รายงานการวิจัย

เรื่อง

การปรับช่วงความเชื่อมั่นสำหรับรากที่สูงที่สุดของกระบวนการอัตตะสหสัมพันธ์อันดับหนึ่ง

Adjusted Confidence Intervals for the largest autoregressive root in AR(1) process

อรไท พลเสน
สอาด นิวิศพงศ์
ผู้วิจัย

งานวิจัยนี้ได้รับการสนับสนุนจากงบประมาณแผ่นดินคณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ
ประจำปี 2549

หัวข้อวิจัย : **การปรับช่วงความเชื่อมั่นสำหรับรากที่สูงที่สุดของกระบวนการอัตตะสหสัมพันธ์อันดับหนึ่ง**

ผู้วิจัย : อรไท พลเสน และรองศาสตราจารย์สอาด นิวิศพงศ์

ปีงบประมาณ : 2549

ผู้วิจัยได้สร้างช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ในตัวแบบอัตตะสหสัมพันธ์อันดับหนึ่ง(First-Order-Autoregressive Model: AR(1)) เมื่อไม่ทราบค่าเฉลี่ย โดยการปรับช่วงความเชื่อมั่นของตัวประมาณ Cauchy ซึ่งเสนอโดย So และ Shin (1999, *Econometric Theory* 15, 165-176) เปรียบเทียบกับช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ในตัวแบบอัตตะสหสัมพันธ์อันดับหนึ่งจาก Andrews (1993, *Econometrica* 61, 139-165) โดยใช้เกณฑ์เปรียบเทียบค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงเมื่อ ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมของช่วงความเชื่อมั่นสำหรับพารามิเตอร์ทั้งสองมีค่าอย่างน้อย $1-\alpha$.

Project Title: Prediction Intervals for an Unknown Mean AR(1) Process Using Combined Predictor.

Researcher: Orathai Polsen and Associate Professor Sa-aat Niwitpong.

Budget Year: 2006.

Confidence interval for an autoregressive parameter of an unknown mean first-order autoregressive (AR(1)) process, based on Cauchy estimator, has been proposed by So and Shin (1999, *Econometric Theory* 15, 165-176). These authors used the standard normal limiting of Cauchy estimator to construct the confidence interval for the autoregressive parameter of an AR(1) process. They also argued that their proposed confidence interval has shorter average length than those of Andrews (1993, *Econometrica* 61, 139-165) when the autoregressive parameter approaches one. However, in this paper, we argued, based on Kabaila (1998, *Econometric Theory* 14, 463-482), that two confidence intervals can be compared solely based on their average lengths when these confidence intervals have minimum coverage probabilities at least $1-\alpha$. Monte Carlo simulation results are given to show the relative efficiencies of their average lengths of these confidence intervals.

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับทุนสนับสนุนจากงบประมาณแผ่นดินคณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ ประจำปี 2549 ผู้วิจัยจึงขอขอบคุณพระคุณเป็นอย่างสูง

สารบัญ

บทที่ 1

บทนำ

1.1. ความสำคัญ แนวคิด ความเป็นมาของปัญหา

พิจารณากระบวนการ $\{ y_t \}$ เมื่อ

$$y_t - \mu = \rho(y_{t-1} - \mu) + e_t \qquad (1)$$

โดยที่ $\rho \in (-1, 1]$ และ e_t มีการแจกแจงอิสระและเหมือนกัน (independent and identical) ของการแจก แจงปกติที่มีพารามิเตอร์ $\mu = 0$ และความแปรปรวน σ^2 ($N(0, \sigma^2)$)
การศึกษาช่วงความเชื่อมั่นของ ρ เมื่อ ρ เข้าใกล้ 1 นับว่ามีความสำคัญทางด้านเศรษฐมิติ (Econometric) และการวิเคราะห์อนุกรมเวลา (Time Series Analysis)เนื่องจากมีการค้นพบว่า ข้อมูลด้านการเงิน (Financial Data) มีการแจกแจงของโมเดล 1 เมื่อ กรณีที่ $\rho \rightarrow 1$ กรณีที่ ρ =1 เรียกการศึกษานี้ว่า รากหนึ่งหน่วย (Unit root) ผู้อ่านที่สนใจ สามารถศึกษาได้จาก Nelson and Plosser(1982)

การศึกษาช่วงความเชื่อมั่นของ ρ เมื่อ ρ เข้าใกล้ 1 มี 3 แนวทางดังนี้

<u>แนวทางที่ 1</u> Stock (1991) Elliott and Stock (2001)สร้างช่วงความเชื่อมั่นสำหรับ ρ โดยการแปลงการทดสอบที่มีอำนาจสูงสุด (Most powerful test) สำหรับการทดสอบสมมุติฐานว่าง (H_0 = 1) ให้เป็นช่วงความเชื่อมั่นของ ρ วิธีการนี้ใช้แนวคิดว่า เนื่องจากโมเดล 1 เมื่อ ρ เข้าใกล้ 1 พารามิเตอร์ ρ ไม่มีการแจกแจงปกติ (Chan and Wei (1987)) จึงทำให้ไม่สามารถใช้ตัวสถิติ t สร้างช่วงความเชื่อมั่นของ ρ ได้ ทั้ง Stock (1991) Elliott and Stock (2001) จึงใช้ตัวสถิติทดสอบ สมมุติฐานว่าง H_0: ρ = 1 แล้วแปลงตัวสถิตินี้ให้เป็นช่วงความเชื่อมั่นของ ρ แทน วิธีการนี้ถึงแม้จะเป็นวิธีการที่ดี แต่เป็นวิธีการที่ยุ่งยาก ประกอบกับตัวสถิติทดสอบ H_0: ρ = 1 มีอำนาจการทดสอบต่ำ จึงทำให้ช่วงความเชื่อมั่นของ ρ มีค่าความน่าจะเป็นครอบคลุม Coverage probability) น้อยกว่า 1- α เมื่อ α คือ ระดับนัยสำคัญ

<u>แนวทางที่ 2</u> Andrew (1993) ค้นพบช่วงความเชื่อมั่นของ ρ โดยใช้ตัวสถิติไม่เอนเอียงของค่ามัธยฐาน (Median unbiased estimate) การศึกษาวิธีการนี้ใช้การจำลองการแจกแจงของพารามิเตอร์ ρ แล้ว หาค่าเปอร์เซนไทล์ที่ 0.10 และ0.90 ซึ่งทำให้ค่าที่แท้จริง (Exact) ของ
การใช้วิธีนี้หาช่วงความเชื่อมั่นสำหรับ ρ ค่อนข้างซับซ้อนเนื่องจากค่ามัธยฐานของ ρ ใช้วิธีการของ Imhof (1961) ซึ่งค่อนข้างยุ่งยากเนื่องจากต้องคำนวณค่า Quadratic form ของการแจกแจงปกติซึ่งมีค่าพารามิเตอร์ μ และ σ^2 ประกอบกับ Andrew (1993) รายงานเฉพาะช่วงความเชื่อมั่น 90% ของ ρ เท่านั้น จึงไม่สามารถหาช่วงความเชื่อมั่นสำหรับ ρ ในช่วงอื่นๆได้

<u>แนว</u>ทางที่ 3 So and Shin (1999) เสนอแนวทางสร้างช่วงความเชื่อมั่นของ ρ โดยการใช้ตัวประมาณโคชี (Cauchy estimator) ทั้งคู่พิสูจน์ว่า ตัวประมาณนี้เมื่อ $\rho \to 1$ มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน ดังนั้นช่วงความเชื่อมั่นสำหรับ ρ จึงสามารถใช้การแจกแจงปกติมาตรฐานสร้างได้เหมือนกรณีทั่วไป วิธีการนี้ง่ายและสามารถสร้างช่วงความเชื่อมั่นสำหรับ ρ ได้ทุกค่าระดับนัยสำคัญของ α แต่จากการทดลองของ So and Shin พบว่า ค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมของช่วงการประมาณของ ρ นี้ต่ำกว่า 90% เมื่อเทียบกับวิธีการของ Andrew (1993) แต่ว่าค่าเฉลี่ยขนาดความกว้างของช่วง (Expected length) ต่ำกว่าวิธีการของ Andrew(1993)เล็กน้อย

จากการศึกษาวิธีการสร้างช่วงความเชื่อมั่นสำหรับ ρ เมื่อ $\rho \to 1$ ผู้เขียนพบว่า วิธีการของ So and Shin (1999) เป็นวิธีการที่ดีและง่ายต่อการนำไปใช้เชิงปฏิบัติทั่วไป จึงเสนอวิธีปรับช่วงความเชื่อมั่นของ ρ โดยวิธีการของ So and Shin ให้มีค่าความน่าจะเป็นอย่างน้อย $1-\alpha$ แล้วจึงใช้เกณฑ์ค่าเฉลี่ยขนาดความกว้างของช่วงเป็นดัชนีวัดช่วงความเชื่อมั่นสำหรับ ρ เมื่อ $\rho \to 1$ ซึ่งวิธีการนี้เสนอโดย Paul Kabaila (1998,2004)

1.2. วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย

1. เพื่อศึกษาการวิจัยพื้นฐานการสร้างช่วงความเชื่อมั่นสำหรับ ρ ใหม่โดยเมื่อ $\rho \to 1$ ของกระบวนการอัตตะสหสัมพันธ์อันดับ 1 (AR (1))
2. เพื่อศึกษาการวิจัยพื้นฐานการสร้างช่วงความเชื่อมั่นสำหรับ ρ ใหม่โดยการปรับช่วงเชื่อมั่นสำหรับ ρ ของ So และ Shin (1999)
3. เพื่อศึกษาความน่าจะเป็นครอบคลุมและค่าเฉลี่ยขนาดความกว้างของช่วงของความเชื่อมั่นใหม่ โดยการเขียนซอฟแวร์ S-PLUS โปรแกรม

1.3. ทฤษฎีหรือกรอบแนวความคิดและการวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยการปรับช่วงความเชื่อมั่นของ ρ ในโมเดล 1 ในที่นี้จะพิจารณาเฉพาะช่วงความเชื่อมั่น ρ ของ So and Shin(1999) ซึ่งได้เสนอช่วงความเชื่อมั่น 90% สำหรับ ρ คือ

$$[\ \hat{\rho}_c - z_{\frac{\alpha}{2}}\,\text{s.e}(\hat{\rho}_c),\ \hat{\rho}_c + z_{\frac{\alpha}{2}}\,\text{s.e}(\hat{\rho}_c)\ ] \qquad (2)$$

เมื่อ $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645$, $\hat{\rho}_c$ คือตัวประมาณโคชี ของ ρ ซึ่งกำหนดโดย

$$\hat{\rho}_c = \frac{\sum_{t=2}^{n}(y_t - \bar{y}_{t-1})sign(y_{t-1} - \bar{y}_{t-1})}{\sum_{t=2}^{n}|y_{t-1} - \bar{y}_{t-1}|}$$

$$\mathrm{s.e}(\hat{\rho}_c) = n^{1/2}\hat{\sigma} / \sum_{t=2}^{n} |y_{t-1} - \bar{y}_{t-1}|$$

$$\hat{\sigma} = \sum_{t=2}^{n} (y_t - (\hat{\alpha} + \hat{\sigma} y_{t-1}))^2 / (n-2)$$

ช่วงความเชื่อมั่นที่เสนอใหม่ คือ การปรับช่วงการประมาณค่า ของ ของ So and Shin (1999) ซึ่งก็คือ

$$[\quad \hat{\rho}_c - c\ \mathrm{s.e}(\hat{\rho}_c),\ \hat{\rho}_c + c\ \mathrm{s.e}(\hat{\rho}_c)\ ] \qquad (3)$$

โดยในที่นี้ c เป็นค่าคงที่ซึ่งทำให้ช่วงการประมาณค่าของ ρ ใน (3) มีค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมอย่างน้อย 1 - α .

สำหรับการหาค่า c ที่เหมาะสมสำหรับช่วงความเชื่อมั่น ผู้วิจัยเสนอขั้นตอนต่อไปนี้

1. พล็อตกราฟหาความสัมพันธ์ของ c $\in$ (1.9,3.0)
2. เลือกโมเดลที่เหมาะสมกับ (1) โดยกำหนดเป็นฟังก์ชัน f(c)
3. หาค่า c จาก f(c) = 0.90

วิธีการหาค่า c ที่เหมาะกับวิธีนี้ ผู้วิจัยประยุกต์จาก วิทยานิพนธ์ ของ Niwitpong (2004) ซึ่งศึกษาจากการหาค่า c ที่เหมาะสมในการหาช่วงการพยากรณ์ของค่าพยากรณ์ล่วงหน้า 1 คาบเวลา ใน AR(1) โมเดล

การศึกษาเปรียบเทียบช่วงความเชื่อมั่นของ ρ (2) และ (3) ผู้วิจัยจะเปรียบเทียบกับช่วงความเชื่อมั่นของ ρ ของ Andrews (1993) ซึ่งกำหนดโดย

$$[q^{-1}_{\frac{\alpha}{2}}(\hat{\rho}_0), q^{-1}_{\frac{\alpha}{2}}(\hat{\rho}_0)\,] \qquad (4)$$

โดยที่ $q_{\frac{\alpha}{2}}(.)$ คือค่าเปอร์เซ็นต์ไทล์ $\frac{\alpha}{2}$ (ทางขวา) ของการแจกแจงของ $\hat{\rho}_0$ ซึ่งเป็นตัวประมาณกำลังสองน้อยที่สุด (ordinary least squares) ของ ρ และ

$$\hat{\rho}_0 = \frac{\sum_{t=2}^{n} (y_t - \bar{y})(y_{t-1} - \bar{y})}{\sum_{t=2}^{n} (y_{t-1} - \bar{y})^2}$$

และ $q^{-1}_{\frac{\alpha}{2}}(.)$ เป็น ฟังก์ชันผกผันของ $q_{\frac{\alpha}{2}}(.)$

1.4 **ระเบียบวิธีดำเนินการวิจัย**

1.-1. ศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้อง

2.-1.-1 **พิสูจน์ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับช่วงการประมาณค่าของ ρ ในโมเดล 1**

3.-1.-1 ศึกษาวิธีปรับช่วงการประมาณค่าของ ρ ในโมเดล 1 ให้ มีค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมอย่างน้อย 1- α เมื่อ α คือระดับนัยสำคัญ

4.-1.-1 ศึกษาค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมและค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงการประมาณค่าของ ρ ในสมการ 2,3 และ 4

5.-1.-1 เขียนโปรแกรม S-PLUS โดยแบ่งเป็น

5.1โปรแกรมหลัก คำนวณค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมของ ช่วงการประมาณค่าของ ρ และคำนวณค่าเฉลี่ยความกว้างของช่วงการประมาณค่าของ ρ ในสมการ 2,3 และ 4

5.2 โปรแกรมย่อยคำนวณ

- ตัวประมาณกำลังสองน้อยที่สุด
- ตัวประมาณโคชี
- ตัวประมาณไม่เอนเอียงของค่ามัธยฐาน
- การแจกแจง AR(1) โมเดล

6.-1.-1 ทดสอบโปรแกรมและแก้ไข

7.-1.-1 ปรับปรุงโปรแกรม

8.-1.-1 จัดทำรายงานการวิจัย

1.5.ขอบเขตการวิจัย

การวิจัยโครงการนี้มีขอบเขตการวิจัยดังนี้

1.ศึกษาเฉพาะช่วงการประมาณค่าของ ρ ในโมเดล AR (1) ที่ไม่ทราบค่าเฉลี่ย

2.เนื่องจากตัวประมาณโคชีเป็นตัวประมาณที่ความแปรปรวนไม่คงที่ การศึกษานี้จึงกำหนดค่าความแปรปรวน สามระดับ คือ 0.5, 2 และ 5

3.โปรแกรมที่ใช้ในการวิจัยนี้จะใช้โปรแกรม S-PLUS

1.6. ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้ช่วงการประมาณค่าสำหรับ ρ เมื่อ $\rho \rightarrow 1$ ใหม่ โดยช่วงการประมาณค่านี้ต้องมีค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมอย่างน้อย $1-\alpha$ เมื่อ α คือระดับนัยสำคัญ
2. ได้ซอฟแวร์โปรแกรม S-PLUS ในการเขียนโปรแกรมค่าความน่าจะเป็นครอบคลุมค่าเฉลี่ยขนาดความกว้างของช่วงและโปรแกรมการปรับช้วงความเชื่อมั่นสำหรับ ρ

1.7. เอกสารอ้างอิง

1. Andrews,D.W.K (1993) Exact median- unbiased estimation of first order autoregressive/ unit root models. *Econometrica* 61,139-165.
2. Chan, N.H and Wei, C.Z (1987) Asymtotic inference for nearly nonstationary AR(1) processes. *Annals of Statistics* 15, 1050-1063
3. Elliott G and Stock, J.H. (2001). Confidence intervals for autoregressive coefficients near one. *Journal of Econometrics* 103, 155-181.
4. Niwitpong, S (2004) Predictive inference for time series. Thesis submitted for Ph.D. (Statistics), La Trobe University, Australia.
5. So, B . S .and Shin, D. W. (1999) Cauchy estimators for autoregressive processes with applications to unit root tests and confidence intervals. *Econometric Theory* 15, 165-176.
6. Stock, J.H. (1991). Confidence intervals for the largest autoregressive root in U.S macroeconomic time series. *Journal of Monetary Economics* 28, 435-459.

บทที่ 2
รายงานการวิจัย

เรื่อง

การปรับช่วงความเชื่อมั่นสำหรับรากที่สูงที่สุดของกระบวนการอัตตะสหสัมพันธ์อันดับหนึ่ง

Adjusted Confidence Intervals for the largest autoregressive root in AR(1) process

โดย

อรไท พลเสน
สอาด นิวิศพงศ์

Adjusted Confidence Interval for Cauchy Estimator for an Unknown Mean AR(1) Process

Orathai Polsen and Sa-aat Niwitpong*
Department of Applied Statistics
King Mongkut's Institute of Technology North Bangkok, Bangkok 10800, Thailand
Tel: +66-2-9132500 ext 4910, Fax: +66-2-5878259
*Email: snw@kmitnb.ac.th

Abstract

A confidence interval for an autoregressive parameter of an unknown mean first-order autoregressive (AR(1)) process, based on the Cauchy estimator, has been proposed by So and Shin (1999, *Econometric Theory* 15, 165-176). These authors used the standard normal limiting distribution of the Cauchy estimator to construct the confidence interval for the autoregressive parameter of an AR(1) process. They also argued that their proposed confidence interval has shorter average length than that of Andrews (1993, *Econometrica* 61, 139-165) when the autoregressive parameter approaches one. However, in this paper, we argued, based on Kabaila (1998, *Econometric Theory* 14, 463-482), that two confidence intervals can be compared solely based on their average lengths when these confidence intervals have minimum coverage probabilities at least $1-\alpha$. Monte Carlo simulation results are given to show the relative efficiencies of their average lengths of the confidence intervals.

1. Introduction

Consider an unknown mean AR(1) process $\{Y_t\}$ which satisfies

$$(1) \qquad Y_t - \mu = \rho(Y_{t-1} - \mu) + e_t$$

where ρ is an autoregressive parameter, $\rho \in (-1,1)$, μ is the process mean, the e_t are independent and identically $N(0,\sigma^2)$ distributed and $t = 1, 2, 3, \ldots, n$. Confidence intervals for ρ, when ρ is very close to one in model (1), have been much-researched. Stock (1991) constructed the confidence interval for ρ based on inverting percentiles of the limiting distribution of the Dickey-Fuller (1979) statistics. Elliott G and Stock (2001) reversed the unit root test, based on GLS estimator, to construct the confidence interval for ρ, when ρ is very close to one.
Andrews (1993) also constructed the confidence interval for ρ based on the median unbiased estimator of the ordinary least squares (OLS) estimator. Fuller (1996) also constructed a confidence interval for ρ based on adjusting for the skewness of the empirical distribution of the weighted symmetric estimator. So and Shin (1999) used the standard normal limiting distribution of the Cauchy estimator to construct a

confidence interval for the autoregressive parameter of an unknown mean AR(1) process. They argued that their proposed confidence interval is shorter than that of Andrews (1993). Later, Shin and So (2001) constructed a confidence interval for ρ, when ρ is very close to one, based on instrumental variable estimators. They also argued that their proposed confidence intervals are shorter than those of Andrews (1993) and So and Shin (1999). However, the results in So and Shin (1999, p.173) and Shin and So (2001, p.186) showed that the coverage probabilities of their proposed confidence intervals do not have minimum coverage probabilities at least 1-α.

As argued by Kabaila (1998) and Kabaila (2005), two confidence intervals can be compared solely based on their expected lengths when these confidence intervals have minimum coverage probabilities at least 1-α. We therefore adjusted confidence interval for ρ of So and Shin (1999) to have minimum coverage probability at least 1-α. We then compared this adjusted confidence interval with the confidence interval for ρ of Andrews (1993). The numerical results, using Monte Carlo Simulation, have shown that, based on the relative efficiencies of expected lengths of these two confidence intervals, the confidence interval for ρ of Andrews (1993) has shorter average length for all cases of ρ with small sample sizes.

Section 2 reviews confidence intervals for ρ of an unknown mean AR(1) process. Section 3 proposes a method to adjust the confidence interval for ρ of an unknown mean AR(1) process based on Niwitpong (2005). Monte Carlo simulation results are reported in Section 4. Some discussions and conclusion are given.

2. Confidence intervals for ρ of an unknown mean AR(1) process

In this section, confidence intervals for ρ of model (1) based on So and Shin (1999) and Andrews (1993) are reviewed.

So and Shin (1999) proposed the Cauchy estimator of ρ which is given by

$$\hat{\rho}_c = \frac{\sum_{t=2}^{n}(Y_t - \bar{Y}_{t-1})sign(Y_t - \bar{Y}_{t-1})}{\sum_{t=2}^{n}\left|Y_t - \bar{Y}_{t-1}\right|}$$

where

$$\bar{Y}_t = \sum_{i=1}^{t} Y_i .$$

They proved that the limiting distribution of $\hat{\rho}_c$ is the standard normal distribution. By using this fact, they used a pivotal statistics to construct the 1-α confidence interval for ρ of model (1) which is given by

(2) $$[\, \hat{\rho}_c - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \text{s.e.}(\hat{\rho}_c),\ \hat{\rho}_c + z_{\frac{\alpha}{2}} \text{s.e.}(\hat{\rho}_c)\,]$$

where

$$\text{s.e.}(\hat{\rho}_c) = n^{1/2}\hat{\sigma} / \sum_{t=2}^{n} |Y_{t-1} - \bar{Y}_{t-1}|, \; \hat{\sigma} = \sum_{t=2}^{n} ((Y_t - \bar{Y}_{t-1}) - \hat{\rho}(Y_t - \bar{Y}_{t-1}))^2 / (n-3)$$

and $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ is the $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$ percentile of the standard normal distribution.

Andrews (1993) proposed the median unbiased estimator of ρ, denoted $\hat{\rho}_M$, which is given by

$$\hat{\rho}_M = -1 : \hat{\rho}_0 > m(1)$$
$$\hat{\rho}_M = m^{-1}(\hat{\rho}_0) : m(-1) < \hat{\rho}_0 < m(1)$$
$$\hat{\rho}_M = 1 : \hat{\rho}_0 \le m(-1)$$

where

$$m(1) = \lim_{\rho \to 1} m(\rho) \; and \; m(-1) = \lim_{\rho \to -1} m(\rho),$$

$m(\rho)$ is the unique median of $\hat{\rho}_0$, the OLS estimator of ρ, which is given by

$$\hat{\rho}_0 = \frac{\sum_{t=2}^{n} (Y_t - \bar{Y})(Y - \bar{Y})}{\sum_{t=2}^{n} (Y - \bar{Y})^2}$$

where $\bar{Y}$ is the sample mean, and $m^{-1}(\hat{\rho}_0)$ is the inverse function of $m(\hat{\rho}_0)$ .We compute $m^{-1}(\hat{\rho}_0)$ by using the functions implemented in the S-PLUS programs in Appendix A1 of Niwitpong (2005). Also in Appendix A2 of Niwitpong (2005), Paul Kabaila provides an S-PLUS function to calculate an approximation to P(U'A U > x) where A is a symmetric matrix with real elements and U has an N(0,I) distribution, using the method of Imhof (1961). We use these functions to compute the median function of $\hat{\rho}_0$, $m(\hat{\rho}_0)$, over the grid values of $\rho \subset (-1, 1)$ as shown in Andrews (1993, pp. 148-149). Also, $m^{-1}(\hat{\rho}_0)$ is calculated using a linear interpolation as described by Andrews (1993, p. 146).

The exact 1- α confidence interval for ρ of model (1), based on $\hat{\rho}_M$ estimator, is given by

(3) $$[\, q^{-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}(\hat{\rho}_0), q^{-1}_{\frac{\alpha}{2}}(\hat{\rho}_0) \,]$$

where $q_{\frac{\alpha}{2}}(.)$ is the $\frac{\alpha}{2}$ percentile of the OLS estimator of and $q^{-1}_{\frac{\alpha}{2}}(.)$ is an inverse function of $q_{\frac{\alpha}{2}}(.)$.

3. Adjusted Confidence intervals for ρ of an unknown mean AR(1) process

In Section 1, we argued that the confidence interval for ρ of So and Shin (1999, p.173) does not have minimum coverage probability at least 1- α , whereas the confidence interval for ρ of Andrews (1993) has exact coverage probability 1- α , In this section, we proposed to adjust the confidence interval (2) by

$$(4) \qquad [\,\hat{\rho}_c - c\,\text{s.e.}(\hat{\rho}_c),\ \hat{\rho}_c + c\,\text{s.e.}(\hat{\rho}_c)\,]$$

where c has been chosen so that the confidence interval (4) has minimum coverage probability at least $1-\alpha$.

We used the method described in Niwitpong (2005, Chapter 5) to find a constant c so that the confidence interval (4) has minimum coverage probability at least $1-\alpha$ as follows:

Step 1 We ran Monte Carlo simulations over a grid of the autoregressive parameter ρ in the context of model (1). For a given value of c in the confidence interval (4), we estimate the coverage probability of the confidence interval (4) for each of $\rho \in \{-0.9, -0.8, -0.7, \ldots, 0.8, 0.9\}$

Step 2 Using these estimates, we then estimate the coverage probability for this given value of c minimized over $\rho \in \{-0.9, -0.8, -0.7, \ldots, 0.8, 0.9\}$. We then varied over c so that this minimum coverage probability is $1-\alpha$.

Step 3 We define c* to be the value of c such that the confidence interval (4) has a minimum coverage probability $1-\alpha$. Here, we have used the fact that

c* = max(c(-0.9),c(-0.7), ..., c(0.7), c(0.9)) where $c(\rho)$ denotes the value of c for a given value of ρ such that the coverage probability of the confidence interval (4) is $1-\alpha$. For more details to find the confidence interval for c* see i.e. Niwitpong (2005, Chapter 5)

We therefore have the adjusted confidence interval for ρ which is given by

$$(5) \qquad [\,\hat{\rho}_c - c^*\text{s.e.}(\hat{\rho}_c),\ \hat{\rho}_c + c^*\text{s.e.}(\hat{\rho}_c)\,].$$

In the next section we present the numerical results, using Monte Carlo simulation, to estimate the coverage probabilities and the average lengths of the confidence intervals (3) and (5).

4 Numerical results

In this section, we report the results of using Monte Carlo simulation to investigate the estimated coverage probabilities of confidence interval (3) and (5) and their average lengths. We employ S-PLUS to generate the data from an AR(1) process in (1) with parameters $(\mu, \sigma^2) = (0, 1)$, sample sizes; n =15, 30, 50, 100 and the number of simulation runs, M =10000. The estimated coverage probabilities for confidence intervals (3) and (5) and their average lengths using parameters, $(\mu, \sigma^2) = (0, 1)$ can represent all results of these estimated coverage probabilities and their average lengths for all (μ, σ^2) since confidence intervals and their average lengths do not depend on (μ, σ^2). Also it is straightforward to see that the probability distribution of $\hat{\rho}_c$ and its standard deviation, $\hat{\sigma}$ do not depend on (μ, σ^2), see more details in Niwitpong (2005, Chapters 3 and 5). Tables 1-4 show the estimated coverage probabilities of confidence interval (3) and (5) and their average lengths for $\alpha = 0.10$ and n =15, 30, 50 and 100.

Table 1 shows the estimate coverage probabilities of confidence intervals (3) and (5) and their average lengths for $\alpha = 0.10$, $n = 15$, $M = 10000$.

ρ	Confidence intervals(5)and (3)	Coverage probabilities	Average lengths	Ratio of Average lengths ((5)/(3))
0	Adjusted Cauchy (5)	0.9652	1.5327	1.4643
	Andrews (3)	0.9032	1.0467	
0.1	Adjusted Cauchy (5)	0.9664	1.5351	1.4624
	Andrews (3)	0.9066	1.0497	
0.2	Adjusted Cauchy (5)	0.9651	1.5233	1.4644
	Andrews (3)	0.9040	1.0402	
0.3	Adjusted Cauchy (5)	0.9647	1.5013	1.4820
	Andrews (3)	0.8962	1.0130	
0.4	Adjusted Cauchy (5)	0.9655	1.4735	1.5052
	Andrews (3)	0.9049	0.9789	
0.5	Adjusted Cauchy (5)	0.9681	1.4331	1.5506
	Andrews (3)	0.9032	0.9242	
0.6	Adjusted Cauchy (5)	0.9689	1.3778	1.5347
	Andrews (3)	0.9087	0.8531	
0.7	Adjusted Cauchy (5)	0.9649	1.3093	1.6970
	Andrews (3)	0.9094	0.7715	
0.8	Adjusted Cauchy (5)	0.9610	1.2392	1.8109
	Andrews (3)	0.9088	0.6843	
0.9	Adjusted Cauchy (5)	0.9572	1.1516	1.9231
	Andrews (3)	0.9140	0.5988	
0.95	Adjusted Cauchy (5)	0.9546	1.1079	1.9837
	Andrews (3)	0.9191	0.5585	
0.97	Adjusted Cauchy (5)	0.9532	1.0837	2.0001
	Andrews (3)	0.9201	0.5418	
0.99	Adjusted Cauchy (5)	0.9532	1.0837	2.0001
	Andrews (3)	0.9201	0.5418	

Table 2 shows the estimate coverage probabilities of confidence intervals (3) and (5) and their average lengths for $\alpha = 0.10, n = 30, M = 10000$.

ρ	Confidence intervals(5)and (3)	Coverage probabilities	Average lengths	Ratio of Average lengths ((5)/(3))
0	Adjusted Cauchy (5)	0.9660	0.9987	1.5193
	Andrews (3)	0.8990	0.6573	
0.1	Adjusted Cauchy (5)	0.9609	0.9970	1.5142
	Andrews (3)	0.8940	0.6604	
0.2	Adjusted Cauchy (5)	0.9619	0.9872	1.4971
	Andrews (3)	0.9003	0.6594	
0.3	Adjusted Cauchy (5)	0.9652	0.9665	1.4780
	Andrews (3)	0.9052	0.6539	
0.4	Adjusted Cauchy (5)	0.9603	0.9392	1.4599
	Andrews (3)	0.8983	0.6433	
0.5	Adjusted Cauchy (5)	0.9634	0.9002	1.4405
	Andrews (3)	0.9036	0.6249	
0.6	Adjusted Cauchy (5)	0.9607	0.8500	1.4453
	Andrews (3)	0.8958	0.5881	
0.7	Adjusted Cauchy (5)	0.9639	0.7882	1.4835
	Andrews (3)	0.9035	0.5313	
0.8	Adjusted Cauchy (5)	0.9645	0.7127	1.5698
	Andrews (3)	0.9064	0.4540	
0.9	Adjusted Cauchy (5)	0.9595	0.6236	1.7312
	Andrews (3)	0.9047	0.3602	
0.95	Adjusted Cauchy (5)	0.9583	0.5662	1.8612
	Andrews (3)	0.9095	0.3042	
0.97	Adjusted Cauchy (5)	0.9528	0.5469	1.9162
	Andrews (3)	0.9042	0.2854	
0.99	Adjusted Cauchy (5)	0.9495	0.5250	1.9611
	Andrews (3)	0.9074	0.2677	

Table 3 shows the estimate coverage probabilities of confidence intervals (3) and (5) and their average lengths for $\alpha = 0.10, n = 50, M = 10000$.

ρ	Confidence intervals(5)and (3)	Coverage probabilities	Average lengths	Ratio of Average lengths ((5)/(3))
0	Adjusted Cauchy (5)	0.9539	0.7406	1.5129
	Andrews (3)	0.8969	0.4895	
0.1	Adjusted Cauchy (5)	0.9552	0.7389	1.5082
	Andrews (3)	0.9016	0.4899	
0.2	Adjusted Cauchy (5)	0.9609	0.7297	1.5017
	Andrews (3)	0.9034	0.4859	
0.3	Adjusted Cauchy (5)	0.9613	0.7137	1.4930
	Andrews (3)	0.8994	0.4780	
0.4	Adjusted Cauchy (5)	0.9618	0.6885	1.4790
	Andrews (3)	0.9028	0.4655	
0.5	Adjusted Cauchy (5)	0.9616	0.6575	1.4630
	Andrews (3)	0.8972	0.4494	
0.6	Adjusted Cauchy (5)	0.9609	0.6184	1.4398
	Andrews (3)	0.8996	0.4295	
0.7	Adjusted Cauchy (5)	0.9613	0.5620	1.4113
	Andrews (3)	0.8994	0.3982	
0.8	Adjusted Cauchy (5)	0.9609	0.4947	1.4380
	Andrews (3)	0.8987	0.3440	
0.9	Adjusted Cauchy (5)	0.9581	0.4097	1.5843
	Andrews (3)	0.9025	0.2586	
0.95	Adjusted Cauchy (5)	0.9555	0.3586	1.7348
	Andrews (3)	0.9058	0.2067	
0.97	Adjusted Cauchy (5)	0.9522	0.3343	1.8188
	Andrews (3)	0.9063	0.1838	
0.99	Adjusted Cauchy (5)	0.9408	0.3153	1.8846
	Andrews (3)	0.9076	0.1673	

Table 4 shows the estimate coverage probabilities of confidence intervals (3) and (5) and their average lengths for $\alpha = 0.10$, $n = 100$, $M = 10000$.

ρ	Confidence intervals(5)and (3)	Coverage probabilities	Average lengths	Ratio of Average lengths ((5)/(3))
0	Adjusted Cauchy (5)	0.9537	0.5073	1.5134
	Andrews (3)	0.9000	0.3352	
0.1	Adjusted Cauchy (5)	0.9555	0.5055	1.5121
	Andrews (3)	0.9002	0.3343	
0.2	Adjusted Cauchy (5)	0.9557	0.4988	1.4889
	Andrews (3)	0.8998	0.3305	
0.3	Adjusted Cauchy (5)	0.9524	0.4865	1.5047
	Andrews (3)	0.8900	0.3233	
0.4	Adjusted Cauchy (5)	0.9552	0.4688	1.4992
	Andrews (3)	0.8955	0.3127	
0.5	Adjusted Cauchy (5)	0.9550	0.4449	1.4914
	Andrews (3)	0.9008	0.2983	
0.6	Adjusted Cauchy (5)	0.9550	0.4141	1.4805
	Andrews (3)	0.8967	0.2797	
0.7	Adjusted Cauchy (5)	0.9540	0.3741	1.4607
	Andrews (3)	0.8990	0.2561	
0.8	Adjusted Cauchy (5)	0.9570	0.3225	1.4232
	Andrews (3)	0.8980	0.2266	
0.9	Adjusted Cauchy (5)	0.9513	0.2519	1.4312
	Andrews (3)	0.8926	0.1760	
0.95	Adjusted Cauchy (5)	0.9509	0.2056	1.5658
	Andrews (3)	0.9015	0.1313	
0.97	Adjusted Cauchy (5)	0.9509	0.1842	1.6730
	Andrews (3)	0.9050	0.1101	
0.99	Adjusted Cauchy (5)	0.9368	0.1614	1.8196
	Andrews (3)	0.8955	0.0887	

5 Discussions and conclusion

We have presented a comparison of confidence intervals for ρ of an unknown mean AR(1) process based on the two confidence intervals having minimum coverage probabilities at least 1- α and the relative efficiencies of their average lengths is considered. Tables 1-4 show that the estimated coverage probabilities of the confidence intervals for ρ when $\alpha = 0.10$, based on the Cauchy estimator of So and Shin (1999), using the adjusted method are at least 0.90. Also the exact confidence interval for ρ based on Andrews (1993) has coverage probabilities 0.90. The relative efficiencies of the average lengths of these confidence intervals show that the confidence interval for ρ of an unknown mean AR(1) process based on Andrews (1993) is preferable. The average lengths of these confidence intervals are about half of those from the confidence intervals based on the adjusted confidence interval of the Cauchy estimator. We also note here that, when ρ is close to one, we have 80%-100% gain in the relative efficiencies of the average lengths using the confidence interval for ρ of an unknown mean AR(1) process based on Andrews (1993). These results contrast sharply with So and Shin (1999). One reason behind this is because So and Shin compared two confidence intervals with different coverage probabilities. Further research is to extend the method in this paper to an AR(1) process with trend and an AR(p) process.

References

Andrews, D. W. K. (1993) Exactly median-unbiased estimation of first order autoregressive/ unit root models. *Econometrica* **61**, 139-65.

Dickey, D. A. and Fuller W. A. (1979) Distribution of estimators for autoregressive time series with a unit root. *Journal of the American Statistical Association* **74**, 427-431.

Elliott G and Stock, J.H. (2001). Confidence intervals for autoregressive coefficients near one. *Journal of Econometrics* 103, 155-181.

Fuller, W. A. (1996) *Introduction to Statistical Time Series*. New York: Wiley & Sons.

Kabaila, P. (1998) Valid confidence intervals in regressions after variable selection. *Econometric Theory* **14**, 463-482.

Kabaila, P. (2005) Assessment of a preliminary F-test solution to the Behrens-Fisher problem. *To appear in Communications in Statistics: Theory and Methods.*

Niwitpong, S. (2005) Predictive inference for times series. Ph.D thesis (submitted for examination), Department of Statistical Science, La Trobe University.

So, B. S. and Shin, D. W. (1999) Cauchy estimators for autoregressive processes with applications to unit root tests and confidence intervals. *Econometric Theory* **15**, 165-176.

Shin, D. W. and So, B. S. (2001) Confidence intervals for the largest root of auto regressive models based on instrumental variable estimators. *Economic Letters* **71**, 181-189.

Stock, J.H. (1991). Confidence intervals for the largest autoregressive root in U.S macroeconomic time series. *Journal of Monetary Economics* 28, 435-459.