บทที่ 2
ทฤษฎีบทพื้นฐาน
(FUNDAMENTAL THEOREMS)

ในบทนี้จะกล่าวถึงบทนิยามและทฤษฎีบทพื้นฐานต่าง ๆ ที่ใช้ในการศึกษาฟังก์ชันวิเคราะห์ โดยละการพิสูจน์ สำหรับผู้สนใจสามารถศึกษารายละเอียดได้จาก [1] และ [5]

บทนิยาม 2.1 : ระบบจำนวนเชิงซ้อน *(complex number system)* คือ ระบบ $(\boldsymbol{R}^2,+,.,|\,|)$ โดยที่ถ้า $z=(x,y)$ และ $w=(u,v)$ เป็นสมาชิกของ $\boldsymbol{R}^2$ แล้ว

$$z+w=(x+u,y+v)$$
$$z.w=(xu-yv,xv+yu)$$
$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$
$$|z-w|=\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}$$

ทฤษฎีบท 2.2 : $(\boldsymbol{R}^2,+,.)$ เป็นฟิลด์ นั่นคือ $(\boldsymbol{R}^2,+,.)$ มีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

(1) คุณสมบัติปิดภายใต้การบวกและการคูณ *(Addition and multiplication are closed)*

$(a,b),(c,d)\in\boldsymbol{R}^2\Rightarrow(a,b)+(c,d)\in\boldsymbol{R}^2$ และ $(a,b).(c,d)\in\boldsymbol{R}^2$

(2) กฎการเปลี่ยนกลุ่มได้ *(Associative law)*

(2.1) $[(a,b)+(c,d)]+(e,f)=(a,b)+[(c,d)+(e,f)]$

(2.2) $[(a,b).(c,d)].(e,f)=(a,b).[(c,d).(e,f)]$

ทุก ๆ $(a,b),(c,d),(e,f)\in\boldsymbol{R}^2$

(3) กฎการสลับที่ *(Commutative law)*

(3.1) $(a,b)+(c,d)=(c,d)+(a,b)$

(3.2) $(a,b).(c,d)=(c,d).(a,b)$

ทุก ๆ $(a,b),(c,d)\in\boldsymbol{R}^2$

(4) กฎการแจกแจง *(Distributive law)*

$(a,b).[(c,d)+(e,f)]=(a,b).(c,d)+(a,b).(e,f)$

ทุก ๆ $(a,b),(c,d),(e,f)\in\boldsymbol{R}^2$

(5) การมีเอกลักษณ์ *(Existence of identities)*

(5.1) $(0,0)+(a,b)=(a,b)$

(5.2) $(1,0).(a,b)=(a,b)$

ทุก ๆ $(a,b)\in \boldsymbol{R}^2$ นั่นคือ $(0,0)$ และ $(1,0)$ เป็นเอกลักษณ์สำหรับการบวกและการคูณของ $\boldsymbol{R}^2$ ตามลำดับ

(6) การมีอินเวอร์ส *(Existence of inverses)*

(6.1) $(a,b)+(-a,-b)=(0,0)$

ทุก ๆ $(a,b)\in \boldsymbol{R}^2$ เมื่อกำหนด (a,b) มาให้ $(-a,-b)$ จะเป็นจำนวนเชิงซ้อนจำนวนเดียวที่สอดคล้อง (6.1) นั่นคือ $(-a,-b)$ เป็นอินเวอร์สของ (a,b) สำหรับการบวก

(6.2) $(a.b).(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2})=(1,0)$

ทุก ๆ $(0,0)\neq(a,b)\in \boldsymbol{R}^2$ เมื่อกำหนด (a,b) มาให้ $(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2})$ จะเป็นจำนวนเชิงซ้อนจำนวนเดียวที่สอดคล้อง (6.2) นั่นคือ $(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2})$ เป็นอินเวอร์สของ (a,b) สำหรับการคูณ

ข้อสังเกต 2.3 : ทุก ๆ จำนวนเชิงซ้อน (a,b) เราสามารถเขียน

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(0,1).(b,0)$$

และถ้าเราแทน $(0,1)$ ด้วย i เรียกว่าหน่วยจินตภาพ *(imaginary unit)* จะได้ว่าเราสามารถเขียน (a,b) ให้อยู่ในรูป $a+ib$ เมื่อเราเขียนจำนวนเชิงซ้อน ในรูปดังกล่าว เราจะเห็นได้ว่า เมื่อ $z_1=a+ib$ และ $z_2=c+id$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนแล้วเราได้

$$z_1=z_2 \Leftrightarrow a=c, b=d$$

การบวกและการคูณจำนวนเชิงซ้อนในรูปใหม่จะเป็นดังนี้

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$$

$$(a+ib).(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$$

ให้สังเกตว่าทุกจำนวนจริง a เมื่อเราสามารถเขียนแทน a ด้วย $a+i0$ นอกจากนี้เราจะได้ $i^2=-1$

บทนิยาม 2.4 : ถ้า $z = (x, y)$ เป็นสมาชิกใน $\boldsymbol{R}^2$ แล้วเรียก $(x,-y)$ ว่า**สังยุคของ** z ***(complex conjugate of z)*** เขียนแทนโดยสัญลักษณ์ $\bar{z}$

ทฤษฎีบท 2.5 : ถ้า $z = x + iy$ และ $w = u + iv$ แล้ว

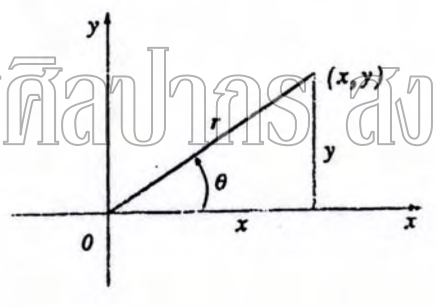
(1) $z + \bar{z} = 2R(z)$

(2) $z - \bar{z} = 2iI(z)$

(3) $z.\bar{z} = |z|^2$

(4) $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$

บทนิยาม 2.6 : ถ้า $z = (x, y) = x + iy$ เป็นจุดบนระนาบเชิงซ้อน เมื่อเวกเตอร์ z ทำมุม θ กับแกน X ดูรูป 2.1 แล้ว $z = (x, y) = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เมื่อ $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ และ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$



รูป 2.1

เราเรียกการเขียน z ในรูป $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ว่ารูปเชิงขั้วของ z และเรียก θ ว่า อาร์กิวเมนต์ *(argument)* ของ z เขียนแทนโดย $\arg z$ เห็นได้ว่าอาร์กิวเมนต์ของ z ไม่ได้มีเพียงค่าเดียว กล่าวคือ ถ้า θ เป็นอาร์กิวเมนต์ของ z แล้ว $\theta + 2k\pi$ ก็เป็นอาร์กิวเมนต์ของ z ด้วย เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ในบางกรณีเราอาจใช้สัญลักษณ์ $r\,cis\,\theta$ แทนรูปเชิงขั้ว $r(\cos\theta + i\sin\theta)$

ข้อสังเกต 2.7 : (1) $z = 0$ ก็ต่อเมื่อ $|z| = 0$

(2) ถ้า $w = |w|\,cis\theta = |w|\,cis\phi \neq 0$ แล้ว $\theta - \phi = 2k\pi$ สำหรับบางค่าของจำนวนเต็ม k

(3) ถ้า $z \neq 0$ แล้วมีอาร์กิวเมนต์ของ z เพียงค่าเดียว ซึ่งเรียกว่า อาร์กิวเมนต์หลัก *(principal argument)* ของ z เขียนแทนโดย $Arg\, z$ ซึ่ง

$$-\pi < Arg\, z \leq \pi$$

(4) ถ้า $w = r\, cis\theta$ แล้ว $\overline{w} = r\, cis(-\theta)$

ทฤษฎีบท 2.8 : ถ้า $z = r\, cis\theta$ และ $w = s\, cis\phi$ แล้ว $zw = rs\, cis(\theta + \phi)$

ข้อสังเกต 2.9 : ถ้า z, w เป็นจำนวนเชิงซ้อนแล้ว

(1) $| zw | = | z || w |$

(2) $\overline{zw} = \overline{z}.\overline{w}$

ทฤษฎีบท 2.10 : ถ้า $z = r\, cis\theta$ และ $w = s\, cis\phi$ และ $w \neq 0$ แล้วมี q ใน $\boldsymbol{R}^2$ เพียงค่าเดียว ซึ่ง $wq = z$ และ $q = \frac{r}{s} cis(\theta - \phi)$

โดยทฤษฎีบท 2.10 ทำให้สรุปได้ว่า เราหาค่าของ $\frac{z}{w}$ ได้ง่ายเมื่อเขียน z และ w ให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว กล่าวคือ ถ้า $z = r\, cis\theta$ และ $w = s\, cis\phi$ และ $w \neq 0$ แล้ว

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s} cis(\theta - \phi)$$

บทนิยาม 2.11 : ให้ $z \in \boldsymbol{R}^2$, $z \neq 0$ และ $n \in N$ แล้ว นิยาม

$$z^0 = 1 \quad \text{และ} \quad z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$

ทฤษฎีบท 2.12 : ทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ *(De Moivre's Theorem)*

ถ้า $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ แล้ว สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n ใดๆ เราได้

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

ทฤษฎีบท 2.13 : ให้ $w = r\,cis\theta$ และ $n \in N$ แล้วสมการ $z^n = w$ มีคำตอบทั้งหมด k ค่า คือ $z_0, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}$ เมื่อ

$$z_k = \sqrt[n]{r}\; cis\,(\frac{\theta + 2k\pi}{n}) \qquad , \qquad k = 0,1,2,\cdots, n-1$$

เราเรียก $z_0, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}$ ว่ารากที่ n ของ w นั่นคือรากที่ n ของ w มีทั้งหมด n ค่า

ต่อไปนี้จะกล่าวถึงอสมการต่าง ๆ ของจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งจะนำไปใช้ในการศึกษาการวิเคราะห์เชิงซ้อน ประการแรกเราได้อสมการต่อไปนี้

$$|\,z\,| \;\geq\; |\,R(z)\,| \;\geq R(z)$$

และ

$$|\,z\,| \;\geq\; |\,I(z)\,| \;\geq I(z)$$

ทฤษฎีบท 2.14 : ให้ z, w, p เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว

(1) $|\,z + w\,| \;\leq\; |\,z\,| \;+ |\,w\,|$

(2) $|\,z - w\,| \;\leq\; |\,z - p\,| \;+ |\,p - w\,|$

(3) $|\,z - w\,| \;\leq\; ||\,z\,| - |\,w\,||$

บทนิยาม 2.15 : ให้ $p \in \boldsymbol{R}^2$ และ $\varepsilon > 0$ นิยาม **อาณาเขตของ *p (neighborhood of p)*** ในรัศมี ε เขียนแทนโดย $N(p,\varepsilon)$ หรือ $N_\varepsilon(p)$ ดังนี้

$$N(p,\varepsilon) = \{z : |z - p| < \varepsilon\}$$

เห็นได้ชัดว่า p เป็นสมาชิกของทุกอาณาเขตของ p ในการศึกษาทางการวิเคราะห์เชิงซ้อน เราจะเกี่ยวข้องกับอาณาเขตของ p ที่ไม่มีจุด p ซึ่งจะเขียนแทนเซตนี้โดย $N'(p,\varepsilon)$ หรือ $N'_\varepsilon(p)$ นั่นคือ

$$N'(p,\varepsilon) = \{z : 0 < |z - p| < \varepsilon\}$$

บทนิยาม 2.16 : ให้ $S \subset \boldsymbol{R}^2$ และ $p \in \boldsymbol{R}^2$

(1) p เป็น**จุดลิมิตของ S *(limit point of S)*** ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $N'(p,\varepsilon)$ จะมีจุดใน S อย่างน้อย 1 จุด นั่นคือ

p เป็นจุดลิมิตของ S ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะได้ว่า $S \cap N'(p,\varepsilon) \neq \phi$

(2) ให้ S^* แทนเซตของจุดลิมิตทั้งหมดของ S เราเรียกเซต $S \cup S^*$ ว่า**โคลเชอร์ของ S *(closure of S)*** เขียนแทนโดย $\overline{S}$

(3) S เป็น**เซตปิด *(closed set)*** ก็ต่อเมื่อ $S^{*} \subset S$ นั่นคือ แต่ละจุดลิมิตของ S อยู่ใน S

(4) จุด p เป็น**จุดภายในของ** S ***(interior point of S)*** ก็ต่อเมื่อ มี $r > 0$ ซึ่ง $N(p,r) \subset S$ และจะเขียนแทนเซตของจุดภายในทั้งหมดของ S โดย S^{o}

(5) S เป็น**เซตเปิด *(open set)*** ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละจุด p ใน S มีจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ ซึ่ง $N(p,\varepsilon) \subset S$

(6) จุด p เรียกว่า**จุดขอบของ** S ***(boundary point of S)*** ก็ต่อเมื่อ $N(p,\varepsilon)$ มีสมาชิกของ S และสมาชิกของ $\boldsymbol{R}^{2} - S$ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$

(7) เซตของจุดขอบทั้งหมดของ S เรียกว่า**ขอบของ** S ***(boundary of S)*** และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $B(S)$

ทฤษฎีบท 2.17 : ถ้า $z \in \boldsymbol{R}^{2}$ และ $r > 0$ แล้ว $N(z,r)$ เป็นเซตเปิด

บทนิยาม 2.18 : ให้ $E \subset \boldsymbol{R}^{2}$ และ $\mathcal{C}$ เป็นคอลเล็คชันของสับเซตของ $\boldsymbol{R}^{2}$

(1) เราจะเรียก $\{z \mid \exists A \in \mathcal{C}$ และ $z \in A\}$ ว่า **ยูเนียน*(union)***ของ $\mathcal{C}$ และเขียนแทนโดยสัญลักษณ์ $\cup\mathcal{C}$

(2) คอลเล็คชัน $\mathcal{C}$ เป็น**เซตปกคลุมสำหรับ E *(cover for E)* หรือปกคลุม E *(cover E)*** ก็ต่อเมื่อ $E \subset \cup\mathcal{C}$

(3) คอลเล็คชัน $\mathcal{C}$ เป็น**เซตปกคลุมเปิดสำหรับ E *(open cover for E)*** ก็ต่อเมื่อ $\mathcal{C}$ ปกคลุม E และแต่ละสมาชิกใน $\mathcal{C}$ เป็นเซตเปิด

(4) คอลเล็คชัน $\mathcal{D}$ เป็น**เซตปกคลุมย่อยของ $\mathcal{C}$ สำหรับ E *(subcover of $\mathcal{C}$ for E)*** ก็ต่อเมื่อ $\mathcal{D}$ ปกคลุม E และ $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$

(5) เซต E เป็น**เซตคอมแพกต์ *(compact set)*** ก็ต่อเมื่อ แต่ละเซตปกคลุมเปิดสำหรับ E มีเซตปกคลุมย่อยสำหรับ E ซึ่งเป็นเซตจำกัด

ข้อสังเกต 2.19 : บทนิยาม 2.18 ใช้ได้กับ E ซึ่งเป็นสับเซตของ $\boldsymbol{R}$

ทฤษฎีบท 2.20 : ให้ $\mathcal{C}$ เป็นคอลเล็กชันของสับเซตเปิดของ $\boldsymbol{R}^{2}$ แล้ว $\cup\mathcal{C}$ เป็นเซตเปิด

ทฤษฎีบท 2.21 : ให้ $E \subset \boldsymbol{R}^2$ แล้ว E เป็นเซตคอมแพกต์ ก็ต่อเมื่อ E เป็นเซตปิดและเป็นเซตมีขอบเขต