บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีการเลือกแบนวิดธ์ 6 วิธี คือ การเลือกแบนวิดธ์ด้วยวิธี Direct plug-in วิธี Rules of thumb วิธี Least squares cross-validation วิธี Silverman's rules of thumb วิธี Biased cross-validation และ วิธี Solve the equation plug-in ในการประมาณความหนาแน่นด้วยวิธีของ Zhang และคณะ (1999) เมื่อฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเกิดปัญหาการประมาณความหนาแน่นบริเวณขอบเขต

สำหรับการวิจัยเชิงจำลอง กำหนดฟังก์ชันเคอร์เนลแบบเกาส์เซียน ใช้ขนาดตัวอย่าง (n) จำนวน 5 ขนาด คือ 30 , 50 , 100 , 150 และ 200 ตัวแปรสุ่มที่ใช้ในการวิจัยเกิดจากฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น 2 รูปแบบ แบ่งการวิจัยเป็นกรณีศึกษา ดังต่อไปนี้

1. กรณีศึกษาที่ 1 ตัวแปรสุ่มที่ใช้ในการวิจัยเกิดจากฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น $f(x) = 5e^{-5x}$

2. กรณีศึกษาที่ 2 ตัวแปรสุ่มที่ใช้ในการวิจัยเกิดจากฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น $f(x) = \frac{5}{4}(1+15x)e^{-5x}$

เกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีการเลือกแบนวิดธ์ สำหรับรูปแบบฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นทั้งสองรูปแบบ จะใช้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองรวมเฉลี่ย $(MISE)$ เป็นตัวชี้วัด ดำเนินการสร้างข้อมูลให้มีการแจกแจงและขนาดตัวอย่างตามที่ต้องการ ในแต่ละสถานการณ์จะมีการทำซ้ำ 1,000 รอบ

สำหรับการวิจัยข้อมูลเชิงตัวเลข กำหนดฟังก์ชันเคอร์เนลแบบเกาส์เซียน ใช้ข้อมูลจริง คือข้อมูลระยะเวลา (วัน) ที่ใช้ในการบำบัดรักษาผู้ป่วยควบคุมที่มีอาการทางจิตจำนวน 86 คน

ทำการประมวลผลการวิจัยเชิงจำลองและการวิจัยข้อมูลเชิงตัวเลขด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ R version 2.10.1 ผลการวิจัยสามารถสรุปได้ในหัวข้อที่ 5.1

5.1 สรุปผลการวิจัย

ในการวิจัยเชิงจำลอง ผลสรุปจากการเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสอง-รวมเฉลี่ย ($MISE$) และ ค่าแบนวิดธ์เฉลี่ย ที่เกิดขึ้นจากการประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของ-ความน่าจะเป็นด้วยวิธีของ Zhang และคณะ (1999) โดยใช้ค่าแบนวิดธ์จากวิธีการเลือกแบนวิดธ์ 6 วิธี จำแนกตามกรณีศึกษาได้ดังหัวข้อที่ 5.1.1.1 และหัวข้อที่ 5.1.1.2 ผลสรุปการวิจัยข้อมูลเชิง-ตัวเลข ที่ใช้ข้อมูลจริงมาวิเคราะห์แสดงได้ในหัวข้อ 5.1.2

5.1.1 สรุปผลการวิจัยสำหรับการศึกษาเชิงจำลอง

5.1.1.1 สรุปผลการวิจัยสำหรับกรณีศึกษาที่ 1

เมื่อพิจารณาค่าแบนวิดธ์เฉลี่ยพบว่า วิธี Rules of thumb และ วิธี Biased cross-validation ให้ค่าแบนวิดธ์เฉลี่ยมากกว่าวิธีอื่น ๆ วิธี Least squares cross-validation จะให้ค่าแบนวิดธ์เฉลี่ยที่น้อยที่สุดในทุกขนาดตัวอย่าง จึงส่งผลให้กราฟความหนาแน่นที่ได้มีความ-เรียบน้อยกว่าปกติ เมื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีการเลือกแบนวิดธ์โดยพิจารณาค่า-ความคลาดเคลื่อนกำลังสองรวมเฉลี่ยที่เกิดขึ้นจากการประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความ-น่าจะเป็นด้วยวิธีของ Zhang และคณะ การเลือกแบนวิดธ์ด้วยวิธี Rules of thumb วิธี Silverman's rules of thumb และ วิธี Biased cross-validation ให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลัง-สองรวมเฉลี่ยในการประมาณความหนาแน่นที่ใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง โดยวิธี Rules of thumb มีค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองรวมเฉลี่ยน้อยที่สุด รองลงมาคือ วิธี Silverman's rules of thumb วิธี Biased cross-validation วิธี Direct plug-in วิธี Solve the equation plug-in และ วิธี Least squares cross-validation ตามลำดับ การเลือกแบนวิดธ์ด้วยวิธี Least squares cross-validation มีค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองรวมเฉลี่ยในการประมาณความหนาแน่นสูง ที่สุดในทุกขนาดตัวอย่าง สอดคล้องกับลักษณะกราฟความหนาแน่นที่ประมาณขึ้นโดยใช้ค่าแบน-วิดธ์ที่ได้จากวิธี Rules of thumb วิธี Silverman's rules of thumb และ วิธี Biased cross-validation จะได้กราฟความหนาแน่นที่มีความเรียบพอเหมาะ สามารถแสดงลักษณะที่แท้จริงของ ข้อมูลได้อย่างเหมาะสม ในขณะที่กราฟความหนาแน่นที่ประมาณขึ้นโดยใช้ค่าแบนวิดธ์ที่ได้จาก วิธี Least squares cross-validation จะได้กราฟความหนาแน่นที่มีความเรียบน้อยที่สุด เกิดการ

ขึ้นลงบ่อยครั้ง และแสดงออกถึงการมีฐานนิยมหลายค่า ถือเป็นการประมาณความหนาแน่นที่ผิดพลาดจากความเป็นจริง จึงไม่สามารถสะท้อนลักษณะที่แท้จริงของข้อมูลได้

จากการพิจารณาค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองรวมเฉลี่ยและลักษณะกราฟความหนาแน่น สามารถสรุปได้ว่า การเลือกแบนวิดธ์ด้วยวิธี Rules of thumb ใช้ประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นรูปแบบที่ 1 ได้ดีที่สุด และการเลือกแบนวิดธ์ด้วยวิธี Least squares cross-validation ไม่เหมาะสมที่จะใช้ในการประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นรูปแบบที่ 1

5.1.1.2 **สรุปผลการวิจัยสำหรับกรณีศึกษาที่** 2

เมื่อพิจารณาค่าแบนวิดธ์เฉลี่ยพบว่า วิธี Rules of thumb และ วิธี Biased cross-validation ให้ค่าแบนวิดธ์เฉลี่ยมากกว่าวิธีอื่น ๆ วิธี Least squares cross-validation มีค่าแบนวิดธ์เฉลี่ยน้อยที่สุดเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 100 , 150 และ 200 วิธี Solve the equation plug-in จะให้ค่าแบนวิดธ์เฉลี่ยที่น้อยที่สุดเมื่อขนาดตัวอย่างคือ 30 และ 50 เมื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีการเลือกแบนวิดธ์โดยใช้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองรวมเฉลี่ยที่เกิดขึ้นจากการประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นด้วยวิธีของ Zhang และคณะ การเลือกแบนวิดธ์ทุกวิธีจะให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองรวมเฉลี่ยในการประมาณความหนาแน่นไม่แตกต่างกันเมื่อขนาดตัวอย่างคือ 100 , 150 และ 200 ยกเว้นวิธี Least squares cross-validation ที่ให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองรวมเฉลี่ยในการประมาณความหนาแน่นมากกว่าวิธีอื่น ๆ อย่างชัดเจน การเลือกแบนวิดธ์ด้วยวิธี Biased cross-validation มีค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองรวมเฉลี่ยในการประมาณความหนาแน่นน้อยที่สุดในเกือบทุกขนาดตัวอย่าง ยกเว้นเมื่อขนาดตัวอย่างคือ 200 ที่การเลือกแบนวิดธ์ด้วยวิธี Direct plug-in มีค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองรวมเฉลี่ยในการประมาณความหนาแน่นน้อยที่สุด อย่างไรก็ตามแม้วิธี Direct plug-in จะให้ผลลัพธ์ที่ดีที่สุดเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 200 แต่ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองรวมเฉลี่ยที่ได้นั้นไม่แตกต่างจากวิธี Biased cross-validation การเลือกแบนวิดธ์ด้วยวิธี Least squares cross-validation มีค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองรวมเฉลี่ยในการประมาณความหนาแน่นสูงที่สุดในทุกขนาดตัวอย่าง สอดคล้องกับลักษณะกราฟความหนาแน่นที่ประมาณขึ้นโดยใช้ค่าแบนวิดธ์ที่ได้จากวิธี Rules of thumb วิธี Silverman’s rules of thumb และ วิธี Biased cross-validation จะได้กราฟความหนาแน่นที่มีความเรียบอย่างพอเหมาะ สามารถแสดง

ลักษณะที่แท้จริงของข้อมูลได้ใกล้เคียงกับลักษณะความหนาแน่นที่แท้จริง กราฟความหนาแน่นที่ประมาณขึ้นโดยการใช้ค่าแบนวิดธ์ที่ได้จากวิธี Least squares cross-validation มีความเรียบน้อยที่สุด เกิดการขึ้นลงบ่อยครั้ง ไม่สามารถสะท้อนลักษณะที่แท้จริงของข้อมูลได้ ลักษณะกราฟความหนาแน่นที่ประมาณขึ้นโดยการใช้ค่าแบนวิดธ์ที่ได้จากวิธี Solve the equation plug-in และวิธี Direct plug-in จะได้กราฟความหนาแน่นที่มีความเรียบน้อยกว่าปกติ แต่ให้ลักษณะกราฟโดยรวมที่ดีกว่าการใช้แบนวิดธ์ที่ได้จากวิธี Least squares cross-validation

จากการพิจารณาค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองรวมเฉลี่ยและลักษณะกราฟความหนาแน่นสามารถสรุปได้ว่า การเลือกแบนวิดธ์ด้วยวิธี Biased cross-validation ใช้ประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นรูปแบบที่ 2 ได้ดีที่สุด และการเลือกแบนวิดธ์ด้วยวิธี Least squares cross-validation ไม่เหมาะสมที่จะใช้ในการประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นรูปแบบที่ 2

5.1.2 **สรุปผลการวิจัยสำหรับข้อมูลเชิงตัวเลข**

เมื่อพิจารณาค่าแบนวิดธ์จากตารางที่ 4 และกราฟความหนาแน่นที่ประมาณขึ้น คือ ภาพที่ 4.26 ถึงภาพที่ 4.31 วิธีการเลือกแบนวิดธ์ที่ให้ค่าแบนวิดธ์มากที่สุดและมากกว่าวิธีอื่นอย่างชัดเจน คือวิธี Rules of thumb จึงส่งผลให้ลักษณะกราฟความหนาแน่นที่ได้ มีความเรียบมากกว่าวิธีอื่น ๆ รองลงมาคือวิธี Biased cross-validation วิธี Silverman's rules of thumb วิธี Direct plug-in และ วิธี Solve the equation plug-in ตามลำดับ ส่วนวิธี Least squares cross-validation ให้ค่าแบนวิดธ์น้อยที่สุด ทำให้กราฟความหนาแน่นเกิดการขึ้นลงบ่อยครั้ง และมีความเรียบน้อยกว่าวิธีอื่น ๆ สำหรับประสิทธิภาพของวิธีการเลือกแบนวิดธ์ ที่มีเกณฑ์ในการเปรียบเทียบคือค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองรวมเฉลี่ยนั้น ผู้วิจัยไม่สามารถชี้ชัดได้ว่าวิธีใดมีประสิทธิภาพในการประมาณความหนาแน่นได้ดีที่สุดหรือด้อยที่สุด เนื่องจากไม่ทราบฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นที่แท้จริง จึงส่งผลให้ไม่สามารถชี้วัดความแตกต่างระหว่างฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นที่ประมาณขึ้น เทียบกับฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นที่แท้จริงได้ จึงทำได้เพียงการพิจารณาอิทธิพลของค่าแบนวิดธ์แต่ละวิธีที่จะส่งผลต่อความเรียบของรูปกราฟความหนาแน่น

5.2 อภิปรายผล

การสรุปผลโดยรวมสำหรับฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นทั้งสองรูปแบบที่ทำการศึกษาในการวิจัยเชิงการจำลอง (Simulation study) พบว่า ความถูกต้องในการประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นที่เกิดปัญหาการประมาณความหนาแน่นบริเวณขอบเขต ชี้วัดโดยค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองรวมเฉลี่ย ขึ้นอยู่กับวิธีการเลือกแบนวิดธ์ ขนาดตัวอย่าง และรูปแบบฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น

จากสมมติฐานในการวิจัยคือ การเลือกแบนวิดธ์ด้วยวิธี Rules of thumb และวิธี Biased cross-validation มีประสิทธิภาพในการประมาณความหนาแน่นที่ดีที่สุด การเลือกแบนวิดธ์ด้วยวิธี Least squares cross-validation เป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพในการประมาณความหนาแน่นที่ด้อยกว่าวิธีอื่น ๆ เมื่อพิจารณาการประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นทั้ง 2 รูปแบบที่ทำการศึกษา พบว่าการเลือกแบนวิดธ์ด้วยวิธี Rules of thumb และ วิธี Biased cross-validation เป็นวิธีที่ให้ประสิทธิภาพโดยรวมที่ดีที่สุด เนื่องจากให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองรวมเฉลี่ยในการประมาณความหนาแน่นที่มีค่าน้อยกว่าวิธีอื่น ๆ ส่วนวิธี Least squares cross-validation เป็นวิธีการเลือกแบนวิดธ์ที่ไม่เหมาะสมสำหรับใช้ในการประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นทั้ง 2 รูปแบบ เนื่องจากให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองรวมเฉลี่ยในการประมาณความหนาแน่นสูงที่สุดในทุกขนาดตัวอย่าง จึงสามารถสรุปได้ว่า ผลสรุปของการวิจัยเป็นไปตามสมมติฐาน

แต่อย่างไรก็ตาม จากผลการวิจัยของ Jones , Marron และ Sheather (1996) ซึ่งข้อมูลที่ทำการวิจัยมีการแจกแจงที่แท้จริงแบบฐานนิยมสองค่า พบว่าวิธี Solve the equation plug-in สามารถใช้ในการประมาณความหนาแน่นได้ดีที่สุด นั่นคือ สามารถเข้าถึงการมีฐานนิยมสองค่าได้ดี แต่การใช้แบนวิดธ์ที่ได้จากวิธี Rules of thumb และ วิธี Biased cross-validation ได้กราฟความหนาแน่นที่ค่อนข้างเรียบ ไม่สามารถเข้าถึงการมีฐานนิยมสองค่าได้ เนื่องจากแบนวิดธ์ที่ได้จากทั้ง 2 วิธีดังกล่าวให้ค่าแบนวิดธ์ที่มีค่ามากกว่าวิธีอื่น ๆ ส่วนวิธี Least squares cross-validation จะทำให้กราฟความหนาแน่นที่ได้มีความเรียบน้อยกว่าปกติเป็นอย่างมาก และเกิดการขึ้นลงของกราฟบ่อยครั้งเนื่องจากให้แบนวิดธ์ที่มีค่าน้อยกว่าวิธีอื่น ๆ เมื่อนำงานวิจัยดังกล่าวมาเปรียบเทียบกับงานวิจัยที่ได้ทำการศึกษา ซึ่งฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นทั้งสองรูปแบบที่ทำการศึกษาล้วนเป็นฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นที่มีฐานนิยมค่าเดียว (Unimodal) พบว่า วิธีการเลือกแบนวิดธ์ที่ให้ค่าแบนวิดธ์มากกว่าวิธีอื่น ๆ นั่นคือ วิธี Rules of

thumb และ วิธี Biased cross-validation ที่ใช้ในการประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นในงานวิจัยของ Jones , Marron และ Sheather (1996) ซึ่งมีการแจกแจงแบบฐานนิยมสองค่าได้ไม่ดีนัก สามารถใช้ประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นทั้งสองรูปแบบที่ทำการวิจัยซึ่งมีฐานนิยมค่าเดียวได้ดี แต่วิธี Solve the equation plug-in (Sheather และ Jones 1991) ที่สามารถใช้งานได้ดีในงานวิจัยของ Jones , Marron และ Sheather (1996) มีประสิทธิภาพที่ไม่ดีนักในการประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นทั้งสองรูปแบบที่ทำการวิจัย จากผลที่เกิดขึ้นดังกล่าวทำให้สรุปได้ว่า เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงที่แท้จริงแบบฐานนิยมค่าเดียว หรือมีรายละเอียดของกราฟไม่มาก นั่นคือ มีลักษณะกราฟความหนาแน่นที่ค่อนข้างเรียบ ควรเลือกใช้วิธีการเลือกแบนวิดธ์ที่มีแนวโน้มการให้ค่าแบนวิดธ์ที่สูงกว่าวิธีอื่น ๆ เช่น การเลือกแบนวิดธ์ด้วยวิธี Rules of thumb และ วิธี Biased cross-validation เป็นต้น เมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงที่แท้จริงแบบฐานนิยมหลายค่า หรือมีรายละเอียดของกราฟค่อนข้างมาก นั่นคือ ลักษณะความหนาแน่นที่แท้จริงมีการขึ้นลงของกราฟบ่อยครั้งหรือมีลักษณะที่ไม่เรียบ ควรเลือกใช้วิธีการเลือกแบนวิดธ์ที่มีแนวโน้มการให้ค่าที่มีค่าไม่มาก เช่น วิธี Solve the equation plug-in เป็นต้น ส่วนวิธี Least squares cross-validation ที่มักให้ค่าแบนวิดธ์น้อยที่สุดในทุกสถานการณ์ ถือเป็นวิธีที่ไม่เหมาะสม เนื่องจากให้ค่าแบนวิดธ์น้อยกว่าที่ควรจะเป็นในทุกกรณี จึงส่งผลให้ประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นได้ไม่ถูกต้อง ทำให้กราฟความหนาแน่นที่ได้เกิดการขึ้นลงบ่อยครั้งจนไม่สามารถสะท้อนลักษณะที่แท้จริงของข้อมูลได้ ทำให้ผู้ที่พบเห็นเข้าใจธรรมชาติของตัวแปรสุ่มผิดพลาด

ในการวิจัยข้อมูลเชิงตัวเลข (Numerical data study) ที่ผู้วิจัยไม่สามารถสรุปหรือชี้ขาดถึงประสิทธิภาพของวิธีการเลือกแบนวิดธ์ผ่านค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองรวมเฉลี่ยได้ เนื่องจากไม่สามารถหาค่าความคลาดเคลื่อนดังกล่าวได้นั้น ทำได้เพียงการพิจารณาลักษณะกราฟความหนาแน่นที่ได้จากวิธีการเลือกแบนวิดธ์แต่ละวิธีเท่านั้น หากพิจารณาตามดุลยพินิจของผู้วิจัยเป็นหลัก ผู้วิจัยมีความเห็นว่า กราฟความหนาแน่นที่ประมาณขึ้นโดยใช้ค่าแบนวิดธ์ที่ได้จากวิธี Least squares cross-validation และวิธี Solve the equation plug-in ที่แสดงดังภาพที่ 4.28 และภาพที่ 4.31 ตามลำดับ จะได้กราฟความหนาแน่นที่เกิดการขึ้นลงบ่อยครั้ง ส่งผลให้ผู้ที่พบเห็น เข้าใจลักษณะหรือธรรมชาติของตัวแปรสุ่มได้ยากกว่ากราฟความหนาแน่นที่ประมาณขึ้นโดยใช้ค่าแบนวิดธ์ที่ได้จาก 4 วิธีที่เหลือ

จากตัวอย่างกราฟความหนาแน่นของการวิจัยเชิงจำลองที่แสดงดังภาพที่ 4.3 ถึงภาพที่ 4.7 และภาพที่ 4.15 ถึงภาพที่ 4.19 และกราฟความหนาแน่นของการวิจัยข้อมูลเชิงตัวเลข

ที่แสดงดังภาพที่ 4.26 ถึงภาพที่ 4.31 พบว่า เมื่อใช้ตัวประมาณความหนาแน่นของ Zhang และคณะ (1999) เพื่อประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น สามารถแก้ไขปัญหาการประมาณความหนาแน่นบริเวณขอบเขตได้ดี เนื่องจากกราฟความหนาแน่นที่ประมาณได้นั้นไม่แสดงความผิดพลาดบริเวณขอบเขตเหมือนกับการประมาณความหนาแน่นด้วยวิธีเคอร์เนลแบบปกติ

5.3 ข้อเสนอแนะ

การวิจัยครั้งนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับข้อมูลที่มีรูปแบบฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มที่มีลักษณะคล้ายคลึงกับรูปแบบการแจกแจงที่ทำการศึกษา สำหรับการประมาณค่าแบนวิดธ์เพื่อใช้ในการประมาณฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น จะเห็นได้ว่า ไม่มีวิธีการเลือกแบนวิดธ์วิธีใดที่สามารถใช้ได้ดีและเหมาะสมสำหรับทุก ๆ รูปแบบการแจกแจง เนื่องจากรูปแบบการแจกแจงหรือลักษณะของข้อมูลมีความหลากหลายและสามารถเป็นไปได้หลายรูปแบบ ซึ่งข้อมูลแต่ละชุดล้วนมีลักษณะเฉพาะตัวทั้งสิ้น สำหรับรูปแบบฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นทั้งสองรูปแบบที่ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาในการวิจัยเชิงจำลองนั้น วิธีการเลือกแบนวิดธ์ที่มีประสิทธิภาพดีที่สุดในแต่ละรูปแบบฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นล้วนเป็นวิธีที่แตกต่างกัน ดังนั้นวิธีการเลือกแบนวิดธ์ที่มีความเหมาะสมและสามารถใช้ได้ดีสำหรับฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นรูปแบบหนึ่ง ไม่จำเป็นเสมอไปที่จะเป็นวิธีที่เหมาะสมหรือใช้ได้ดีสำหรับฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นรูปแบบอื่น ๆ

การศึกษาวิจัยในโอกาสต่อไปอาจทำการศึกษาเพิ่มเติมในสถานการณ์อื่น ๆ เช่น

1. ศึกษาฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นรูปแบบอื่น ๆ ที่เกิดปัญหาการประมาณความหนาแน่นบริเวณขอบเขต

2. เลือกใช้ตัวประมาณความหนาแน่นวิธีอื่น ๆ เพื่อแก้ไขปัญหาการประมาณความหนาแน่นบริเวณขอบเขต เช่น The method of Hall and Park (Hall & Park, 2002) The method of Karunamuni and Alberts (Karunamuni & Alberts, 2005) และ The method of Karunamuni and Zhang (Karunamuni & Zhang, 2008) เป็นต้น

3. เลือกใช้วิธีการเลือกแบนวิดธ์วิธีอื่น ๆ ที่ยังไม่ได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบ เช่น วิธี Smoothed bootstrap (Taylor, 1989 , Faraway & Jhun, 1990) วิธี Park and Marron's plug-in (Park & Marron, 1990) เป็นต้น