การผสมผสานสนามแรงที่โปรแกรมได้เพื่อการจัดวัตถุบนระนาบแบบเร็ว

นายพีรพงษ์ ธนกิจ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2549

COMBINATION OF PROGRAMMABLE FORCE FIELDS
FOR FAST PLANAR PART MANIPULATION

Mr. Peerapong Thonnagith

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering Program in Computer Engineering
Department of Computer Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2006

หัวข้อวิทยานิพนธ์ การผสมผสานสนามแรงที่โปรแกรมได้เพื่อการจัดวัตถุบนระนาบแบบเร็ว
โดย นายพีรพงษ์ ธนกิจ
สาขาวิชา วิศวกรรมคอมพิวเตอร์
อาจารย์ที่ปรึกษา อาจารย์ ดร.อรรถวิทย์ สุดแสง

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.ดิเรก ลาวัณย์ศิริ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.ประภาส จงสถิตย์วัฒนา)

.... อาจารย์ที่ปรึกษา
(อาจารย์ ดร.อรรถวิทย์ สุดแสง)

.... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิทยา วัณณสุโภประสิทธิ์)

.... กรรมการ
(อาจารย์ ดร.ถวิดา มณีวรรณ์)

พีรพงษ์ ธนกิจ : การผสมผสานสนามแรงที่โปรแกรมได้เพื่อการจัดวัตถุบนระนาบแบบเร็ว (COMBINATION OF PROGRAMMABLE FORCE FIELDS FOR FAST PLANAR PART MANIPULATION). อาจารย์ที่ปรึกษา : อ. ดร. อรรถวิทย์ สุดแสง, 74 หน้า.

วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอการทดสอบและเปรียบเทียบคุณสมบัติของสนามแรงที่โปรแกรมได้รูปแบบต่างๆ ในการจัดวัตถุบนระนาบโดยไม่ใช้เครื่องมือตรวจจับใดๆ ทั้งในแง่ของผลการจัดวัตถุที่ภาวะสมดุล และเวลาที่ใช้ในการจัดวัตถุนั้น ตลอดจนได้ทำการออกแบบการผสมผสานสนามแรงรูปแบบวงรี 2 สนามแรง และสนามแรงที่พัฒนาขึ้นใหม่อีก 1 สนามแรง ซึ่งแต่ละสนามแรงจะสลับสับเปลี่ยนกันทำงานในช่วงเวลาที่กำหนด โดยเป็นการนำเอาข้อดีที่ได้จากการวิเคราะห์และทดสอบคุณสมบัติของสนามแรงแต่ละรูปแบบมาผสมผสานกัน ซึ่งจากผลการทดสอบโดยใช้โปรแกรมจำลองสถานการณ์ สามารถสรุปได้ว่า ชุดของสนามแรงที่ออกแบบใหม่นี้มีประสิทธิภาพในการจัดวัตถุเข้าสู่ภาวะสมดุล ณ ตำแหน่งและทิศทางที่แน่นอนเพียงทิศทางเดียว อีกทั้งใช้เวลาในการจัดน้อยกว่าสนามแรงที่รับประกันการจัดวัตถุเข้าสู่ตำแหน่งและทิศทางเดียวที่มีอยู่ในปัจจุบัน

ภาควิชา ....วิศวกรรมคอมพิวเตอร์ .... ลายมือชื่อนิสิต ....

สาขาวิชา.........วิศวกรรมคอมพิวเตอร์ .... ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ....

ปีการศึกษา ....2549................

##4770387121 : MAJOR COMPUTER ENGINEERING
KEYWORDS : PROGRAMMABLE FORCE FIELD/ PART MANIPULATION

PEERAPONG THONNAGITH : COMBINATION OF PROGRAMMABLE FORCE FIELDS FOR FAST PLANAR PART MANIPULATION. THESIS ADVISOR : ATTAWITH SUDSANG, Ph.D., 74 pp.

This thesis proposes the comparison among the well-known sensorless programmable force fields for part manipulation on a plane, not only about part characteristics at the equilibrium state but also the amount of time spent in manipulation. Then we present a new combination of fields which consists of 2 elliptic fields and 1 newly-developed field. Each of them is activated sequentially, one at a time. By combining their advantages found from the characteristics analysis & test on each field, this new combination of fields shows a great potential in part manipulation: with a unique part configuration at an equilibrium state, and faster than any known fields having the same unique configuration property.

Department ......Computer Engineering...... Student's signature ....
Field of study .....Computer Engineering..... Advisor's signature ....
Academic year ....2006.............

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี เนื่องด้วยการสนับสนุนและส่งเสริมเป็นอย่างดียิ่งจาก อ.ดร. อรรถวิทย์ สุดแสง อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่ได้ประสิทธิ์ประสาทความรู้ แนวคิด อีกทั้งข้อคิดเห็น คำแนะนำ ความห่วงใย และติดตามการทำงานของผู้วิจัยอย่างต่อเนื่องเสมอมา ตลอดจนให้คำปรึกษาในเรื่องอื่นๆ ที่อยู่นอกเหนือจากงานวิจัย ช่วยผลักดันให้ผ่านพ้นอุปสรรคต่างๆ มาได้ ซึ่งผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งในพระคุณเป็นอย่างที่สุด จึงขอเรียนกราบขอบพระคุณอาจารย์ไว้ ณ โอกาสนี้

ขอขอบพระคุณประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ รศ.ดร. ประภาส จงสถิตย์วัฒนา ตลอดจนกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ผศ.ดร. วิทยา วัณณสุโภประสิทธิ์ และ อ.ดร. ถวิดา มณีวรรณ์ ที่ได้กรุณาสละเวลา ตรวจสอบและให้คำแนะนำเกี่ยวกับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จนสำเร็จสมบูรณ์

ที่จะขาดไปเสียมิได้ คือขอขอบคุณเหล่า พี่ๆ เพื่อนๆ และ น้องๆ แห่งห้องปฏิบัติการวิจัยระบบอัจฉริยะ ISL2 ทุกๆ คน ที่ช่วยให้คำแนะนำต่างๆ ทั้งในเรื่องของงานวิจัยและการใช้ชีวิต รวมไปถึงคอยกระตุ้นให้ผู้วิจัยรีบๆ ทำวิทยานิพนธ์นี้ให้เสร็จเสียที โดยเฉพาะอย่างยิ่ง พีม ที่คอยให้คำแนะนำและช่วยหาแนวทางแก้ปัญหาและอุปสรรคต่างๆ ที่มีมาตั้งแต่เมื่อครั้งทำโครงงานปริญญาตรีซึ่งเป็นจุดเริ่มต้นของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ร่วมกัน จวบจนกระทั่งถึงปัจจุบัน

สุดท้ายนี้ ขอขอบพระคุณ มารดา บิดา ผู้ให้กำเนิด รวมไปถึงญาติพี่น้องทุกคน ที่ให้กำลังใจและสนับสนุนผู้วิจัยตลอดมา และขอขอบคุณอีกหลายๆ ท่าน ที่ไม่สามารถเอ่ยนามได้ทั้งหมด ณ ที่นี้ด้วยใจจริง

สารบัญ

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

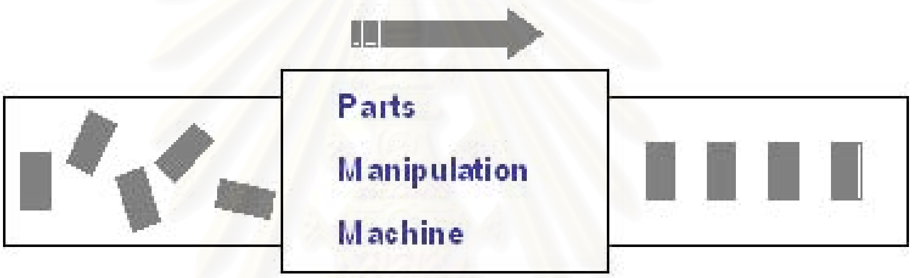
สารบัญรูปภาพ

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ปัญหา

ในวงการอุตสาหกรรมการประกอบชิ้นส่วนอัตโนมัติ (Automated Assembly) ก่อนที่ชิ้นส่วนแต่ละชิ้นจะสามารถนำมาประกอบเข้าด้วยกันได้นั้น จำเป็นต้องจัดตำแหน่งและทิศทางการวางของชิ้นส่วนนั้นๆ ให้เหมาะสมเสียก่อน ดังตัวอย่างในรูปที่ 1.1 ชิ้นส่วนในสายการผลิตที่วางอยู่อย่างไม่เป็นระเบียบทางซ้ายจะผ่านเข้าเครื่องจัดเรียงให้ได้ตำแหน่งและทิศทางที่เหมาะสมออกมาทางขวา เพื่อไปสู่กระบวนการถัดไปเป็นต้น แต่ปัญหาที่พบก็คือ เครื่องจักรที่ทำหน้าที่ในการจัดเรียงชิ้นส่วนดังกล่าวนี้ มักไม่มีความยืดหยุ่น กล่าวคือ แต่ละเครื่องก็จะใช้งานได้กับชิ้นส่วนที่มีรูปแบบเฉพาะตัวตามที่กำหนดไว้ล่วงหน้า หากชิ้นส่วนมีการเปลี่ยนแปลงก็จะต้องเปลี่ยนเครื่องจักรใหม่ ทำให้สิ้นเปลืองต้นทุนการผลิตเป็นอย่างมาก



รูปที่ 1.1: รูปจำลองเครื่องจัดตำแหน่งและทิศทางของชิ้นส่วน

จากปัญหาดังกล่าว ก่อให้เกิดแนวคิดที่ว่า น่าจะมีวิธีการในการจัดการกับการจัดเรียงชิ้นส่วนที่มีรูปร่างลักษณะใดก็ได้ เป็นต้นว่าการใช้ sensor ตรวจจับวัตถุ เพื่อเป็นข้อมูลป้อนกลับให้กับซอฟท์แวร์หรืออุปกรณ์ควบคุมเครื่องจักร แต่แนวคิดดังกล่าวก็มีปัญหาในเรื่องของข้อจำกัดของตัว sensor และวิธีการที่จะตรวจสอบชิ้นส่วนให้ได้แม่นยำตลอดเวลาว่า ณ เวลาปัจจุบัน ชิ้นส่วนอยู่ในลักษณะเช่นใด ซึ่งมีความยุ่งยากซับซ้อน ทำให้เกิดแนวคิดใหม่ในการจัดเรียงวัตถุโดยไม่ใช้ sensor ตรวจจับขึ้น ยกตัวอย่างเช่น Parallel Gripper [1] เป็นต้น ซึ่งต่อมา ได้มีการสร้างแบบจำลองที่เลียนแบบการทำงานของอุปกรณ์เหล่านั้น แบบจำลองดังกล่าวเรียกว่า สนามแรงที่โปรแกรมได้ (Programmable Force Field) [2] คือ พื้นระนาบที่สามารถสร้างแรงกระทำต่อวัตถุที่วางอยู่บนระนาบ โดยทิศทางของแรงอยู่ในทิศทางขนานกับแนวระนาบนั้น ตามคุณลักษณะของแรงรูปแบบต่างๆ ที่สามารถกำหนดได้ ซึ่งแรงเหล่านั้น จะทำให้วัตถุเคลื่อนที่และหมุนตัวไปยังตำแหน่งและทิศทางที่ต้องการได้ โดยไม่ต้องมีเครื่องมือตรวจจับและไม่มีข้อจำกัดในเรื่องของตำแหน่งและทิศทางเริ่มต้นของวัตถุ

จากหลักการเบื้องต้นของสนามแรงที่โปรแกรมได้นี้ ก็มีงานวิจัยที่นำเสนอการออกแบบสนามแรงที่โปรแกรมได้ออกมาหลายต่อหลายรูปแบบ ทั้งชนิดที่เป็นการใช้สนามแรงหลายชุดต่อเนื่องกัน [3, 4, 5, 6, 7, 8] หรือชนิดที่เป็นแบบสนามแรงชุดเดียว [9, 10, 11, 12, 13] ทั้งยังรวมไปถึงการออกแบบและพัฒนาเครื่องมือที่สามารถสร้างสนามแรงที่มีการนำเสนอออกมาเหล่านี้ด้วย [3, 4, 14] ฯลฯ แต่ก็มีจุดที่น่าสังเกตว่า สนามแรงรูปแบบต่างๆ ที่ได้มีการนำเสนอมานั้น ผู้นำเสนอจะมุ่งเน้นนำเสนอและเปรียบเทียบเฉพาะ

ในประเด็นเรื่องความเป็นไปได้ในการทำให้วัตถุเข้าสู่ภาวะสมดุลเท่านั้น แต่แทบไม่ได้กล่าวถึงคุณสมบัติอื่นๆ ถ้าหากมีการนำสนามแรงไปใช้งาน เช่น ระยะเวลาที่วัตถุใช้ในการเคลื่อนที่และหมุนตัวจนเข้าสู่ภาวะสมดุล เป็นต้น ทั้งนี้ เพราะเป็นไปได้ว่า สนามแรงที่มีประสิทธิภาพในแง่ของรูปแบบการเข้าสู่ภาวะสมดุลดี อาจมีข้อด้อยในเรื่องของเวลาที่ใช้จัดวัตถุที่นานเกินไป จนไม่สามารถนำมาใช้งานได้จริงในทางปฏิบัติ ด้วยเหตุผลดังกล่าว งานวิจัยนี้จึงมีเป้าหมายที่จะศึกษาเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการจัดวัตถุของสนามแรงรูปแบบต่างๆ ในแง่ของเวลาที่ใช้ในการจัดเรียงวัตถุ ซึ่งไม่เคยมีการนำเสนอมาก่อน และหาวิธีการผสมผสานสนามแรงรูปแบบใหม่ ที่มีประสิทธิภาพในการจัดวัตถุได้ดีกว่าสนามแรงที่มีอยู่เดิม ทั้งในแง่ของรูปแบบการเข้าสู่ภาวะสมดุลและเวลาที่ใช้จัดวัตถุ เพื่อให้เป็นทางเลือกใหม่ในการนำสนามแรงไปใช้งานจริงได้ดีกว่าสนามแรงที่เคยมีการนำเสนอมา

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

เพื่อศึกษาพฤติกรรมการเคลื่อนที่ของวัตถุภายใต้สนามแรงรูปแบบต่างๆในเชิงของการเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการเข้าสู่สภาวะสมดุลที่มีเสถียรภาพ และใช้ผลการศึกษาในการออกแบบวิธีการผสมผสานสนามแรงรูปแบบใหม่ที่ทำให้สามารถจัดเรียงวัตถุเข้าสู่ตำแหน่งและทิศทางที่ต้องการได้เร็วขึ้น โดยไม่ต้องใช้เครื่องมือตรวจจับใดๆ ระหว่างที่จัดวัตถุ

1.3 สิ่งที่ได้รับจากงานวิจัย

ผลการออกแบบวิธีการผสมผสานสนามแรงที่โปรแกรมได้รูปแบบใหม่ ที่สามารถจัดวัตถุบนระนาบ 2 มิติ ให้เข้าสู่ตำแหน่งและทิศทางที่ต้องการรูปแบบเดียวได้ และใช้เวลาในการจัดวัตถุน้อยกว่าสนามแรงที่มีอยู่ในปัจจุบัน โดยไม่ต้องใช้เครื่องมือตรวจจับใดๆ ระหว่างที่จัดวัตถุ

1.4 ลำดับเนื้อหาในงานวิจัย

ลำดับเนื้อหาในงานในรายงานฉบับนี้แบ่งออกเป็น สามส่วนคือ

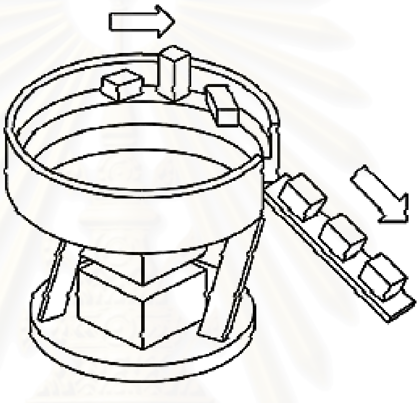
- หลักการและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับสนามแรงที่โปรแกรมได้ อยู่ในบทที่ 2
- การสร้างโปรแกรมจำลองสนานการณ์และการทดสอบสนามแรงที่มีอยู่เบื้องต้น อยู่ในบทที่ 3 และ 4
- การออกแบบการผสมผสานสนามแรงรูปแบบใหม่และการทดสอบผล อยู่ในบทที่ 5 และ 6
- บทสรุปและความเห็นเพิ่มเติม อยู่ในบทที่ 7

บทที่ 2

สนามแรงที่โปรแกรมได้

2.1 จุดแรกเริ่ม : เครื่องจัดวัตถุอัตโนมัติ

แต่เดิมแล้ว เครื่องจักรที่ทำหน้าที่จัดชิ้นส่วนให้ได้ตำแหน่งและทิศทางที่ต้องการใช้งานนั้น มักจะเป็นไปในรูปของอุปกรณ์ที่เหมาะสมเฉพาะสำหรับชิ้นส่วนรูปแบบนั้นๆ ตายตัว ตัวอย่างเช่น Vibratory bowl feeder ดังตัวอย่างในรูปที่ 2.1 ก็เป็นเครื่องมือที่จัดตำแหน่งและทิศทางของชิ้นส่วนต่างๆ โดยอาศัยตัวกรองที่เป็นชิ้นส่วนกล ทำหน้าที่คัดกรองชิ้นส่วนที่ไม่ได้ตำแหน่งและทิศทางที่ต้องการ ไม่ให้ผ่านไปสู่กระบวนการถัดไปได้ เป็นต้น



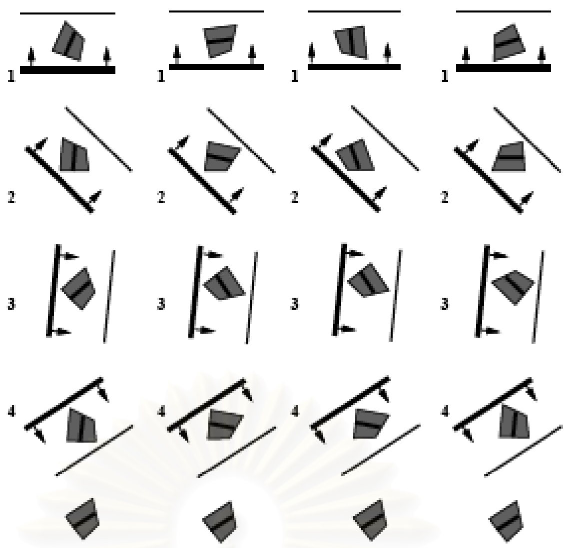
รูปที่ 2.1: Vibratory Bowl Feeder

อย่างไรก็ตาม วิธีการในลักษณะดังกล่าว ก็มีข้อเสียอย่างร้ายแรงในกรณีที่ชิ้นส่วนที่ต้องการจัดมีการเปลี่ยนแปลง หรือแม้แต่ในกรณีที่เป็นชิ้นส่วนหรือวัตถุแบบเดิม แต่เปลี่ยนตำแหน่ง และ/หรือ ทิศทางที่ต้องการก็ตาม ก็จะต้องเปลี่ยนหรือออกแบบชิ้นส่วนของเครื่องจัดเรียงใหม่ตามไปด้วย

ด้วยเหตุดังกล่าว ทำให้เกิดแนวคิดที่ว่า น่าจะมีวิธีการสร้างเครื่องมือจัดวัตถุ ที่สามารถจัดวัตถุรูปแบบใดๆ ให้ได้ตำแหน่งและทิศทางที่ต้องการ โดยที่ไม่จำเป็นต้องเปลี่ยนแปลงโครงสร้างของเครื่องมือนั้นแม้เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงรูปแบบของวัตถุหรือรูปแบบของการจัดก็ตามที ซึ่งก็คือแนวคิดของ**เครื่องจัดชิ้นส่วนเอนกประสงค์** (Universal Part Manipulator) นั่นเอง

ตัวอย่างหนึ่งตามแนวคิดดังกล่าวก็คือ การจัดวัตถุด้วยมือจับแบบขนาน (Parallel Gripper) [1] ซึ่ง K.Y.Goldberg นำเสนอไว้ในปี 1992 โดยสามารถหาวิธีออกแบบ**ขั้นตอนการเปลี่ยนทิศทาร "บีบ" ตัวมือจับเป็นลำดับชั้นตอน** เพื่อให้วัตถุที่ถูกบีบนั้นเปลี่ยนทิศทางไปจนกระทั่งกลายเป็นทิศทางเดียวเสมอ ไม่ว่าตอนเริ่มต้น วัตถุจะมีทิศทางอย่างไรก็ตาม ดังตัวอย่างในรูปที่ 2.2

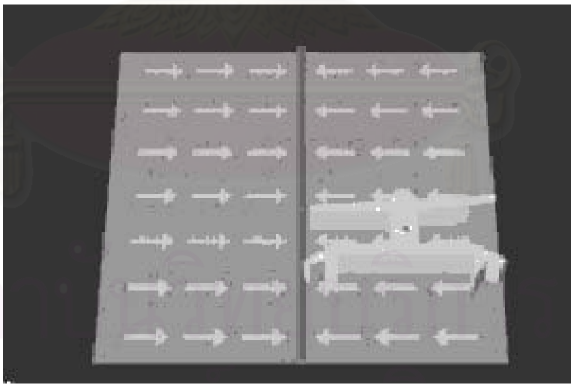
ทั้งนี้ ความซับซ้อนของการออกแบบขั้นตอนดังกล่าว ทั้งในเรื่องของทิศการบีบและจำนวนขั้นตอนทั้งหมด ขึ้นอยู่กับความซับซ้อนของรูปร่างวัตถุ



รูปที่ 2.2: แบบจำลองตัวอย่างการจัดวัตถุด้วย Parallel Gripper

2.2 แนวคิดของสนามแรงที่โปรแกรมได้

แนวคิดสนามแรงที่กำหนดหรือโปรแกรมได้ (Programmable Force Field) [2] เป็นแบบจำลองที่ใช้อธิบายการทำงานของอุปกรณ์จัดวัตถุให้อยู่ในรูปของระนาบ 2 มิติ ที่สามารถให้กำเนิด**แรงในแนวขนานกับแนวระนาบนั้น** กระทำต่อผิวสัมผัสของวัตถุที่วางอยู่บนระนาบนั้นได้ ดังตัวอย่างในรูปที่ 2.3 ทั้งนี้รูปแบบและลักษณะของแรงที่เกิดนั้น สามารถกำหนดและปรับเปลี่ยนได้



รูปที่ 2.3: แบบจำลองแนวคิดของสนามแรงที่โปรแกรมได้

K.F.Böhringer et. al นำเสนอแนวคิดนี้เป็นครั้งแรกในปี 1994 โดยเริ่มต้นจากความพยายามในการหาแบบจำลองที่อธิบายการทำงานของการจัดวัตถุด้วย Parallel Gripper โดยแทนการ "บีบ" ตัว Gripper ด้วยแรงที่มีทิศทางพุ่งจากขอบสมมติ 2 ด้านเข้าหาแนวเส้นตรงเส้นหนึ่ง ซึ่งสนามแรงที่ให้แรงในลักษณะดังกล่าวนี้ ต่อมาถูกเรียกว่า Squeezing Field [2] จากนั้นมา ก็เริ่มมีการออกแบบแรงในลักษณะอื่นๆ ภายใต้แบบจำลองดังกล่าว เพื่อเป้าหมายในการจัดวัตถุในลักษณะเดียวกัน โดยแรงที่เกิดขึ้นจากสนามแรงจะอยู่ในรูปของ $\hat{\mathbf{F}}(x, y)$ เมื่อ (x, y) เป็นพิกัดตำแหน่งใดๆ บนระนาบสนามแรงนี้น

นอกจากนี้ ยังมีการนำเสนอหลักการของการกำเนิดแรง ณ จุดต่างๆ บนสนามแรง ในลักษณะของการกำหนดพลังงานศักย์ให้กับแต่ละจุดบนระนาบสนามแรง [3] โดยแรงที่เกิดจากจุดใดๆ บนสนามแรงนั้นได้มาจาก การเปลี่ยนแปลงของพลังงานศักย์ ณ จุดนั้นๆ ไปในทิศทางที่พลังงานศักย์ต่ำกว่า กล่าวคือ ถ้าให้ $u(x,y)$ แทนพลังงานศักย์ ณ จุด (x,y) ใดๆ แล้ว เราจะได้ว่า

$$\hat{\mathbf{F}}(x,y) = \begin{bmatrix} \hat{F}_x(x,y) \\ \hat{F}_y(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{du(x,y)}{dx} \\ -\frac{du(x,y)}{dy} \end{bmatrix}$$

2.3 กลศาสตร์ของวัตถุภายใต้สนามแรง

2.3.1 นิยามเบื้องต้น

ถ้าให้ P เป็นวัตถุแข็งเกร็งซึ่งมีความหนาแน่นกระจายตัวสม่ำเสมอทั่วพื้นที่วัตถุ วางอยู่บนระนาบสนามแรงใดๆ เพื่อให้การอธิบายถึงหลักการทำงานของสนามแรงและเรื่องอื่นๆ ที่เกี่ยวข้องมีความเป็นระบบ จึงขอนิยามสัญลักษณ์ที่จำเป็นพื้นฐานสำหรับการอธิบายดังต่อไปนี้

ρ, M, A, **และ** I_z แทนความหนาแน่นต่อพื้นที่, มวล, พื้นที่ และโมเมนต์ความเฉื่อย (Moment of Inertia) ของวัตถุP ตามลำดับ

$x \circ y$ เป็นระบบพิกัดของระนาบสนามแรง (Global Coordinate System) ซึ่งมีพิกัดเป็น (x,y) ใดๆ

$X \circ Y$ เป็นระบบพิกัดของระนาบวัตถุ P (Local Coordinate System) ซึ่งมีพิกัดเป็น (X,Y) ใดๆ ทั้งนี้ จุด $(0,0)$ ในระบบพิกัดนี้จะตรงกับจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุ ให้แทนด้วยจุด $\mathbf{o}$

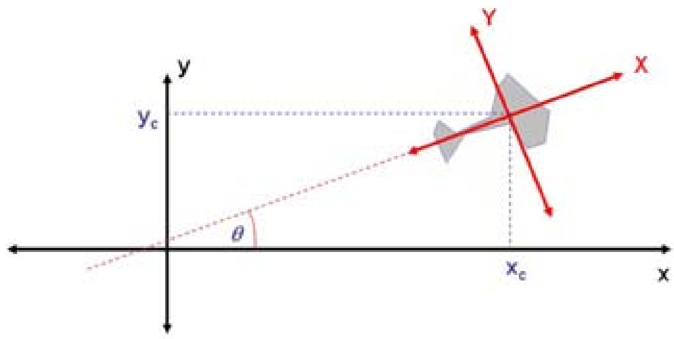
(x_c, y_c, θ) เป็น configuration ที่บอกถึงตำแหน่งและทิศทางของวัตถุบนระนาบสนามแรง โดยจุด (x_c, y_c) เป็นตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวล $\mathbf{o}$ ของวัตถุบนระบาบสนามแรง ส่วน θ เป็นมุมที่แกนระนาบของวัตถุทำกับแกนระนาบของสนามแรง

ทั้งนี้ การเปลี่ยนระบบพิกัดจากระนาบวัตถุเป็นระนาบสนามแรง เมื่อวัตถุอยู่ ณ configuration (x_c, y_c, θ) ดังตัวอย่างในรูป 2.4 สามารถทำได้โดย

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_\theta \\ Y_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.1}$$

$\hat{\mathbf{F}}(x,y)$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{T}$ เป็นแรงเนื่องจากสนามแรง ณ จุด (x,y) ใดๆ บนระนาบสนามแรง, แรงลัพธ์ และทอร์กลัพธ์เนื่องจากสนามแรงที่มีต่อวัตถุตามลำดับ

$\mathbf{F_d}$, $\mathbf{T_d}$ เป็นแรงและทอร์กลัพธ์เนื่องจากแรงเสียดทาน (ดูในหัวข้อ 2.3.3)



รูปที่ 2.4: ตัวอย่างวัตถุที่อยู่ ณ configuration (x_c, y_c, θ)

ขณะเดียวกัน การคำนวณค่าพื้นฐานบางอย่างของวัตถุ ก็สามารถทำได้โดยการอินทิเกรตเหนือพื้นที่วัตถุ ดังนี้ คือ

$$
\begin{aligned}
A &= \int_P \int dX\, dY && (2.2)\\
M &= \rho A && (2.3)\\
I_z &= \int_P \int \left[\rho(X^2 + Y^2)\right] dX\, dY && (2.4)
\end{aligned}
$$

โดยที่ $\int_P \int G(X,Y) dX\, dY$ คือ การอินทิเกรตฟังก์ชัน $G(x,y)$ **เหนือบริเวณที่อยู่ในขอบเขตของวัตถุ** P **ดังกล่าว**

อนึ่ง นิยามต่างๆ เหล่านี้ จะถูกใช้ในการอธิบายต่างๆ ตลอดทั้งในหัวข้ออื่นๆ ในวิทยานิพนธ์นี้ นับแต่นี้ไป

2.3.2 ผลของสนามแรงที่มีต่อวัตถุ

สำหรับวัตถุใดๆ แรงที่กระทำต่อวัตถุในระนาบ 2 มิติเนื่องจากสนามแรง จะส่งผลต่อการเคลื่อนที่และการหมุนของวัตถุไปพร้อมๆ กัน ในกรณีที่วัตถุเป็นวัตถุเกร็ง (Rigid Body) เราสามารถหาแรงลัพธ์และทอร์กลัพธ์ที่กระทำต่อวัตถุทั้งก้อนเนื่องจากสนามแรงได้ โดยแทนอยู่ในรูปของแรงและทอร์กที่กระทำ ณ ศูนย์กลางมวลของวัตถุ ซึ่งคำนวณได้จาก

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}(x_c, y_c, \theta) &= \left(\int_P \int \hat{\mathbf{F}}(x,y) dx\, dy \right) \Big|_{(x_c, y_c, \theta)} \\
&= \int_P \int \hat{\mathbf{F}}(X_\theta + x_c, Y_\theta + y_c) dX\, dY && (2.5)\\
\mathbf{T}(x_c, y_c, \theta) &= \left(\int_P \int \begin{bmatrix} x - x_c \\ y - y_c \end{bmatrix} \times \hat{\mathbf{F}}(x,y) dx\, dy \right) \Big|_{(x_c, y_c, \theta)} \\
&= \int_P \int \begin{bmatrix} X_\theta \\ Y_\theta \end{bmatrix} \times \hat{\mathbf{F}}(X_\theta + x_c, Y_\theta + y_c) dX\, dY && (2.6)
\end{aligned}
$$

นอกเหนือจากแรงลัพธ์และทอร์กลัพธ์แล้ว พลังงานศักย์ของวัตถุทั้งก้อน ณ configuration ใดๆ ก็สามารถคำนวณได้จาก

$$\begin{aligned}\mathbf{U}(x_c, y_c, \theta) &= \left(\int_P \int u(x, y) dx dy\right)|_{(x_c, y_c, \theta)} \\ &= \int_P \int u(X_\theta + x_c, Y_\theta + y_c) dX dY \end{aligned} \quad (2.7)$$

โดยที่ $\mathbf{U}(x_c, y_c, \theta)$ นั้น ถูกเรียกว่า Lifted Potential Funcition ซึ่งมีคุณสมบัติที่สำคัญ คือ

$$\mathbf{F}(x_c, y_c, \theta) = \begin{bmatrix} -\frac{d\mathbf{U}(x,y,\theta)}{dx}|_{(x_c, y_c, \theta)} \\ -\frac{d\mathbf{U}(x,y,\theta)}{dy}|_{(x_c, y_c, \theta)} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{T}(x_c, y_c, \theta) = -\frac{d\mathbf{U}(x, y, \theta)}{d\theta}|_{(x_c, y_c, \theta)} \quad (2.9)$$

2.3.3 แบบจำลองความเสียดทาน

นอกจากแรงเนื่องจากสนามแรงแล้ว ยังมีแรงเสียดทานระหว่างพื้นผิวของวัตถุกับสนามแรง ซึ่งคอยต้านการเคลื่อนที่และการหมุนของวัตถุบนสนามแรงนั้นอยู่อีกด้วย ซึ่งแรงดังกล่าวนี้ จะเป็นปัจจัยสำคัญที่จะ "ลดทอน" พลังงานจลน์ของวัตถุเพื่อให้เข้าสู่ภาวะสมดุลสถิต (หยุดนิ่ง) โดยในวิทยานิพนธ์นี้ได้เลือกใช้ Viscous Friction Model ซึ่งเหมาะสมในการคำนวณเกี่ยวกับสนามแรงมากกว่า Coulomb Friction Model ที่เป็นแบบ Threshold ประกอบในการคำนวณ เหมือนกับที่ใช้ใน [5],[6] โดยมีการนิยาม Friction Model ของแรงเสียดทานเป็น

$$\hat{\mathbf{F}}_d(x, y) = -\tau \mathbf{v}(x, y)$$

โดยที่ τ เป็นค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทาน ซึ่งมีค่าคงที่ตลอดทั้งสนามแรง ส่วน $\mathbf{v}(x, y)$ เป็นความเร็วของวัตถุ ณ จุด (x, y) ใดๆ

ทั้งนี้ ในการคำนวณแรงและทอร์กเนื่องจากความเสียดทานของวัตถุทั้งก้อนนั้น สามารถคำนวณได้ด้วยแบบจำลองนี้ในระดับ Macro Scale (คือ ในระดับของวัตถุทั้งก้อน) เมื่อวัตถุอยู่ที่ configuration (x_c, y_c, θ) ตามสมการ

$$\mathbf{F}_d = \int_P \int (-\tau \mathbf{v}(x, y)) dx dy = -\tau A \mathbf{v} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{T}_d = \int_P \int \begin{bmatrix} x - x_c \\ y - y_c \end{bmatrix} \times (-\tau \mathbf{v}(x, y)) dx dy = -\frac{\tau \omega I_z}{\rho} \quad (2.11)$$

โดยที่ $\mathbf{v}$ เป็นความเร็วของวัตถุ ณ จุดศูนย์กลางมวล (หรือก็คือความเร็วของวัตถุทั้งก้อน) และ ω เป็นความเร็วเชิงมุมรอบศูนย์กลางมวลของวัตถุ

2.3.4 เงื่อนไขการจัดวัตถุ : ภาวะสมดุล

จากแรงลัพธ์และทอร์กลัพธ์เนื่องจากความเสียดทาน เมื่อนำไปรวมกับแรงและทอร์กเนื่องจากสนามแรง ก็สามารถคำนวณหาความเร่งและความเร่งเชิงมุมของวัตถุ ตามกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน เพื่อนำไปใช้การคำนวณการเคลื่อนที่และการหมุนของวัตถุต่อไปได้ โดยมีสมการเป็น

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_d = \sum \mathbf{F} = (\rho) A\mathbf{a} \qquad (2.12)$$

$$\mathbf{T} + \mathbf{T}_d = \sum \mathbf{T} = I_z \alpha \qquad (2.13)$$

โดยที่ $\mathbf{a}, \alpha$ เป็นความเร่ง และความเร่งเชิงมุมของวัตถุตามลำดับ

อนึ่ง เป้าหมายของการจัดวัตถุด้วยสนามแรงก็คือ การทำให้วัตถุเข้าสู่ภาวะสมดุลภายใต้สนามแรงนั้นๆ กล่าวคือ การจัดวัตถุจนกระทั่งวัตถุเข้าสู่ configuration ซึ่งทำให้

$$\sum \mathbf{F} = 0 \qquad (2.14)$$

$$\sum \mathbf{T} = 0 \qquad (2.15)$$

และในขณะเดียวกัน วัตถุจะต้อง**หยุดนิ่ง** ณ configuration นั้นด้วย นั่นคือ

$$\mathbf{v} = 0 \qquad (2.16)$$

$$\omega = 0 \qquad (2.17)$$

ซึ่งเงื่อนไขทั้งหมดดังกล่าวนี้ ใช้เป็นตัวตัดสินการหยุดที่ภาวะสมดุลภายใต้สนามแรงใดๆ ของวัตถุ

2.4 การจัดวัตถุโดยใช้สนามแรงชุดเดียวที่ไม่เปลี่ยนไปตามเวลา

2.4.1 Elliptic Field

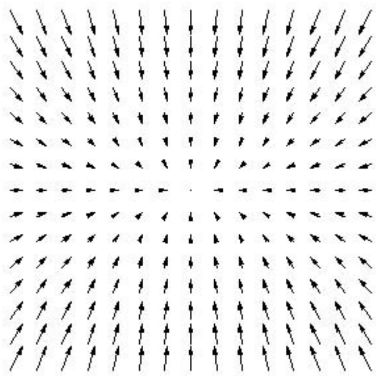
L.E.Kavraki นำเสนอสนามแรงแบบ Elliptic Field เป็นครั้งแรกใน [9] โดยตัวสนามแรงประกอบไปด้วยแรงที่มีทิศทางพุ่งเข้าหาจุดศูนย์กลางจุดหนึ่ง (ซึ่งจะขอเรียกเป็นจุดศูนย์กลางสนามแรง ซึ่งโดยทั่วไปคือจุด $(0,0)$ ของระบาบสนามแรง) และมีขนาดของแรงแปรผันตามระยะทางจากจุดใดๆ ถึงจุดศูนย์กลางสนามแรง ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้เป็น

$$\hat{\mathbf{F}}(x,y) = \begin{bmatrix} -\xi x \\ -\eta y \end{bmatrix} \qquad (2.18)$$

โดยที่ $\xi, \eta > 0$ เป็นค่าคงที่ ซึ่ง $\xi \neq \eta$ (โดยปกติ มักจะกำหนดให้ $\xi < \eta$

ตัวอย่างทิศทางของแรงเนื่องจาก Elliptic field ที่มี $\xi = 1, \eta = 2$ เป็นดังในรูปที่ 2.5

อนึ่ง Elliptic Field นี้ยังจัดเป็นสนามแรงประเภทหนึ่งในกลุ่มของ Quadratic Field [15] อีกด้วย



รูปที่ 2.5: ตัวอย่างสนามแรง Elliptic Field ($\xi = 1, \eta = 2$)

ทั้งนี้ ใน [9] ได้ทำการวิเคราะห์พฤติกรรม และทำนาย configuration ที่ภาวะสมดุลของวัตถุภายใต้ Elliptic Field ไว้ว่า สำหรับวัตถุส่วนใหญ่ที่มีแกนสมมาตรไม่เกิน 1 แกน วัตถุนั้นจะมี configuration ที่เป็นไปได้เมื่อวัตถุหยุดที่ภาวะสมดุล 2 รูปแบบ โดยทั้ง 2 รูปแบบนั้น จุดศูนย์กลางมวลจะอยู่ตรงกับจุดศูนย์กลางสนามแรงพอดี ส่วนทิศทางของทั้ง 2 configurations ที่เป็นไปได้นั้น จะมีทิศทางต่างกัน π เสมอ และสามารถหาได้ล่วงหน้าจากตัววัตถุ แต่ก็ไม่สามารถบอกได้ว่าวัตถุจะเลือกเข้าสู่สมดุล ณ configuration ใด ซึ่ง Elliptic Field นี้ นับเป็นสนามแรงรูปแบบแรกที่ให้ผลในเรื่องของ configuration ที่ภาวะสมดุลเป็นจำนวนคงที่ ไม่ขึ้นกับความซับซ้อนของรูปร่างวัตถุ

2.4.2 Unit Radial & Constant Field

F.Lamiraux และ L.E.Kavraki เป็นผู้นำเสนอสนามแรงนี้ใน [10] และยังได้นำเสนอรวมกับ Elliptic Field อีกครั้งใน [11] โดยที่สนามแรงนี้ประกอบขึ้นจากการรวมกันของสนามแรง 2 สนามแรงอันได้แก่

- สนามแรงเชิงรัศมีขนาดคงที่ที่มีทิศพุ่งเข้าหาจุดศูนย์กลางสนามแรง (Unit Radial Field) ซึ่งจะมีลักษณะคล้าย Elliptic Field เพียงแต่ขนาดของแรง ณ แต่ละจุดบนสนามแรง**มีขนาดคงที่เสมอไม่เปลี่ยนแปลงตามระยะทาง** ซึ่งสามารถเขียนออกมาได้เป็นสมการ

$$\hat{\mathbf{F}}_u(x,y) = \begin{bmatrix} -\frac{hx}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{hy}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

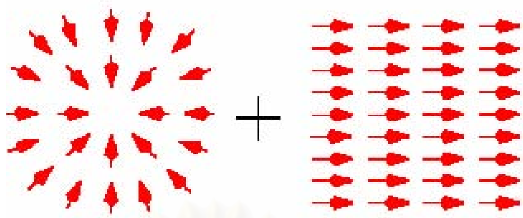
  โดยที่ $h > 0$ เป็นค่าคงที่

- สนามแรงแนวตรง ขนาดคงที่ (Constant Field) กล่าวคือ แรง ณ จุดใดๆ จะมีขนาดและทิศทางคงที่เสมอตลอดทั้งระนาบสนามแรง ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการในรูปทั่วไปได้เป็น

$$\hat{\mathbf{F}}_c(x,y) = \begin{bmatrix} c\cos\theta_c \\ c\sin\theta_c \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

  โดยที่ θ_c เป็นมุมที่ทิศทางของแรงทำกับทิศทางของแกนระนาบของสนามแรง

ตัวอย่างทิศทางของแรงเนื่องจาก Unit Radial & Constant Field ที่มีค่า $h = 1$ สำหรับ Unit Radial Field และค่า $c = 0.5$ ตลอดจนทิศทาง $\theta_c = 0$ (ทิศพุ่งไปทางขวามือ) สำหรับ Constant Field เป็นดังในรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6: ตัวอย่างสนามแรง Unit Radial & Constant Field ($h = 1, c = 0.5$ ทิศทาง $\theta_c = 0$)

ทั้งนี้ ถ้าเป็นในกรณีของการจัดวัตถุด้วย Unit Radial Field เพียงอย่างเดียวนั้น จากการวิเคราะห์ใน [10] พบว่า configuration ที่วัตถุเข้าสู่ภาวะสมดุลนั้น แม้จะมีอยู่มากมาย แต่ก็มีลักษณะร่วมอยู่ประการหนึ่ง กล่าวคือ ณ configuration ที่ภาวะสมดุลเหล่านั้น จะมีจุดคงที่บนวัตถุจุดหนึ่งที่อยู่ตรงกับจุดศูนย์กลาง Unit Radial Field พอดี ซึ่งจะเป็นจุดเดียวกับทุกๆ configruation ซึ่งจุดดังกล่าวจะถูกเรียกว่า pivot point ของวัตถุภายใต้ Unit Radial Field แทนด้วยจุด p

ในขณะเดียวกัน ในกรณีของการจัดวัตถุด้วย Unit Radial & Constant Field นั้น จากการวิเคราะห์ใน [10] เช่นเดียวกัน สามารถสรุปได้ว่า สำหรับแต่ละวัตถุแล้ว จะมีค่าขนาด c ของ Constant Field ที่มีค่าน้อยๆ ในระดับหนึ่ง ที่ทำให้รับประกันได้ว่า configuration ที่เป็นไปได้ที่ภาวะสมดุลของวัตถุ จะมีเพียงรูปแบบเดียวเสมอ อย่างไรก็ตาม ก็ยังมีข้อด้อยตรงที่ configuration รูปแบบเดียวที่เป็นไปได้ดังกล่าวนั้นไม่สามารถบอกได้ล่วงหน้าว่าเป็น configuration ใด หากรู้แต่เพียงว่ามีรูปแบบเดียวเท่านั้น ต่างจากกรณีของ Elliptic Field ที่แม้จะเป็นไปได้ 2 รูปแบบ แต่ก็สามารถบอกได้ล่วงหน้าทั้ง 2 รูปแบบ นอกจากนี้ ค่า c ของ Constant Field ที่ "น้อยเพียงพอ" ดังกล่าว ก็ไม่สามารถหาได้โดยตรง นอกจากต้องทำการประมาณค่าด้วยวิธีการเชิงตัวเลขเอาเองสำหรับแต่ละวัตถุอีกด้วย

2.4.3 Unit Radial, Radial & Constant Field

A.SudSang และ L.E.Kavraki ได้นำเสนอสนามแรงนี้ใน [12] โดยที่ประกอบไปด้วยการรวมกันของ 3 สนามแรง คือ

- สนามแรงแบบ Unit Radial Field ซึ่งให้แรงตามสมการ (2.19)
- สนามแรงเชิงรัศมีที่ขนาดของแรง**แปรตามระยะห่างจากจุดศูนย์กลางสนามแรง** (Radial Field) ซึ่งมีสมการเป็น

$$\hat{\mathbf{F}}_r(x,y) = \begin{bmatrix} -(2k+c)x \\ -(2k+c)y \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

  โดยที่ $k, c > 0$ เป็นค่าคงที่

- สนามแรงคงที่แนวตรง (Constant Field) ที่ให้แรงตามสมการ (2.20) เพียงแต่**ค่าคงที่ c นั้นมีค่า**

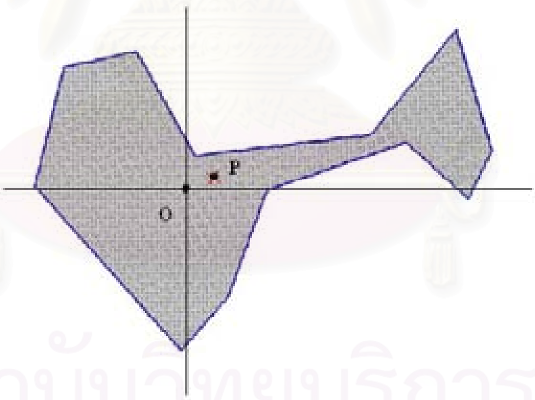
เท่ากับ kd โดยที่ k เป็นค่าคงที่ตัวเดียวกับที่อยู่ในสมการ (2.21) ส่วน d เป็นค่าคงที่เฉพาะที่มีค่ามากกว่า 0

ทั้งนี้ การหาค่า d ในส่วนของ Constant Field นั้น สัมพันธ์อย่างยิ่งกับการทำนาย configuration ที่ภาวะสมดุล ซึ่งสนามแรงชุดนี้รับประกันว่าสำหรับวัตถุโดยส่วนใหญ่แล้ว configuration ที่เป็นไปได้เมื่อวัตถุหยุดที่ภาวะสมดุลจะมีเพียง configuration เดียว โดยการหาค่า d ดังกล่าว เกี่ยวข้องกับสนามแรงอีกชุด ซึ่งเป็นการประกอบกันของ

- สนามแรงแบบ Unit Radial Field ซึ่งให้แรงตามสมการ (2.19)
- สนามแรงแบบ Radial Field ซึ่งมีสมการชองแรงต่างจากสมการ (2.21) เล็กน้อย โดยมีสมการเป็น

$$\hat{\mathbf{F}}_r(x,y) \quad = \quad \begin{bmatrix} -(k+c)x \\ -(k+c)y \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

ซึ่ง configuration ที่ภาวะสมดุลภายใต้ Unit Radial & Radial Field ชุดหลังนี้ จะมีจุดที่เป็น pivot point บนวัตถุในลักษณะเดียวกับ pivot point ที่กล่าวถึงในหัวข้อ 2.4.2 เช่นกัน ซึ่งสำหรับวัตถุส่วนใหญ่ซึ่งมีแกนสมมาตรไม่เกิน 1 แกนแล้ว ตำแหน่งของ pivot point ภายใต้ Unit Radial & Radial Field นั้น **จะไม่เป็นจุดเดียวกับจุดศูนย์กลางมวล** ดังตัวอย่างในรูปที่ 2.7



รูปที่ 2.7: ตัวอย่าง pivot point ของวัตถุภายใต้ Unit Radial & Radial Field ($h = 10, k = 1, c = 0.01$ (จุด p)

ถ้าให้ p เป็นตำแหน่งของ pivot point ภายใต้ Unit Radial & Radial Field ดังกล่าว และให้ o เป็นตำแหน่งของศูนย์กลางมวลของวัตถุแล้ว เราจะได้ว่า ค่า d สำหรับสนามแรง Unit Radial, Radial & Constant Field จะมีค่าตามสมการ

$$d \quad = \quad \|\overrightarrow{po}\|$$

นอกจากนี้ ยังทราบอีกด้วยว่า configuration รูปแบบที่เป็นไปได้ที่วัตถุจะหยุดที่ภาวะสมดุลภายใต้ Unit Radial, Radial & Constant Field ดังกล่าวนั้น จุด p นนวัตถุจะอยู่ตรงกับจุดศูนย์กลางของสนามแรงส่วนที่เป็น Unit Radial Field และ Radial Field (ซึ่งเป็นจุดเดียวกัน) และทิศทางของ $\overrightarrow{po}$ จะเป็นทิศทางเดียวกันกับทิศทางของแรงในส่วนที่เป็น Constant Field เสมอ

ดังนั้น เราสามารถกำหนดค่าทิศทาง θ_c ของสนามแรงส่วนที่เป็น Constant Field เพื่อวัตถุหยุดที่ภาวะสมดุลในทิศทางที่เราต้องการได้ ซึ่งสามารถเขียนเป็นขั้นตอนได้ดัง Algorithm 1

Algorithm 1 UnitRadConstDirection(Obj, h, k, c, θ)

Require: Obj : part/object;
Require: h, k, c : Constant parameters of the field;
Require: θ : Desired direction of part;

{Find proper d & θ_c for the field..}

$\mathbf{o} = (0, 0)$;
$\mathbf{p}$ =pivot point of Obj under Unit-Radial & Radial Field (using h, k, c);
$d = \|\overrightarrow{\mathbf{po}}\|$;
θ_E =Direction of $\overrightarrow{\mathbf{po}}$ in Obj Plane;
$\theta_c = \theta + \theta_E$;
Return (d, θ_c);

อนึ่ง สนามแรง Unit Radial, Radial & Constant Field นี้ จัดเป็นสนามแรงที่มีประสิทธิภาพดีที่สุดในแง่ของ configuration ที่ภาวะสมดุลที่เป็นไปได้ในบรรดาสนามแรงที่เคยมีการนำเสนอมา เพราะนอกจากจะรับประกัน configuration ที่เป็นไปได้ว่ามีเพียง configuration เดียวแล้ว ยังสามารถบอก configuration ดังกล่าวนั้นได้อีกด้วย ซึ่งในจุดนี้ เหนือกว่า Unit Radial & Constant Field มากนัก

2.5 การจัดวัตถุโดยใช้สนามแรงหลายชุดที่เปลี่ยนไปตามเวลา

นอกเหนือจากรูปแบบของการใช้สนามแรงชุดเดียวในการจัดวัตถุแล้ว ยังมีรูปแบบของการใช้สนามแรงหลายๆ ชุด ทำหน้าที่ในแต่ละช่วงเวลา โดยที่แต่ละชุดก็จะส่งผลต่อการเคลื่อนที่หรือการหมุนของวัตถุเป็นขั้นตอนย่อยๆ แยกจากกัน

การใช้ Parallel Gripper ในการจัดทิศทางวัตถุ [1] ที่ได้กล่าวถึงไปแล้วในตอนต้นของบทนี้ ก็จัดเป็นการจัดวัตถุด้วยสนามแรงหลายชุดเช่นกัน เพราะแต่ละขั้นตอนที่เปลี่ยนทิศทางของ Gripper ก็เป็นเหมือนการเปลี่ยนสนามแรงชุดใหม่ อย่างไรก็ตาม จำนวนขั้นตอนการเปลี่ยนทิศทางวัตถุ (หรือเปรียบเทียบได้กับจำนวนชุดของ Squeeze Field ที่ต้องใช้) นั้น แปรผันไปตามความซับซ้อนของรูปร่างวัตถุ ซึ่งทำให้จำนวนขั้นตอนไม่แน่นอนและไม่สามารถควบคุมจำนวนที่ต้องใช้ หรืออีกนัยหนึ่งก็คือ เวลาที่ต้องใช้ในการจัดวัตถุที่แน่นอนได้

ต่อมา J. Luo และ L. E. Kavraki ได้นำเสนอการจัดวัตถุที่ใช้สนามแรงหลายรูปแบบใน [6] โดยในงานดังกล่าวได้แบ่งการจัดวัตถุเป็น 3 ขั้นตอนย่อยๆ เสมอสำหรับทุกวัตถุ อันประกอบไปด้วย

1. ดึงวัตถุให้ศูนย์กลางมวลไปหยุดที่จุดๆ หนึ่งด้วย Radial Field ซึ่งมีคุณสมบัติทำให้วัตถุเคลื่อนที่โดยไม่ทำให้วัตถุหมุน
2. หมุนวัตถุให้ได้ทิศทางที่ต้องการด้วย Dynamic Curl Fields
3. ดันวัตถุไปยังตำแหน่งที่ต้องการ (เพื่อประกอบ) ด้วย Dynamic Push Fields

อย่างไรก็ตาม สนามแรงใน 2 ขั้นตอนหลัง คือ Dynamic Curl Fields และ Dynamic Push Fields เป็น

สนามแรงที่ต้องปรับเปลี่ยนตามเวลาอย่างต่อเนื่องและฉับพลันตลอดเวลา ทำให้นำไปใช้งานจริงได้ยากมาก

2.6 เครื่องมือที่ใช้หลักการของสนามแรงที่โปรแกรมได้

แม้ว่าจะได้มีการออกแบบสนามแรงที่มีประสิทธิภาพในการจัดวัตถุออกมาหลายต่อหลายรูปแบบ แต่ปัญหาที่ยังคงมีอยู่ก็คือ การสร้างเครื่องมือที่สามารถสร้างสนามแรงได้ตามทฤษฎี แม้ว่าอย่างใน [11] จะได้กล่าวถึงแนวคิดในการสร้างเครื่องมือดังกล่าวแล้วก็ตาม แต่ด้วยเครื่องมือที่มีอยู่ ไม่ว่าจะเป็น Vibrating Plate, MEMS Actuator Array [4], Arrays of Rolling Wheels [5], etc. ต่างก็มีข้อจำกัดตรงที่แรงที่อุปกรณ์เหล่านี้สร้างขึ้น มีลักษณะเป็นแบบไม่ต่อเนื่อง ในขณะที่สนามแรงตามทฤษฎีโดยส่วนใหญ่กลับเป็นแบบที่แรงมีลักษณะต่อเนื่องทั่วทั้งระนาบสนามแรงเกือบทั้งสิ้น ทำให้แทบไม่มีผลจากการทดลองจริงถึงความสำเร็จในการใช้สนามแรงที่คิดค้นขึ้นทำการจัดวัตถุจริงเลย

จนกระทั่ง K. Varsos, H. Moon และ J. Luntz ได้นำเสนอเครื่องมือที่สามารถสร้างสนามแรงแบบ Elliptic Field ใน [14] โดยเครื่องมือดังกล่าวอาศัยหลักการของการไหลของอากาศ ซึ่งสามารถแปลงแรงที่ได้เป็นแรงที่เทียบเท่าแรง เนื่องจากสนามแรง แบบ Elliptic Field หรือสนามแรงแบบอื่นๆ บางรูปแบบ เช่น Constant Field เป็นต้น โดยอาศัยการปรับเปลี่ยนเครื่องมือเล็กน้อย ทั้งยังได้ทดสอบจัดเรียงวัตถุจริงภายใต้ Elliptic Field ที่สร้างขึ้นและให้ผลเป็นที่น่าพอใจระดับหนึ่งอีกด้วย นับเป็นครั้งแรกที่มีการสร้างสนามแรงแบบต่อเนื่องเพื่อการจัดวัตถุได้จริง

บทที่ 3

โปรแกรมจำลองการทำงานของสนามแรงที่โปรแกรมได้

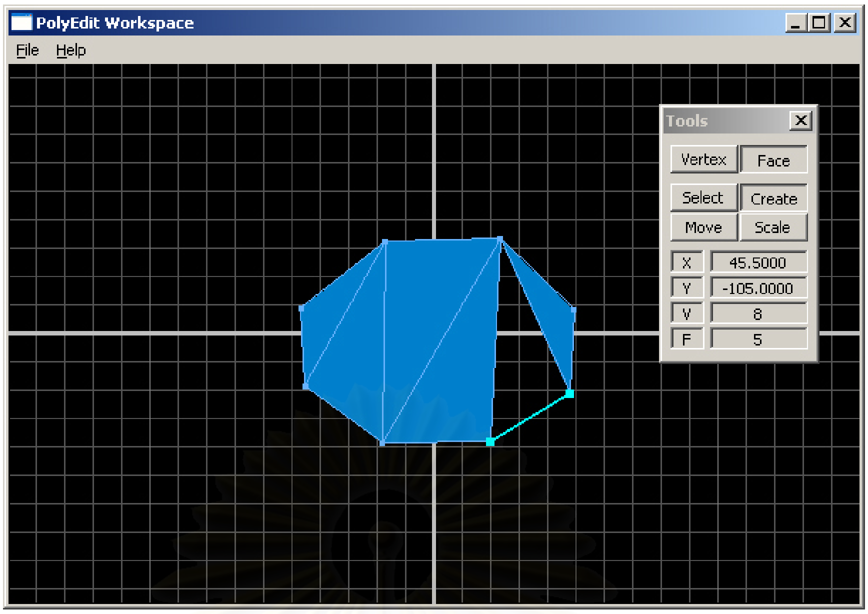
เนื่องจากงานวิจัยในวิทยานิพนธ์นี้ ต้องทำการศึกษาโดยต้องทำการทดสอบผลของสนามแรงรูปแบบต่างๆ ที่มีต่อการจัดวัตถุตั้งแต่เริ่มต้นจนกระทั่งเข้าสู่ภาวะสมดุลที่มีเสถียรภาพ อย่างไรก็ตาม อุปกรณ์ที่สามารถสร้างสนามแรงได้จริงตามทฤษฎีนั้นยังคงเป็นไปได้ยากดังที่ได้นำเสนอมา เพื่อการนี้ จึงจำเป็นต้องพัฒนาโปรแกรมจำลองสถานการณ์สำหรับทดสอบสนามแรงที่โปรแกรมได้แบบต่างๆ เพื่อเป็นเครื่องมือช่วยในการทดสอบ อีกทั้งยังสามารถเปรียบเทียบประสิทธิภาพของสนามแรงแต่ละรูปแบบภายใต้การควบคุมปัจจัยภาวะแวดล้อมต่างๆ เช่น ความหนาแน่นของวัตถุ, สัมประสิทธิ์ความเสียดทาน, รูปร่างวัตถุ ตลอดจนคุณสมบัติตอนเริ่มต้นของวัตถุ (ตำแหน่ง, ทิศทาง, ความเร็ว, ความเร็วเชิงมุม) ในการทดสอบกับสนามแรงรูปแบบต่างๆ ให้มีค่าเหมือนๆ กัน เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่ชัดเจน

เนื้อหาในบทนี้ จะได้นำเสนอถึงการพัฒนาโปรแกรมจำลองสถานการณ์สำหรับการจัดวัตถุภายใต้สนามแรงที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ ซึ่งเป็นการพัฒนาเพิ่มเติมมาจากโปรแกรมจำลองสถานการณ์เดิมที่ได้ออกแบบและพัฒนาไว้ใน [16] โดยจะได้อธิบายถึงโครงสร้างโดยรวม รูปแบบข้อมูลที่ใช้ประมวลผล และการพัฒนาส่วนประมวลผลเพิ่มเติม เพื่อการไปใช้งานจริงในการทดสอบในบทถัดไป

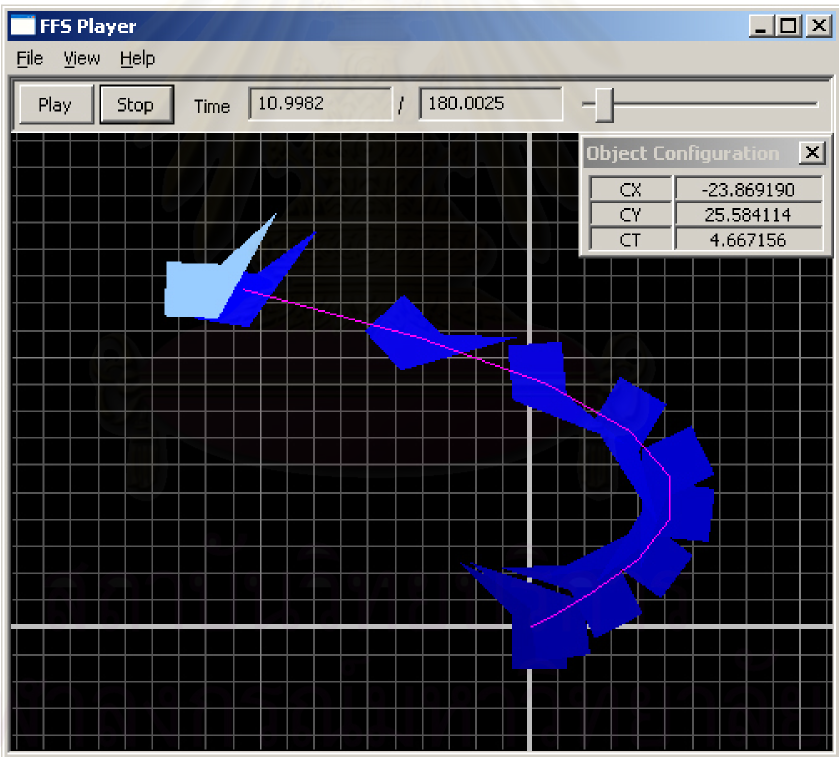
3.1 โครงสร้างโดยรวมของโปรแกรม

ดังที่ได้กล่าวไปข้างต้นแล้วว่า ตัวโปรแกรมจำลองการทำงานของสนามแรงที่จะใช้สำหรับการทดสอบต่างๆ ในวิทยาพนธ์ฉบับนี้นั้น เป็นการพัฒนาต่อเนื่องมาจากโปรแกรมจำลองสถานการณ์การจัดวัตถุภายใต้สนามแรงที่เคยมีการออกแบบและพัฒนาไว้ใน [16] โดยโครงสร้างของโปรแกรมเดิมนั้น แบ่งออกเป็น 3 ส่วนใหญ่ คือ

- **ส่วนสร้างข้อมูลวัตถุ (Object Editor)** ส่วนนี้จะเป็นส่วนทีใช้ออกแบบวัตถุโดยใช้การวาดวัตถุผ่าน Graphic User Interface แล้วจึงทำการแปลงรูปวัตถุออกมาเป็นข้อมูลวัตถุที่จะป้อนให้กับส่วนประมวลผล ซึ่งผู้ใช้สามารถปรับเปลี่ยนแก้ไขรูปร่างวัตถุผ่านโปรแกรมส่วนนี้ โดยไม่ต้องยุ่งยากกับการจัดการข้อมูลวัตถุโดยตรง ดังตัวอย่างในรูปที่ 3.1
- **ส่วนประมวลผลการจัดวัตถุ** ส่วนนี้จะทำการรับข้อมูลวัตถุ ข้อมูลสนามแรง และข้อมูลตำแหน่งเริ่มต้นของวัตถุ ตลอดจนช่วงของเวลาที่ต้องการจำลองการเคลื่อนที่ ทำการประมวลผลออกมาเป็นตำแหน่งและลักษณะของวัตถุในแต่ละหน่วยย่อยของเวลาตั้งแต่เริ่มต้นจนสิ้นสุดช่วงของเวลาที่ต้องการ ส่วนนี้จะทำงานในลักษณะที่เป็นแบบ Command-Line (คือ ไม่มีการแสดงผลเป็นกราฟิกออกมา) เพื่อให้สะดวกในการทำการสอบหลายๆ การทดลองต่อเนื่องกัน โดยเมื่อประมวลผลเสร็จ ก็จะได้ผลลัพธ์เพื่อนำไปประมวลผล รวมถึงเป็นข้อมูลป้อนให้กับส่วนแสดงผลกราฟิกต่อไป
- **ส่วนแสดงผล (Playback)** เป็นส่วนที่นำผลการคำนวณที่ได้จากส่วนประมวลผล ซึ่งอยู่ในรูปของข้อมูลพิกัดตำแหน่งและลักษณะของวัตถุในแต่ละหน่วยย่อยของเวลา มาแสดงผลออกเป็นภาพกราฟิก 3 มิติ โดยสามารถที่จะแสดงผลแบบ Movie คือสามารถ Play, Pause, Seek ไปยังตำแหน่งต่างๆ หรือ Play ที่ speed ต่างๆ ได้ ดังตัวอย่างในรูปที่ 3.2



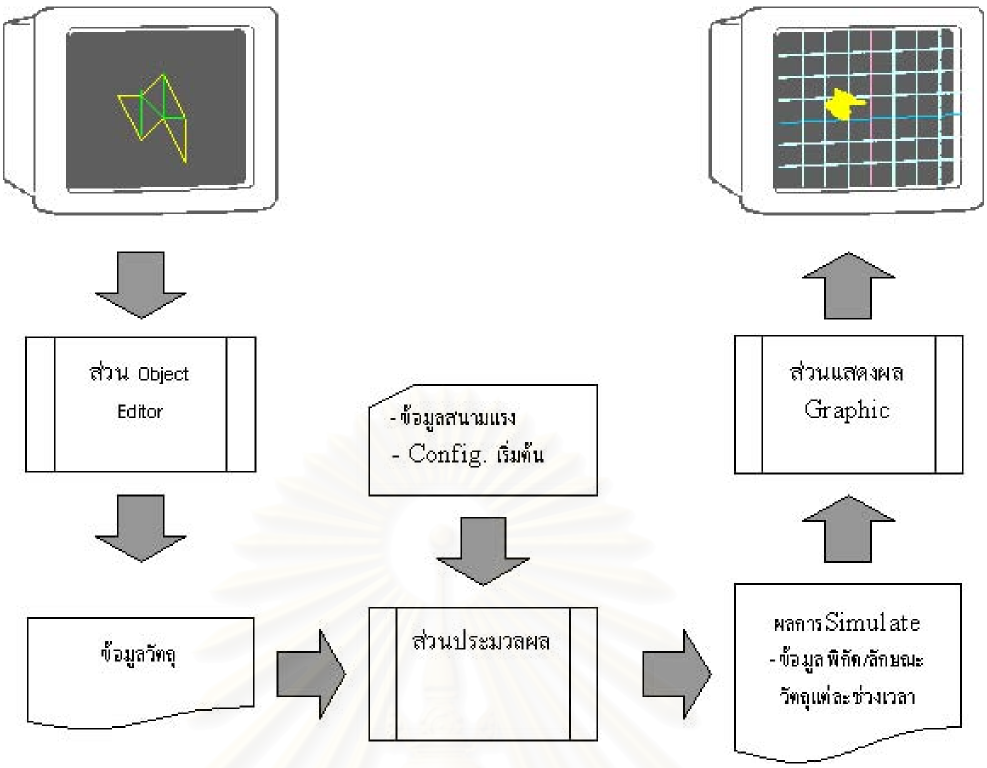
รูปที่ 3.1: ตัวอย่างหน้าจอของโปรแกรมส่วนสร้างข้อมูลวัตถุ



รูปที่ 3.2: ตัวอย่างหน้าจอของโปรแกรมส่วนแสดงผลการจัดวัตถุ

อนึ่ง โครงสร้างโดยรวมของโปรแกรมจำลองสถานการณ์ สามารถแสดงออกมาได้ดังแผนภาพในรูปที่ 3.3

ทั้งนี้ โปรแกรมจำลองที่ใช้ในการทดสอบการจัดวัตถุในวิทยานิพนธ์นี้ ยังคงยึดโครงสร้างการการทำงานของโปรแกรมโดยรวมไว้ตามเดิม เพียงแต่เพื่อการทำการทดลองให้มีประสิทธิภาพ จึงได้ทำการปรับปรุงการทำงานของส่วนประมวลผลขึ้นใหม่ เพื่อให้มีความแม่นยำในการคำนวณ ตลอดจนความเร็วที่ใช้



รูปที่ 3.3: โครงสร้างโดยรวมของโปรแกรมจำลองสถานการณ์

ในการจำลองสถานการณ์แต่ละกรณีศึกษาให้มีมากขึ้น ดังจะได้อธิบายถึงการปรับปรุงของส่วนประมวลผลในหัวข้อต่อๆ ไป

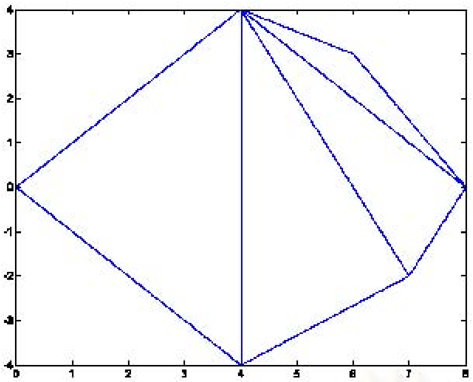
3.2 รูปแบบข้อมูลที่ป้อนให้กับโปรแกรมจำลองสถานการณ์

3.2.1 รูปแบบข้อมูลวัตถุ

ข้อมูลวัตถุในที่นี้ คือ ข้อมูลที่เป็นผลลัพธ์จากส่วน Object Editor ที่จะใช้เป็นข้อมูลป้อนให้กับส่วนประมวลผล เพื่อนำไปใช้ประมวลผล การจัดวัตถุ ร่วมกับข้อมูลสนามแรง และข้อมูลตัวแปรภาวะแวดล้อมต่างๆ โดยข้อมูลของวัตถุจะอยู่ในรูปของไฟล์ข้อความ ที่มีโครงสร้างดังต่อไปนี้ คือ

- **บรรทัดแรก** เป็นเลขจำนวนเต็ม n บอกถึงจำนวนของจุดยอดของสามเหลี่ยมทั้งหมดที่ประกอบกันเป็นตัววัตถุ
- **อีก n บรรทัดถัดมา** แต่ละบรรทัดจะประกอบด้วยจำนวนจริง 2 ค่า คั่นด้วยช่องว่าง ซึ่งแทนค่าพิกัด (x, y) ของแต่ละจุดยอดของสามเหลี่ยม ทั้งนี้ ทุกๆ 3 บรรทัดจะประกอบเป็นสามเหลี่ยม 1 รูป

ตัวอย่างของข้อมูลวัตถุเป็นดังในรูปที่ 3.4 ทั้งนี้ สาเหตุที่ต้องแบ่งวัตถุออกเป็นรูปสามเหลี่ยมย่อยๆ ก็เพื่อให้สะดวกในการทำการคำนวณค่าอินทิเกรตของฟังก์ต่างๆ เหนือวัตถุให้มีประสิทธิภาพ (ซึ่งจะได้อธิบายในหัวข้อต่อๆ ไป)



```
12
4 4
0 0
4 -4
4 4
4 -4
7 -2
4 4
7 -2
8 0
4 4
8 0
6 3
```

รูปที่ 3.4: ตัวอย่างข้อมูลวัตถุ (ซ้าย) รูปวัตถุตัวอย่าง (ขวา) ข้อมูลวัตถุที่ได้

3.2.2 รูปแบบข้อมูลสนามแรง

ในโปรแกรมสถานการณ์ตัวเดิมใน [16] นั้น ได้ออกแบบให้การป้อนข้อมูลสนามแรง อยู่ในรูปของนิพจน์ของ แรงในแนวแกน X และแกน Y โดยมี x, y เป็นตัวแปร ประกอบเข้ากับสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์อื่นๆ โดยที่ในตัวโปรแกรมส่วนประมวลผล จะมีส่วนที่แปลนิพจน์เหล่านี้ให้เป็นฟังก์ชันการคำนวณที่คอมพิวเตอร์เข้าใจ ก่อนจะนำไปประมวลผล ทั้งนี้ ข้อดีของวิธีการออกแบบข้อมูลสนามแรงในรูปแบบนี้ เพื่อให้สามารถจำลองสถานการณ์การจัดวัตถุด้วยสนามแรงแบบไหนก็ได้ ขอเพียงให้สามารถเขียนฟังก์ชันของแรงเนื่องจากสนามแรงในแนวแกน X และ Y ได้ ก็สามารถทำการคำนวณได้ ดังตัวอย่างข้อมูลสนามแรงสำหรับ Elliptic Field และ Unit Radial & Constant Field ในรูปที่ 3.5 (ก),(ข) ตามลำดับ

```
1
-x ; -2y
```

(ก)

```
1
-x/sqrt(x^2+y^2) ; -y/sqrt(x^2+y^2) -0.4
```

(ข)

รูปที่ 3.5: ตัวอย่างข้อมูลสนามแรงสำหรับโปรแกรมรูปแบบเดิม (ก) Elliptic Field ($\xi = 1, \eta = 2$) (ข) Unit Radial Field ($h = 1$) & Constant Field ทิศทางตามแกน Y ($c = -0.4$)

อย่างไรก็ตาม วิธีการออกแบบดังกล่าว มีข้อเสียตรงที่วิธีการคำนวณที่มีความยืดหยุ่นมากเกินไป ทำให้ประสิทธิภาพในการคำนวณต่ำ ตลอดจนการคำนวณแรงลัพธ์และทอร์กลัพธ์แต่ละครั้งใช้เวลานาน เนื่องจากต้องใช้วิธีการประมาณการเชิงตัวเลข (รายละเอียดอยู่ในหัวข้อ 3.3) นอกจากนั้น โปรแกรมตัวเดิมยังมีข้อจำกัดที่สามารถป้อนข้อมูลสนามแรงได้เพียงชุดเดียวต่อการทดสอบแต่ละครั้ง โดยที่สนามแรงที่ป้อนเข้าไปดังกล่าว จะทำงานตลอดเวลาที่มีการประมวลผล ไม่สามารถเปลี่ยนเป็นสนามแรงชุดอื่นระหว่างการทดสอบได้

ด้วยเหตุดังกล่าว ในวิทยานิพนธ์จึงได้ทำการปรับปรุงรูปแบบข้อมูลสนามแรงที่จะป้อนให้กับโปรแกรมส่วนประมวลผลเสียใหม่ควบคู่ไปพร้อมๆ กับการปรับปรุงการทำงานของส่วนประมวลผล โดยแทนที่จะป้อนเป็นฟังก์ชันของสนามแรงใดๆ ก็ได้นั้น ข้อมูลสนามแรงแบบใหม่จะมีเพียงรหัสบอกรูปแบบของสนามแรง และพารามิเตอร์ของสนามแรงนั้นๆ แทน โดยที่ในตัวส่วนประมวลผลจะมีฟังก์ชันการ

คำนวณที่เกี่ยวข้องกับสนามแรงเหล่านั้นบรรจุไว้ภายในล่วงหน้า นอกจากนี้ ยังสามารถกำหนดสนามแรงให้มีมีการเปลี่ยนชุดสนามแรงระหว่างการจัดวัตถุโดยการกำหนดเวลาทำงานของสนามแรงแต่ละชุดได้อีกด้วย ซึ่งมีรูปแบบดังต่อไปนี้

- **บรรทัดแรก** เป็นเลขจำนวนเต็ม n บอกถึงจำนวนครั้งที่มีการเปลี่ยนสนามแรงระหว่างการจัดวัตถุ
- **ส่วนที่เหลือ** จะถูกแบ่งออกเป็น n ชุดย่อยๆ ซึ่งแต่ละชุดจะมีโครงสร้างเป็น
  - **บรรทัดแรกของชุด** ประกอบด้วยจำนวนเต็ม m บอกถึงจำนวนรูปแบบสนามแรงในชุดนั้นๆ ตามด้วยจำนวนจริง 2 ตัว บอกเวลาเริ่มต้นและเวลาสิ้นสุดในการใช้สนามแรงชุดนั้น
  - **อีก m บรรทัดที่เหลือในชุด** จะเป็นข้อมูลสนามแรงพื้นฐานแต่ละสนามแรงในช่วงเวลานั้นๆ ซึ่งมีรูปแบบดังที่ปรากฏในตาราง 3.1

ตารางที่ 3.1: ตัวอย่าง Format ข้อมูลสนามแรงพื้นฐานที่ใช้ในไฟล์ข้อมูลสนามแรง

สนามแรง	**รูปแบบข้อมูล**	**คำอธิบาย**
Elliptic Field	$E < \xi >< \eta >< x_c >< y_c >< \theta >$	(x_c, y_c) คือจุดศูนย์กลางสนามแรง θ คือมุมที่แกนระนาบสนามแรงทำกับแกนระนาบของสิ่งแวดล้อม หน่วยเป็นองศา
Unit Radial Field	$U < h >< x_c >< y_c >$	(x_c, y_c) คือจุดศูนย์กลางสนามแรง
Constnat Field	$C < c >< \theta >$	θ คือมุมที่แกนระนาบสนามแรงทำกับแกนระนาบของสิ่งแวดล้อม หน่วยเป็นองศา

ตัวอย่างข้อมูลสนามแรงแบบใหม่ สำหรับ Elliptic Field และ Unit Radial & Constant Field ดังตัวอย่างในรูปที่ 3.5 (ก),(ข) โดยให้ทำงานชุดละ 100 วินาที ตามลำดับ สามารถเขียนได้ดังตัวอย่างในรูปที่ 3.6

```
2
1 0.0 100.0
E 1.0 2.0 0 0 0
2 100.0 200.0
U 1.0 0 0
C 0.4 270
```

รูปที่ 3.6: ตัวอย่างข้อมูลสนามแรงสำหรับโปรแกรมรูปแบบใหม่ ซึ่งประกอบด้วย Elliptic Field ($\xi = 1, \eta = 2$) และ Unit Radial Field ($h = 1$) & Constant Field ทิศทางตามแกน Y ($c = -0.4$) ทำงานชุดละ 100 วินาที ตามลำดับ

3.2.3 รูปแบบข้อมูลสภาพแวดล้อมอื่นๆ

นอกเหนือจากข้อมูลวัตถุและข้อมูลของสนามแรงที่ใช้แล้ว ยังมีข้อมูลสภาวะแวดล้อมอื่นๆ ที่จำเป็นต่อการจำลองสถานการณ์ เช่น ความหนาแน่นของวัตถุ, สัมประสิทธิ์ความเสียดทาน, configuration เริ่มต้น

ของวัตถุ ฯลฯ ซึ่งข้อมูลเหล่านี้ จะถูกป้อนให้กับโปรแกรมส่วนประมวลผลในรูปแบบของ command-line parameter ดังมีรายละเอียดในตาราง 3.2

ตารางที่ 3.2: รูปแบบ Command-Line สำหรับข้อมูลสภาพแวดล้อมอื่นๆ ในการจำลองสถานการณ์

Command	คำอธิบาย
$-d < density >$	ความหนาแน่นต่อพื้นที่ของวัตถุ
$-k < coefficient >$	ค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานแบบ Viscous
$-p < x >< y >$	ตำแหน่งของศูนย์กลางมวลของวัตถุ ณ ตอนเริ่มต้น (x, y)
$-v < v_x >< v_y >$	ความเร็วของวัตถุ ณ ตอนเริ่มต้น [ปกติเป็น $(0, 0)$]
$-o < \theta >$	ทิศทางของระนาบวัตถุเทียบกับระนาบของพื้นที่สนามแรง ณ ตอนเริ่มต้น
$-w < \omega >$	ความเร็วเชิงมุมรอบศูนย์กลางมวลของวัตถุ ณ ตอนเริ่มต้น [ปกติจะเป็น 0]

3.3 การคำนวณเชิงพื้นที่ : การอินทิเกรตเหนือพื้นที่วัตถุ

การคำนวณค่าต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับบริเวณที่มีวัตถุอยู่นั้น จะอยู่ในรูปของการอินทิเกรตเหนือพื้อที่วัตถุทั้งสิ้น ไม่ว่าจะเป็นการหาพื้นที่, Moment of Inertia, แรงลัพธ์-ทอร์กลัพธ์เนื่องจากสนามแรง หรือแม้กระทั่ง Lifted Potential Energy ของวัตถุ

ทั้งนี้ เรื่องจากวัตถุที่เราทำการวิจัย มีลักษณะเป็นรูปของสามเหลี่ยม n รูป ประกอบกับขึ้นเป็นวัตถุ ดังนั้น การอินทิเกรตฟังก์ชันใดๆ เหนือวัตถุ จึงมีค่าเทียบเท่ากับผลรวมของการอินทิเกรตฟังก์ชันนั้นเหนือพื้นที่สามเหลี่ยมย่อยๆ เหล่านั้น กล่าวคือ

$$\int_P \int G(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{n} \int_{T_i} \int G(x,y)dxdy$$

รูปแบบของข้อมูลวัตถุที่กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 3.2.1 ก็ได้แนวคิดในการออกแบบมาจากวิธีการอินทิเกรตเหนือรูปสามเหลี่ยมทีละรูปนี้ เพื่อให้ง่ายต่อการประมวลผลของโปรแกรม

ในส่วนของการอินทิเกรตฟังก์ชันเหนือสามเหลี่ยมแต่ละรูปนั้น ในโปรแกรมจำลองสถานการณ์ตัวเดิม [16] นั้น ได้เลือกใช้ Extended Simpson Rule ในการประมาณค่าทั้งในแนวแกน X และแกน Y ซึ่งมีขั้นตอนดังต่อไปนี้ คือ

- สำหรับการอินทิเกตรเหนือสามเหลี่ยม T_i ใดๆ ถ้าให้

$$\begin{aligned}\int_{T_i} \int G(x,y)dxdy &= \int_{y_{min}(T_i)}^{y_{max}(T_i)} \left[\int_{x_{min}(y)}^{x_{max}(y)} G(x,y)dx \right] dy \\ &= \int_{y_{min}(T_i)}^{y_{max}(T_i)} G^*(y)dy \end{aligned} \qquad (3.1)$$

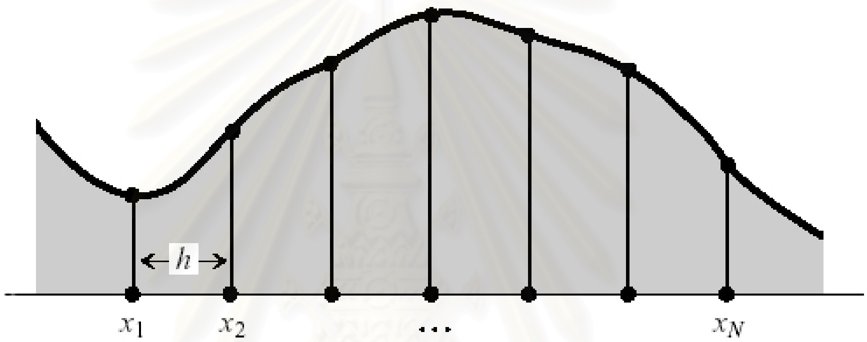
โดยที่ $G^*(y)$ คือผลการอินทิเกรตตามแนวแกน X เฉพาะส่วนที่อยู่ในสามเหลี่ยม T_i ณ ค่า y ใดๆ

- ในการหาค่า $G^*(y)$ ใดๆ นั้น กระทำได้โดยการแบ่งช่วง $(x_{min}(y), x_{max}(y)$ ออกเป็นส่วนๆ โดยให้แต่ละส่วนมีขนาด h เท่าๆ กัน ดังตัวอย่างในรูปที่ 3.7 สมมติให้มี $2m + 1$ ช่วง จากนั้นใช้ Extended

Simpson Rule ในการประมาณค่าของ $G^*(y)$ ซึ่งจะได้ผลเป็น

$$\begin{aligned} G^*(y) &= \int_{x_{min}(y)}^{x_{max}(y)} G(x,y)dx \\ &= \frac{h}{3}(G(x_{min}(y),y)+G(x_{max}(y)y)) + \frac{2h}{3}\sum_{k=1}^{m-1} G(x_{min}(y)+2kh,y) \\ &\quad + \frac{4h}{3}\sum_{k=1}^{m-1} G(x_{min}(y)+(2k-1)h,y) \end{aligned} \quad (3.2)$$

ทั้งนี้ ค่าความคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าดังกล่าว จะมีค่าเป็น ซึ่งถ้ามีค่ามากเกินกว่าขอบเขตที่ยอมรับได้ ก็จะทำการแบ่งส่วนให้ h มีค่าน้อยลง แล้วประมาณค่าใหม่ จนกว่าค่าความคลาดเคลื่อนจะอยู่ในขอบเขตที่ยอมรับได้



รูปที่ 3.7: ตัวอย่างของการหา $G^*(y)$ ณ ค่า y ใดในการอินทิเกรตฟังก์ชัน $G(x,y)$ เหนือสามเหลี่ยม T_i ใดๆ

- ในส่วนของการอินทิเกรตตามสมการ (3.1) ก็ทำการแบ่งช่วง $(y_{min}(T_i), y_{max}(T_i))$ เป็นส่วนๆ แล้วใช้ Extended Simpson Rule เช่นเดียวกัน ซึ่งจะได้เป็น

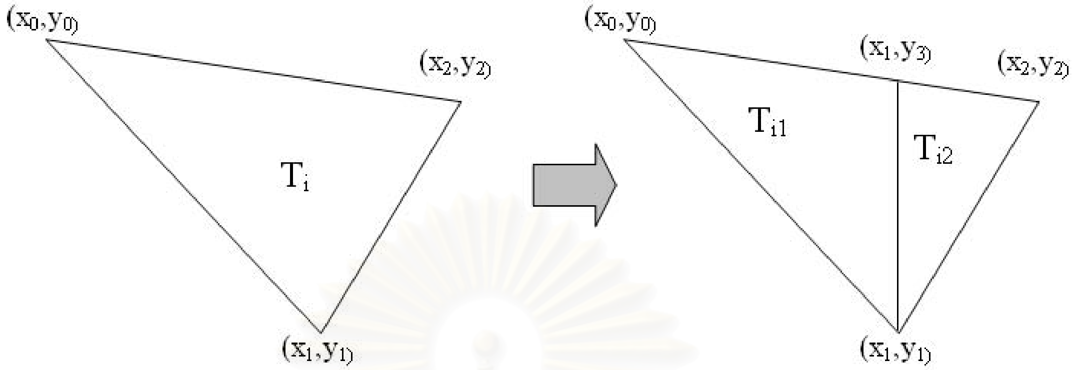
$$\int_{y_{min}(T_i)}^{y_{max}(T_i)} G^*(y)dy = \frac{h}{3}(G^(y_{min})+G^*(y_{max}))+\frac{2h}{3}\sum_{k=1}^{m-1} G^*(y_{min}+2kh)+\frac{4h}{3}\sum_{k=1}^{m-1} G^*(y_{min}+(2k-1)h)$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าค่าความคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าเกินกว่าขอบเชตที่ยอมรับได้ ก็จะทำการแบ่งส่วนให้ถี่ขึ้น (h มีค่าน้อยลง) แล้วประมาณค่าใหม่เช่นเดียวกัน

ด้วยวิธีดังกล่าวนี้ มีข้อดีตรงที่ง่ายต่อการอินทิเกรตฟังก์ชันใดๆ เนื่องจากสามารถใช้ตัวฟังก์ชัน $G(x,y)$ นั้นๆ ในการประมาณค่าได้โดยตรง อย่างไรก็ตาม วิธีการดังกล่าวนี้มีข้อด้อยในเรื่องของค่าความคลาดเคลื่อนจากวิธีการคำนวณดังกล่าว รวมไปถึงเวลาที่เสียไปกับการแบ่งส่วนของสี่เหลี่ยมคางหมูเพื่อให้ระดับความคลาดเคลื่อนอยู่ในระดับที่ยอมรับได้ ซึ่งทำให้การอินทิเกรตแต่ละครั้งต้องใช้เวลาไปกับการทำงานหลายขั้นตอนดังกล่าว

ดังนั้น ในวิทยานิพนธ์นี้ จึงได้ทำการเปลี่ยนแปลงวิธีการคำนวณค่าอินทิเกรตเหนือพื้นที่วัตถุเสียใหม่เพื่อให้มีความแม่นยำและความเร็วมากขึ้น โดยมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

- สำหรับสามเหลี่ยม T_i ใดๆ เราทำการแบ่งออกเป็น สามเหลี่ยม 2 รูป โดยให้ด้านที่เป็นด้านร่วมระหว่างสามเหลี่ยมสองรูปนั้น อยู่ในแนวขนานกับแกน Y ของระนาบสนามแรง ดังตัวอย่างในรูป 3.8

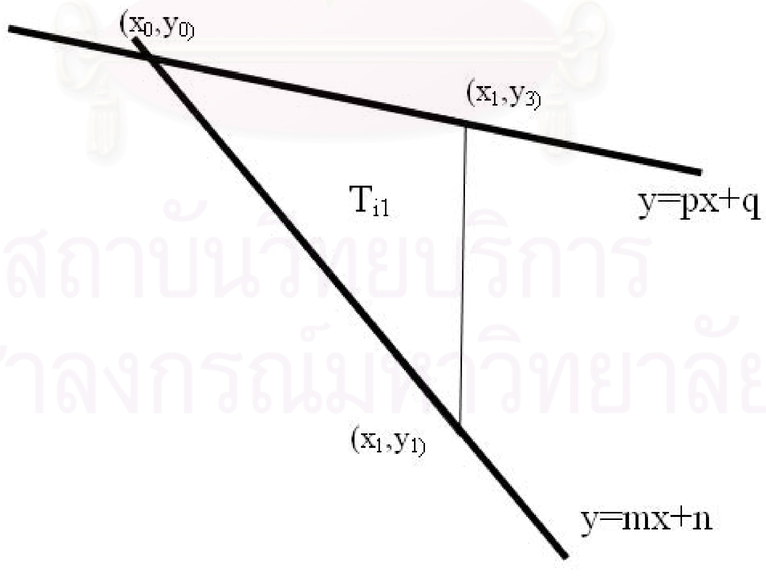


รูปที่ 3.8: ตัวอย่างการแบ่งสามเหลี่ยมเป็น 2 ส่วน

ซึ่งจะทำให้

$$\int_{T_i}\int G(x,y)dxdy = \int_{T_{i1}}\int G(x,y)dxdy + \int_{T_{i2}}\int G(x,y)dxdy$$

- ในสามเหลี่ยมแต่ละรูป เขียนด้านอีก 2 ด้านที่เหลือให้อยู่ในรูปของ $y = f(x)$ โดยที่ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น ดังตัวอย่างของสามเหลี่ยม T_{i1} ในรูป 3.9



รูปที่ 3.9: ตัวอย่างการหาสมการกำกับด้านของสามเหลี่ยมที่ไม่ใช่ด้านที่ถูกแบ่ง

- ในกรณีดังกล่าวนี้ ถ้าพิจารณาการอินทิเกรตเหนือสามเหลี่ยม T_{i1} ก็สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}\int_{T_{i1}}\int G(x,y)\,dx\,dy &= \int_{x0}^{x1}\left[\int_{mx+n}^{px+q} G(x,y)\,dy\right]dx \\ &= \int_{x0}^{x1}\left[G^*(x,y)|_{mx+n}^{px+q}\right]dx \\ &= \int_{x0}^{x1} H(x)\,dx \\ &= H^*(x)|_{x0}^{x1} \end{aligned} \tag{3.3}$$

ซึ่งถ้าเราสามารถหา $H^*(x)$ สำหรับ $G(x,y)$ ใดๆ ได้ เราก็สามารถแทนที่การอินทิเกรตเหนือสามเหลี่ยม T_i ด้วยวิธี Simpson Quadrature ของเดิม ด้วยการอินทิเกรตเหนือสามเหลี่ยม T_{i1}, T_{i2} ด้วยสมการ (3.3) เพียงขั้นตอนเดียว

ด้วยวิธีการใหม่ที่นำเสนอนี้ จะเห็นว่าการอินทิเกรตเหนือวัตถุทำได้แม่นยำและรวดเร็วกว่าวิธีการเดิมเป็นอย่างมาก เพียงแต่ความยุ่งยากในการเขียนโปรแกรมจะเพิ่มมากขึ้น เนื่องจากเราจำเป็นต้องเตรียม $H^*(x)$ สำหรับ $G(x,y)$ ใดๆ ไว้ล่วงหน้า เช่นสำหรับสนามแรงหนึ่งๆ จะต้องหา $H^*(x)$ สำหรับทั้งแรงลัพธ์, ทอร์กลัพธ์ ตลอดจน Lifted Potential Energy เตรียมไว้เพื่อบรรจุลงในตัวโปรแกรม ดังตัวอย่างในตาราง 3.3 เป็นต้น ทำให้ตัวโปรแกรมสูญเสียคุณสมบัติความยืดหยุ่นในการจำลองสถานการณ์สำหรับสนามแรงใดๆ ก็ได้ (เนื่องจากการป้อน $G(x,y)$ จากภายนอกโปรแกรม) ไป แต่ทั้งนี้ ภายใต้การทำการทดสอบกับสนามแรงที่มีรูปแบบจำกัด ก็สามารถเตรียม $H^*(x)$ สำหรับสนามแรงทุกรูปแบบที่จะทำการทดสอบเอาไว้ล่วงหน้าทั้งหมดได้ และเมื่อต้องการทำการทดสอบสนามแรงรูปแบบใหม่ ก็เพียงแต่หา $H^*(x)$ ที่เกี่ยวข้องกับสนามแรงนั้นๆ เพิ่มลงไปในโปรแกรมได้เสมอ

3.4 การคำนวณเชิงเวลา : การประมาณการเคลื่อนที่และการหมุนของวัตถุ

จากที่ทราบอยู่แล้วว่า ตลอดเวลาที่วัตถุอยู่ภายใต้สนามแรง แรงลัพธ์และทอร์กลัพธ์กระทำต่อวัตถุจะส่งผลให้วัตถุเคลื่อนที่ และ/หรือ หมุนไป ซึ่งก็หมายถึงการเปลี่ยนแปลงของ ตำแหน่ง, ทิศทาง, ความเร็ว และความเร็วเชิงมุมของวัตถุถ้ากำหนดให้

- $\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t))$ คือตำแหน่งของศูนย์กลางมวลของวัตถุที่เวลา t
- $\theta(t)$ คือทิศทางของแกนระนาบของวัตถุ **อ้างอิง** จากแกนระนาบของสนามแรงที่เวลา t
- $\mathbf{v}(t) = (v_x(t), v_y(t))$ คือความเร็วของวัตถุที่เวลา t
- $\omega(t)$ คือความเร็วเชิงมุมรอบศูนย์กลางมวลของวัตถุที่เวลา t

ตารางที่ 3.3: ตัวอย่างของ $H^*(x)$ สำหรับ $G(x,y)$ บางส่วนที่ใช้ในการจำลองสถานการณ์

ผลลัพธ์ที่ต้องการ	$G(x,y)$	$H^*(x)$
พื้นที่วัตถุ	1	$\frac{x}{2}(-2n+2q+(p-m)x)$
Moment of Inertia	$\frac{\rho}{2}((x-x_c)^2+(y-y_c)^2)$	$\frac{\rho x}{12}((-4(n-q)(3x_c{}^2+3y_c{}^2$ $+n^2+nq+q^2-3y_c(n+q))$ $-6(mn^2+x_c{}^2(m-p)$ $+y_c{}^2(m-p)-2x_c(n-q)$ $-pq^2+y_c(-2mn+2pq))x$ $+4((-1-m^2)n+2x_c(m-p)$ $+y_c(m-p)(m+p)+(1+p^2)q)x^2$ $-\left(3m+m^3-p(3+p^2)\right)x^3)$
Constant Field : F_x	$c\cos(\theta_c)$	$\frac{cx}{2}(-2n+2q+(p-m)x)\cos(\theta_c)$
Constant Field : F_y	$c\sin(\theta_c)$	$\frac{cx}{2}(-2n+2q+(p-m)x)\sin(\theta_c)$
Constant Field ทอร์กลัพธ์	$\begin{bmatrix} x-x_c \\ y-y_c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c\cos(\theta_c) \\ c\sin(\theta_c) \end{bmatrix}$	$\frac{cx}{6}(((m-p)(m+p)x^2$ $+3(mn+y_c(p-m)-pq)x$ $+3(n-q)(-2y_c+n+q))\cos(\theta_c)$ $+(3x_c(2n-2q+mx-px)$ $+x(-3n+3q-2mx+2px))\sin(\theta_c))$
Constant Field L.P.E.	$c(x\cos(\theta_c)+y\sin(\theta_c))$	$\frac{cx}{6}(x(-3n+3q-2mx+2px)\cos(\theta_c)$ $+(-3n^2-3mxn+3q^2$ $+(p^2-m^2)x^2+3pqx)\sin(\theta_c))$

ซึ่งความสัมพันธ์ของค่าต่างๆ ดังกล่าวข้างต้น สามารถอธิบายตามหลักกลศาสตร์ได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ 4 สมการ คือ

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \mathbf{v}(t) \tag{3.4}$$

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \mathbf{a}(t) = \frac{\mathbf{F}(t)+\mathbf{F}_d(t)}{\rho A} \tag{3.5}$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega(t) \tag{3.6}$$

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = \alpha(t) = \frac{\mathbf{T}(t)+\mathbf{T}_d(t)}{I_z} \tag{3.7}$$

โดยที่ค่าของ $\mathbf{F}(t), \mathbf{T}(t)$ หรือก็คือ แรงลัพธ์/ทอร์กลัพธ์ เนื่องจากสนามแรงที่เวลา t นั้น สามารถหาได้จากวิธีการที่ได้นำเสนอไปในหัวข้อ 3.3 เมื่อวัตถุอยู่ที่ configuration $(x(t), y(t), \theta(t))$ ส่วน $\mathbf{F}_d(t), \mathbf{T}_d(t)$ หรือแรงและทอร์กเนื่องจากแรงเสียดทาน ก็สามารถหาได้จากสมการ (2.10), (2.11)

จากที่เวลา $t = 0$ ซึ่งเราสามารถกำหนด $\mathbf{p}(0), \mathbf{v}(0), \theta(0), \omega(0)$ เป็นเงื่อนไขเริ่มต้นของวัตถุนั้น เป้าหมายที่ต้องการคือการหาค่าของ $\mathbf{p}(t), \mathbf{v}(t), \theta(t), \omega(t)$ ที่เวลา t ใดๆ นั่นคือ เราต้องหาผลเฉลยของสมการ (3.4)-(3.7) ซึ่งเป็นที่แน่นอนอยู่แล้วว่าเราไม่สามารถหาได้โดยตรง ดังนั้น จึงต้องหาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแทน

ในโปรแกรมจำลองสถานการณ์ที่สร้างขึ้นนี้ ได้เลือกใช้วิธี Runge-Kutta-Merson ในการหาผลเฉลยของทั้ง 4 สมการ ซึ่งเป็นวิธีที่นิยมในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์โดยทั่วไป ทั้งนี้ โดยผสมผสานเข้ากับการปรับขนาดช่วงระยะ iteration ในการประมาณค่าแต่ละครั้งเพื่อควบคุมระดับของค่าความคลาดเคลื่อนให้อยู่ในระดับที่ยอมได้ตลอดเวลา ซึ่งกระบวนการประมาณค่าแต่ละครั้ง สามารถอธิบายได้ด้วย Algorithm 2

Algorithm 2 RKM($x(t_n)$, $f(x,t)$, h, ϵ)

Require: $x(t_n)$: base value of $x(t)$ at n^{th} iteration;
Require: $f(x,t)$: ODE Funtion of $\dot{x}(t)$;
Require: h : iteration stepsize;
Require: ϵ : acceptable error threshold;

{ODE : $\dot{x}(t) = f(x,t)$}
repeat
  $k_1 = hf(x(t_n), t_n)$;
  $k_2 = hf(x(t_n) + \frac{k_1}{3}, t_n + \frac{h}{3})$;
  $k_3 = hf(x(t_n) + \frac{k_1+k_2}{6}, t_n + \frac{h}{3})$;
  $k_4 = hf(x(t_n) + \frac{k_1+3k_3}{8}, t_n + \frac{h}{2})$;
  $x_e = x(t_n) + \frac{k_1-3k_3+4k_4}{2}$;
  $k_5 = hf(x_e, t_n + h)$;
  $x(t_n + h) = x(t_n) + \frac{k_1+4k_4+k_5}{6}$;
  $Err = \frac{x_e - x(t_n+h)}{5}$;
  if $|Err| \geq \epsilon$ **then**
    $newH = \frac{h}{2}$; {Decrease iteration stepsize}
    $h = newH$;
  end if
until $|Err| < \epsilon$
{ Increase "next" stepsize if $Err < \frac{\epsilon}{64}$ }
if $|Err| < \frac{\epsilon}{64}$ **then**
  $nextH = 2h$;
end if

Return $[x(t_n + h), nextH, Err]$;

ทั้งนี้ ค่าที่ได้คืนมาจาก Algorithm 2 นั้น ประกอบไปด้วย

- $x(t_n + h)$: ผลลัพธ์ของการประมาณค่า
- $nextH$: ขนาดของช่วงระยะห่างในการประมาณค่า (iteration step) ที่เหมาะสมสำหรับการประมาณค่าครั้งถัดไป
- Err : ค่าความคลาดเคลื่อนของการประมาณค่าครั้งปัจจุบัน

ซึ่งโดยการประมวลผลเริ่มจากที่เวลา $t = 0$ ไปเรื่อยๆ ผลที่ได้ก็คือผลลัพธ์ที่สนามแรงกระทำต่อวัตถุนั่นเอง ทั้งนี้ เวลาที่ใช้ในการประมวลผล ตลอดจนช่วงเวลาสำหรับแต่ละ Iteration ตอนเริ่มต้น รวมถึงค่า

ระดับความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้นั้น จะถูกกำหนดด้วย Command-Line Parameter ซึ่งมีรายละเอียดดังในตาราง 3.4 ทั้งนี้ โปรแกรมจะประมวลผลไปเรื่อยๆ จนกระทั่งถึงเวลาสิ้นสุด หรือจนกว่าวัตถุอยุดนิ่งและเข้าสู่สมดุลย์ตามเงื่อนไขในสมการ (2.14)-(2.17)

ตารางที่ 3.4: รูปแบบ Command-Line สำหรับพารามิเตอร์ควบคุมการคำนวณเชิงเวลา

Command	**คำอธิบาย**
$-ti < time >$	เวลาเริ่มต้น
$-tl < time >$	เวลาสิ้นสุด
$-ts < time >$	ช่วงเวลาสำหรับแต่ละ iteration ตอนเริ่มต้น
$-to < time >$	ช่วงเวลาสำหรับเก็บข้อมูลโดยละเอียด (ดูหัวข้อ 3.5)

3.5 รูปแบบของผลลัพธ์ที่ได้จากส่วนประมวลผล

ผลลัพธ์จากส่วนประมวลผลในโปรแกรมเดิมนั้น ใช้เป็นเพียงข้อมูลป้อนให้กับส่วนแสดงผล (Play-back) เพียงเท่านั้น ซึ่งจะประกอบไปด้วย

- ส่วนแรก จะเป็นข้อมูลของวัตถุ ซึ่งมีลักษณะเดียวกับข้อมูลวัตถุในหัวข้อ 3.2.1
- ส่วนถัดมา จะเป็นข้อมูล configuration ของวัตถุที่เวลาต่างๆ โดยในแต่ละบรรทัดจะประกอบไปด้วย

$$< t > \;\; < x(t) > \;\; < y(t) > \;\; < \theta(t) >$$

  ซึ่งจะบันทึกทุกๆ Iteration ของการคำนวณเชิงเวลา โดยบรรทัดสุดท้ายจะจบลงด้วย $t = -1$

- ส่วนสุดท้าย เป็นข้อมูลของตัวแปรสภาวะแวดล้อม และตัวพารามิเตอร์อื่นๆ ทำกำหนดให้แก่โปรแกรมส่วนประมวลผล

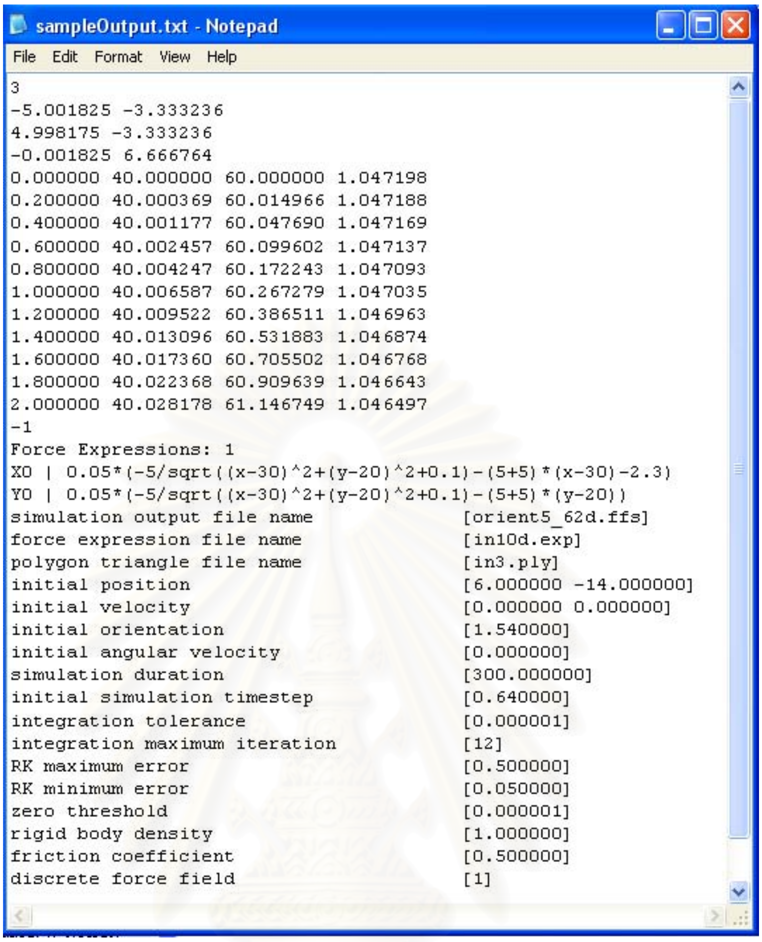
ซึ่งทั้งหมดจะถูกบันทึกลงในไฟล์ข้อความธรรมดา ดังตัวอย่างผลลัพธ์ในรูป 3.10 เป็นต้น

อย่างไรก็ตาม ในการปรับปรุงโปรแกรมขึ้นใหม่นั้น เพื่อการวิเคราะห์พฤติกรรมของวัตถุภายใต้สนามแรงโดยละเอียดยิ่งขึ้น จึงได้เพิ่มการบันทึกผลลัพธ์ลงในอีกไฟล์หนึ่งต่างหากจากไฟล์ผลลัพธ์รูปแบบเดิม ซึ่งข้อมูลแต่ละบรรทัดจะมีรูปแบบเป็น

$$< t >< x(t) >< y(t) >< \theta(t) >< v_x(t) >< v_y(t) >< \omega(t) >< F_x(t) >< F_y(t) >< T(t) >< U(t) >$$

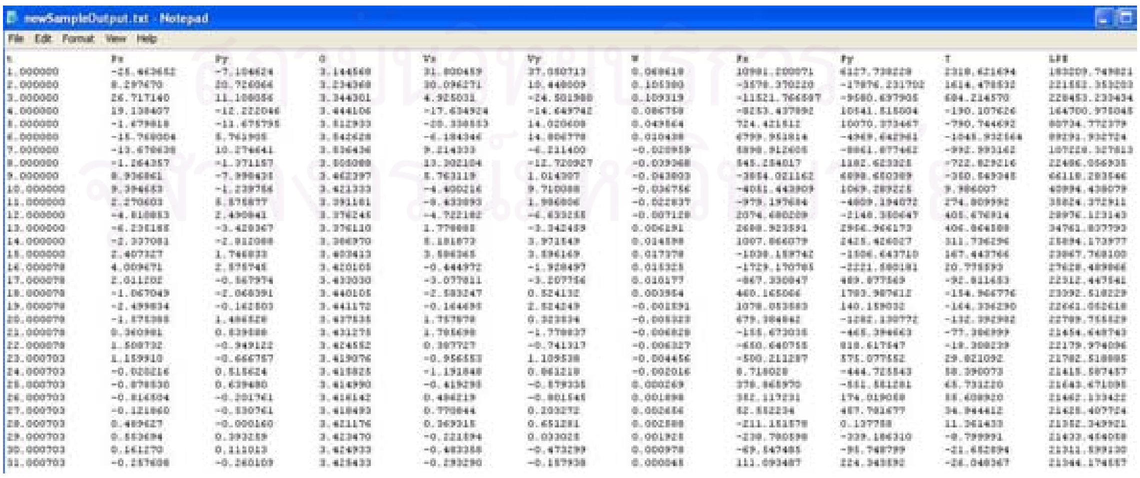
ทั้งนี้ ข้อมูลผลลัพธ์โดยละเอียดดังกล่าว ไม่ได้บันทึกในทุก Iteration เหมือนผลลัพธ์แบบเดิมเนื่องจากปริมาณข้อมูลจะมีมากเกินไป โดยจะบันทึกทุกๆ ช่วงที่เวลาผ่านไปมากกว่าเวลาที่กำหนดไว้ด้วยพารามิเตอร์ $-to$ ที่กล่าวถึงในหัวข้อที่ผ่านมา

ตัวอย่างผลลัพธ์โดยละเอียดที่สร้างขึ้นใหม่นี้ เป็นดังรูปที่ 3.11




```
3
-5.001825 -3.333236
4.998175 -3.333236
-0.001825 6.666764
0.000000 40.000000 60.000000 1.047198
0.200000 40.000369 60.014966 1.047188
0.400000 40.001177 60.047690 1.047169
0.600000 40.002457 60.099602 1.047137
0.800000 40.004247 60.172243 1.047093
1.000000 40.006587 60.267279 1.047035
1.200000 40.009522 60.386511 1.046963
1.400000 40.013096 60.531883 1.046874
1.600000 40.017360 60.705502 1.046768
1.800000 40.022368 60.909639 1.046643
2.000000 40.028178 61.146749 1.046497
-1
Force Expressions: 1
X0 | 0.05*(-5/sqrt((x-30)^2+(y-20)^2+0.1)-(5+5)*(x-30)-2.3)
Y0 | 0.05*(-5/sqrt((x-30)^2+(y-20)^2+0.1)-(5+5)*(y-20))
simulation output file name          [orient5_62d.ffs]
force expression file name           [in10d.exp]
polygon triangle file name           [in3.ply]
initial position                     [6.000000 -14.000000]
initial velocity                     [0.000000 0.000000]
initial orientation                  [1.540000]
initial angular velocity             [0.000000]
simulation duration                  [300.000000]
initial simulation timestep          [0.640000]
integration tolerance                [0.000001]
integration maximum iteration        [12]
RK maximum error                     [0.500000]
RK minimum error                     [0.050000]
zero threshold                       [0.000001]
rigid body density                   [1.000000]
friction coefficient                 [0.500000]
discrete force field                 [1]
```

รูปที่ 3.10: ตัวอย่างผลลัพธ์จากโปรแกรมจำลองสถานการณ์ตัวเดิม



t	Px	Py	O	Vx	Vy	W	Fx	Fy	T	LFE
1.000000	-25.463652	-7.106624	3.144560	31.800459	37.050713	0.069619	10981.200071	6127.738229	2318.621694	183209.749821
2.000000	8.297670	20.726064	3.234360	30.096271	10.448009	0.105300	-3578.370220	-17876.231702	1614.478532	221552.353203
3.000000	26.717140	11.108056	3.344301	4.925031	-24.501980	0.109319	-11521.766587	-9580.697905	604.214570	228453.233434
4.000000	19.138407	-12.222046	3.444106	-17.634924	-14.649742	0.086758	-8253.437892	10541.515004	-190.107626	164700.975045
5.000000	-1.479818	-13.675795	3.512933	-20.338553	14.020608	0.049564	724.421512	10070.373467	-790.744692	80734.772379
6.000000	-15.760004	5.761905	3.542628	-6.184346	14.806778	0.010438	6799.951814	-4969.642961	-1045.932564	89291.932724
7.000000	-13.670638	10.276641	3.536436	9.214333	-6.211400	-0.020959	5898.912605	-8861.077462	-992.993142	107228.327813
8.000000	-1.264357	-1.371157	3.500088	13.302104	-12.720927	-0.039368	545.254017	1182.623325	-722.829216	22486.056935
9.000000	8.936861	-7.990635	3.462397	5.763119	1.014307	-0.043803	-3854.021162	6898.650389	-350.549345	66118.283546
10.000000	9.394653	-1.239756	3.421333	-4.400216	9.710088	-0.036756	-4051.443909	1069.289225	9.986007	40994.438079
11.000000	2.270603	5.575877	3.391161	-8.433893	1.996806	-0.022837	-979.197684	-4809.194072	274.809992	35824.372911
12.000000	-4.810853	2.490841	3.376245	-4.722182	-6.633255	-0.007128	2074.680209	-2148.350647	405.676914	29976.123143
13.000000	-6.235185	-3.420367	3.376110	1.770085	-3.342459	0.006191	2688.923591	2956.966173	406.864508	34761.837793
14.000000	-2.337081	-2.812088	3.386970	5.181873	3.971549	0.014598	1007.866079	2425.426027	311.736296	25894.173977
15.000000	2.407327	1.766833	3.403413	3.586365	3.596169	0.017378	-1038.159742	-1506.643710	167.443766	23067.768100
16.000078	4.009671	2.575745	3.420105	-0.444972	-1.928497	0.015325	-1729.170785	-2221.580181	20.775593	27628.489866
17.000078	2.011202	-0.567974	3.433030	-3.077811	-3.207756	0.010177	-867.330047	489.877569	-92.811453	22512.447541
18.000078	-1.067043	-2.068391	3.440105	-2.583247	0.524132	0.003954	460.165066	1783.987612	-154.966776	23092.518229
19.000078	-2.499834	-0.162503	3.441172	-0.164493	2.524249	-0.001591	1078.053583	140.159032	-164.336290	22641.052618
20.000078	-1.375388	1.486528	3.437535	1.757878	0.323834	-0.005323	679.384862	-1282.130772	-132.392982	22789.755529
21.000078	0.360981	0.839588	3.431275	1.785698	-1.778837	-0.006828	-155.673035	-465.396663	-77.386899	21454.648763
22.000078	1.508732	-0.949122	3.424552	0.387727	-0.741317	-0.006327	-650.640755	818.617547	-18.308239	22179.974096
23.000703	1.159910	-0.666757	3.419076	-0.956553	1.109538	-0.004456	-500.211287	575.077552	29.821092	21782.518885
24.000703	-0.020216	0.515624	3.415825	-1.191848	0.061218	-0.002016	8.718028	-444.725543	58.390073	21415.587457
25.000703	-0.878530	0.639480	3.414990	-0.419298	-0.879335	0.000269	378.865970	-551.551281	65.731220	21643.671095
26.000703	-0.814504	-0.201761	3.416142	0.486219	-0.801546	0.001898	352.117231	174.019058	55.408920	21462.133422
27.000703	-0.121860	-0.530761	3.418493	0.770844	0.203272	0.002656	52.552234	457.701677	34.944412	21425.407724
28.000703	0.489627	-0.000160	3.421176	0.369315	0.651281	0.002588	-211.151578	0.137758	11.361433	21352.349921
29.000703	0.553694	0.393259	3.423470	-0.221594	0.033025	0.001925	-238.780598	-339.186310	-8.799991	21433.454058
30.000703	0.161270	0.111013	3.424933	-0.483358	-0.473299	0.000978	-69.547485	-95.748799	-21.652894	21311.599130
31.000703	-0.257608	-0.260109	3.425433	-0.293290	-0.157938	0.000045	111.093487	224.345592	-26.048367	21344.174557

รูปที่ 3.11: ตัวอย่างผลลัพธ์ละเอียดจากโปรแกรมจำลองสถานการณ์ที่ปรับปรุงใหม่

บทที่ 4

การทดสอบคุณสมบัติของสนามแรงที่มีอยู่

จากงานวิจัยเกี่ยวกับสนามแรงที่กล่าวมาแล้วในบทที่ผ่านๆ มา เป็นที่น่าสังเกตว่า สนามแรงรูปแบบต่างๆ ที่ได้มีการนำเสนอมานั้น ผู้นำเสนอเน้นประเด็นความเป็นไปได้ในการทำให้วัตถุเข้าสู่ภาวะสมดุลเท่านั้น แต่ไม่ได้กล่าวถึงคุณสมบัติอื่นๆ ถ้าหากมีการนำสนามแรงไปใช้งาน เช่น ระยะเวลาที่วัตถุใช้ในการเคลื่อนที่เข้าสู่ภาวะสมดุล เป็นต้น ทั้งนี้ เหตุผลส่วนหนึ่งน่าจะเป็นเพราะการที่ยังไม่สามารถสร้างเครื่องมือที่สามารถสร้างสนามแรงได้ตามที่ออกแบบ เพื่อทำการทดสอบการจัดวัตถุจริงๆ ก็เป็นได้

ด้วยเหตุผลดังกล่าวนี้ วิทยานิพนธ์นี้จึงได้ทำการทดสอบประสิทธิภาพการจัดวัตถุด้วยสนามแรงรูปแบบต่างๆ ดังกล่าว โดยใช้โปรแกรมจำลองสถานการณ์ที่ได้พัฒนาขึ้น (ตามที่ได้อธิบายในรายละเอียดไปแล้วในบทที่ผ่านมา) ทั้งนี้ การทดสอบจะกระทำใน 2 แนวทาง คือ

- การทดสอบในแง่ของ configuration ที่เป็นไปได้ที่ภาวะสมดุล ว่าเป็นไปตามทฤษฎีของแต่ละสนามแรงหรือไม่ประการใด
- การทดสอบในแง่ของเวลาที่แต่ละสนามแรงใช้ในการจัดวัตถุจนเข้าสู่ภาวะสมดุล ว่าใช้เวลามากน้อยเพียงใด

4.1 ข้อมูลวัตถุและภาวะแวดล้อมสำหรับการทดสอบสนามแรง

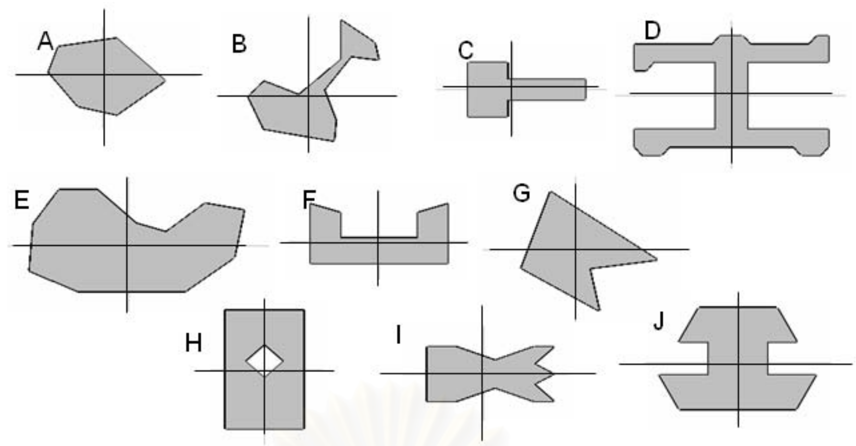
ในการทดสอบ เราได้เลือกเอาสนามแรงที่มีรูปแบบของภาวะสมดุลที่มีเสถียรภาพเป็นจำนวนคงที่ไม่ขึ้นกับวัตถุ ซึ่งมีอยู่ 3 รูปแบบ คือ

- Elliptic Field
- Unit Radial & Constant Field
- Unit Radial, Radial & Constant Field

โดยจะทำการทดสอบกับวัตถุหลายๆ รูปแบบ ดังที่เห็นในรูปที่ 4.1 ซึ่งวัตถุแต่ละชิ้นมีขนาดอยู่ในกรอบขนาด 20×20 ตารางหน่วย (ในขณะที่พื้นที่ของระนาบสนามแรง มีขนาด 200×200 ตารางหน่วย)

อนึ่ง ในส่วนของค่าตัวแปรภาวะแวดล้อมต่างๆ นั้น ก็ได้ทำการตั้งค่าภาวะแวดล้อมให้เป็นอย่างเดียวกันตลอดทุกการทดสอบ กล่าวคือ ให้ค่าความหนาแน่นของวัตถุต่อพื้นที่เป็น 0.1 และมีค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานใน Viscous Model เป็น 0.05 สำหรับการทดสอบกับทุกสนามแรง เพื่อให้สามารถเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการทดสอบระหว่างแต่ละสนามแรงได้โดยตรง

นอกจากนี้ ในการทดสอบแต่ละครั้งนั้น ค่า configuration เริ่มต้นของวัตถุ จะได้มาจากการสุ่มค่าตำแหน่งและทิศทางภายในระนาบสนามแรง ให้มีค่าต่างๆ กันไปหลายๆ ครั้ง เพื่อให้ได้ configu-



รูปที่ 4.1: วัตถุตัวอย่างที่ใช้ในการทดสอบสนามแรง

ration เริ่มต้นที่กระจายตัวอยู่ทั่วระนาบสนามแรง แล้วจึงนำผลที่ได้จากการทดสอบเหล่านั้นมาวิเคราะห์ประสิทธิภาพของสนามแรง เพื่อให้ผลที่ได้น่าเชื่อถือและเป็นจริงสำหรับกรณีทั่วไป

4.2 การทดสอบการจัดวัตถุด้วย Elliptic Field

4.2.1 การทดสอบในแง่ของ configuration ที่ภาวะสมดุลที่เป็นไปได้

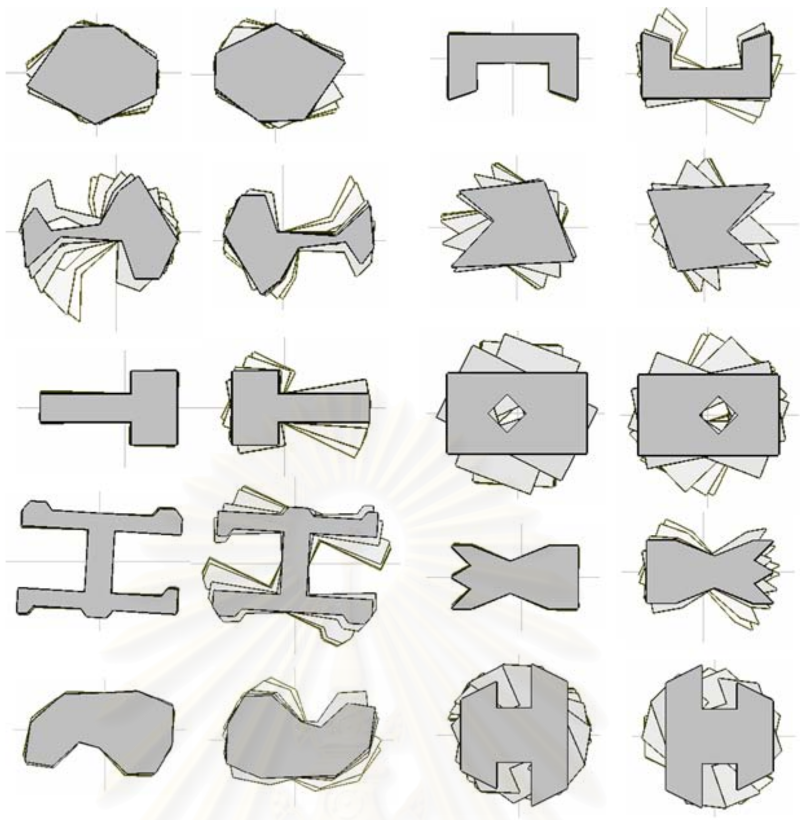
เราได้ทำการทดสอบจำลองสถานการณ์การจัดวัตถุด้วย Elliptic Field โดยในการทดสอบ ได้กำหนดค่าพารามิเตอร์ให้ $\xi = 1$ และ $\eta = 2$

ผลการทดสอบ พบว่า วัตถุสามารถเคลื่อนที่และหมุนเข้าสู่ configuration ที่ภาวะสมดุลได้ โดยตำแหน่งศูนย์กลางมวลของวัตถุจะอยู่ที่ศูนย์กลางของสนามแรง ทิศทางของวัตถุ ก็มีอยู่เพียง 2 ทิศทางสำหรับทุก วัตถุ ดังตัวอย่างในรูปที่ 4.2 นอกจากนี้ จากการทดสอบโดยการเปลี่ยนค่า ξ, η ไป ก็ไม่ส่งผลกระทบต่อทิศทางของ configuration ที่เข้าสู่ภาวะสมดุลของวัตถุแต่อย่างใด (ตราบเท่าที่ $\xi < \eta$ สำหรับกรณีนี้) ตรงตามที่ได้มีการนำเสนอไว้ใน [9]

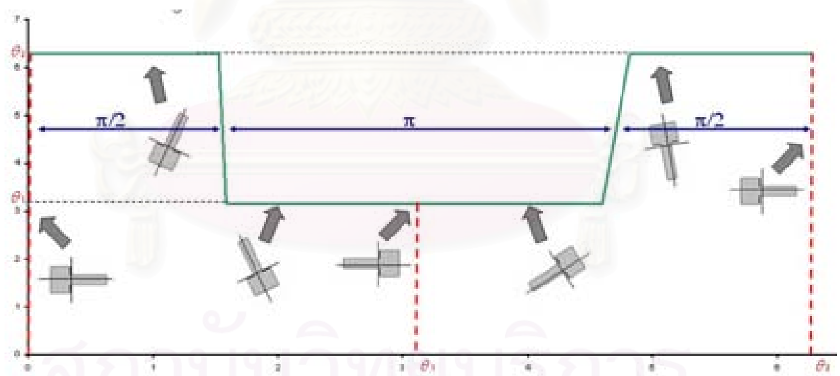
นอกจากนี้ จากการทดสอบยังพบลักษณะที่น่าสนใจอย่างยิ่ง กล่าวคือ ทิศทางที่เป็นไปได้ทั้ง 2 ทิศทางของแต่ละวัตถุ ซึ่งไม่อาจทำนายได้ว่าวัตถุจะเลือกเข้าสู่ภาวะสมดุลแบบใดนั้น มีแนวโน้มว่าจะมีความสัมพันธ์กับทิศทางของ configuration เริ่มต้นของวัตถุ ดังเช่นตัวอย่างในรูปที่ 4.3 ซึ่งเป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ของทิศทางของ confguration เริ่มต้น กับทิศทางของ configuration ที่ภาวะสมดุลของวัตถุตัวอย่าง C จะเห็นว่า **วัตถุจะเลือกเข้าสู่ configruation ที่ภาวะสมดุลที่มีทิศทาง "ใกล้เคียง" กับทิศทางตอนเริ่มต้นเสมอ** ทั้งนี้ ในกรณีของวัตถุอื่นๆ ก็ให้กราฟในลักษณะเดียวกัน ซึ่งคุณลักษณะนี้ จะถูกนำไปวิเคราะห์และเป็นส่วนสำคัญในการออกแบบชุดสนามแรงใหม่ในบทถัดไป

4.2.2 การทดสอบในแง่ของ configuration ที่ภาวะสมดุลที่เป็นไปได้

จากการทดสอบโดยการสุ่ม configuration เริ่มต้นสำหรับการจัดวัตถุต่างๆ ทั้ง 10 รูปแบบดังกล่าวข้างต้น เมื่อทำการวัดค่าเวลาที่ใช้ในการจัดวัตถุตั้งแต่เริ่มต้นจนวัตถุหยุดที่ภาวะสมดุลจากการทดสอบใน



รูปที่ 4.2: ผลการทดสอบการจัดวัตถุด้วย Elliptic Field



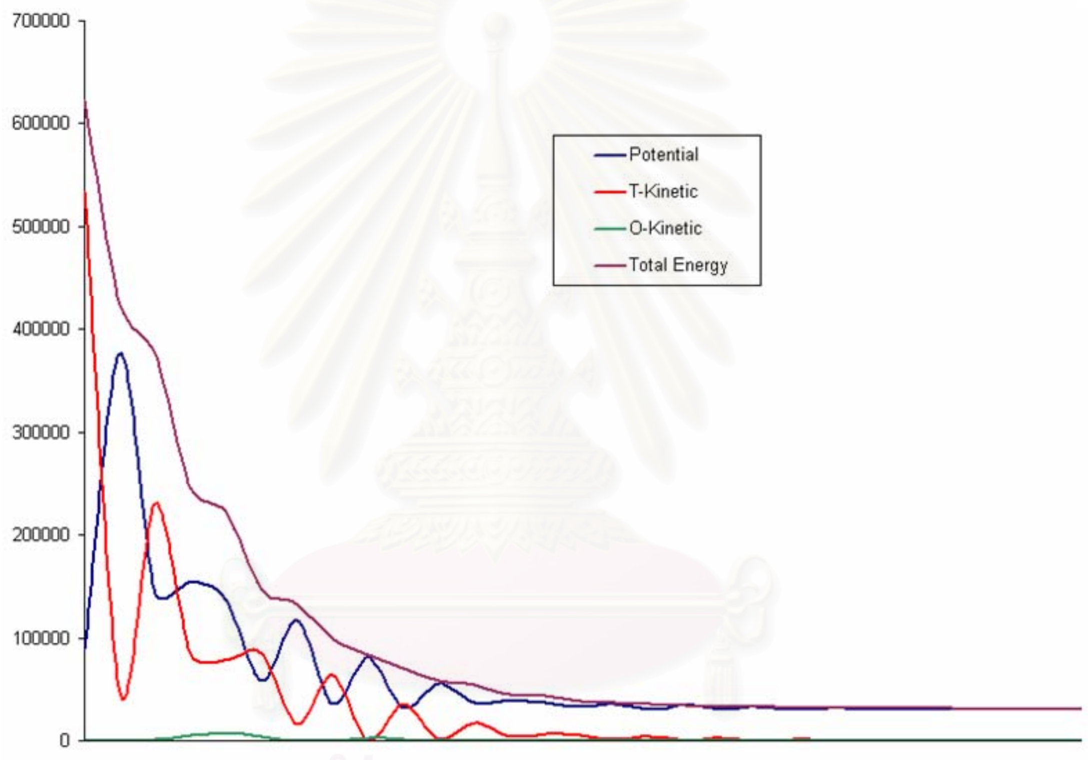
รูปที่ 4.3: กราฟความสัมพันธ์ระหว่างทิศทาง ณ ตอนเริ่มต้น กับทิศทางที่ภาวะสมดุลของวัตถุ ภายใต้ Elliptic Field

แต่ละครั้ง แล้วหาค่าเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการจัดวัตถุแต่ละรูปแบบ ก็จะได้ผลดังที่ปรากฏในตาราง 4.1

นอกจากนี้ เมื่อลองพิจารณาจากกราฟการเปลี่ยนแปลงพลังงานของวัตถุภายใต้ Unit Radial & Constant Field ดังตัวอย่างในรูปที่ 4.4 แล้ว จะเห็นว่าพลังงานกลรวมของวัตถุจะมีค่าลดลงเรื่อยๆ ตามเวลา จนกระทั่งมีค่าต่ำสุด ณ ค่าคงที่ค่าหนึ่งที่ไม่เป็น 0 ซึ่งค่าดังกล่าวก็คือ ค่าของพลังศักย์ของวัตถุที่คำนวณได้จาก Lifted Potiential Function เมื่อวัตถุอยู่ ณ configuration ที่ภาวะสมดุลภายใต้ Elliptic Field นั่นเอง

ตารางที่ 4.1: เวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการจัดวัตถุแต่ละรูปแบบด้วย Elliptic Field

วัตถุ	เวลาที่ใช้เฉลี่ย (s)	S.D.
A	75.608	0.749
B	84.553	1.062
C	71.190	0.730
D	73.098	0.737
E	82.242	1.046
F	89.685	0.225
G	76.416	0.475
H	98.977	0.264
I	79.936	0.456
J	95.159	0.291



รูปที่ 4.4: ตัวอย่างกราฟพลังงานของวัตถุตามเวลา เมื่อวัตถุอยู่ภายใต้ Elliptic Field

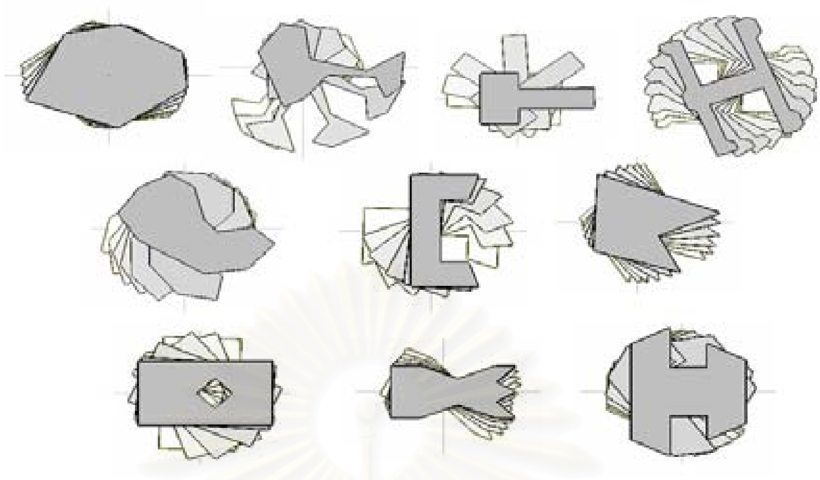
4.3 การทดสอบการจัดวัตถุด้วย Unit Radial & Constant Field

4.3.1 การทดสอบในแง่ของ configuration ที่ภาวะสมดุลที่เป็นไปได้

สำหรับการทดสอบการจัดวัตถุด้วย Unit Radial & Constant Field นั้น เราได้ทำการทดสอบจำลองสถานการณ์โดยกำหนดค่า parameter สำหรับสนามแรงเป็น

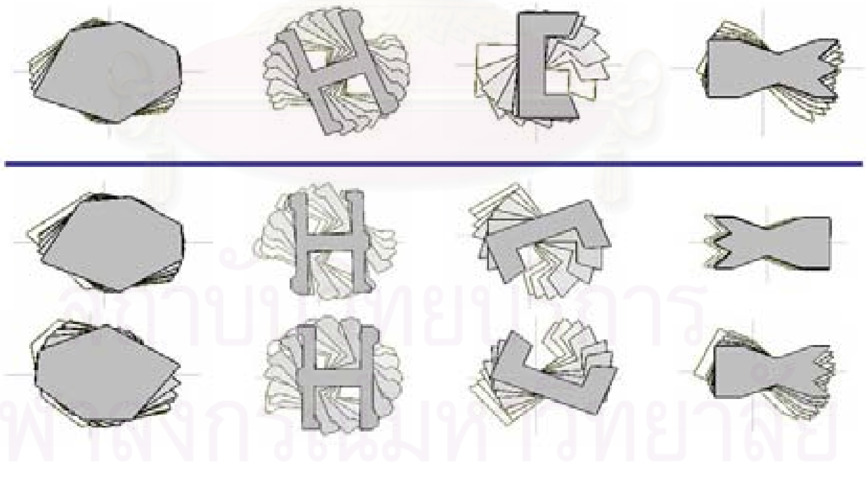
- ส่วน Unit Radial Field ให้ $h = 10.0$
- ส่วน Constant Field ให้ทิศทาง $\theta_c = 0$ ส่วนค่า c นั้น ทำการทดสอบ 2 ค่า คือ 0.2 และ 0.8

ผลการทดสอบพบว่า วัตถุสามารถเคลื่อนที่เข้าสู่ภาวะสมดุลได้ โดยทิศทางของวัตถุเมื่อเข้าสู่ภาวะสมดุลมีเพียงรูปแบบเดียว ดังตัวอย่างในรูปที่ 4.5 ซึ่งต่างจากกรณี Elliptic Field ที่เป็นไปได้ 2 รูปแบบ



รูปที่ 4.5: ผลการทดสอบการจัดวัตถุด้วย Unit Radial & Constant Field $(h = 10.0, c = 0.2, \theta_c = 0)$

อย่างไรก็ตาม ตำแหน่งที่วัตถุเข้าสู่ภาวะสมดุลนั้นไม่คงที่ และเปลี่ยนที่ไปตามค่าพารามิเตอร์ของสนามแรง โดยที่ไม่สามารถทำนายตำแหน่งที่แน่ชัดได้ นอกจากนี้ จากการทดสอบโดยการเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ c ของส่วน Constant Field เปลี่ยนไปเป็น $c = 0.8$ ทิศทางของ configuration ที่วัตถุหยุดเมื่อเข้าสู่สมดุลสำหรับบางวัตถุ กลับกลายเป็นมีมากกว่า 1 ทิศทาง และไม่สามารถทำนายได้อีกด้วยว่าจะเป็นรูปแบบใด ดังตัวอย่างในรูปที่ 4.6 ซึ่งตรงดังที่มีกล่าวเอาไว้ใน [11] อีกเช่นกัน



รูปที่ 4.6: ผลการทดสอบการจัดวัตถุด้วย Unit Radial & Constant Field ที่เปลี่ยนไป $(h = 10.0, c = 0.8, \theta_c = 0)$

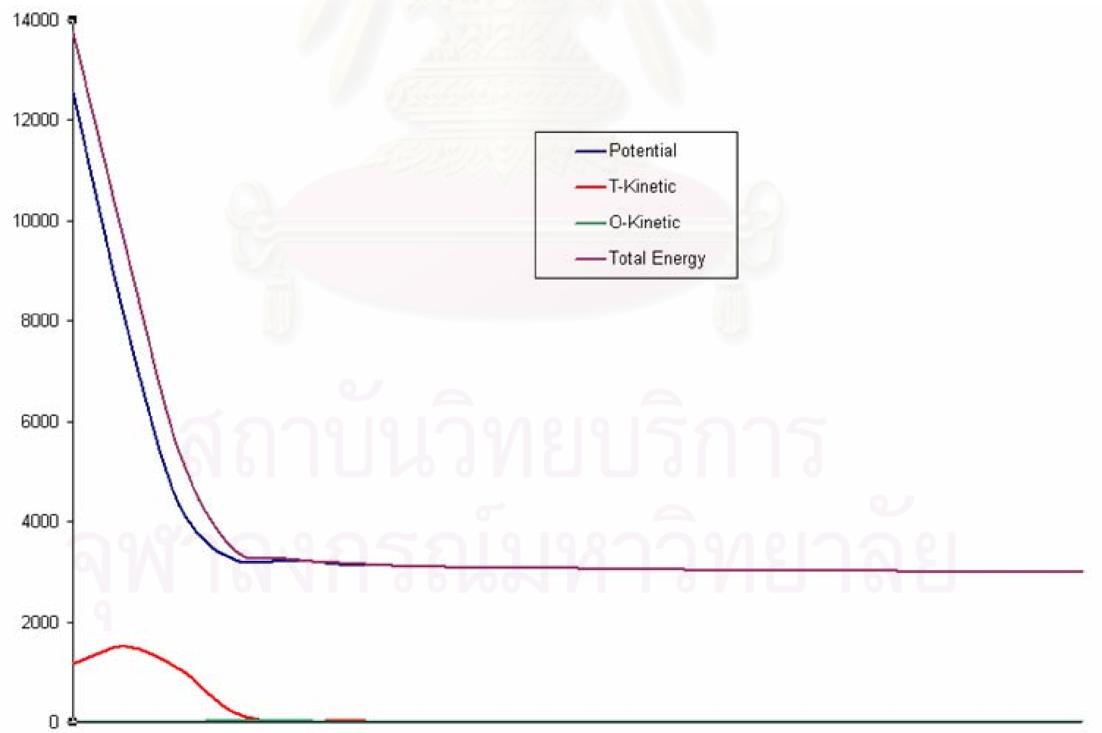
4.3.2 การทดสอบในแง่ของเวลาที่ใช้จัดวัตถุให้เข้าสู่ configuration ที่ภาวะสมดุล

ในส่วนของเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการจัดวัตถุแต่ละรูปแบบจากเริ่มต้นจนหยุดที่ภาวะสมดุลภายใต้ Unit Radial & Constant นั้น ได้ผลเป็นดังในตาราง 4.2 ซึ่งจะเห็นว่า เวลาที่ใช้สำหรับ Unit Radial & Constant Field นั้น มากกว่ากรณีของ Elliptic Field อย่างเห็นได้ชัด

ตารางที่ 4.2: เวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการจัดวัตถุแต่ละรูปแบบด้วย Unit Radial & Constant Field

วัตถุ	**เวลาที่ใช้เฉลี่ย** (s)	**S.D.**
A	1,847.745	7.064
B	749.635	5.461
C	651.305	3.476
D	1,770.233	5.338
E	1,682.016	5.249
F	1,678.976	5.660
G	1,857.253	6.189
H	1,221.110	6.713
I	1,914.158	4.973
J	2,241.891	6.662

ทั้งนี้ ถ้าหากลองพิจารณาจากกราฟการเปลี่ยนแปลงพลังงานของวัตถุภายใต้ Unit Radial & Constant Field ดังตัวอย่างในรูปที่ 4.7 แล้ว จะพบว่า ในช่วงเวลาที่วัตถุเปลี่ยนทิศทางจนเข้าสู่ทิศทางที่ภาวะสมดุลนั้น ระดับของพลังงานกลรวมมีการเปลี่ยนแปลงน้อยมาก เนื่องมาจากพลังงานศักย์ที่หาได้จาก L-itfed Potential Function เมื่อวัตถุอยู่ ณ configuration ต่างๆ ในช่วงเวลาดังกล่าวนั้น มีค่าต่างกันน้อยมากจนเกือบจะเท่ากัน (แม้จะมีค่าลดลงไปจนถึงจุดต่ำสุดเมื่อวัตถุอยู่ที่ configuration ที่ภาวะสมดุลก็ตาม) ทำให้อัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานลดต่ำลง ดังจะเห็นได้จากเส้นกราฟในช่วงทางขวามือที่เกือบจะเป็นเส้นตรงขนานกับแกนเวลา จึงทำให้ใช้เวลานานขึ้น



รูปที่ 4.7: ตัวอย่างกราฟพลังงานของวัตถุตามเวลา เมื่อวัตถุอยู่ภายใต้ Unit Radial & constant Field

4.4 การทดสอบการจัดวัตถุด้วย Unit Radial, Radial & Constant Field

4.4.1 การทดสอบในแง่ของ configuration ที่ภาวะสมดุลที่เป็นไปได้

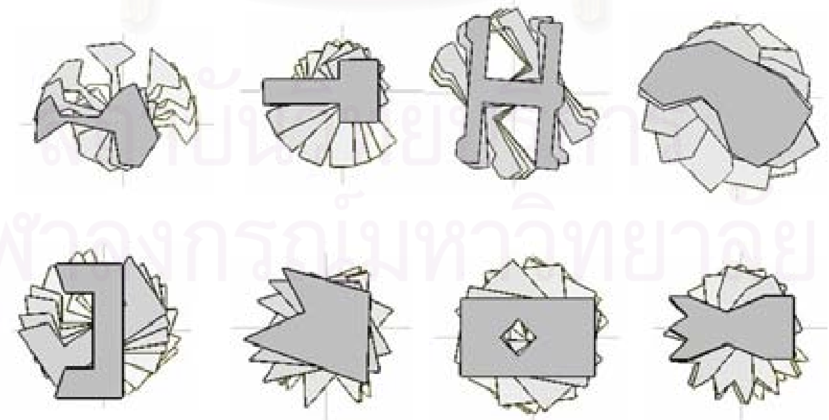
สำหรับการทดสอบการจัดวัตถุด้วย. Unit Radial, Radial & Constant Field นั้น เราได้เลือกกำหนดค่าพารามิเตอร์ เป็น

- ส่วน Unit Radial Field ให้ $h = 10.0$
- ส่วน Radail Field ให้ $k = 1.0$ และ $c = 0.01$
- ส่วน Constant Field นั้น มีค่า $k = 1.0, \theta_c = \pi$ และโดยการใช้ Algorithm 1 เราจะได้ว่า ค่า d ที่เหมาะสมสำหรับแต่ละวัตถุเป็นดังในตาราง 4.3

ตารางที่ 4.3: ค่า d ที่เหมาะสมกับแต่ละวัตถุ สำหรับ Unit Radial, Radial & Constant Field

วัตถุ	ค่าพารามิเตอร์ d
A	0.002247
B	0.180115
C	0.093725
D	0.009449
E	0.046696
F	0.096180
G	0.020532
H	0.034837
I	0.027775
J	0.000500

ผลการทดสอบ พบว่า วัตถุสามารถเคลื่อนที่เข้าสู่ configuration ที่ภาวะสมดุลได้ โดย configuration ดังกล่าวมีเพียงรูปแบบเดียวเสมอ ไม่ว่า configuration เริ่มต้นของวัตถุจะเป็นเช่นใด ดังตัวอย่างในรูป 4.8



รูปที่ 4.8: ตัวอย่างผลการทดสอบการจัดวัตถุด้วย Unit Radial, Radial & Constant Field

นอกจากนี้ เมื่อทำการทดสอบโดยการปรับค่าพารามิเตอร์ h, k, c ไปเรื่อยๆ ก็สามารถหาค่า d และ θ_c ใหม่จาก Algorithm 1 แล้วทำการทดสอบ วัตถุก็ยังคงเข้าสู่ configuration ที่ภาวะสมดุลเพียงรูปแบบเดียวในตำแหน่งและทิศทางที่ต้องการเสมอ ตรงตามที่พิสูจน์ไว้ใน [12]

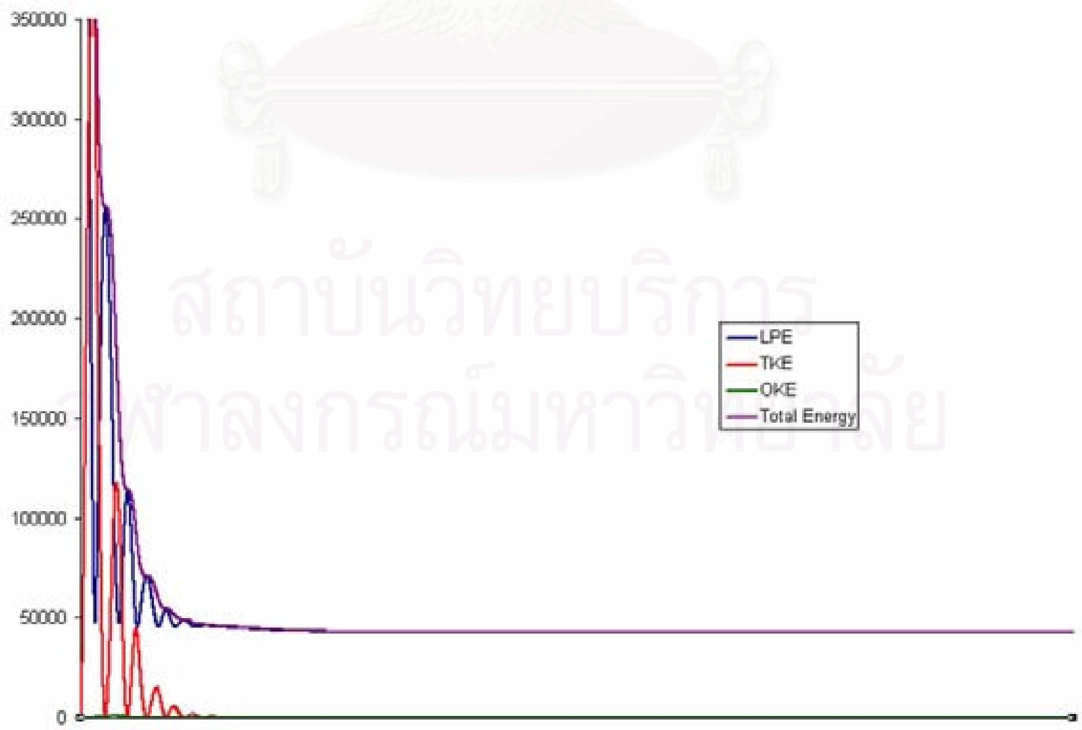
4.4.2 การทดสอบในแง่ของเวลาที่ใช้จัดวัตถุให้เข้าสู่ configuration ที่ภาวะสมดุล

ในส่วนของเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการจัดวัตถุแต่ละรูปแบบจากเริ่มต้นจนหยุดที่ภาวะสมดุลภายใต้ Unit Radial, Radial & Constant นั้น ได้ผลเป็นดังในตาราง 4.4 ซึ่งจะเห็นว่าค่าเวลาเฉลี่ยที่ได้นั้น มีค่ามากกว่ากรณีของ Elliptic Field หรือแม้แต่กรณีของ Unit Radial & Constant Field หลายสิบเท่าตัวเลยทีเดียว

ตารางที่ 4.4: เวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการจัดวัตถุแต่ละรูปแบบด้วย Unit Radial, Radial & Constant Field

วัตถุ	เวลาที่ใช้เฉลี่ย (s)
A	> 100,000.000
B	5,320.153
C	6,256.691
D	45,978.059
E	54,255.188
F	48,996.367
G	29,781.988
H	18,595.458
I	13,674.541
J	> 100,000.000

ทั้งนี้ ถ้าพิจารณาจากกราฟการเปลี่ยนแปลงพลังงานของวัตถุภายใต้ Unit Radial, Radial & Constant Field ดังตัวอย่างในรูปที่ 4.9 แล้ว ก็จะพบว่า มีลักษณะคล้ายคลึงกันกับกรณีของ Unit Radial & Constant Field กล่าวคือ ในช่วงเวลาที่วัตถุเปลี่ยนทิศทางจนเข้าสู่ทิศทางที่ภาวะสมดุลนั้น ระดับของพลังงานกลรวมมีค่าต่างกันน้อยมาก จึงทำให้ใช้เวลาในการเปลี่ยนแปลง configuration ของวัตถุจนถึง configuration ที่พลังงานต่ำสุด (ที่วัตถุเข้าสู่ภาวะสมดุล) นานมากนั่นเอง



รูปที่ 4.9: ตัวอย่างกราฟพลังงานของวัตถุ เมื่อวัตถุอยู่ภายใต้ Unit Radial, Radial & constant Field

บทที่ 5

การผสมผสานสนามแรงแบบใหม่

จากผลการทดลองการจำลองสถานการณ์การจัดวัตถุด้วยสนามแรงทั้งสามแบบในบทที่ผ่านมา พบว่า สนามแรงแต่ละรูปแบบ ต่างก็มีข้อดีและข้อด้อยในแต่ละด้านแตกต่างกันไป โดยสนามแรงที่มีข้อเด่นในเรื่องของ configuration ที่เป็นไปได้ที่วัตถุจะหยุดที่ภาวะสมดุลอย่าง Unit Radial, Radial & Constant Field นั้น กลับมีข้อด้อยอย่างรุนแรงในเรื่องของเวลาที่ใช้จัดวัตถุเข้าสู่ภาวะสมดุลที่นานเกินไป ในขณะที่สนามแรงที่ใช้เวลาน้อยกว่ามากอย่าง Elliptic Field ก็มีข้อด้อยเรื่อง configuration ที่เป็นไปได้ที่วัตถุจะหยุดที่ภาวะสมดุลที่มีมากกว่า 1 รูปแบบ (กล่าวให้ชัดเจนคือ 2 รูปแบบ) เป็นต้น

อนึ่ง การที่จะออกแบบสนามแรงรูปแบบใหม่แบบที่เป็นสนามแรงชุดเดียว แล้วจะให้มีประสิทธิภาพดีขึ้นในทุกๆ ด้านนั้น ก็เป็นเรื่องที่ยาก แนวทางที่น่าจะเหมาะสมกว่าที่จะพัฒนาให้ได้สนามแรงที่มีคุณสมบัติดีขึ้น คือ การผสมผสานการใช้งานสนามแรงที่มีอยู่แล้วหลายๆ ชุด โดยใช้วิธีการวิเคราะห์และเลือกใช้อย่างเหมาะสม เพื่อดึงข้อเด่นและลดข้อด้อยของสนามแรงแต่ละชุด และให้ได้ผลลัพธ์การจัดวัตถุที่ดีขึ้นกว่าการใช้สนามแรงชุดเดียวที่มีอยู่เดิมทั้งหมด ทั้งนี้ การออกแบบและใช้งานสนามแรงหลายๆ ชุดแบบใหม่ดังกล่าวจะต้องได้คุณสมบัติดังต่อไปนี้ คือ :

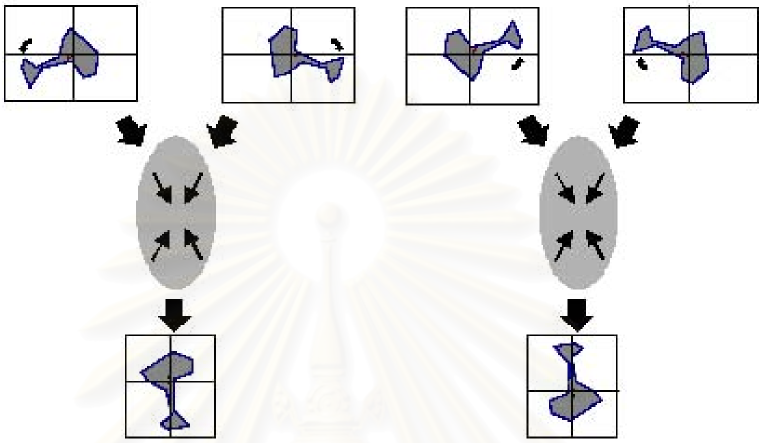
- configuration ที่เป็นไปได้ของวัตถุที่ภาวะสมดุล จะต้องมีเพียงรูปแบบเดียว และสามารถทำนายได้ล่วงหน้า เทียบเท่ากับในกรณีของ Unit Radial, Radial & Constant Field
- เวลาที่ใช้จัดวัตถุนับจากเริ่มต้นจนวัตถุหยุดที่ภาวะสมดุล จะต้องเร็วกว่ากรณีของ Unit Radial, Radial & Constant Field
- ตลอดการทำงานของการจัดวัตถุ จะต้อง**ไม่มีการไปตรวจจับ configuration ของวัตถุระหว่างการทำงาน** เพื่อเป็นข้อมูลป้อนกลับให้กับการจัดวัตถุโดยเด็ดขาด เทียบได้กับการจัดวัตถุด้วยสนามแรงแบบชุดเดียวทั่วไป

ในบทนี้ จะได้นำเสนอการออกแบบการใช้สนามแรงหลายๆ ชุดมาประกอบกันเพื่อจัดวัตถุ โดยยังสามารถคงคุณสมบัติข้างต้นไว้ได้ทั้งหมด โดยเริ่มจากแนวคิดในการเลือกสนามแรงที่จะนำมาใช้ ตลอดจนการวิเคราะห์การทำงานของสนามแรงใน แต่ละขั้นตอนจนสมบูรณ์

5.1 Algorithm การออกแบบการจัดวัตถุด้วยสนามแรงหลายชุดเบื้องต้น

สนามแรงที่น่าสนใจชุดหนึ่งที่เหมาะที่จะนำมาใช้ประกอบคือ Elliptic Field ซึ่งจากผลการทดลองในบทที่แล้วจะพบว่ามีข้อดีอยู่หลายจุด ทั้งในเรื่องของเวลาที่ใช้ในการจัดวัตถุจนหยุดนิ่งที่ภาวะสมดุลที่น้อยกว่ากรณีของ Unit Radial, Radial & Constant Field หลายเท่าตัว ตลอดจน configuration ที่เป็นไปได้ของวัตถุที่ภาวะสมดุล ซึ่งสามารถทำนายได้ล่วงหน้า แม้ว่าจะเป็นไปได้ 2 configurations โดยไม่อาจบอกได้ว่าจะเป็น configuration ใด แต่โดยคุณสมบัติที่ว่า ทั้ง 2 configurations นั้น จุดศูนย์กลางมวลของวัตถุจะอยู่ที่จุดศูนย์กลางของ Elliptic Field และทิศทางของทั้ง 2 configurations จะต่างกันอยู่ π เสมอ และจากการทดลองก็พบอีกว่า ทิศทางที่วัตถุหยุดที่ภาวะสมดุลนั้น มีความสัมพันธ์กับทิศทางเริ่มต้นของวัตถุ โดย

วัตถุจะเข้าสู่สมดุลที่ configuration ที่มีทิศทางใกล้เคียงกับทิศทางที่ configuration เริ่มต้นมากกว่า ซึ่งถ้าความสัมพันธ์ดังกล่าวนี้เป็นจริงในกรณีทั่วไปแล้ว (ซึ่งจะได้วิเคราะห์ในหัวข้อ 5.2 ต่อไป) ถ้าเราสามารถหาวิธีที่ใช้สนามแรงชุดอื่นจัดวัตถุมาก่อน แล้วสามารถรับประกันได้ว่า ก่อนจะใช้ Elliptic Field จัดวัตถุในขั้นตอนถัดไป ทิศทางของ configuration ของวัตถุในขณะนั้น ต่างกับทิศทางของ configuration ที่ภาวะสมดุลทิศทางหนึ่งเพียงทิศทางเดียวน้อยกว่า $\frac{\pi}{2}$ เสมอแล้ว (ดังตัวอย่างในรูปที่ 5.1) ผลจากการจัดวัตถุด้วย Elliptic Field นั้น ก็จะได้ configuration ที่วัตถุหยุดที่ภาวะสมดุลเพียง configuration เดียวในทันที อนึ่ง



รูปที่ 5.1: ผลการจัดวัตถุภายใต้ Elliptic Field ที่ทิศทางเริ่มต้นใกล้กับทิศทางที่ภาวะสมดุลด้านใดด้านหนึ่งด้วยผลจากสนามแรงชุดอื่น

การจะจัดวัตถุให้ได้ทิศทางของ configuration ของวัตถุก่อนใช้ Elliptic Field จัดต่อตามที่กล่าวไปข้างต้นนั้น อาจจะแบ่งออกเป็น 2 ขั้นตอนย่อย คือ

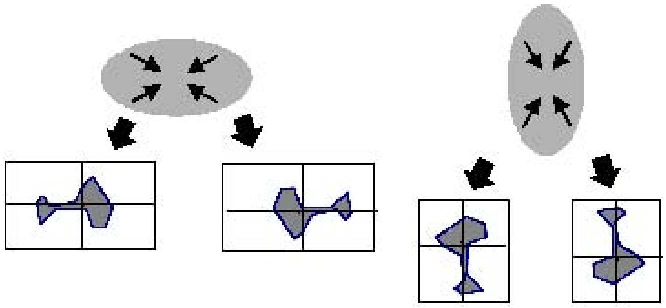
1. จัดวัตถุด้วยสนามแรงบางชุด ที่ทำให้ทิศทางของ configuration ของวัตถุที่ได้หลังการจัด อยู่กึ่งกลางระหว่างทิศทางของ configuration ที่ภาวะสมดุลภายใต้ Elliptic Field ในขั้นตอนท้ายสุด (นั่นคือห่างจากทิศทางทั้งสองอยู่ $\frac{\pi}{2}$ เท่ากันพอดี)
2. ใช้สนามแรงบางชุด **หมุน** วัตถุให้ทิศทางของวัตถุโน้มไปทางทิศทางหนึ่งในสองทิศทางของ configuration ที่ภาวะสมดุลภายใต้ Elliptic Field ในขั้นตอนท้ายสุดเพียงทิศทางเดียว

ซึ่งสำหรับขั้นตอนย่อยขั้นแรกนั้น ก็สามารถทำได้โดยใช้ Elliptic Field ชุดเดียวกันกับที่จะใช้ในขั้นตอนท้ายสุด เพียงแต่เปลี่ยนมุมของระนาบสนามแรงจากเดิมไป $\frac{\pi}{2}$ ซึ่งจะทำให้ทิศทางของ configuration ของวัตถุที่ภาวะสมดุลของ Elliptic Field ในขั้นแรกกับในขั้นท้ายสุด ทำมุมต่างกัน $\frac{\pi}{2}$ พอดี ดังตัวอย่างในรูปที่ 5.2

แนวคิดทั้งหมดข้างต้นนี้ สามารถอธิบายออกมาด้วย algorithm ดังนี้ (ดูรูปที่ 5.3 ประกอบ)

จุดที่สำคัญของ algorithm นี้ ซึ่งจำเป็นจะต้องทำการวิเคราะห์ให้ได้ คือ

- ความสัมพันธ์ของทิศทางที่ configuration เริ่มต้นกับ configuration ที่ภาวะสมดุลของวัตถุภายใต้ Elliptic Field ในกรณีทั่วไป (สำหรับ Step3)



รูปที่ 5.2: ตัวอย่างทิศทางที่ภาวะสมดุลภายใต้ Elliptic Field สองชุดที่มีทิศทางตั้งฉากกัน

Algorithm 3 FieldCombination(t_1, t_2, $Elliptic_1$, FF_2, $Elliptic_2$)

Require: t_1 : Cut-off time for Step1
Require: t_2 : Cut-off time for Step2
Require: $Elliptic_1$: Elliptic field configuration for Step1
Require: FF_2 : "Some" force field configuration for Step2
Require: $Elliptic_2$: Elliptic field configuration for Step3 (Must be **orthogonal** with $Elliptic_1$)

$t = 0$;
{STEP 1}
{Loop for Step1}
while $t < t_1$ **do**
  Execute Field $Elliptic_1$ on the plane;
end while

{STEP 2}
{Loop for Step2, start from $t \geq t_1$}
while $t < (t_1 + t_2)$ **do**
  Execute Field FF_2 on the plane;
end while

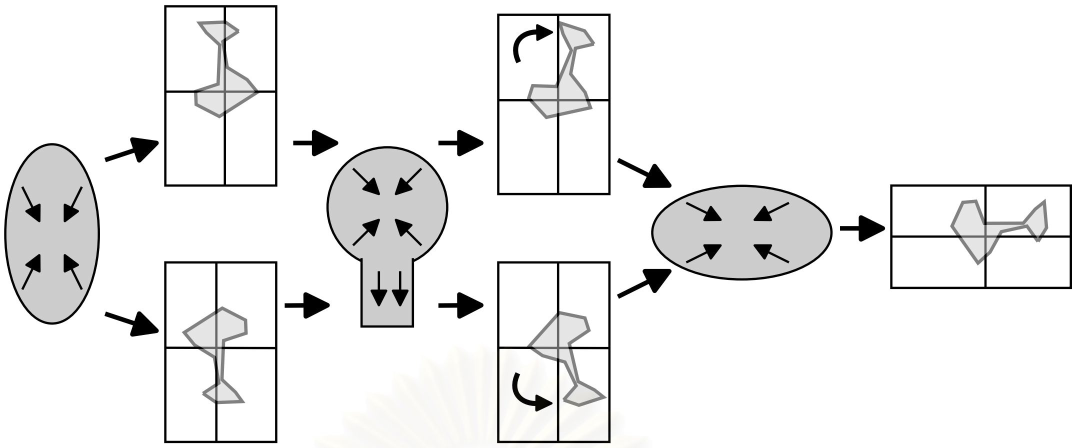
{STEP 3}
{Loop for Step3 (Last step), start from $t \geq (t_1 + t_2)$}
while $t \geq (t_1 + t_2)$ **do**
  Execute Field $Elliptic_2$ on the plane;
end while

- การหาค่าเวลา t_1 ที่รับประกันว่า วัตถุเข้าสู่ภาวะสมดุลภายใต้ Elliptic Field ใน Step1 แล้ว ไม่ว่าวัตถุจะมี configuration เริ่มต้นเป็นอย่างไรก็ตาม

- การเลือกสนามแรงที่จะใช้ใน Step2

- การหาค่าเวลา t_2 ที่รับประกันว่า วัตถุภายใต้การทำงานของสนามแรงใน Step2 วัตถุ **หมุน** โน้มไปในทิศทางเดียวแล้ว

ซึ่งเรื่องต่างๆ เหล่านี้ จะได้นำเสนอตามลำดับในหัวข้อถัดๆ ไป



รูปที่ 5.3: การจัดวัตถุด้วยสนามแรง 3 ชุด ตาม algorithm 3

5.2 ความสัมพันธ์ระหว่างทิศทางที่ configuration เริ่มต้น กับ configuration ที่ภาวะสมดุลของวัตถุ ภายใต้ Elliptic Field

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วว่า จากผลการทดลองในบทที่ผ่านมา พบว่า ทิศทางของ configuration ที่ภาวะสมดุลภายใต้ Elliptic Field นั้น ขึ้นอยู่กับทิศทางของ configuration เริ่มต้นของวัตถุ โดยถ้าทิศทางของ configuration เริ่มต้น ต่างจากทิศทางของ configuration ที่ภาวะสมดุลทิศทางใดน้อยกว่า $\frac{\pi}{2}$ แล้ว วัตถุจะเข้าสู่ภาวะสมดุลที่ configuration นั้น

อย่างไรก็ตาม การจะพิสูจน์ว่าคุณสมบัติที่ได้จากการทดลองดังกล่าวนี้ จะเป็นจริงในกรณีทั่วไปหรือไม่ จำเป็นจะต้องวิเคราะห์จากทอร์กลัพธ์เนื่องจาก Elliptic Field ว่ามีความสัมพันธ์กับทิศทางของ configuration ของวัตถุเทียบกับทิศทางของ configuration ที่ภาวะสมดุลอย่างไร

เราสามารถหาทอร์กลัพธ์ได้ตามสมการ (2.7) ดังนั้น ทอร์กลัพธ์เนื่องจาก Elliptic Field เมื่อวัตถุอยู่ที่ configuration (x_c, y_c, θ) จึงเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}(x_c, y_c, \theta) &= \int_P\int \begin{bmatrix} X_\theta \\ Y_\theta \end{bmatrix} \times \hat{\mathbf{F}}(X_\theta + x_c, Y_\theta + y_c)\,dX\,dY \qquad (5.1)\\
&= \int_P\int \begin{bmatrix} X_\theta \\ Y_\theta \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} -\xi X_\theta \\ -\eta Y_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\xi x_c \\ -\eta y_c \end{bmatrix} \right) dX\,dY \\
&= \int_P\int \begin{bmatrix} X_\theta \\ Y_\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\xi X_\theta \\ -\eta Y_\theta \end{bmatrix} dX\,dY - \eta y_c \int_P\int (X_\theta)\,dX\,dY + \xi x_c \int_P\int (Y_\theta)\,dX\,dY
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $(\int_P\int(X_\theta)dX\,dY, \int_P\int(Y_\theta)dX\,dY)$ ก็คือตำแหน่งของศูนย์กลางมวลของวัตถุในระนาบของวัตถุ ซึ่งก็คือ $(0,0)$ ทำให้ 2 พจน์หลังทางขวามือในสมการ (5.1) มีค่าเป็น 0 และสำหรับพจน์สุดท้ายที่เหลืออยู่นั้น ก็จะเห็นว่า ค่าของ x_c และ y_c ไม่ได้มีส่วนเกี่ยวข้องเลย สอดคล้องกับที่ Luntz et al.

นำเสนอใน [15] ที่ว่า ทอร์กลัพธ์เนื่องจาก Quardratic Field ใดๆ (Elliptic field ก็จัดเป็น Quadratic Field ประเภทหนึ่งตามนิยามใน [15] เช่นกัน) ไม่ขึ้นกับตำแหน่งของวัตถุบนสนามแรง ดังนั้น ถ้าให้ $T_E^*(\theta)$ แทนขนาดของ $\mathbf{T}(x, y, \theta)$ เมื่อ x, y มีค่าใดๆ แล้ว โดยการกระจายพจน์สุดท้ายที่เหลืออยู่ของสมการ (5.1) ด้วยการแทนค่า X_θ, Y_θ จากสมการ (2.1) ลงไปและจัดรูปใหม่ ก็จะได้ว่า

$$T_E^*(\theta) \quad = \quad (\xi - \eta)\left[\left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right)(s_{20} - s_{02}) + (\cos 2\theta)\, s_{11}\right] \tag{5.2}$$

โดยที่

$$s_{ij} \quad = \quad \int_P \int (X^i Y^j) dX\, dY \tag{5.3}$$

ทั้งนี้ พจน์ทางขวาสุดของ (5.2) เปรียบได้กับ dot product ของเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ คือ

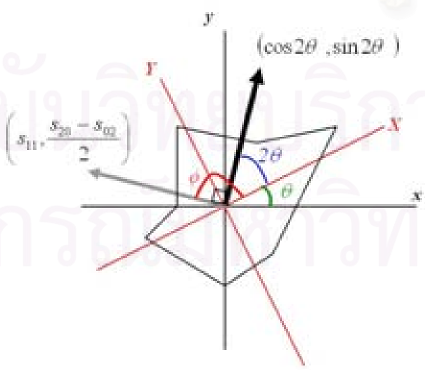
$$\begin{bmatrix} s_{11} \\ \frac{s_{20}-s_{02}}{2} \end{bmatrix} \quad and \quad \begin{bmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{bmatrix}$$

ซึ่งสามารถเขียนได้ในอีกรูปแบบหนึ่งเป็น

$$\left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right)(s_{20} - s_{02}) + (\cos 2\theta)\, s_{11} \quad = \quad \left\| \begin{array}{c} s_{11} \\ \frac{s_{20}-s_{02}}{2} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{array} \right\| \cos\varphi(\theta) \tag{5.4}$$

โดยที่ $\varphi(\theta)$ เป็นมุมระหว่าง 2 เวกเตอร์นั้น ถ้ากำหนดให้ ϕ เป็นมุมที่ เวกเตอร์ $(s_{11}, \frac{s_{20}-s_{02}}{2})$ ทำกับแกนของระนาบวัตถุ (ซึ่งมีค่าคงที่สำหรับแต่ละวัตถุ) ดังตัวอย่างในรูปที่ 5.4 ซึ่งจากรูป เราจะได้ว่า

$$\varphi(\theta) \quad = \quad \phi - 2\theta \tag{5.5}$$

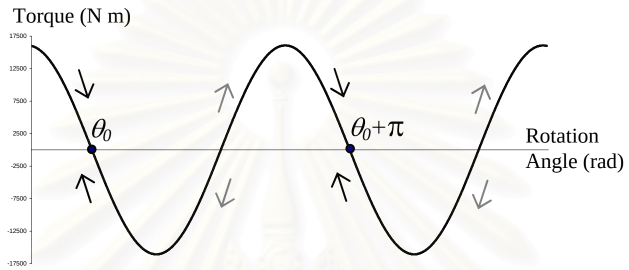


รูปที่ 5.4: ตัวอย่างการหาค่า $\varphi(\theta)$ ของวัตถุที่ configuration (x_c, y_c, θ)

แทนค่าจากสมการ (5.4), (5.5) ลงในสมการ (5.2) และเนื่องจาก $\|\cos 2\theta, \sin 2\theta\| = 1$ ซึ่งจะได้ว่า

$$T_E^*(\theta) \quad = \quad (\xi - \eta)\left\| \begin{array}{c} s_{11} \\ \frac{s_{20}-s_{02}}{2} \end{array} \right\| \cos(\phi - 2\theta) \tag{5.6}$$

จากสมการ (5.6) เราสามารถเขียนกราฟของ $T^*(\theta)$ สำหรับวัตถุใดๆ ได้ดังตัวอย่างในรูปที่ 5.5 ซึ่งจะเห็นว่า เมื่อ $\theta \in (0, 2\pi)$ มีค่า θ อยู่ 4 ค่าที่ให้ทอร์กลัพธ์เป็นศูนย์ สอดคล้องกับกรณีที่วัตถุมีสมมาตรไม่เกิน 1 สมมาตรใน [9] ซึ่งจะทำให้ค่าของ $\|s_{11}, \frac{s_{20}-s_{02}}{2}\|$ ไม่เป็น 0 ทั้งนี้ มีอยู่ 2 ค่าที่เป็นทิศทางของ configuration ที่วัตถุจะหยุดที่ภาวะสมดุลอย่างมีเสถียรภาพ ซึ่งจากในรูปก็คือ θ_0 และ $\theta_0 + \pi$ ส่วนในทิศทางอื่นๆ นั้น จากกราฟจะเห็นว่า ถ้า $\theta \in (\theta_0 - \frac{\pi}{2}, \theta_0 + \frac{\pi}{2})$ แล้ว ทอร์กลัพธ์ที่ได้จะมีทิศทาง**โน้มเข้าหา**ทิศทาง θ_0 เสมอ (ทอร์กลัพธ์เป็นลบ $=$ หมุนตามเข็มนาฬิกา, ทอร์กลัพธ์เป็นบวก $=$ หมุนทวนเข็มนาฬิกา) เช่นเดียวกับกรณีที่ $\theta \in (\theta_0 + \frac{\pi}{2}, \theta_0 + \frac{3\pi}{2})$ ที่ทอร์กลัพธ์จะมีทิศทาง**โน้มเข้าหา**ทิศทาง $\theta_0 + \pi$ เช่นกัน



รูปที่ 5.5: ตัวอย่างกราฟของทอร์กลัพธ์สำหรับวัตถุใดๆ ภายใต้ Elliptic Field

ดังนั้น จากผลการวิเคราะห์ที่ได้นี้ ทอร์กลัพธ์เนื่องจาก Elliptic Field จะทำให้วัตถุหมุนโน้มไปยังทิศทางของ Configuration ที่ภาวะสมดุลที่มีค่าใกล้เคียงกับทิศทางของ Configuration เริ่มต้นกว่าเสมอ ดังนั้น ถ้าเราสามารถกำหนดทิศทางของ Configuration เริ่มต้นของวัตถุสำหรับการจัดวัตถุด้วย Elliptic Field ใน Step3 ของ Algorithm 3 ให้อยู่ในทิศทางที่ใกล้กับทิศทางที่ Configuration ที่ภาวะสมดุลทิศทางหนึ่งแล้ว วัตถุย่อมเข้าสู่สมดุล ณ Configuration ที่ภาวะสมดุลทิศทางนั้นแน่นอน

5.3 เวลาที่ใช้ในการจัดวัตถุ โดยใช้ Elliptic Field

ในการจัดวัตถุด้วย Elliptic Field ใน Step1 ของ Algorithm 3 นั้น ปัจจัยที่สำคัญที่สุดคือ เวลาที่ใช้ในการจัดวัตถุ จาก configuration เริ่มต้น จนกระทั่งวัตถุหยุดที่ configuration ที่ภาวะสมดุล โดยที่ต้องรักษาคุณสมบัติในการที่จะ**ไม่ไปตรวจจับว่าวัตถุหยุดที่ภาวะสมดุลแล้วหรือไม่** จึงต้องหาวิธีทำนายเวลาที่ครอบคลุมสำหรับทุก configuration เริ่มต้นที่เป็นไปได้ โดยใน 2 หัวข้อย่อยถัดจากนี้ไป จะทำการวิเคราะห์เวลาที่ต้องใช้สำหรับ Elliptic Field ใน Step1 สำหรับ Algorithm 3 ดังกล่าว โดยแยกเป็นการวิเคราะห์การเคลื่อนที่และการหมุนแยกจากกันตามลำดับ

5.3.1 เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ของวัตถุ

เช่นเดียวกับการหาทอร์กลัพธ์เมื่อวัตถุอยู่ที่ configuration (x_c, y_c, θ) เราสามารถหาแรงลัพธ์ตามสมการ (2.7) เนื่องจาก Elliptic Field ได้เป็น

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x_c, y_c, \theta) &= \int_P \int \hat{\mathbf{F}}(X_\theta + x_c, Y_\theta + y_c) dX\,dY \qquad (5.7) \\ \begin{bmatrix} F_x(x_c, y_c, \theta) \\ F_y(x_c, y_c, \theta) \end{bmatrix} &= \int_P \int \begin{bmatrix} -\xi(X_\theta + x_c) \\ -\eta(Y_\theta + y_c) \end{bmatrix} dX\,dY \end{aligned}$$

โดยการกระจายพจน์ลงไป จะได้ว่า

$$F_x(x_c, y_c, \theta) = -\xi \int_P \int X_\theta dX\,dY - \xi x_c \int_P \int dX\,dY \qquad (5.8)$$

$$F_x(x_c, y_c, \theta) = -\eta \int_P \int Y_\theta dX\,dY - \eta y_c \int_P \int dX\,dY \qquad (5.9)$$

ซึ่งจะเห็นว่า พจน์แรกทางขวามือของสมการ (5.8),(5.9) มีค่าเป็น 0 ด้วยเหตุผลเดียวกับที่อธิบายมาแล้วในสมการ (5.1) ดังนั้น จะเห็นว่า ค่าทิศทาง θ ของวัตถุ ไม่เกี่ยวข้องกับแรงลัพธ์ที่สนามแรงกระทำต่อวัตถุ สอดคล้องกับที่ Luntz et al. นำเสนอใน [15] อีกเช่นกัน ดังนั้น ถ้าให้ $F_x^*(x, y) = F_x(x, y, \theta)$ และ $F_y^*(x, y) = F_y(x, y, \theta)$ เมื่อ θ มีค่าใดๆ แล้ว เราจะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} F_x^*(x_c, y_c) \\ F_y^*(x_c, y_c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\xi x_c \int_P \int dX\,dY \\ -\eta y_c \int_P \int dX\,dY \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\xi x_c A \\ -\eta y_c A \end{bmatrix} \qquad (5.10)$$

ถ้าพิจารณาเฉพาะในแนวแกน X ของระนาบสนามแรง แรงลัพธ์ทั้งหมด มีค่าเท่ากับ $F_x^*(x_c, y_c)$ รวมกับแรงเสียดทานในแนวแกน X หรือ F_{dx} ซึ่งคำนวณได้ตามสมการ (2.10) ดังนั้น เมื่อแทนค่าแรงลัพธ์ดังกล่าวลงในสมการ (2.12) ก็จะได้ว่า

$$\begin{aligned} F_x^*(x_c, y_c) + F_{dx}(v_{xc}) &= \rho a_{xc} A \\ -\xi x_c A - \tau v_{xc} A &= \rho a_{xc} A \qquad (5.11) \end{aligned}$$

แทนค่า $v_{xc} = \dot{x_c}$ และ $a_{xc} = \ddot{x_c}$ ลงในสมการ (5.11) และจัดรูปใหม่ จะได้เป็น

$$\rho \ddot{x_c}(t) + \tau \dot{x_c}(t) + \xi x_c(t) = 0 \qquad (5.12)$$

ถ้า ณ ตอนเริ่มต้น วัตถุอยู่ที่ configuration (x_0, y_0, θ) และความเร็ว ณ ตอนเริ่มต้นเป็น 0 (หยุดนิ่ง) เราสามารถหาผลเฉลยของสมการ (5.12) ออกมาได้เป็น

$$x_c(t) = e^{-\frac{\tau t}{2\rho}} \left[x_0 \cos(\frac{\lambda_x t}{2\rho}) + \frac{\tau x_0}{\lambda_x} \sin(\frac{\lambda_x t}{2\rho}) \right] \qquad (5.13)$$

โดยที่ $\lambda_x = \sqrt{4\xi\rho - \tau^2}$

ทั้งนี้ เราสามารถประมาณขอบเขตของผลลัพธ์ของสมการ (5.13) ได้เป็น

$$|x_c(t)| \quad \leq \quad \sqrt{2}e^{-\frac{\tau t}{2\rho}} \max(|x_0|, |\frac{\tau x_0}{\lambda_x}|) \tag{5.14}$$

ซึ่งถ้าให้ t_x เป็นเวลาที่ใช้ในการจัดวัตถุจนหยุดที่ภาวะสมดุลแล้ว โดยการปรับรูปสมการ (5.14) ใหม่ จะได้เป็น

$$t_x \quad \geq \quad -\frac{2\rho}{\tau} \log \left[\frac{|x_c(t_x)|}{\sqrt{2}\max(|x_0|, |\frac{\tau x_0}{\lambda_x}|)} \right] \tag{5.15}$$

เนื่องจาก configuration ที่ภาวะสมดุลของวัตถุ จะอยู่ในรูป $(0, 0, \theta_0)$ นั่นคือ $x_c(t_x) = 0$ ซึ่งถ้าแทนค่าลงในสมการ (5.15) จะได้ผลออกมาว่า $t_x = \infty$ ซึ่งไม่อาจนำไปใช้งานได้จริง ดังนั้น ในทางปฏิบัติ แทนที่จะหาค่า t_x โดยตรง อาจจะเลือกหาค่า t_x^* ซึ่งเป็นเวลาที่รับประกันว่า $|x_c(t)| \leq \epsilon_x$ เมื่อ $t \geq t_x^*$ โดยที่ ϵ_x เป็นระยะทางคลาดเคลื่อนจาก configuration ที่ภาวะสมดุลในแนวแกน X ที่ยอมรับได้ ดังนั้น เราจะได้สมการหาค่า t_x^* เป็น

$$t_x^* \quad \geq \quad -\frac{2\rho}{\tau} \log \left[\frac{\epsilon_x}{\sqrt{2}\max(|x_0|, |\frac{\tau x_0}{\lambda_x}|)} \right] \tag{5.16}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าพิจารณาเฉพาะในแนวแกน Y ของระนาบสนามแรง เราสามารถหาผลเฉลยของสมการ (2.12) ในแนวแกน y ออกมาได้เป็น

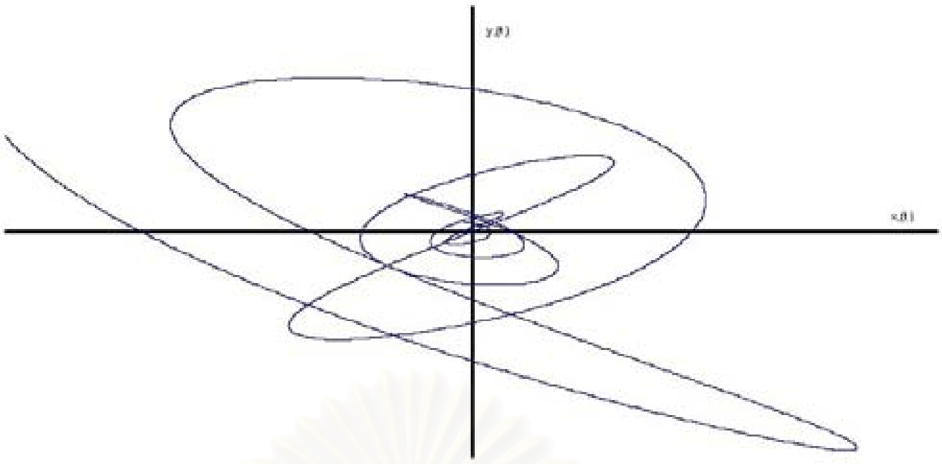
$$y_c(t) \quad = \quad e^{-\frac{\tau t}{2\rho}} \left[y_0 \cos(\frac{\lambda_y t}{2\rho}) + \frac{\tau y_0}{\lambda_y} \sin(\frac{\lambda_y t}{2\rho}) \right] \tag{5.17}$$

โดยที่ $\lambda_y = \sqrt{4\eta\rho - \tau^2}$ ซึ่งจะเห็นว่ามีค่าแตกต่างจาก λ_x ซึ่งผลดังกล่าว ทำให้เส้นทางการเคลื่อนที่ของศูนย์กลางมวลของวัตถุ มีลักษณะดังตัวอย่างในรูปที่ 5.6 เนื่องมาจากความถี่การแกว่งของค่า x_c และ y_c ไม่เท่ากัน

ถ้าให้ ϵ_y เป็นระยะทางคลาดเคลื่อนจาก configuration ที่ภาวะสมดุลในแนวแกน Y ที่ยอมรับได้ และ t_y^* ซึ่งเป็นเวลาที่รับประกันว่า $|y_c(t)| \leq \epsilon_y$ เมื่อ $t \geq t_y^*$ ในลักษณะเดียวกับการวิเคราะห์ในแนวแกน X เราก็จะได้ว่า

$$t_y^* \quad \geq \quad -\frac{2\rho}{\tau} \log \left[\frac{\epsilon_y}{\sqrt{2}\max(|y_0|, |\frac{\tau y_0}{\lambda_y}|)} \right] \tag{5.18}$$

ซึ่งจากทั้งสมการ (5.16) และสมการ (5.18) จะเห็นว่า เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ของวัตถุนั้น แปรตามค่า x_0, y_0 ของ configuration เริ่มต้น ดังนั้น ถ้าให้ x_{max} และ y_{max} เป็นค่าระยะทางเริ่มต้นที่ไกลที่สุดในแนวแกน X และ Y ตามลำดับ เราก็สามารถหาค่า t_x^* และ t_y^* ที่ครอบคลุมสำหรับทุก configuation เริ่มต้นของวัตถุได้



รูปที่ 5.6: ตัวอย่าง Trajectory ของศูนย์กลางมวลของวัตถุภายใต้ Elliptic Field

จากการวิเคราะห์ทั้งหมดข้างต้น เราสามารถสรุปวิธีการหาเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ของวัตถุภายใต้ Elliptic Field เป็นดัง Algorithm ข้างล่าง

Algorithm 4 EllipticTransTime($Elliptic_1, x_{max}, y_{max}, \epsilon_x, \epsilon_y$)

Require: $Elliptic_1$: Elliptic field configuration for Step1
Require: x_{max} : Maximum Distant of Initial configuration in x-direction
Require: y_{max} : Maximum Distant of Initial configuration in y-direction
Require: ϵ_x : Acceptable error of equilibrium configuration in x-direction
Require: ϵ_y : Acceptable error of equilibrium configuration in y-direction

1: $t_x^* =$ result from equation (5.16) when $x_0 = x_{max}$;
2: $t_y^* =$ result from equation (5.18) when $y_0 = y_{max}$;
3: return $t_{translate} = \max(t_x^*, t_y^*)$;

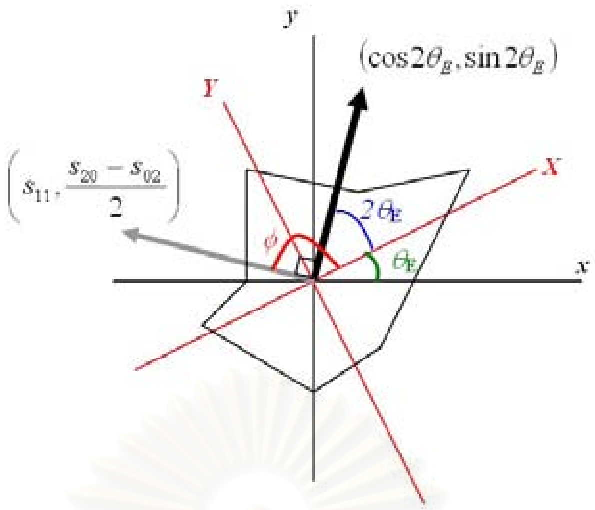
5.3.2 เวลาที่ใช้ในการหมุนรอบศูนย์กลางมวลของวัตถุ

ในการวิเคราะห์เวลาที่ใช้ในการหมุนของวัตถุนั้น เราไม่สามารถนำทอร์กลัพธ์ที่ได้ตามสมการ (5.6) มาใช้วิเคราะห์ได้ในทันทีเหมือนกับการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ในหัวข้อที่ผ่านมา เนื่องจากค่า ϕ ในสมการ (5.6) นั้น มีค่าแตกต่างกันไปในแต่ละวัตถุ ดังนั้น เพื่อให้สามารถวิเคราะห์การหมุนสำหรับกรณีทั่วไปไม่ขึ้นกับวัตถุ จำเป็นจะต้องหาวิธีหาทอร์กลัพธ์ที่ไม่ขึ้นกับค่า ϕ นั้น ดังต่อไปนี้

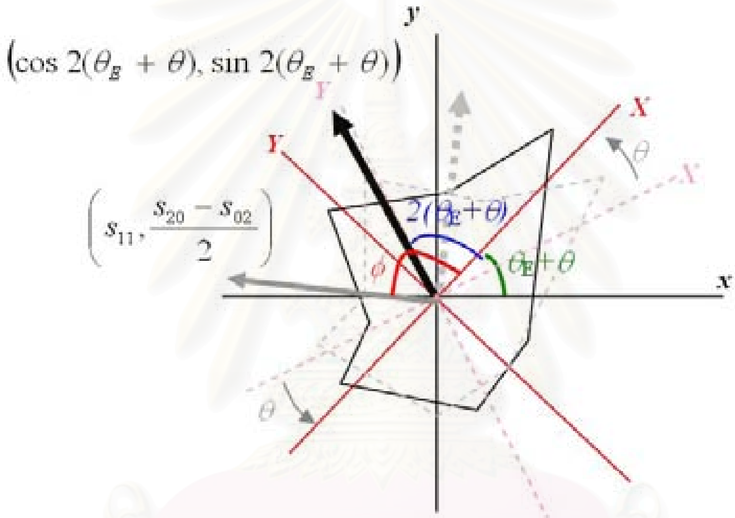
กำหนดให้ configuration $(0, 0, \theta_E)$ เป็นหนึ่งในสอง configurations ที่วัตถุจะหยุดที่ภาวะสมดุลภายใต้ Elliptic Field ดังนั้น ถ้าให้วัตถุอยู่ที่ configuration (x, y, θ_E) ดังตัวอย่างในรูปที่ 5.7(ก) ทอร์กลัพธ์ $T_E^*(\theta_0)$ ตามสมการ (5.6 ย่อมมีค่าเป็น 0 ซึ่งจะเป็นไปได้ก็ต่อเมื่อ

$$\begin{aligned} \cos(\phi - 2\theta_E) &= 0 \\ \phi - 2\theta_E &= \frac{\pi}{2} \end{aligned} \tag{5.19}$$

จากนั้น ลองพิจารณาในกรณีที่วัตถุอยู่ที่ configuration $(x, y, \theta_E + \theta)$ ดังตัวอย่างในรูปที่ 5.7(ข) ซึ่ง



(ก)



(ข)

รูปที่ 5.7: (ก) กรณีที่ทิศทางของวัตถุตรงกับทิศทางของ configuration ที่ภาวะสมดุล (ข) กรณีที่ทิศทางเปลี่ยนไปเป็นทิศทางอื่น

ณ configuration นั้ จะได้ทอร์กลัพทธ์เป็น

$$\begin{aligned}
T_E^*(\theta_E+\theta) &= (\xi-\eta)\left\|\begin{matrix} s_{11} \\ \frac{s_{20}-s_{02}}{2}\end{matrix}\right\|\cos(\phi-2(\theta_E+\theta)) \\
&= (\xi-\eta)\left\|\begin{matrix} s_{11} \\ \frac{s_{20}-s_{02}}{2}\end{matrix}\right\|\cos((\phi-2\theta_E)-2\theta) \\
&= (\xi-\eta)\left\|\begin{matrix} s_{11} \\ \frac{s_{20}-s_{02}}{2}\end{matrix}\right\|\cos(\frac{\pi}{2}-2\theta) \\
T_E^{**}(\theta) &= (\xi-\eta)\left\|\begin{matrix} s_{11} \\ \frac{s_{20}-s_{02}}{2}\end{matrix}\right\|\sin(2\theta) \qquad (5.20)
\end{aligned}$$

ทั้งนี้ $T_E^{**}(\theta)$ คือ ทอร์กลัพธ์เนื่องจาก Elliptic Field ซึ่งแปรตามทิศทางของวัตถุ**อ้างอิงกับทิศทางของ**

configuration ที่วัตถุจะอยุดที่ภาวะสมดุลหนึ่งในสอง configurations ซึ่งเมื่อรวมกับ T_d (ทอร์กลัพธ์เนื่องจากแรงเสียดทาน) จากสมการ (2.11) ก็สามารถแทนค่าลงในสมการ (2.13) ได้เป็น

$$\begin{aligned} T_E^{**}(\theta) + T_d(\omega) &= I_z\alpha \\ (\xi - \eta)\lambda_T \sin(2\theta) - \frac{\tau I_z}{\rho}\omega &= I_z\alpha \end{aligned} \tag{5.21}$$

โดยที่ $\lambda_T = \left\| \begin{array}{c} s_{11} \\ \frac{s_{20}-s_{02}}{2} \end{array} \right\|$

แทนค่า $\omega = \dot{\theta}$ และ $\alpha = \ddot{\theta}$ ลงในสมการ (5.21) และจัดรูปใหม่ จะได้เป็น

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{\tau}{\rho}\dot{\theta}(t) + \frac{(\eta - \xi)\lambda_T}{I_z}\sin(2\theta(t)) = 0 \tag{5.22}$$

เป้าหมายที่เราต้องการคือการหาผลเฉลยของสมการ (5.22) เพื่อหาเวลาที่ทำให้ทิศทางของวัตถุเข้าสู่ทิศทางของ configuration ที่ภาวะสมดุล หรือก็คือ $|\theta(t)| \pm \epsilon_\theta$ อนึ่ง สำหรับเงื่อนไขเริ่มต้นที่เวลา $t = 0$ นั้น $\dot{\theta}(0)$ มีค่าเป็น 0 (ไม่มีความเร็วเชิงมุม) ส่วน $\theta(0)$ นั้น จากหัวข้อ 5.2 ทำให้เราทราบว่า $|\theta(0)| \geq \frac{\pi}{2}$ เพราะถ้าในกรณี $\theta(t)$ เป็นทิศทางที่อ้างอิงจากทิศทางที่ภาวะสมดุล θ_{E1} เกิดมีค่ามากกว่า $\frac{\pi}{2}$ แล้ว วัตถุย่อมหมุนเข้าสู่ทิศทางที่ภาวะสมดุล $\theta_{E2} = \theta_{E1} + \pi$ ซึ่งเป็นอีกทิศทางที่เหลือแทน และถ้าเราเปลี่ยนให้ $\theta(t)$ เป็นทิศทางที่อ้างอิงจากทิศทาง θ_{E2} แทนแล้ว ก็จะได้ค่าน้อยกว่า $\frac{\pi}{2}$ อยู่ดี

มีจุดที่น่าสนใจอยู่จุดหนึ่ง คือ ถ้ากำหนดให้ $Z(t) = 2\theta(t)$ แล้วลองแทนค่าลงในสมการ (5.22) แล้วจะได้สมการเป็น

$$\ddot{Z}(t) + \frac{\tau}{\rho}\dot{Z}(t) + \frac{2(\eta - \xi)\lambda_T}{I_z}\sin(Z(t)) = 0$$

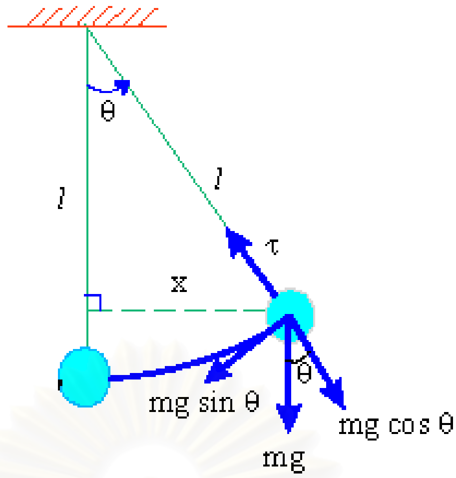
ซึ่งมีลักษณะเดียวกันกับแบบจำลองกลศาสตร์ของการแกว่งลูกตุ้มธรรมดาที่มีแรงต้านอากาศ ดังตัวอย่างในรูป 5.8 ที่มีสมการเป็น

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{k}{\rho}\dot{\theta}(t) + \frac{g}{l}\sin\theta(t) = 0$$

เมื่อ k เป็นสัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศ และ ρ เป็นความหนาแน่นของลูกตุ้ม

ความเหมือนกันดังกล่าว ทำให้เราสามารถเปรียบเทียบการหมุนของวัตถุภายใต้ Elliptic Field ให้เป็นเสมือนการแกว่งลูกตุ้มได้ อย่างไรก็ตาม การหาผลเฉลยของสมการดังกล่าวนี้นั้น ไม่สามารถทำได้เหมือนอย่างกรณีของการเคลื่อนที่ในหัวข้อที่ผ่านมา เนื่องจากค่าของ $\theta(0)$ มีโอกาสมีค่าสูงจนไม่สามารถที่จะประมาณให้ $\sin(Z(t)) \approx Z(t)$ อันเป็นวิธีที่ใช้กับปัญหาการแกว่งลูกตุ้มโดยทั่วไปได้ ดังนั้น จึงต้องใช้การหาผลเฉลยเชิงตัวเลข (numerical solution) ของสมการ (5.22) แล้วนำผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้นั้น มาวิเคราะห์หาเวลา t_o ซึ่งทำให้ $|\theta(t)| \leq \epsilon_\theta$ เมื่อ $t \geq t_o$ ออกมา ดัง Algorithm 5

อย่างไรก็ตาม Algorithm 5 นี้ ก็ยังมีจุดบกพร่องอยู่ ทั้งนี้เนื่องจากผลเฉลยที่ได้มาจากระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ไม่ว่าจะเป็น Runge-Kutta-Meson ที่ใช้ใน Algorithm นี้ หรือวิธีอื่นๆ ก็ตาม ล้วนมีค่าความคลาดเคลื่อนสะสมทั้งสิ้น และเนื่องจาก Algorithm 5 มีจุดสำคัญที่การเปรียนเทียบผลเฉลย $\theta_t(t)$ กับ ϵ_θ ซึ่ง



รูปที่ 5.8: แบบจำลองกลศาสตร์ของการแกว่งลูกตุ้มที่มีแรงต้านอากาศ

Algorithm 5 EllipticRotateTime1($Elliptic_1, \theta_0, \epsilon_\theta$)

Require: $Elliptic_1$: Elliptic field configuration for Step1
Require: θ_0 : Initial Rotation angle
Require: ϵ_θ : Acceptable error of equilibrium configuration in rotation term

$t_o = 0$;
$\theta_n = \theta_0$;
$\dot{\theta}_n = 0$; {Initial angular velocity = 0}
repeat
  repeat
    $(\theta_{n+1}, ts_{n+1}, err) = RKM(\theta_n, ts_n)$;
    $(\dot{\theta}_{n+1}, ts_{n+1}, err) = RKM(\dot{\theta}_n, ts_n)$;
    $\theta_n = \theta_{n+1}$;
    $\dot{\theta}_{n+1} = \dot{\theta}_n$;
    $t_o = t_o + ts_n$;
    $ts_n = ts_{n+1}$;
  until $|\dot{\theta}_n| == 0$; {Maximum rotation angle at each half-loop}
until $|\theta_n| \leq \epsilon_\theta$;
return $t_{rotate} = t_o$;

มีค่าน้อยมากๆ ผลของความคลาดเคลื่อนสะสมย่อมส่งผลกระทบทำให้ผลลัพธ์ที่ได้มีโอกาสคลาดเคลื่อนสูง ดังนั้น จึงต้องมีการแก้ไขข้อบกพร่องนี้ ซึ่งสามารถทำได้ 2 จุด คือ

1. **จุดแรก** ใช้ Algorithm 5 หาค่าเวลา $t_{\theta 1}$ **ที่ทำให้เพียงแค่** $|\theta_n| \leq \theta_s$ โดยที่ θ_s มีค่าน้อยในระดับหนึ่ง เช่น $\theta_s \approx \frac{\pi}{20}$ เป็นต้น ซึ่งมากกว่า ϵ_θ และค่าความคลาดเคลื่อนสะสมหลายเท่าตัว แต่ก็น้อยพอที่จะทำให้สามารถประมาณค่า $\sin(2\theta) \approx 2\theta$ ซึ่งจะทำให้สมการ (5.22) สามารถหาผลเฉลยได้เป็น

$$\theta(t) = e^{-\frac{\tau t}{2\rho}} \left[\theta_0 \cos(\frac{\lambda_\theta t}{2\rho}) + \frac{\tau \theta_0}{\lambda_\theta} \sin(\frac{\lambda_\theta t}{2\rho}) \right] \qquad (5.23)$$

โดยที่ $\lambda_\theta = \sqrt{\frac{8(\eta - \xi)\lambda_T \rho^2}{I_z} - \tau^2}$

จากนั้น จึงหาเวลาที่วัตถุหมุนด้วยผลเฉลยตามสมการ (5.23) โดยให้ $\theta_0 = \theta_s$ จนกระทั่ง $|\theta(t)| \leq \epsilon_\theta$ ซึ่งสามารถหาได้จาก

$$t^*_{\theta 2} \quad \geq \quad -\frac{2\rho}{\tau}\log\left[\frac{\epsilon_\theta}{\sqrt{2}\max(|\theta_s|, |\frac{\tau\theta_s}{\lambda_\theta}|)}\right] \tag{5.24}$$

ด้วยวิธีการดังกล่าวนี้ ทำให้ผลลัพธ์เวลารวมที่ใช้ในการหมุนมีค่าเป็น $t_{\theta 1} + t_{\theta 2}$

2. **จุดที่สอง** ในการทำงานตาม Algorithm 5 ในแต่ละรอบที่ $|\dot{\theta_n}| = 0$ (ซึ่งถ้าเปรียบเป็นการแกว่งลูกตุ้ม ก็คือ ณ จุดที่ลูกตุ้มแกว่งขึ้นไปสูงสุดในแต่ละคาบ ซึ่ง ณ ตำแหน่งดังกล่าว ความเร็วจะเป็น 0 นั่นเอง) นั้น ให้นำค่าความคลาดเคลื่อนสะสมของ θ_n บวกเข้าไปให้ $|\theta_n|$ มีค่าเพิ่มขึ้น (ขยับตำแหน่งลูกตุ้มให้สูงขึ้น) ซึ่งจะทำให้ค่าเวลาที่คำนวณได้ มีค่ามากกว่าเวลาที่คำนวณจาก θ_n เดิม ทั้งนี้ เป็นไปตามข้อพิสูจน์ที่จะนำเสนอต่อไปนี้

ข้อพิสูจน์ : ให้ θ_1, θ_2 เป็นทิศทางของวัตถุอ้างอิงจากทิศทางที่ภาวะสมดุล θ_E ที่เวลา $t = 0$ สำหรับ 2 กรณีใดๆ ถ้า $|\theta_1| < |\theta_2| < \frac{\pi}{2}$ แล้ว เวลาที่ใช้ในการหมุนวัตถุจนหยุดหมุนที่ทิศทาง θ_E เมื่อวัตถุมีทิศทางเริ่มต้นเป็น $\theta_E \pm \theta_1$ จะน้อยกว่าเวลาที่ใช้ในกรณีที่ทิศทางเริ่มต้นเป็น $\theta_E \pm \theta_2$ เสมอ

พิสูจน์ จากกฎการอนุรักษ์พลังงานที่ว่า พลังงานรวมของระบบปิดที่เวลาใดๆ จะมีค่าคงที่เสมอ สำหรับการเคลื่อนที่และการหมุนของวัตถุภายใต้ Elliptic Field นั้น พลังงานในระบบประกอบไปด้วย

- พลังงานศักย์ของวัตถุ ซึ่งก็คือ Lifted Potential ของวัตถุที่ configuration $(x(t), y(t), \theta(t))$ นั้น
- พลังงานจลน์เนื่องจากการเคลื่อนที่และการหมุนของวัตถุ
- งานที่สูญเสียไปเนื่องจากแรงเสียดทาน

เนื่องจากงานที่สูญเสียไปเนื่องจากแรงเสียดทานนั้น มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ ตามเวลาที่วัตถุเคลื่อนที่และหมุนไป ดังนั้น **ผลรวมพลังงานศักย์และพลังงานจลน์ของวัตถุก็จะลดลงตามเวลาที่ผ่านไป** เพื่อรักษาระดับพลังงานรวมทั้งหมดให้คงที่

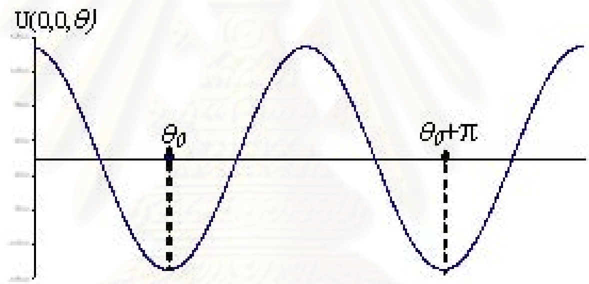
อนึ่ง เนื่องจากที่เวลา $t = 0$ นั้น พลังงานจลน์ของวัตถุมีค่าเป็น 0 ดังนั้น ผลรวมพลังงานศักย์และพลังงานจลน์ ณ ตอนเริ่มต้นดังกล่าว จึงมีค่าเท่ากับ Lifted Potential Energy ของวัตถุที่ Configuration $(x(0), y(0), \theta(0))$ นั่นเอง ดังนั้น ถ้าหากที่ configuration เริ่มต้นของวัตถุ มีค่า Lifted Potential Energy สูงแล้ว ก็ย่อมใช้เวลาในการทำให้วัตถุเข้าสู่ภาวะสมดุลนานกว่า configuration เริ่มต้นที่มีค่า Lifted Potential Energy ต่ำกว่า

จากหลักการของ Lifted Potential Funtion จะได้ว่า สำหรับกรณีของ Elliptic Field แล้ว

$$
\begin{aligned}
U(x,y,\theta-\theta_E) &= -\int T(x,y,\theta-\theta_E)d\theta \qquad (5.25)\\
&= -\int T_E^{**}(\theta)d\theta \\
&= \frac{(\xi-\eta)}{2}\left\| \begin{matrix} s_{11} \\ \frac{s_{20}-s_{02}}{2} \end{matrix} \right\| \cos(2\theta)+U_c(x,y)
\end{aligned}
$$

โดยที่ $U_c(x,y)$ เป็น Lifted Potential Energy ส่วนที่ไม่แปรผันตามทิศทางของ configuration ของวัตถุ

เนื่องจากการหมุนของวัตถุภายใต้ Elliptic Field นั้น ไม่ขึ้นกับตำแหน่งของวัตถุ ดังนั้น จึงขอเลือกกรณีที่ configuration เริ่มต้นของวัตถุเป็น $(0,0,\theta)$ เป็นตัวแทนของการหมุนเมื่อ configuration เริ่มต้นเป็น (x,y,θ) เมื่อ x,y มีค่าใดๆ ซึ่งในกรณีนี้ ทิศทางของวัตถุจะหยุดที่ทิศทางที่ภาวะสมดุล θ_E ก็คือเมื่อวัตถุเข้าสู่ภาวะสมดุลนั่นเอง และเมื่อ configuration เริ่มต้นของวัตถุเป็น $(0,0,\theta)$ แล้ว ค่า $U_c(x(t),y(t))$ จะมีค่าคงที่เท่ากับ $U_c(0,0)$ เสมอ (เนื่องจากในกรณีนี้ วัตถุจะไม่มีการเคลื่อนที่) ดังนั้น เราสามารถเขียนกราฟของ $U(0,0,\theta)$ สำหรับวัตถุใดๆ ได้ โดยจะออกมามีลักษณะดังรูป 5.9



รูปที่ 5.9: กราฟของ $U(0,0,\theta)$ สำหรับวัตถุใดๆ บน Elliptic Field

ซึ่งจากกราฟจะเห็นว่า ในช่วงทิศทาง $(\theta_E-\frac{\pi}{2},\theta_E+\frac{\pi}{2})$ นั้น ค่าของ Lifted Potential Energy จะ**แปรตามขนาดของทิศทางของวัตถุเทียบกับทิศทาง θ_E นั้น** ดังนั้น ในกรณีที่ θ_1,θ_2 เป็นมุมใดๆ และ $|\theta_1|<|\theta_2|\geq\frac{\pi}{2}$ เราก็จะได้ว่า $U(0,0,\theta_E\pm\theta_1)<U(0,0,\theta_E\pm\theta_2)$

นั่นคือ ถ้ากรณีที่ configuration เริ่มต้นของวัตถุเป็น $(0,0,\theta_E\pm\theta_1)$ แล้ว พลังงานรวมของวัตถุ ณ ตอนเริ่มต้น จะมีค่าน้อยกว่ากรณีที่ configuration เริ่มต้นเป็น $(0,0,\theta_E\pm\theta_2)$ ซึ่งยังผลให้เวลาที่ใช้ในการหมุนมากกว่าในที่สุด •

ข้อพิสูจน์ดังกล่าวนี้ เปรียบไปแล้วก็เหมือนกันการแกว่งลูกตุ้มที่ว่า ถ้าเริ่มแกว่งที่มุมที่สูงกว่า ก็จะใช้เวลาในการแกว่งนานกว่านั่นเอง และด้วยข้อพิสูจน์นี้อีกเช่นกัน เราสามารถเลือกค่า $theta_0$ ที่จะใช้เวลาในการหมุนนามที่สุด นั่นคือ $\theta_0=\frac{\pi}{2}-\epsilon_\theta$ (เหตุที่ไม่เลือกใช้ $\theta_0=\frac{\pi}{2}$ พอดีเลยนั้น เนื่องจากถ้าใช้ค่าดังกล่าว ทอร์กลัพธ์ตามสมการ (5.21) จะมีค่าเป็น 0 และจะทำให้ไม่เกิดการหมุนขึ้นเลย เนื่องจากวัตถุไม่มีการเปลี่ยนทิศทางเกิดขึ้น ซึ่งในทางปฏิบัตินั้น โอกาสที่วัตถุจะอยู่ในทิศทางที่ $\theta_0=\frac{\pi}{2}$ พอดี 100% เลยนั้นก็แทบเป็นไปไม่ได้) ดังนั้น เราสามารถปรับปรุง Algorithm 5 ใหม่ได้เป็นดัง Algorithm 6

Algorithm 6 EllipticRotateTime2($Elliptic_1, \epsilon_\theta, \theta_s$)

Require: $Elliptic_1$: Elliptic field configuration for Step1
Require: ϵ_θ : Acceptable error of equilibrium configuration in rotation term
Require: θ_s : Cut-off angle for linearized solution of equation (5.22)

$t_{o1} = 0;$
$\theta_n = \frac{\pi}{2} - \epsilon_\theta;$
$\dot{\theta}_n = 0;$ {Initial angular velocity = 0}
repeat
    $err_{global} = 0;$
    repeat
        $(\dot{\theta}_{n+1}, t_{n+1}, err) = RKM(\dot{\theta}_n, t_n);$
        $(\theta_{n+1}, t_{n+1}, err) = RKM(\theta_n, t_n);$
        $\theta_n = \theta_{n+1};$
        $\dot{\theta}_{n+1} = \dot{\theta}_n;$
        $t_{o1} = t_{o1} + t_n;$
        $t_n = t_{n+1};$
        $err_{global} = err_{global} + |err|;$
    until $|\dot{\theta}_n| == 0$; {Maximum rotation angle at each half-loop}
until $|\theta_n| \leq \theta_s$;
Calculate t_{o2} from equation (5.24);
return $t_{rotate} = t_{o1} + t_{o2};$

5.4 การเลือกสนามแรงสำหรับหมุนวัตถุให้โน้มเข้าทิศทางเดียวและเวลาที่ใช้

จากการจัดวัตถุด้วย Elliptic Field ตาม Step1 ของ Algorithm 3 ด้วยเวลาที่วิเคราะห์ได้จากหัวข้อ 5.3 นั้น เราจะได้ว่า วัตถุจะอยู่ ณ configuration (x, y, θ) โดยที่ $x \in [-\epsilon_x, \epsilon_x], y \in [-\epsilon_y, \epsilon_y]$ และ $\theta \in [\theta_E - \epsilon_\theta, \theta_E + \epsilon_\theta] \cup [\theta_E + \pi - \epsilon_\theta, \theta_E + \pi + \epsilon_\theta]$ เมื่อ θ_E คือทิศทางของ configuration ที่วัตถุหยุดที่ภาวะสมดุลภายใต้ Elliptic Field ใน Step1 นั้น

ในขณะเดียวกัน ในการจัดวัตถุใน Step3 ที่เป็น Elliptic Field อีกชุดนั้น จากการตั้งค่าพารามิเตอร์ของ Elliptic field จะทำให้เราได้ว่า ทิศทางของ configuration ที่วัตถุหยุดที่ภาวะสมดุลที่เป็นไปได้ คือ $\theta_E + \frac{\pi}{2}$ หรือ $\theta_E - \frac{\pi}{2}$ ทิศทางใดทิศทางหนึ่ง เป้าหมายที่ต้องการคือ ให้วัตถุหยุดที่ภาวะสมดุลทิศทางเดียวเท่านั้น เช่นถ้าหากให้ทิศทาง $\theta_E + \frac{\pi}{2}$ เป็นทิศทางที่ต้องการแล้ว จากหัวข้อ 5.2 ทำให้ได้ว่า ทิศทางของ configuration เริ่มต้นก่อนการจัดวัตถุด้วย Elliptic Field ใน Step3 นั้น จะต้องอยู่ในช่วง $(\theta_E, \theta_E + \pi)$ เท่านั้น (ในกรณีที่ทิศทางที่ต้องการเป็น $\theta_E - \frac{\pi}{2}$ ทิศทางเริ่มต้นก็จะต้องอยู่ในช่วง $(\theta_E - \pi, \theta_E)$ แทน)

ดังนั้น คุณสมบัติสำคัญของสนามแรงที่จะนำมาใช้จัดวัตถุใน Step2 ของ Algorithm 3 ก็คือ **การเปลี่ยนทิศทางของวัตถุจาก configuration ที่ได้หลังจาก Elliptic Field ใน Step1 ให้เข้าเงื่อนไขก่อนเริ่มใช้ Elliptic Field ใน Step3 ในเวลาจำกัด**

สนามแรงหนึ่งที่น่าจะนำมาใช้ใน Step2 นี้ได้ ก็คือ Unit Radial, Radial & Constant Field ที่ถึงแม้ในการทดลองในบทที่ผ่านมา จะพบข้อด้อยในเรื่องเวลาที่ใช้จัดวัตถุก็ตาม แต่เนื่องจากเป้าหมายที่ต้องการในกรณีนี้ไม่ใช่การจัดวัตถุจนกระทั่งหยุดที่ภาวะสมดุล แต่เป็นเพียงแค่การเปลี่ยนทิศทางของวัตถุซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงอย่างมากไม่เกิน $2\epsilon_\theta$ เท่านั้น ซึ่งจากผลการทดลองจะเห็นว่า การเปลี่ยนทิศทางในช่วงเล็กๆ ดังกล่าวใช้เวลาไม่มากนัก

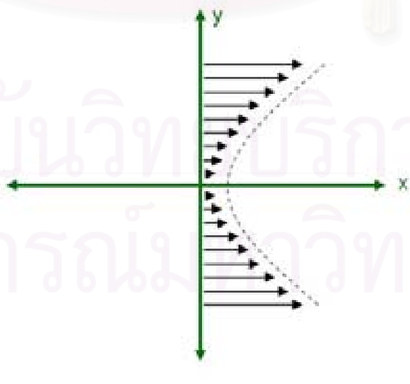
ทั้งนี้ ถ้าหากเลือกใช้ Unit Radial, Radial & Constant Field ที่ให้แรงตามสมการ (2.19),(2.20) และ (2.21) เพื่อจัดวัตถุนั้น เราสามารถกำหนดทิศทางของ configuration ของวัตถุที่ภาวะสมดุลได้ ดังนั้น เพื่อความสะดวก เราจะกำหนดพารามิเตอร์ของสนามแรงนี้ ให้ configuration ที่วัตถุจะหยุดที่ภาวะสมดุล ที่เป็นไปได้ เป็น configuration เดียวกับ configuration ที่เราต้องการจาก Elliptic field ใน Step3 นั่นคือ $(0, 0, \theta_E + \frac{\pi}{2})$ ซึ่งเราสามารถกำหนดทิศทางของระนาบของ Unit Radial, Radial & Constant Field เพื่อให้ได้ configuration ที่ภาวะสมดุลเป็น configuration ดังกล่าวได้จาก Algorithm 1 นั่นเอง

อย่างไรก็ตาม ปัญหาที่จะเกิดขึ้นถ้าหากใช้ Unit Radial, Radial & Constant Field ก็คือ เวลาที่จะต้องใช้เพื่อให้วัตถุเปลี่ยนทิศทางไปอยู่ในช่วงที่ต้องการสำหรับ Elliptic Field ใน Step3 ทั้งนี้ แม้จะทราบจากผลการทดลองว่า เวลาที่ใช้ในการเปลี่ยนทิศทางนั้นใช้เวลาไม่มาก แต่ก็ไม่สามารถคำนวณหาเวลาดังกล่าวได้ เนื่องจากความซับซ้อนของแรงลัพธ์และทอร์กลัพธ์ที่ได้จากสนามแรงนี้ ไม่สามารถนำมาใช้วิเคราะห์ได้โดยง่ายเหมือนกับกรณีของ Elliptic Field ทำให้การหาเวลาสำหรับใช้งาน จึงสามารถทำได้แต่เพียงจากการทดลองจัดวัตถุโดยสุ่ม configuration เริ่มต้นจาก configuration ที่เป็นไปได้จากการจัดวัตถุด้วย Elliptic Field ใน Step1 แล้วจึงจับเวลาหาช่วงเวลาที่วัตถุจะเปลี่ยนทิศทางไปอยู่ในช่วงทิศทางที่ต้องการจากการทดลองหลายๆ รอบ แล้วจึงนำค่าเวลาที่ได้มาใช้งาน จึงเป็นข้อด้อยที่ต้องทำการทดสอบกับสนามแรงจริงก่อน ถึงจะนำเวลามาใช้งานได้

ด้วยเหตุนี้ จึงขอนำเสนอสนามแรงรูปแบบใหม่ขึ้นมาสำหรับใช้เป็นสนามแรงใน Step2 เป็นการเฉพาะ โดยในขั้นต้นนั้น เริ่มต้นจากสนามแรงชุดเดียว ซึ่งจะขอเรียกว่า Parabolic Field โดยให้แรงในแต่ละจุดเป็น

$$\hat{\mathbf{F}}(x, y) = \begin{bmatrix} ky^2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.26}$$

ตัวอย่างรูปแสดงทิศทางของแรงเนื่องจาก Parabolic Field นี้เป็นดังรูปที่ 5.10



รูปที่ 5.10: รูปแสดงแรง ณ จุดต่างๆ ของ Parabolic Field $(k = 1)$

ทั้งนี้ สำหรับวัตถุที่อยู่ที่ configuration (x_c, y_c, θ) ใดๆ แล้ว จะสามารถคำนวณแรงลัพธ์เนื่องจาก

Parabolic Field นี้ออกมาได้เป็น

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x_c,y_c,\theta) &= \int_P\int \hat{\mathbf{F}}(X_\theta+x_c,Y_\theta+y_c)dX\,dY \qquad (5.27)\\ \begin{bmatrix} F_x(x_c,y_c,\theta)\\ F_y(x_c,y_c,\theta)\end{bmatrix} &= \int_P\int \begin{bmatrix} k(Y_\theta+y_c)^2\\ 0\end{bmatrix} dX\,dY\end{aligned}$$

ซึ่งจะเห็นว่า แรงลัพธ์ในแนวแกน Y ของระนาบสนามแรงมีค่าเป็น 0

ส่วนทอร์กลัพธ์ของวัตถุ ก็จะได้ออกมาเป็น

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(x_c,y_c,\theta) &= \int_P\int \begin{bmatrix} X_\theta\\ Y_\theta\end{bmatrix} \times \hat{\mathbf{F}}(X_\theta+x_c,Y_\theta+y_c)dX\,dY \qquad (5.28)\\ &= \int_P\int \begin{bmatrix} X_\theta\\ Y_\theta\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k(Y_\theta+y_c)^2\\ 0\end{bmatrix} dX\,dY\\ &= k\int_P\int {Y_\theta}^3 dX\,dY + 2ky_c\int_P\int {Y_\theta}^2 dX\,dY + k{x_c}^2\int_P\int (Y_\theta)dX\,dY\end{aligned}$$

เช่นเดียวกัน จะเห็นว่า พจน์สุดท้ายของสมการ (5.28) มีค่าเป็น 0 เหมือนกับกรณีของสมการ (5.1) ส่วนอีก 2 พจน์ที่เหลือ เมื่อจัดรูปสมการใหม่ให้อยู่ในรูปของ s_{ij} จากสมการ (5.3) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}T(x_c,y_c,\theta) &= k\left[s_{30}\sin^3\theta + s_{21}\sin^2\theta\cos\theta + s_{12}\sin\theta\cos^2\theta + s_{03}\cos^3\theta\right]\\ &+ \ 2ky_c\left[s_{20}\sin^2\theta + 2s_{11}\sin\theta\cos\theta + s_{02}\cos^2\theta\right] \qquad (5.29)\end{aligned}$$

จากสมการ (5.29) เราสามารถแบ่งทอร์กลัพธ์เนื่องจาก Parabolic Field ออกเป็น 2 ส่วน คือ

- ทอร์กลัพธ์ส่วนที่เกี่ยวข้องกับ θ เพียงอย่างเดียว แทนด้วย $T_I^*(\theta)$ ซึ่ง

$$T_I^*(\theta) = k\left[s_{30}\sin^3\theta + s_{21}\sin^2\theta\cos\theta + s_{12}\sin\theta\cos^2\theta + s_{03}\cos^3\theta\right] \qquad (5.30)$$

- ทอร์กลัพธ์ส่วนที่เกี่ยวข้องกับ y_c และ θ แทนด้วย $T_I^{**}(y_c,\theta)$ ซึ่งสำหรับส่วนนี้ ถ้าพิจารณาขนาดแล้วจะเห็นว่า

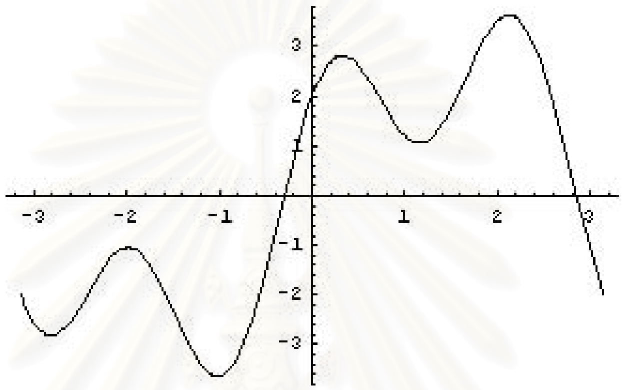
$$\begin{aligned}|T_I^{**}(y_c,\theta)| &= 2|k||y_c|\left|\left[s_{20}\sin^2\theta + 2s_{11}\sin\theta\cos\theta + s_{02}\cos^2\theta\right]\right|\\ &\le 2|k||y_c|(|s_{20}|+2|s_{11}|+|s_{02}|) \qquad (5.31)\end{aligned}$$

ซึ่งถ้าหากว่า จุดกำเนิดของระนาบของ Parabolic Field เป็นจุดเดียวกับระนาบของ Elliptic Field ใน Step1 แล้วนั้น (โดยที่ทิศทางของระนาบสนามแรง อาจจะต่างกันก็ได้) โดยผลจากการจัดวัตถุด้วย Elliptic field ใน Step1 นั้น ค่า y_c ในสมการ (5.31) ณ ตอนเริ่มการใช้สนามแรงนี้ใน Step2 จะมีค่าไม่เกิน $\sqrt{{\epsilon_x}^2+{\epsilon_y}^2}$ ซึ่งค่าของ ϵ_x และ ϵ_y นั้น เราสามารถกำหนดได้จากเวลาในการทำงานของ Elliptic Field ใน Step1 นั่นเอง และโดยที่จากสมการ (5.27) จะเห็นว่า ไม่มีแรงกระทำต่อวัตถุในแนวแกน Y ของระนามของ Parabolic

Field เลย ดังนั้น ภายใต้ Parabolic Field นี้ ค่าของ y_c จึงไม่มีโอกาสเพิ่มสูงขึ้น ซึ่งทั้งหมดนี้สรุปได้ว่า **เราสามารถควบคุมค่า y_c ให้มีค่าน้อยจนทำให้ $T_I^{**}(y_c, \theta)$ มีค่าน้อยมากได้** และจะทำให้

$$\begin{aligned} T(x_c, y_c, \theta) &\approx T_I^*(\theta) \\ &\approx k\left[s_{30}\sin^3\theta + s_{21}\sin^2\theta\cos\theta + s_{12}\sin\theta\cos^2\theta + s_{03}\cos^3\theta\right] \end{aligned} \tag{5.32}$$

และเนื่องจากสำหรับวัตถุใดๆ เราสามารถคำนวณค่าของ s_{ij} ได้จากตัววัตถุโดยไม่เกี่ยวข้องกับสนามแรง ดังนั้น เราสามารถสร้างกราฟของ $T_I^*(\theta)$ สำหรับวัตถุใดๆ ได้ ดังตัวอย่างในรูปที่ 5.11 ซึ่งเป็นกราฟของวัตถุตัวอย่าง B ในการทดลองบทที่ผ่านมา เป็นต้น



รูปที่ 5.11: กราฟของ $T_I^*(\theta)$ กับค่า θ

ทั้งนี้ มีจุดที่น่าสังเกตอยู่จุดหนึ่ง คือ

$$\begin{aligned} T_I^*(\theta+\pi) &= k\left[s_{30}\sin^3(\theta+\pi) + s_{21}\sin^2(\theta+\pi)\cos(\theta+\pi) + s_{12}\sin(\theta+\pi)\cos^2(\theta+\pi) + s_{03}\cos^3(\theta+\pi)\right] \\ &= k\left[-s_{30}\sin^3\theta - s_{21}\sin^2\theta\cos\theta - s_{12}\sin\theta\cos^2\theta - s_{03}\cos^3\theta\right] \\ &= -\ T_I^*(\theta) \end{aligned} \tag{5.33}$$

แสดงว่า ทอร์กลัพธ์เมื่อวัตถุอยู่ ณ ทิศทาง θ ใดๆ **จะมีค่าตรงข้ามกับทอร์กลัพธ์ที่ทิศทางที่ต่างออกไป π เสมอ** ซึ่งนั่นหมายถึงทิศทางทอร์กลัพธ์ด้วยเช่นกัน ดังจะเห็นได้จากลักษณะของเส้นกราฟในรูปที่ 5.11 เป็นต้น ซึ่งคุณสมบัติดังกล่าวนี้ สอดคล้องกับความต้องการในการทำงานใน Step2 ของ Algorithm 3 ที่กำลังต้องการอยู่ โดยสิ่งที่ต้องการในการในการนำสนามแรงนี้มาใช้ในการจัดวัตถุ Step2 ก็คือ **การเลือกทิศทางที่ระนาบของ Parabolic Field ทำกับระนาบของวัตถุที่หยุดหลังจาก Elliptic Field ใน Step1** ให้ได้ทอร์กลัพธ์มีทิศการหมุนตามทิศทางที่ต้องการ

ตัวอย่างเช่น วัตถุตัวอย่าง B ในการทดลอง (รูปที่ 4.1) ถูกจัดด้วย Elliptic Field ใน Step1 แล้ว สมมติให้หยุด ณ configuration ที่มีทิศทางที่แกนระนาบของวัตถุทำมุมกับแกนระนาบของ Elliptic Field อยู่ในช่วง $(\theta_E - \epsilon_\theta, \theta_E + \epsilon_\theta)$ ดังในรูปที่ 5.12(ก) และถ้าสมมติให้ ณ ทิศทางในกรณี Aดังกล่าว ต้องการทอร์กลัพธ์ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา เพื่อให้วัตถุโน้มไปทางทิศทาง $\theta_E + \frac{\pi}{2}$ ดังนั้น เราสามารถเลือกทิศทางที่แกนระนาบวัตถุ ทำมุมกับแกนระนาบของ Parabolic Field จากกราฟในรูปที่ 5.11 ที่ให้ทอร์กลัพธ์ทวนเข็มนาฬิกา เช่นเลือกทิศทางช่วง θ_c ดังในรูปที่ 5.12(ข) เป็นต้น ซึ่งจะทำให้ **แกนระนาบของ Parabolic**

Field ทำมุมกับแกนระนาบของ Elliptic Field จาก Step1 เป็นมุม

$$\Delta\theta \;=\; \theta_E - \theta_c$$

ดังตัวอย่างในรูปที่ 5.12(ค)

อนึ่ง จะเห็นว่า ด้วย Parabolic Field เพียงสนามแรงเดียวนี้ สามารถให้ทอร์กลัพธ์ที่ทำให้วัตถุหมุนในทิศทางที่ต้องการได้ด้วยการเลือกทิศทางของแกนระนาบของสนามแรงที่เหมาะสม อย่างไรก็ตาม จุดที่ต้องคำนึงอีกจุด ก็คือ แรงลัพธ์ที่สนามแรงนี้ทำกับวัตถุตามสมการ (5.27) ซึ่งจะเห็นว่า แรงลัพธ์ที่ได้ **จะผลักวัตถุให้ไกลออกไปจากจุดกำเนิดของระนาบสนามแรงตลอดเวลาที่หมุนวัตถุไปด้วย** ซึ่งไม่เป็นผลดี เนื่องจากในช่วงเวลาที่เราปล่อยให้วัตถุทำงานภายใต้ Parabolic Field วัตถุอาจจะถูกผลักให้กระเด็นไปไกลจนเกินไปก็ได้ ดังนั้น จึงจำเป็นต้องหาสนามแรงอื่นๆ มาผสมผสานเพื่อลดผลของแรงลัพธ์ดังกล่าวให้น้อยลง และ**ไม่รบกวนผลของทอร์กลัพธ์ที่ได้จาก Parabolic Field นี้อีก**

เมื่อพิจารณาจากเหตุผลดังกล่าว จึงเลือกสนามแรงที่มาผสมผสานอีก 2 ชุด อันได้แก่

- สนามแรง Constant Field ที่ให้แรงเป็น

$$\hat{\mathbf{F}}(x,y) = \begin{bmatrix} -h \\ 0 \end{bmatrix}$$

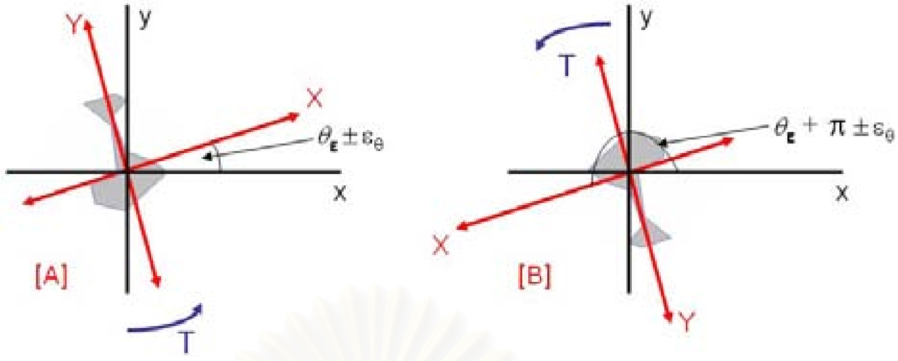
ซึ่งแรงลัพธ์จาก Constant Field นี้ จะมีทิศทางตรงข้ามกับแรงลัพธ์ตามสมการ (5.27) โดยจะมีขนาดมากหรือน้อย ขึ้นกับการกำหนดค่าพารามิเตอร์ h ของ Constant Field ทั้งนี้ ทอร์กลัพธ์เนื่องจาก Constant Field นี้มีค่าเป็น

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(x_c,y_c,\theta) &= \int_P\!\!\int \begin{bmatrix} X_\theta \\ Y_\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -h \\ 0 \end{bmatrix} dX\,dY \\ &= -\,h\int_P\!\!\int Y_\theta\, dX\,dY \;=\; 0 \end{aligned}$$

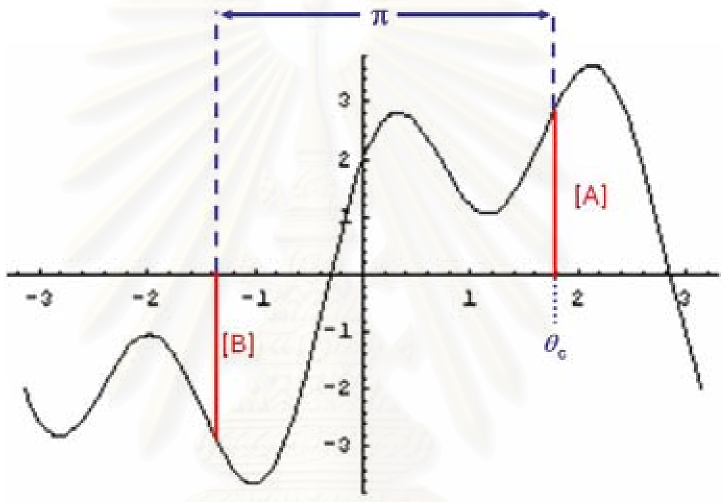
- สนามแรง Radial Field ที่ให้แรงตามสมการ (2.21) ซึ่ง Radial Field นี้ มีลักษณะเหมือนกับ Elliptic Fieldเพียงแต่ให้ $\xi = \eta = c$ ซึ่งด้วยการกำหนดค่าดังกล่าวนี้ ทำให้ทอร์กลัพธ์ของ Radial Field นี้เป็นศูนย์ อันเป็นผลมาจากการแทนค่า $\xi = \eta$ ลงในสมการ (5.6) เหลือแต่เพียงแรงลัพธ์ที่ดึงวัตถุเข้าสู่จุดศูนย์กลางสนามแรงตามสมการ (5.7) เพื่อช่วยดึงวัตถุ รวมถึงควบคุมการเคลื่อนที่ในแนวแกน Y ของระนาบสนามแรงเพื่อควบคุมค่าของ y_c ในสมการ (5.31) อีกด้วย

ดังนั้น เมื่อรวมกับสนามแรงอีก 2 ชุดที่เพิ่มลงไป จึงเรียกรวมสนามแรงทั้งหมดที่จะใช้ใน Step2 ของ Algorithm 3 เป็น **Parabolic, Radial & Constant Field** ซึ่งให้แรง ณ แต่ละจุดบนสนามแรงเป็น

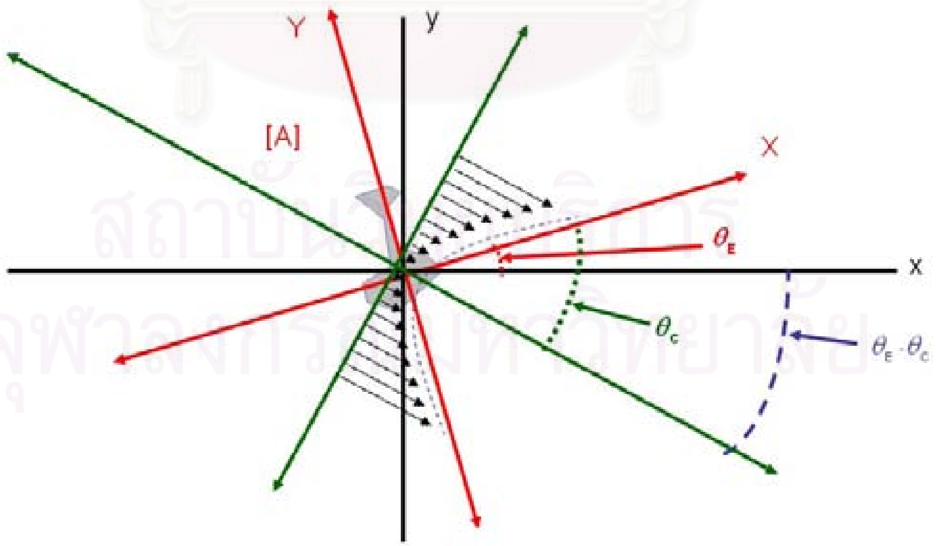
$$\hat{\mathbf{F}}(x,y) = \begin{bmatrix} ky^2 - h - cx \\ -cy \end{bmatrix}$$



(ก)



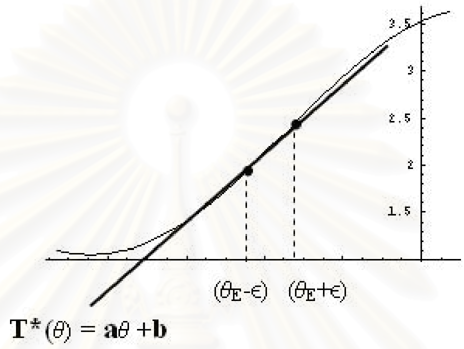
(ข)



(ค)

รูปที่ 5.12: ตัวอย่างการเลือกทิศทางของแกนระนาบสนามแรงใน Step2 (ก) ทิศทางที่วัตถุหยุดจาก Elliptic Field ใน Step1 (ข) ทิศทางของ Parabolic Field ที่ทำให้ได้ทอร์กลัพธ์ในทิศทางที่ต้องการ (ค) ทิศทางของแกนระนาบของ Parabolic Field ที่ได้

ในส่วนของการคำนวณเวลาในการจัดวัตถุด้วย Parabolic, Radial & Constant Field เพื่อให้วัตถุหมุนจนได้ทิศทางที่ต้องการนั้น แม้ว่าเราจะสามารถแทนค่าทอร์กลัพธ์จากสมการ (5.32) มาใช้ในการวิเคราะห์เวลาในการหมุนได้เหมือนกับกรณีของ Elliptic Field ก็ตาม แต่สมการที่ได้ก็ยังคงมีความซับซ้อนจนไม่สามารถหาผลเฉลยได้โดยง่าย อย่างไรก็ตาม เนื่องจากช่วงทิศทางที่เราสนใจสำหรับการจัดวัตถุด้วยสนามแรงชุดนี้นั้น คือช่วงของทิศทางที่คลาดเคลื่อนจากผลของ Elliptic Field ซึ่งมีช่วงกว้าง $2\epsilon_\theta$ ดังเช่นในตัวอย่างของวัตถุ ก่อนหน้านี้ ช่วงทิศทางที่เราสนใจจากรูป 5.12(ข) คือ $(\theta_c - \epsilon_\theta, \theta_c + \epsilon_\theta)$ เป็นต้น เราจึงสามารถใช้การประมาณเชิงเส้นเพื่อประมาณค่าทอร์กในช่วงทิศทางดังกล่าวให้อยู่ในรูปของ $T_L^*(\theta)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นได้ ดังตัวอย่างในรูปที่ 5.13



รูปที่ 5.13: ตัวอย่างการประมาณเชิงเส้นของทอร์กลัพธ์เนื่องจาก Parabolic, Radial & Constant Field

จากนั้น เราจึงใช้ค่าทอร์กที่ประมาณได้ดังกล่าว แทนค่าลงในสมการ (2.13) ได้เป็น

$$\begin{aligned} T_L^*(\theta) + T_d(\omega) &= I_z\alpha \\ (a\theta + b) - \frac{\tau I_z}{\rho}\omega &= I_z\alpha \end{aligned} \tag{5.34}$$

แทนค่า $\omega = \dot{\theta}$ และ $\alpha = \ddot{\theta}$ ลงในสมการ (5.34) และจัดรูปใหม่ จะได้เป็น

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{\tau}{\rho}\dot{\theta}(t) - \frac{a}{I_z}\theta(t) = -b \tag{5.35}$$

ซึ่งสมการ (5.35) นี้ สามารถหาผลเฉลยออกมาเป็นรูปทั่วไปได้เป็น

$$\theta(t) = -\frac{bI_z}{a} + C_0 e^{\frac{-\tau+\sqrt{\tau^2+\frac{4a\rho^2}{I_z}}}{2\rho}} + C_1 e^{\frac{-\tau-\sqrt{\tau^2+\frac{4a\rho^2}{I_z}}}{2\rho}} \tag{5.36}$$

โดยที่ C_0, C_1 เป็นค่าคงที่ ขึ้นอยู่กับค่าของ $\theta(0)$ และ $\dot{\theta}(0)$ ทั้งนี้ เนื่องจากเป้าหมายคือการหาเวลาที่ทิศทางชองวัตถุหมุนไปในช่วงทิศทางที่ต้องการ ดังเช่นในตัวอย่างของวัตถุ B ที่เคยยกตัวอย่างมาแล้วนั้น เป้าหมายคือหาเวลาที่ทำให้ $\theta(t) \geq \theta_1 + \epsilon_\theta$ ดังนั้น โดยการแทนค่า $\theta(t)$ ลงในสมการ (5.36) และโดยการเลือกค่า $\theta(0)$ ที่ไกลจากค่า $\theta(t)$ ที่ต้องการมากที่สุด ซึ่งในกรณีนี้คือ $\theta(0) = \theta_1 - \epsilon_\theta$ เราก็สามารถแก้สมการ (5.36) หาค่าเวลา t ที่ต้องการได้ในที่สุด ซึ่งการที่สามารถหาเวลาในการใช้งานได้นี้เอง ที่ทำให้ Parabolic, Radial & Cnnstant Field มีข้อดีเหนือกว่า Unit Radial, Radial & Constant Field ในการที่จะนำมาใช้งานเป็นสนามแรงใน Step2 ของ Algorithm 3

บทที่ 6

การทดสอบคุณสมบัติของชุดสนามแรงที่ออกแบบขึ้นใหม่

เพื่อเป็นการทดสอบประสิทธิภาพของชุดสนามแรงที่ออกแบบขึ้นใหม่ในบทที่ 5 ว่ามีประสิทธิภาพดีกว่าสนามแรงอื่นๆ ที่เคยมีการนำเสนอมี จึงจำเป็นต้องทำการทดสอบด้วยโปแกรมจำลองสถานการณ์การจัดวัตถุภายใต้ชุดสนามแรงที่ออกแบบใหม่นี้ โดยใช้เงื่อนไขและสภาวะแวดล้อมเดียวกีนกับที่ทำการทดลอบกับสนามแรงรูปแบบอื่นๆ ในบทที่ 4 ที่ผ่านมา ทั้งในแง่ของ configuration ที่ภาวะสมดุลที่เป็นไปได้ของวัตถุ และในแง่ของเวลาที่ใช้ในการเข้าสู่ภาวะสมดุลด้วย

6.1 การตั้งค่าพารามิเตอร์ต่างๆ สำหรับชุดสนามแรงที่ออกแบบใหม่

อนึ่ง ในการจัดวัตถุด้วยชุดสนามแรงที่ออกแบบใหม่นี้ ได้ทำการกำหนดพารามิเตอร์ของชุดสนามแรงตาม Algorithm 3 ในเบื้องต้นเป็นดังนี้ คือ

- **Step1 :** ค่าพารามิเตอร์สำหรับ Elliptic Field ให้ $\xi = 2, \eta = 1$
- **Step2 :** สำหรับ Parabolic, Radial & Constant Field นั้น
  - ส่วน Parabolic Field ให้ $k = 0.01$;
  - ส่วน Radial Field ให้ $c = 1$;
  - ส่วน Constant Field ให้ $h = 20$;
- **Step3 :** ค่าพารามิเตอร์สำหรับ Elliptic Field ให้ $\xi = 1, \eta = 2$ (ซึ่งจะทำให้ได้ Elliptic Field ที่มีทิศทางต่างจาก Step1 อยู่ $\frac{\pi}{2}$ นั่นเอง) นอกจากนี้ ด้วยการกำหนดพารามิเตอร์ดังนี้ ทำให้เราทราบว่าทิศทาง configuration ที่เป็นไปได้ของวัตถุ จะเป็นไปตามรูปที่ 4.2 ในการทดสอบ Elliptic Field ในบทที่ 4 นั่นเอง
- ค่าความคลาดเคลื่อนของ configuration ที่ยอมรับได้ มีค่าเป็น

$$\epsilon_x \;=\; \epsilon_y \;=\; \epsilon_\theta \;=\; 0.0001$$

โดยการเลือกทิศทางของ configuration ที่ต้องการสำหรับ Elliptic Field ใน Step3 จาก 2 configurations ที่เป็นไปได้ เราสามารถหาค่าทิศทางของแกนระนาบของ Parabolic, Radial & Constant Field ตลอดจนค่าเวลา t_1, t_2 ที่จะใช้ใน Algorithm 3 ซึ่งสามารถหาค่าออกมาได้ผลดังที่ปรากฏในตาราง 6.1 ซึ่งจะเห็นว่า ค่าเวลา t_1 ที่ได้สำหรับทุกวัตถุนั้นมีค่าเท่ากันอย่างน่าแปลกใจ ทั้งนี้ ค่าดังกล่าวคือค่าเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ภายใต้ Elliptic Field ($t_{translate}$) ซึ่งไม่ขึ้นกันรูปร่างวัตถุ และสำหรับพื้นที่สนามแรงในการทดสอบทั้งหมดในวิทยานิพนธ์นี้นั้น (200×200 ตารางหน่วย) ค่าของ $t_{translate}$ จะมีค่ามากกว่าค่าเวลาที่ใช้ในการหมุนของวัตถุภายใต้ Elliptic Field (t_{rotate}) เสมอสำหรับทุกวัตถุ

ตารางที่ 6.1: ค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ที่ใช้ในการจัดวัตถุด้วยชุดสนามแรงแบบใหม่

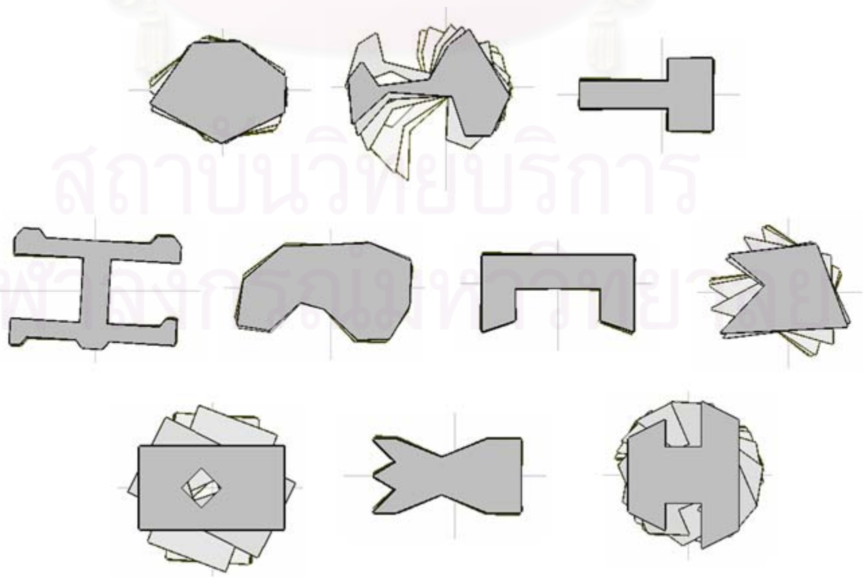
วัตถุ	ค่าเวลา t_1 (s)	ทิศทางของแกนระนาบใน Step2 (องศา)	ค่าเวลา t_2 (s)
A	$109.764 \approx 110$	95.0	0.016
B	$109.764 \approx 110$	315.0	0.004
C	$109.764 \approx 110$	300.0	0.005
D	$109.764 \approx 110$	280.0	0.005
E	$109.764 \approx 110$	275.0	0.008
F	$109.764 \approx 110$	270.0	0.001
G	$109.764 \approx 110$	95.0	0.006
H	$109.764 \approx 110$	190.0	0.015
I	$109.764 \approx 110$	290.0	0.008
J	$109.764 \approx 110$	230.0	0.005

6.2 การทดสอบการจัดวัตถุและผลที่ได้

จากการตั้งค่าพารามิเตอร์ของชุดสนามแรงแบบใหม่ดังที่กล่าวไปแล้ว จึงทำการทดสอบการจัดวัตถุ โดยใช้เงื่อนไขภาวะแวดล้อม ตลอดจนการสุ่ม configuration เริ่มต้นในลักษณะเดียวกันกับการทดสอบสนามแรงรูปแบบอื่นๆ ในบทที่ 4

ซึ่งจากผลการทดสอบที่ได้ พบว่า

- **ในแง่ของ configuration ที่เป็นไปได้ที่ภาวะสมดุล** พบว่า วัตถุเข้าสู่ภาวะสมดุลที่ configuration เดียวกันทุกกรณีการสุ่ม configuration เริ่มต้นที่ทำการทดสอบ ดังตัวอย่างในรูปที่ 6.1 ทั้งนี้ configuration ดังกล่าว ก็คือ 1 ใน 2 configurations ที่เป็นไปได้ของ Elliptic Field ใน Step3 นั่นเอง ซึ่งผลที่ได้นี้ ดีกว่ากรณีของ Elliptic Field และ Unit Radial & Constant Field เดิม และเทียบเท่ากับกรณีของ Unit Radial, Radial & Constant Field เลยทีเดียว



รูปที่ 6.1: รูปแบบ configuration ของวัตถุที่ภาวะสมดุลจากการจัดวัตถุด้วยชุดสนามแรงที่ออกแบบใหม่

- **ในแง่ของเวลาที่ใช้ในการเข้าสู่ภาวะสมดุล** โดยการเก็บข้อมูลจากการทดสอบและนำมาประมวลผล ดังผลที่ปรากฏในตารางที่ 6.2 ซึ่งจะเห็นว่า เวลาที่วัตถุใช้ในการเข้าสู่ภาวะสมดุลมีค่าแทบจะใกล้เคียงกันสำหรับทุกวัตถุเลยทีเดียว กล่าวคือ มีค่าประมาณ $2t_1 + t_2$ ซึ่งเร็วกว่ากรณีของ Unit Radial & Constant Field และกรณีของ Unit Radial, Radial & Constant Field มากอย่างเห็นได้ชัด

ตารางที่ 6.2: เวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการจัดวัตถุด้วยชุดสนามแรงที่ออกแบบใหม่

วัตถุ	**เวลาที่ใช้เฉลี่ย** (s)	**S.D.**
A	186.618	0.062
B	194.563	0.075
C	185.210	0.066
D	187.108	0.061
E	192.252	0.080
F	197.695	0.075
G	186.426	0.053
H	201.987	0.066
I	189.946	0.059
J	202.169	0.064

บทที่ 7

สรุปการวิจัยและข้อเสนอแนะ

7.1 สรุปผลการวิจัย

จากการทดสอบคุณสมบัติและประสิทธิภาพของสนามแรงที่เคยมีการนำเสนอมาทั้ง 3 รูปแบบ อันได้แก่ Elliptic Field [9], Unit Radial & Constant Field [10] และ Unit Radial, Radial & Constant Field [12] โดยใช้โปรแกรมจำลองสถานการณ์ในบทที่ 4 นั้น ทำให้เราได้ทราบแง่มุมเพิ่มเติมในแง่ของเวลาที่ใช้ในการจัดวัตถุเปรียบเทียบกันระหว่างสนามแรงทั้ง 3 รูปแบบ ซึ่งไม่เคยมีการนำเสนอที่ใดมาก่อน และทำให้สามารถสรุปคุณสมบัติเปรียบเทียบระหว่างกันนั้นออกมาได้ดังที่ปรากฏในตาราง 7.1

ตารางที่ 7.1: สรุปคุณสมบัติของสนามแรงแต่ละรูปแบบที่เคยมีการนำเสนอมา

ประเภทของ สนามแรง	**จำนวน Configuration ที่เป็นไปได้**	ค่าของ Configuration ที่ภาวะสมดุล	เวลาที่ใช้ ในการจัดวัตถุ
Elliptic	2 เสมอ	ทำนายได้ล่วงหน้า	ค่อนข้างเร็ว
Unit Radial & Constant	1 หรืออาจมากกว่า	ทำนายไม่ได้	ช้า
Unit Radial, Radial & Constant	1 เสมอ	ทำนายได้ล่วงหน้า	ช้ามาก

นอกจากการเปรียบเทียบคุณสมบัติของสนามแรงที่เคยมีมาดังกล่าวแล้ว การวิจัยนี้ยังได้นำเสนอชุดสนามแรงที่ออกแบบขึ้นใหม่ ตามที่ได้อธิบายในรายละเอียดไปในบทที่ 5 ซึ่งประกอบไปด้วย :

- สนามแรง Elliptic Field 2 ชุด ที่มีทิศทางของแกนระนาบต่างกัน $\frac{\pi}{2}$ และ
- สนามแรง Parabolic, Radial & Constant Filed อีก 1 ชุด

จาก ผล การ ทดสอบ ด้วย โปรแกรม จำลอง สถานการณ์ สำหรับ การ จัด วัตถุ ภายใต้ ชุด สนามแรง ที่ออกแบบขึ้นนี้ในบทที่ 6 ปรากฏเป็นที่ชัดเจนว่า การจัดวัตถุโดยใช้การผสมผสานสนามแรงเชิงเวลาที่ได้นำเสนอไป สามารถดึงเอาข้อดีของสนามแรงแต่ละรูปแบบที่นำมาใช้ มาเพิ่มประสิทธิภาพในการจัดวัตถุได้เป็นอย่างดี ทำให้ได้ชุดของสนามแรงที่สามารถรับประกัน configuration ที่วัตถุจะหยุดที่ภาวะสมดุลให้เหลือรูปแบบเดียวซึ่งสามารถทำนายได้ล่วงหน้า นอกจากนี้ เมื่อเปรียบเทียบกับผลการทดสอบสนามแรงรูปแบบอื่นๆ ที่มีอยู่ในบทที่ 4 โดยเฉพาะอย่างยิ่งกับ Unit Radial, Radial & Constant Field ซึ่งให้คุณสมบัติในเรื่องของ configuration ที่เป็นไปได้ที่ภาวะสมดุลเท่าเทียมกันแล้ว จะเห็นว่า ชุดสนามแรงที่ออกแบบใหม่ ใช้เวลาในการจัดวัตถุเข้าสู่ภาวะสมดุลน้อยกว่ามาก

ดังนั้น จึงสามารถสรุปได้ว่า ชุดสนามแรงที่ออกแบบใหม่นี้ มีประสิทธิภาพดีกว่าสนามแรงรูปแบบ

อื่นๆ ที่เคยมีการนำเสนอมา ทั้งในแง่ของ configuration ของวัตถุที่ภาวะสมดุลที่เป็นไปได้ และในแง่ของเวลาที่ใช้ในการจัดวัตถุจนเข้าสู่ภาวะสมดุล

7.2 ข้อเสนอแนะ

ในการออกแบบชุดสนามแรงแบบใหม่ที่ได้จากการวิจัยนี้นั้น จากการทดสอบในบทที่ 6 ยังมีจุดที่น่าสนใจอยู่จุดหนึ่ง กล่าวคือ ค่า t_2 ที่ได้จากการคำนวณโดยการแก้สมการ (5.36) แล้วนำมาใช้ในการใช้งานนั้นมีค่าน้อยมาก ซึ่งสำหรับบางวัตถุนั้น จะเห็นว่ามีค่าน้อยยิ่งกว่า 0.01 วินาที ซึ่งในทางปฏิบัติถ้าหากมีการนำชุดสนามแรงนี้ไปใช้งานจริงแล้ว การสั่งการให้สนามแรงใน Step2 ทำงานในช่วงเวลาที่น้อยมากๆ ดังกล่าวอาจจะทำได้ยากอันเนื่องมาจากข้อจำกัดในเรื่องของเวลาในการตอบสนองของเครื่องมือที่ให้กำเนิดแรงก็เป็นได้

ดังนั้น จึงยังอาจทำการศึกษาเพิ่มเติมในการปรับปรุงการกำหนดการทำงานของสนามแรงใน Step2 ดังกล่าวนี้ เช่น การวิเคราะห์ผลในกรณีที่การปล่อยให้สนามแรงใน Step2 ทำงานนานกว่าเวลาที่กำหนด หรือการใช้สนามแรงอื่นๆ เข้าช่วยในการทำงาน เป็นต้น

รายการอ้างอิง

[1] K. Y. Goldberg. Orienting polygonal parts without sensors. Algorithmica 10(1993): 201-225.

[2] K.-F. Böhringer, B. R. Donald, and N. C. MacDonald. Sensorless manipulation using massively parallel microfabricated actuator array. In Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 826--833, 1994.

[3] K.-F. Böhringer, B. R. Donald, and N. C. MacDonald. What programmable vector fields can (and cannot) do: Force field algorithms for mems and vibratory parts feeders. In Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 822--830, 1996.

[4] K.-F. Böhringer, B. R. Donald, and N. C. MacDonald. Upper and lower bounds for programmable vector fields with applications to mems and vibratory plate parts feeders. Algorithms for Robotic Motion and Manipulation (1997): 255-276.

[5] J. Luntz, W. Messner, and H. Choset. Velocity field design for parcel manipulation on the virtual vehicule, a discrete distributed actuator array. Robotics: The Algorithmic Perspective (1998): 35-47.

[6] J. Luo and L. Kavraki. Part assembly using static and dynamic force fields. In Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2000.

[7] H. Moon and J. Luntz. Distributed manipulation by superposition of logarithmic-radial potential fields. In Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2002.

[8] A. Sudsang. Sensorless sorting of two parts in the plane using programmable force fields. In Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp. 1784--1789, 2002.

[9] L. Kavraki. Part orientation with programmable vector fields: Two stable equilibria for most parts. In Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 2446--2451, 1997.

[10] F. Lamiraux and L. Kavraki. Positioning and orienting a class of symmetric parts using a combination of a unit-radial and a constant force fields. In Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 177--183, 2000.

[11] K.-F. Böhringer, B. R. Donald, L. Kavraki, and F. Lamiraux. Part orientation with one or two stable equilibria using programmable vector fields. IEEE Transactions on Robotics and Automation 16(2)(2000): 157-170.

[12] A. Sudsang and L. Kavraki. A geometric approach to designing a programmable force field with a unique stable equilibrium for parts in the plane. In Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 1079--1085, 2001.

[13] A. Sudsang and L. Kavraki. Part orientation with a force field: Orienting multiple shapes using a single field. In Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp. 208--213, 2001.

[14] K. Varsos, H. Moon, and J. Luntz. Generation of quadratic force fields from potential flow fields for distributed manipulation. In Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2005.

[15] H. Moon and J. Luntz. Synthesis bounds for distributed manipulation using logarithmic-radial potential fields. In Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2003.

[16] พีม พิพัฒนสมพร และ พีรพงษ์ ธนกิจ. โปรแกรมจำลองเพื่อศึกษาพฤติกรรมการจัดเรียงวัตถุบนระนาบภายใต้สนามแรงที่โปรแกรมได้แบบไม่เชิงเส้น. โครงงานวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย (2546).

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายพีรพงษ์ ธนกิจ เกิดเมื่อวันที่ 10 ตุลาคม 2524 ที่จังหวัดพังงา สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต (เกียรตินิยม อันดับ สอง) สาขาวิชา วิศวกรรม คอมพิวเตอร์ จาก คณะ วิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2546 และเข้าศึกษาในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ ณ ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2547

มีความสนใจในงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับหุ่นยนต์และระบบอัตโนมัติ โดยเฉพาะงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับระบบจัดวัตถุที่ใช้หลักการของสนามแรงที่โปรแกรมได้ในการทำงาน