

ห้องสมุดงานวิจัย สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ



E46221

**EXISTENCE OF ROSA-TYPE LABELINGS OF SOME
CLASSES OF δ -REGULAR GRAPHS**

WANNASRI WANNASIT

**DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN MATHEMATICS**

**THE GRADUATE SCHOOL
CHIANG MAI UNIVERSITY
DECEMBER 2011**

600256079

ห้องสมุดงานวิจัย สำนักงานคณะกรรมการการวิจัยแห่งชาติ



**EXISTENCE OF ROSA-TYPE LABELINGS OF SOME
CLASSES OF 3-REGULAR GRAPHS**



WANNASIRI WANNASIT

**A THESIS SUBMITTED TO THE GRADUATE SCHOOL IN
PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS
FOR THE DEGREE OF
DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN MATHEMATICS**

**THE GRADUATE SCHOOL
CHIANG MAI UNIVERSITY
DECEMBER 2011**

**EXISTENCE OF ROSA-TYPE LABELINGS OF SOME
CLASSES OF 3-REGULAR GRAPHS**

WANNASIRI WANNASIT

THIS THESIS HAS BEEN APPROVED
TO BE A PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS
FOR THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN MATHEMATICS

EXAMINING COMMITTEE

Sirasak Leeratanavalee..... CHAIRPERSON
Assoc. Prof. Dr. Sorasak Leeratanavalee

Saad El Zanati..... MEMBER
Prof. Dr. Saad El-Zanati

Narong Punnim..... MEMBER
Prof. Dr. Narong Punnim

Srichan Arworn..... MEMBER
Asst. Prof. Dr. Srichan Arworn

Sayan Punma..... MEMBER
Dr. Sayan Punma

Vites Longani..... MEMBER
Assoc. Prof. Dr. Vites Longani

THESIS ADVISORY COMMITTEE

Sayan Punma..... ADVISOR
Dr. Sayan Punma

Saad El Zanati..... CO-ADVISOR
Prof. Dr. Saad El-Zanati

Srichan Arworn..... CO-ADVISOR
Asst. Prof. Dr. Srichan Arworn

Narong Punnim..... CO-ADVISOR
Prof. Dr. Narong Punnim

18 December 2011

© Copyright by Chiang Mai University

ACKNOWLEDGEMENTS

This thesis would not have been possible without the support of many people. I wish to express my gratitude to my supervisor, Dr. Sayan Punma; without his knowledge and assistance this study would not have been successful.

I would like to express my deepest thanks to my adviser, Professor Saad I. El-Zanati, for suggesting these research questions, and for his guidance and encouragement which enabled me to carry out this study successfully. I feel fortunate for having had the opportunity to work with him.

My deepest gratitude to Asst. Prof. Srichan Arworn and to Prof. Narong Punnim who were abundantly helpful and offered invaluable assistance.

I would like to express special appreciation to my dear friend, Mr. Ryan Bunge. Without his generous help, this work could not have been completed.

This work contains a number of improvements based on comments and suggestions provided by Assoc. Prof. Sorasak Leeratanavaleeand and Assoc. Prof. Vites Longani. It is my pleasure to express my sincere thanks for their generous assistance.

Thanks are also extended to my lovely family, who always stood by me with their love and encouragement. Moreover, I would like to thank all my friends for their help.

Finally, I extend my sincere thanks to the Graduate School at Chiang Mai University, to the Department of Mathematics at Illinois State University, and to the Development and Promotion of Science and Technology Talents Project (DPST.) which made my doctoral study possible.

Wannasiri Wannasit

ชื่อเรื่องวิทยานิพนธ์	การมีอยู่จริงของการกำหนดค่าจุดแบบโรซาของกราฟ 3-เรกูลาร์บางคลาส	
ผู้เขียน	นางสาววรรณศิริ วรรณสิทธิ์	
ปริญญา	วิทยาศาสตรดุษฎีบัณฑิต (คณิตศาสตร์)	
คณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	อ.ดร. สายัญ ปันมา	อาจารย์ที่ปรึกษาหลัก
	ศ.ดร. ชาด เอล-ซานาติ	อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม
	ศ.ดร. ณรงค์ ปันนัม	อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม
	ผศ.ดร. ศรีจันทร์ อวรรณ	อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม

บทคัดย่อ

E 46221

การกำหนดค่าจุดให้กราฟ G คือการกำหนดจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบให้กับจุดของกราฟโดยมีเงื่อนไข การกำหนดค่าจุดให้กราฟได้รับการเผยแพร่เป็นครั้งแรกโดยโรซาในช่วงปี ค.ศ.1960 โรซาแสดงให้เห็นว่าการกำหนดค่าจุดแบบพื้นฐานให้กราฟ G ซึ่งมี n เส้นทำให้ได้วัฏจักร G -decomposition ของกราฟ K_{2n+1} ในขณะที่การกำหนดค่าจุดแบบมีเงื่อนไขทำให้ได้วัฏจักร G -decomposition ของกราฟ K_{2nx+1} สำหรับทุกจำนวนจริงบวก x ในงานวิทยานิพนธ์นี้ได้ศึกษาการมีอยู่ของการกำหนดค่าจุดแบบโรซาของกราฟคิวบิก พบว่าปริซึมคู่ บันไดโมเบียสคู่และกราฟคิวบิกเชื่อมโยงสองส่วนจนถึง 14 จุดมีการกำหนดค่าจุดแบบ free α เราพบว่าปริซึมคู่ บันไดโมเบียสคู่และกราฟคิวบิกเชื่อมโยงสามส่วนจนถึง 10 จุดมีการกำหนดค่าจุดแบบ ρ -tripartite เราแสดงให้เห็นว่าทุกๆกราฟคิวบิกจนถึง 12 จุดยกเว้นกราฟ $2K_4$ และ $3K_4$ มีการกำหนดจุดแบบ graceful และเราได้เสนอการกำหนดจุดแบบใหม่สำหรับกราฟย่อยสองส่วน G ของกราฟ ${}^2K_{n+1}$ ซึ่งมีเส้น n เส้นและเราแสดงให้เห็นว่าการกำหนดค่าจุดแบบใหม่นี้ทำให้ได้วัฏจักร G -decomposition ของกราฟ ${}^2K_{nx+1}$ สำหรับทุกจำนวนจริงบวก x และเราพบว่าทุกๆวงกลมคู่ที่มีเส้นคู่กลับมีการกำหนดค่าจุดแบบใหม่นี้

Thesis Title	Existence of Rosa-type Labelings of Some Classes of 3-regular Graphs	
Author	Miss Wannasiri Wannasit	
Degree	Doctor of Philosophy (Mathematics)	
Thesis Advisory Committee	Dr. Sayan Punma	Advisor
	Prof. Dr. Saad El-Zanati	Co-advisor
	Prof. Dr. Narong Punnim	Co-advisor
	Asst. Prof. Dr. Srichan Arworn	Co-advisor

ABSTRACT

E 46221

A labeling of a graph G is an assignment of nonnegative integers to the vertices of G subject to certain conditions. A hierarchy of graph labelings was introduced by Rosa in the late 1960s. Rosa showed that certain basic labelings of a graph G with n edges yielded cyclic G -decompositions of K_{2n+1} while other stricter labelings yielded cyclic G -decomposition of K_{2nx+1} for all positive integers x . Several other labelings have since been added. In this thesis, we conduct a systemic investigation of various Rosa-type labelings of cubic graphs. We find free α -labelings of even prisms, odd Möbius ladders, and of connected cubic bipartite graphs of order at most 14. We find ρ -tripartite labelings of odd prisms, even Möbius ladders, and of connected cubic tripartite graphs of order at most 10. We show that every cubic graph of order at most 12, other than $2K_4$ and $3K_4$, is graceful. We also introduce a new 2-fold labeling for bipartite subgraphs G of ${}^2K_{n+1}$ that have size n and show that such a labeling yields cyclic G -decompositions of ${}^2K_{nx+1}$ for every positive integer x . We show that all even cycles with alternating double-edges admit this new labeling.

TABLE OF CONTENTS

	Page
Acknowledgements	iii
Abstract in Thai	iv
Abstract in English	v
Chapter 1 Introduction	1
1.1 Prologue	1
1.2 Basic Notation and Terminology	2
1.3 Graph Decompositions and Graph Designs	8
Chapter 2 Review of the Literature	12
2.1 Rosa's Original Labelings	12
2.1.1 ρ -labelings	12
2.1.2 σ -labelings	13
2.1.3 β -labelings	14
2.1.4 α -labelings	16
2.2 Other Rosa-Type Labelings	17
2.2.1 Ordered Labelings	18
2.2.2 γ -labelings	19
2.2.3 ρ -tripartite Labelings	20
2.3 Some of the Known Results on Labelings	22
Chapter 3 Main Results	25
3.1 Additional Notation and Terminology	25
3.2 Free α -labelings of Some Cubic Graphs	27
3.2.1 Free α -labelings of Bipartite Prisms	29

3.2.2	Free α -labelings of Bipartite Möbius Ladders	39
3.2.3	Free α -labelings of Bipartite Cubic Graphs of Small Order	49
3.2.4	Concluding Remarks	49
3.3	ρ -tripartite Labelings of Some Cubic Graphs	52
3.3.1	ρ -tripartite Labelings of Odd Prisms	52
3.3.2	ρ -tripartite Labelings of Even Möbius Ladders	63
3.3.3	ρ -tripartite labelings of Tripartite Cubic Graphs of Small Order	77
3.3.4	Concluding Remarks	77
3.4	On Graceful Cubic Graphs	81
3.5	On 2-fold Rosa-Type Labelings	95
3.5.1	2-Fold ρ^+ -Labeling of Cycle with Double Edges	101
Chapter 4 Summary and Open Problems		134
4.1	Summary	134
4.2	Open Problems	135
Bibliography		137
Vita		142