}\frac{g(z+h)-g(z)}{h} = g'(z) ,$$

$$\lim_{h\to 0} g(z) = g(z) \text{ และ } \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = f'(z)$$

ดังนั้น จาก (3.5) โดยทฤษฎีบท 3.2.9 (1) และ (2) จะได้ว่า

$$(f.g)'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{P(z+h)-P(z)}{h} = f(z).g'(z) + g(z).f'(z)$$ ■

ทฤษฎีบท 3.3.6 : ถ้า $|n| \in N$, $f'(z)$ หาค่าได้ที่ z และ c เป็นค่าคงที่เชิงซ้อน แล้ว

(1) $\dfrac{dc}{dz} = 0$ และ $\dfrac{dz}{dz} = 1$ สำหรับทุก $z \in \mathbf{R}^2$

(2) $(cf)'(z) = cf'(z)$

(3) $(z^n)' = nz^{n-1}$ บน $\begin{cases} R^2 & \text{เมื่อ } n > 1 \\ R^2 - \{0\} & \text{เมื่อ } n < 0 \end{cases}$

พิสูจน์ : จะพิสูจน์เฉพาะ (3)

กรณีที่ 1 : ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก สำหรับ $z_o \in \mathbf{R}^2$ และ $z \neq z_o$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f'(z_o) &= \lim_{z\to z_o} \frac{f(z)-f(z_o)}{z-z_o} \\ &= \lim_{z\to z_o} \frac{z^n - z_o^n}{z-z_o} \\ &= \lim_{z\to z_o} \frac{(z-z_o)(z^{n-1}+z^{n-2}z_o+\ldots+zz_o^{n-2}+z_o^{n-1})}{z-z_o} \\ &= \lim_{z\to z_o} (z^{n-1}+z^{n-2}z_o+\ldots+z_o^{n-1}) \\ &= n.z_o^{n-1} \end{aligned}$$

กรณีที่ 2 : ถ้า n เป็นจำนวนเต็มลบ ดังนั้น $n = -m$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวก สำหรับ $z \in \mathbf{R}^2$ ซึ่ง $z \neq 0$ โดย ทฤษฎีบท 3.3.5 (4) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (z^n)' &= (z^{-m})' = (\frac{1}{z^m})' = \frac{z^m.0 - 1.(z^m)'}{(z^m)^2} \\ &= -\frac{mz^{m-1}}{z^{2m}} = -mz^{-m-1} = nz^{n-1} \end{aligned}$$ ■

ข้อสังเกต 3.3.7 : ให้ $f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$ เป็นโพลิโนเมียล แล้ว

$$f'(z) = a_1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + \cdots + na_nz^{n-1}$$ สำหรับทุก $z \in \mathbf{R}^2$

ทฤษฎีบท 3.3.8 : (กฎลูกโซ่ *Chain Rule*) ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อน โดยที่ $g'(z)$ และ $f'(g(z))$ หาค่าได้ ที่บางจุด z แล้ว $(fog)'(z)$ หาค่าได้ และ

$$(fog)'(z) = f'(g(z)).g'(z)$$

พิสูจน์ : ให้ $w = f(g(t))$ สำหรับ $t \in D_{fog}$ โดยนิยามของอนุพันธ์ จะมีฟังก์ชัน $\theta_1(t)$ และ $\theta_2(t)$ ซึ่ง

$\Delta g = [g'(z) + \theta_1(t)]\Delta t$ เมื่อ $\Delta g = g(t) - g(z)$, $\Delta t = t - z$ และ

$\Delta w = [f'(g(z)) + \theta_2(t)]\Delta g$ เมื่อ $\Delta w = f(g(t)) - f(g(z))$ และ

$\lim_{t\to z} \theta_1(t) = \lim_{t\to z} \theta_2(t) = 0$

ดังนั้น

$$\frac{\Delta w}{\Delta t} = [\, f'(g(z)) + \theta_2(t)].[\, g'(z) + \theta_1(t)] \qquad \text{และ}$$

$$(\, fog)'(z) \; = \; \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} = f'(g(z)).g'(z) \qquad \blacksquare$$

เพื่อความสะดวกเมื่อ $u\,, v$ คือฟังก์ชันของสองตัวแปร เราใช้สัญลักษณ์ u แทน $u(x, y)$ และ v แทน $v(x, y)$ สำหรับ u_x, u_y, v_x และ v_y แทนด้วยอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของ $u(x, y)$ หรือ $v(x, y)$

ทฤษฎีบท 3.3.9 : กำหนดให้ $f(z) = u + iv$ ถ้า f มีอนุพันธ์ที่ $z_0 = x_0 + iy_0$ แล้ว

(1) อนุพันธ์ย่อย u_x, u_y, v_x และ v_y หาค่าได้ที่ (x_0, y_0)

(2) อนุพันธ์ย่อยสอดคล้องกับ**สมการโคชี-รีมันน์*(Cauchy - Riemann equations)*** ต่อไปนี้

$$u_x = v_y \quad , \quad u_y = -v_x \;\; \text{ที่จุด} \;\; (x_0, y_0)$$

(3) $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)$

พิสูจน์ : ให้ $h = h_1 + i\,h_2$ และ $f'(z_0) = a + ib$ เมื่อ $a, b \in R$ ดังนั้น

$$z_0 + h = x_0 + h_1 + i(y_0 + h_2) \quad \text{และ}$$

$$f(z_0 + h) = u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) + iv(x_0 + h_1, y_0 + h_2)$$

เพราะฉะนั้น

$$(\, f)'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - u(x_0, y_0)}{h_1 + ih_2} + i\,\frac{v(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - v(x_0, y_0)}{h_1 + ih_2} \right] \qquad (3.6)$$

พิจารณาลิมิต (3.6) ในแนวราบ นั่นคือ $h_2 = 0$ โดยทฤษฎีบท 3.2.7 จะได้ว่า

$$f'(z_0) = a + ib = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าพิจารณาลิมิต (3.6) ในแนวดิ่ง $(h_1 = 0)$ จะได้ว่า

$$f'(z_0) = a + ib = \frac{1}{i} u_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0)$$

$$= v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)$$

ดังนั้น การพิสูจน์ ทฤษฎีบทสิ้นสุด ■

ข้อสังเกต 3.3.10 : จากทฤษฎีบท 3.3.9 แสดงว่าสมการโคชี-รีมันน์ เป็นเงื่อนไขจำเป็นสำหรับการมีอนุพันธ์ นอกจากนี้สมการโคชี-รีมันน์ไม่เป็นเงื่อนไขเพียงพอสำหรับการมีอนุพันธ์ ดังจะแสดงในตัวอย่างข้างล่างนี้ สำหรับเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการมีอนุพันธ์จะกล่าวในทฤษฎีบท 3.3.13

ตัวอย่าง 3.3.11 : จงแสดงว่า $f'(0)$ หาค่าไม่ได้ และ $f(z)$ สอดคล้องกับสมการโคชี-รีมันน์ ที่ $z = 0$ เมื่อ

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{ax^3 - by^3}{ax^2 + by^2} + i\dfrac{ax^3 + by^3}{ax^2 + by^2} & \text{ถ้า} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{ถ้า} \quad z = 0 \end{cases} \qquad \text{และ } ab > 0$$

วิธีทำ: จากนิยามของอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันค่าจริง จะได้ว่า

$$u_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{u(h,0) - u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{ah^3}{ah^2} - 0}{h} = 1 \quad \text{และ}$$

$$u_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{u(0,h) - u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-bh^3}{bh^2} - 0}{h} = -1$$

ในทำนองเดียวกัน

$$v_x(0,0) = v_y(0,0) = 1$$

ดังนั้น $u_x = v_y$ และ $u_y = -v_x$ ที่จุด $(0,0)$

จะแสดงว่า $f'(0)$ หาค่าไม่ได้

ให้ $z \to 0$ บนเส้นตรง $y = x$ จะได้ $z = x + iy = x(1+i)$ และ

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{a-b}{a+b} + i}{1+i} = \frac{a}{a+b} + i\frac{b}{a+b}$$

ให้ $z \to 0$ บนเส้นตรง $y = 0$ ดังนั้น $z = x$ และ

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{x + ix}{x} = 1 + i \neq \frac{a}{a+b} + i\frac{b}{a+b}$$

นั่นคือ

$$f'(0) \text{ หาค่าไม่ได้}$$

●

ถ้า $u(x,y)$ เป็นฟังก์ชันของ 2 ตัวแปร และให้สัญลักษณ์

$$\Delta u(x,y;h,k) = u(x+h,y+k) - u(x,y)$$

แล้วจะได้ผลสำหรับ u ซึ่งมีอนุพันธ์ย่อย ดังจะกล่าวในทฤษฎีบทประกอบต่อไปนี้

ทฤษฎีบทประกอบ 3.3.12 : กำหนดให้ u เป็นฟังก์ชันของ 2 ตัวแปร และ $z_0 \in D_u$ สมมติ มี $r > 0$ ซึ่ง $N(z_0,r) \subset D_u$, u_x , u_y หาค่าได้ ที่ทุกจุดใน $N(z_0,r)$ ถ้า u_x และ u_y ต่อเนื่องที่ z_0 แล้ว จะมี α, β ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ h , k และ

$$\Delta u = u_x(x_0,y_0)h + u_y(x_0,y_0)k + \alpha h + \beta k \quad \text{เมื่อ}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \alpha = 0 \quad \text{และ} \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \beta = 0$$

ทฤษฎีบท 3.3.13 : กำหนดให้ $f(z) = u + iv$ เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนบน D และ $z_0 \in D$ ถ้า u_x, u_y, v_x, v_y หาค่าได้ที่ทุกจุดใน $N(z_o,\varepsilon)$ สำหรับบางค่าของ ε และ u_x , u_y , v_x , v_y ต่อเนื่องที่ z_0 และสอดคล้องกับสมการโคชี-รีมันน์ $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ ที่ z_0 แล้ว $f'(z_o)$ หาค่าได้

พิสูจน์ : ให้ $\Delta z = h + ik$ โดยทฤษฎีบทประกอบ 3.3.12 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f(z_o + \Delta z) - f(z_o) &= [u(x_o+h, y_o+k) - u(x_o,y_o)] + i[v(x_o+h,y_o+k) - v(x_o,y_o)] \\ &= u_x(x_o,y_o)h + u_y(x_o,y_o)k + \alpha h + \beta k + i[v_x(x_o,y_o)h + v_y(x_o,y_o)k + \gamma h + \delta k] \end{aligned}$$

เมื่อ $\alpha, \beta, \gamma, \delta \to 0$ ถ้า $(h,k) \to (0,0)$ ดังนั้น

$$f(z_o + \Delta z) - f(z_o) = u_x(x_o,y_o)h + u_y(x_o,y_o)k + i[v_x(x_o,y_o)h + v_y(x_o,y_o)k] + \varepsilon$$

เมื่อ $\varepsilon = \alpha h + \beta k + i(\gamma h + \delta k)$

ถ้าแทนเงื่อนไขของสมการโคชี-รีมันน์ เราจะได้ว่า

$$f(z_o + \Delta z) - f(z_o) = (h+ik)u_x(x_o,y_o) + i(h+ik)v_x(x_o,y_o) + \varepsilon$$

และเมื่อแทนค่า $\Delta z = h + ik$ เราจะได้

$$\frac{f(z_o + \Delta z) - f(z_o)}{\Delta z} = u_x(x_o,y_o) + iv_x(x_o,y_o) + (\alpha + i\gamma)\frac{h}{\Delta z} + (\beta + i\delta)\frac{k}{\Delta z}$$

เนื่องจาก $\left|\dfrac{h}{\Delta z}\right| \le 1$ และ $\left|\dfrac{k}{\Delta z}\right| \le 1$

เพราะฉะนั้น $0 \le \left|(\alpha + i\gamma)\dfrac{h}{\Delta z}\right| \le |\alpha + i\gamma|$ และ $0 \le \left|(\beta + i\delta)\dfrac{k}{\Delta z}\right| \le |\beta + i\delta|$

ดังนั้น

$$(\alpha + i\gamma)\frac{h}{\Delta z} \to 0 \;\; ; (\beta + i\delta)\frac{k}{\Delta z} \to 0 \;\; \text{เมื่อ } \Delta z \to 0$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_o + \Delta z) - f(z_o)}{\Delta z} = u_x(x_o, y_o) + iv_x(x_o, y_o)$

นั่นคือ

$f'(z_o)$ หาค่าได้ ■

ตัวอย่าง 3.3.14 : จงแสดงว่า f มีอนุพันธ์ที่ทุก $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ สำหรับ f ซึ่งนิยามดังต่อไปนี้

(1) $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$

(2) $f(z) = e^x \sin y - ie^x \cos y$

พิสูจน์ : (1) กำหนด $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y = u(x, y) + iv(x, y)$ เมื่อ $z = (x, y)$ เราได้ว่า

$$u(x, y) = e^x \cos y \text{ และ } v(x, y) = e^x \sin y$$

ดังนั้น

$$u_x = e^x \cos y \quad , \quad u_y = -e^x \sin y$$

$$v_x = e^x \sin y \quad , \quad v_y = e^x \cos y$$

เราจะเห็นว่า $u(x, y)$ และ $v(x, y)$ ต่อเนื่องที่ทุก $z \in \mathbf{R}^2$ รวมทั้งอนุพันธ์ย่อย u_x , u_y , v_x, v_y ต่อเนื่องที่ z ด้วย และสอดคล้องกับสมการโคชี-รีมันน์ ที่ทุก $z \in \mathbf{R}^2$ นั่นคือ

$$u_x = v_y \text{ และ } u_y = -v_x \text{ ที่ทุก } z \in \mathbf{R}^2$$

เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบท 3.3.9 f มีอนุพันธ์ที่ทุก $z \in \mathbf{R}^2$

(2) กำหนด $f(z) = e^x \sin y - ie^x \cos y = u(x, y) + iv(x, y)$ เมื่อ $z = (x, y)$ เราได้ว่า

$$u(x, y) = e^x \sin y \text{ และ } v(x, y) = -e^x \cos y$$

ดังนั้น

$$u_x = e^x \sin y \quad , \quad u_y = e^x \cos y$$

$$v_x = -e^x \cos y \quad , \quad v_y = e^x \sin y$$

เราจะเห็นว่า $u(x,y)$ และ $v(x,y)$ ต่อเนื่องที่ทุก $z \in \mathbf{R}^2$ รวมทั้งอนุพันธ์ย่อย u_x , u_y , v_x, v_y ต่อเนื่องที่ z ด้วย และสอดคล้องกับสมการโคชี-รีมันน์ ที่ทุก $z \in \mathbf{R}^2$ นั่นคือ

$$u_x = v_y \text{ และ } u_y = -v_x \text{ ที่ทุก } z \in \mathbf{R}^2$$

เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบท 3.3.9 f มีอนุพันธ์ที่ทุก $z \in \mathbf{R}^2$ ●

ตัวอย่าง 3.3.15 : จงแสดงว่า f ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่ $z \in \mathbf{R}^2$ ถ้า

$$f(z) = e^x \sin y + ie^x \cos y$$

พิสูจน์ : ให้ $z = x + iy$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ และ

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = e^x \sin y + ie^x \cos y$$

เราจะได้ $u(x,y) = e^x \sin y$ และ $v(x,y) = e^x \cos y$ ดังนั้น

$$u_x = e^x \sin y \quad , \quad u_y = e^x \cos y$$

$$v_x = e^x \cos y \quad , \quad v_y = -e^x \sin y$$

เราจะเห็นว่า $u(x,y)$ และ $v(x,y)$ ต่อเนื่องที่ทุก z รวมทั้งอนุพันธ์ย่อย u_x , u_y , v_x, v_y มีความต่อเนื่องด้วย แต่ไม่สอดคล้องกับสมการโคชี-รีมันน์ ที่ z

นั่นคือ $u_x \neq v_y$ และ $u_y \neq v_x$

เพราะฉะนั้น f ไม่มีอนุพันธ์ที่ z ●

ตัวอย่าง 3.3.16 : จงแสดงว่า $f(z)$ นิยามดังต่อไปนี้ ไม่มีอนุพันธ์ที่จุดใด ๆ ใน $\mathbf{R}^2$

(1) $f(z) = \bar{z}$ (2) $f(z) = R(z)$

(3) $f(z) = I(z)$ (4) $f(z) = |z|$

พิสูจน์ : (1) ให้ $z = x + iy$ และ $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

ถ้า $f(z) = \bar{z}$ จะได้ $u(x,y) = x$ และ $v(x,y) = -y$ ดังนั้น

$$u_x = 1 \quad , \quad u_y = 0 \quad , \quad v_y = -1 \text{ และ } v_x = 0$$

เราจะได้ว่า $u_x \neq v_y$ และ $v_x = -u_y$

นั่นคือ อนุพันธ์ย่อยหาค่าได้ แต่ไม่สอดคล้องกับสมการโคชี-รีมันน์

เพราะฉะนั้น $f(z)$ ไม่มีอนุพันธ์ที่จุดใด ๆ ใน $\mathbf{R}^2$

(2) ให้ $z = x + iy$ และ $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$
ถ้า $f(z) = R(z)$ จะได้ $u(x,y) = x$ และ $v(x,y) = 0$ ดังนั้น

$u_x = 1$, $u_y = 0$, $v_y = 0$ และ $v_x = 0$

เราจะได้ว่า $u_x \neq v_y$ และ $v_x = -u_y$
นั่นคือ อนุพันธ์ย่อยหาค่าได้ แต่ไม่สอดคล้องกับสมการโคชี-รีมันน์
เพราะฉะนั้น $f(z)$ ไม่มีอนุพันธ์ที่จุดใด ๆ ใน $\mathbf{R}^2$

(3) ให้ $z = x + iy$ และ $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$
ถ้า $f(z) = I(z)$ จะได้ $u(x,y) = 0$ และ $v(x,y) = y$ ดังนั้น

$u_x = 0$, $u_y = 0$, $v_y = 1$ และ $v_x = 0$

เราจะได้ $u_x \neq v_y$ และ $v_x = -u_y$
นั่นคือ อนุพันธ์ย่อยหาค่าได้ แต่ไม่สอดคล้องกับสมการโคชี-รีมันน์
เพราะฉะนั้น $f(z)$ ไม่มีอนุพันธ์ที่จุดใด ๆ ใน $\mathbf{R}^2$

(4) ให้ $z = x + iy$ และ $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$
ถ้า $f(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ จะได้ $u(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ และ $v(x,y) = 0$
ดังนั้น

$$u_x = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad , \quad u_y = \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad , \quad v_y = 0 \text{ และ } v_x = 0$$

เราจะได้ $u_x \neq v_y$ และ $v_x \neq -u_y$
นั่นคือ อนุพันธ์ย่อยหาค่าได้ แต่ไม่สอดคล้องกับสมการโคชี-รีมันน์
เพราะฉะนั้น $f(z)$ ไม่มีอนุพันธ์ที่จุดใด ๆ ใน $\mathbf{R}^2$ ●

ตัวอย่าง 3.3.17 : ฟังก์ชัน $f(z) = x^2 - iy^2$ มีอนุพันธ์เฉพาะที่จุดซึ่งอยู่บนเส้นตรง $y = -x$ เท่านั้น

วิธีทำ : $f(z) = x^2 - iy^2 = u(x,y) + iv(x,y)$
ดังนั้น $u(x,y) = x^2$, $v(x,y) = -y^2$ เราจะได้

$u_x = 2x$, $u_y = 0$

$v_y = -2y$, $v_x = 0$

จะเห็นได้ว่า อนุพันธ์ย่อยหาค่าได้และสอดคล้องกับสมการโคชี-รีมันน์ ที่ (x,y) ก็ต่อเมื่อ $y=-x$

นอกจากนี้ $u(x,y)$, $v(x,y)$, u_x , u_y , v_x และ v_y ต่างต่อเนื่องบนเส้นตรง $y=-x$ เพราะฉะนั้น โดยทฤษฎีบท 3.3.9 $f(z)$ หาอนุพันธ์ได้ที่ทุกจุดบนเส้นตรงนี้เท่านั้น ●

ทฤษฎีบท 3.3.18 : กำหนด $z_0 = r_0\, cis\theta_0 \neq 0$, f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อน $\hat{u}(r,\theta)$, $\hat{v}(r,\theta)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง และ $f(z) = \hat{u}(r,\theta) + i\hat{v}(r,\theta)$ นิยามในบางอาณาเขตของจุด $z_0 = r_0 cis\theta_0$ และ $\hat{u}_r$, $\hat{u}_\theta$, $\hat{v}_r$, $\hat{v}_\theta$ นิยามในอาณาเขตเดียวกัน และมีความต่อเนื่อง ถ้า $\hat{u}(r,\theta)$ และ $\hat{v}(r,\theta)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$\hat{u}_r = \frac{1}{r}\hat{v}_\theta$, $\hat{u}_\theta = -r\hat{v}_r$ แล้ว f มีอนุพันธ์ที่ z_0 และ

$$f'(z_0) = (\hat{u}_r + i\hat{v}_r)(\cos\theta_0 - i\sin\theta_0)$$

สำหรับทฤษฎีบทนี้เราจะขอละการพิสูจน์ ให้ผู้อ่านพิสูจน์เอง และขอนำทฤษฎีบทนี้ไปใช้ในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.3.19 : กำหนดให้ $f(z) = u + iv$ เมื่อ $u(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$ และ $v(x,y) = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$ จงแสดงว่า f มีอนุพันธ์สำหรับทุก $z \neq 0$ และ $f'(z) = -\dfrac{2}{z^3}$

วิธีทำ : พิจารณา f ในรูปเชิงขั้ว เราได้ $\hat{u}(r,\theta) = \dfrac{\cos 2\theta}{r^2}$ และ $\hat{v}(r,\theta) = \dfrac{\sin 2\theta}{r^2}$ สำหรับ $r \neq 0$ เราได้ว่า $\hat{u}(r,\theta)$, $\hat{v}(r,\theta)$, $\hat{u}_r$, $\hat{v}_r$, $\hat{u}_\theta$ และ $\hat{v}_\theta$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง โดยที่ $\hat{u}_r = -2r^{-3}\cos 2\theta$, $\hat{v}_r = 2r^{-3}\sin 2\theta$, $\hat{u}_\theta = -2r^{-2}\sin 2\theta$ และ $\hat{v}_\theta = -2r^{-2}\cos 2\theta$ เนื่องจาก $\hat{u}_r = \frac{1}{r}\hat{v}_\theta$ และ $\hat{u}_\theta = -r\hat{v}_r$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.3.18 เราได้ f มีอนุพันธ์ สำหรับทุก $z \neq 0$ และ

$$\begin{aligned} f'(z) &= -2r^{-3}(\cos 2\theta - i\sin 2\theta)(\cos\theta - i\sin\theta) \\ &= -2r^{-3}(\cos 3\theta - i\sin 3\theta) \\ &= \frac{-2}{r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)} \\ &= -\frac{2}{z^3} \end{aligned}$$

●