



## ใบรับรองวิทยานิพนธ์

บัณฑิตวิทยาลัย สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

เรื่อง ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับแบบจำลองการนำความร้อนจาก  
ภายนอกสู่ภายในโรงเรือนเลี้ยงสัตว์ปีก

โดย นางสาวพวงรัตน์ ฉันทวีโรจน์

ได้รับอนุมัติให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร  
วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(อาจารย์ ดร.มงคล หวังสถิตย์วงศ์)

13 ตุลาคม 2549

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เสนอ คุณประเสริฐ)

กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.วิมลยุตต์ วรรณสว่าง)

กรรมการ

(อาจารย์ ดร.อนิรุท ลวดทรง)

ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับแบบจำลองการนำความร้อน  
จากภายนอกสู่ภายในโรงเรือนเลี้ยงสัตว์ปีก

นางสาวพวงรัตน์ ฉันทวีโรจน์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ปีการศึกษา 2549

ISBN 974-190-848-2

ลิขสิทธิ์ของสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ชื่อ : นางสาวพวงรัตน์ ฉันทวีโรจน์  
ชื่อวิทยานิพนธ์ : ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับแบบจำลองการนำความร้อนจากภายนอกสู่ภายในโรงเรือนเลี้ยงสัตว์ปีก  
สาขาวิชา : คณิตศาสตร์ประยุกต์  
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ  
ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เสนอ คุณประเสริฐ  
ปีการศึกษา : 2549

#### บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ กล่าวถึงผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาการนำความร้อนในสภาวะไม่คงตัวแบบ 1 มิติ โดยใช้วิธีของแครงก์-นิโคลสัน ซึ่งเป็นการศึกษาการกระจายของอุณหภูมิและการไหลของความร้อนผ่านผนังโรงเรือนเลี้ยงสัตว์ปีกอันประกอบด้วยผนังด้านข้าง ด้านบน และด้านล่าง ทั้งกรณีที่อยู่ภายในและภายนอกโรงเรือนกึ่งที่ และกรณีอุณหภูมิภายในและภายนอกโรงเรือนเปลี่ยนแปลง และกล่าวถึงการนำความร้อนของผนังโรงเรือนเมื่อใช้วัสดุชนิดต่าง ๆ สร้างโรงเรือนเพื่อให้อุณหภูมิในโรงเรือนเหมาะสมกับสภาพความเป็นอยู่ของสัตว์ปีก

(วิทยานิพนธ์มีจำนวนทั้งสิ้น 109 หน้า)

คำสำคัญ : ผลต่างสี่เหลี่ยม , แครงก์-นิโคลสัน , การนำความร้อน , โรงเรือน , สัตว์ปีก

/เสนอ

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์

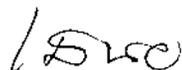
Name : Miss Puangrat Chanthaweeroj  
Thesis Title : Numerical Solution of a Partial Differential Equation Model of Heat Flow  
through the Boundary Surfaces of Poultry Shed  
Major Field : Applied Mathematics  
King Mongkut's Institute of Technology North Bangkok  
Thesis Advisor : Assistant Professor Dr. Sanoe Koonprasert  
Academic Year : 2006

### Abstract

This thesis provides a practical overview of numerical solutions to one-dimensional, unsteady state heat conduction problems using Crank-Nicolson method. To determine distribution and heat flow through the boundary surfaces of poultry shed wherein the inside and outside shed air is assumed to be at a constant value and the inside and outside shed air is vary in a known fashion. And provide heat flow through the boundary surfaces of shed, when use several materials for the good health of poultry.

(Total 109 pages)

Keywords : Finite Difference , Crank-Nicolson , Heat Conduction , Shed , Poultry



Advisor

## กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยความช่วยเหลืออย่างยิ่งของ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เสนอ คุณประเสริฐ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ที่ได้ให้คำปรึกษาและแก้ไขข้อบกพร่องด้วยความเอาใจใส่ตลอดระยะเวลาการทำวิทยานิพนธ์นี้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้ และขอกราบขอบพระคุณ Dr.Elvin Moore ที่คอยชี้แนะเกี่ยวกับวิธีการของ แครงก์-นิโคลสัน ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ทุกท่านที่ได้ประสาทวิชาความรู้ เพื่อเป็นพื้นฐานในการทำวิทยานิพนธ์ครั้งนี้ ขอขอบคุณ คุณศรายุทธ ปลัดทอง ที่ให้คำแนะนำในการเขียนโปรแกรม MATLAB ขอขอบคุณพี่ ๆ เพื่อน ๆ น้อง ๆ ในภาควิชาและที่ทำงานทุกคนที่คอยให้กำลังใจและถามไถ่ความคืบหน้าอยู่เสมอ

ท้ายนี้ ขอกราบขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่ ผู้บังเกิดเกล้าซึ่งเป็นผู้ให้ตลอดมา ทั้งแรงใจ และทุนทรัพย์

อนึ่ง ประโยชน์และคุณความดีใด ๆ ที่เกิดจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ขอมอบให้แต่ คุณพ่อ คุณแม่ คุณปู่ คุณย่า คุณตา คุณยาย และครูบาอาจารย์ที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชามาตั้งแต่ต้น จนมีวันนี้

พวงรัตน์ ฉันทวีโรจน์

## สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	ข
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	ค
กิตติกรรมประกาศ	ง
สารบัญตาราง	ช
สารบัญภาพ	ซ
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความถี่เป็นมาและความสำคัญของปัญหา	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย	2
1.3 ขอบเขตของการวิจัย	3
1.4 วิธีการศึกษาวิจัย	3
1.5 ประโยชน์ของการวิจัย	3
บทที่ 2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง	5
2.1 ปัญหาการนำความร้อนในสภาวะไม่คงตัว	5
2.2 การประมาณค่าของอนุพันธ์เชิงผลต่างสี่มเนื่อง	7
2.3 วิธีของแครงก์-นิโคลสันสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย	12
2.4 สูตรผลต่างกลางสำหรับเงื่อนไขขอบเขต	15
บทที่ 3 กระบวนการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีของแครงก์-นิโคลสัน	17
3.1 ปัญหาการนำความร้อนของผนังและหลังคาโรงเรือนกรณีที่อยู่หมุมภายในและภายนอกโรงเรือนคงที่	19
3.2 ปัญหาการนำความร้อนของพื้นโรงเรือนกรณีที่อยู่หมุมภายในโรงเรือนคงที่	26
3.3 ปัญหาการนำความร้อนของผนังและหลังคาโรงเรือนกรณีที่อยู่หมุมภายในและภายนอกโรงเรือนเปลี่ยนแปลง	29
บทที่ 4 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาการนำความร้อน	37
4.1 ปัญหาการนำความร้อนของผนังและหลังคาโรงเรือนกรณีที่อยู่หมุมภายในและภายนอกโรงเรือนคงที่	37
4.2 ปัญหาการนำความร้อนของพื้นโรงเรือนกรณีที่อยู่หมุมภายในโรงเรือนคงที่	48
4.3 ปัญหาการนำความร้อนของผนังและหลังคาโรงเรือนกรณีที่อยู่หมุมภายในและภายนอกโรงเรือนเปลี่ยนแปลง	50

## สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
บทที่ 5 สรุปผลและข้อเสนอแนะ	55
5.1 เปรียบเทียบอุณหภูมิในผนังโรงเรือนกรณีที่อยู่อุณหภูมิภายในและภายนอก โรงเรือนคงที่	55
5.2 เปรียบเทียบอุณหภูมิในหลังคาโรงเรือนกรณีที่อยู่อุณหภูมิภายในและภายนอก โรงเรือนคงที่	57
5.3 เปรียบเทียบอุณหภูมิในพื้นที่โรงเรือนกรณีที่อยู่อุณหภูมิภายในโรงเรือนคงที่	59
5.4 เปรียบเทียบอุณหภูมิในผนังโรงเรือนกรณีที่อยู่อุณหภูมิภายในและภายนอก โรงเรือนเปลี่ยนแปลง	61
5.5 เปรียบเทียบอุณหภูมิในหลังคาโรงเรือนกรณีที่อยู่อุณหภูมิภายในและภายนอก โรงเรือนเปลี่ยนแปลง	63
5.6 เปรียบเทียบอุณหภูมิของอากาศภายในโรงเรือนเมื่อใช้วัสดุชนิดต่าง ๆ ทำผนังโรงเรือน	65
5.7 เปรียบเทียบอุณหภูมิของอากาศภายในโรงเรือนเมื่อใช้วัสดุชนิดต่าง ๆ ทำหลังคาโรงเรือน	67
5.8 ข้อเสนอแนะ	69
เอกสารอ้างอิง	71
ภาคผนวก ก ค่าความผิดพลาด	73
ภาคผนวก ข Tridiagonal Matrix	75
ภาคผนวก ค MATLAB Code	77
ประวัติผู้วิจัย	109

## สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
4-1 แสดงค่าความผิดพลาดของผลเฉลยเชิงตัวเลขของอนุกรม	41
4-2 แสดงค่าความผิดพลาดของผลเฉลยเชิงตัวเลขซึ่งเป็นอนุกรมของพจน์	45
4-3 แสดงค่าความผิดพลาดของผลเฉลยเชิงตัวเลขซึ่งเป็นอนุกรมของหลังคา	48
ง-1 แสดงค่าคุณสมบัติของวัสดุต่าง ๆ	105

## สารบัญภาพ

ภาพที่	หน้า
2-1 แสดงการนำความร้อนผ่านแท่งโลหะแบบ 1 มิติ ในสภาวะไม่คงตัว	5
2-2 แสดงสัญลักษณ์ที่ใช้ในอนุกรมเทย์เลอร์	8
2-3 แสดงสัญลักษณ์ที่ใช้ในการแทนผลต่างสี่เหลี่ยมของ $v(x)$	9
2-4 แสดงการแบ่งระนาบ $x-t$ เป็นตารางสี่เหลี่ยมเพื่อใช้กับวิธีการผลต่างสี่เหลี่ยม	10
2-5 แสดงการแบ่งโดเมน $xt$ เป็นช่วง $\Delta x$ และ $\Delta t$	12
2-6 แสดงตำแหน่งการคำนวณสำหรับวิธีของแครงก์-นิโคลสัน	13
2-7 แสดงการคำนวณโดยวิธีของแครงก์-นิโคลสัน	15
3-1 แสดงรูปแบบของโรงเรือนเลี้ยงสัตว์ปีก	17
3-2 แสดงการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของผนังและหลังคาโรงเรือนกรณีที่อยู่ภายในและภายนอกโรงเรือนคงที่	20
3-3 แสดงการแบ่งผนังหรือหลังคาโรงเรือนเพื่อคำนวณหาอุณหภูมิ	21
3-4 แสดงการคำนวณหาการกระจายของอุณหภูมิในผนังและหลังคาโรงเรือนกรณีที่อยู่ภายในและภายนอกโรงเรือนคงที่	23
3-5 แสดงการแบ่งความหนาของพื้นพร้อมกับการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต	26
3-6 แสดงการคำนวณหาการกระจายของอุณหภูมิของพื้นโรงเรือนเมื่ออุณหภูมิภายในโรงเรือนคงที่	27
3-7 แสดงการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของผนังและหลังคาโรงเรือนกรณีที่อยู่ภายในและภายนอกโรงเรือนเปลี่ยนแปลง	29
3-8 แสดงการคำนวณหาการกระจายของอุณหภูมิในผนังและหลังคาโรงเรือนกรณีอุณหภูมิภายในและภายนอกเปลี่ยนแปลง	32
4-1 กราฟแสดงรากของสมการ $\alpha \tan \alpha = \frac{1}{2}$	38
4-2 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของอุณหภูมิ เมื่อ $n = 40$	38
4-3 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของอุณหภูมิใน 3 มิติ (ซ้าย) และ 2 มิติ สำหรับ $t$ บางค่า (ขวา) ในตัวอย่างที่ 4-1	40
4-4 กราฟแสดงรากของสมการ $\tan(0.1\alpha) = \frac{2.56\alpha}{(1.28\alpha)^2 - 1}$	42
4-5 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของอุณหภูมิของผนัง เมื่อ $n = 120$	43

## สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่	หน้า
4-6 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของอุณหภูมิของผนังโรงเรือนใน 3 มิติ (ซ้าย) และ 2 มิติ สำหรับ $t$ บางค่า (ขวา) ในตัวอย่างที่ 4-2	44
4-7 กราฟแสดงรากของสมการ $\tan(0.005\alpha) = \frac{224\alpha}{(112\alpha)^2 - 1}$	46
4-8 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของอุณหภูมิของหลังคา เมื่อ $n = 60$	46
4-9 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของอุณหภูมิของหลังคาโรงเรือนใน 3 มิติ (ซ้าย) และ 2 มิติ สำหรับ $t$ บางค่า (ขวา) ในตัวอย่างที่ 4-3	47
4-10 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของอุณหภูมิของพื้นโรงเรือนใน 3 มิติ (ซ้าย) และ 2 มิติ สำหรับ $t$ บางค่า (ขวา) ในตัวอย่างที่ 4-4	49
4-11 กราฟแสดงฟังก์ชัน $v_{out}(t) = 27 + 4\sin\left(\frac{t}{14400}\right)$ เมื่อ $t = 172800$	50
4-12 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของอุณหภูมิของผนังโรงเรือนใน 3 มิติ (ซ้าย) และ 2 มิติ สำหรับ $t$ บางค่า (ขวา) ในตัวอย่างที่ 4-5	51
4-13 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของอุณหภูมิของหลังคาโรงเรือนใน 3 มิติ (ซ้าย) และ 2 มิติ สำหรับ $t$ บางค่า (ขวา) ในตัวอย่างที่ 4-6	53
5-1 กราฟแสดงอุณหภูมิของผนังโรงเรือนเมื่อใช้วัสดุชนิดต่าง ๆ กรณีที่อุณหภูมิภายในและภายนอกโรงเรือนคงที่	56
5-2 กราฟแสดงอุณหภูมิของหลังคาโรงเรือนเมื่อใช้วัสดุชนิดต่าง ๆ กรณีที่อุณหภูมิภายในและภายนอกโรงเรือนคงที่	58
5-3 กราฟแสดงอุณหภูมิของพื้นโรงเรือนเมื่อใช้วัสดุชนิดต่าง ๆ กรณีที่อุณหภูมิภายในโรงเรือนคงที่	60
5-4 กราฟแสดงอุณหภูมิของผนังโรงเรือนเมื่อใช้วัสดุชนิดต่าง ๆ กรณีที่อุณหภูมิภายในและภายนอกโรงเรือนเปลี่ยนแปลง	62
5-5 กราฟแสดงอุณหภูมิของหลังคาโรงเรือนเมื่อใช้วัสดุชนิดต่าง ๆ กรณีที่อุณหภูมิภายในและภายนอกโรงเรือนเปลี่ยนแปลง	64
5-6 กราฟแสดงอุณหภูมิของผนัง (ซ้าย) และอุณหภูมิของอากาศภายในโรงเรือน (ขวา)	65
5-7 กราฟแสดงอุณหภูมิของอากาศภายในโรงเรือนเมื่อผนังโรงเรือนทำจากวัสดุชนิดต่าง ๆ	66

## สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่	หน้า
5-8 กราฟแสดงอุณหภูมิของหลังคา (ซ้าย) และอุณหภูมิของอากาศภายใน โรงเรือน (ขวา)	67
5-9 กราฟแสดงอุณหภูมิของอากาศภายในโรงเรือนเมื่อหลังคาโรงเรือนทำจากวัสดุ ชนิดต่าง ๆ	68

# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

การเลี้ยงไก่ในประเทศไทยมีมานานมาก จนไม่สามารถสืบประวัติได้ยาวนานเพียงใด ในทุกแห่งทุกที่ ทุกหมู่บ้านจะมีการเลี้ยงไก่มาบ้างน้อยบ้าง ซึ่งแต่เดิมนั้นจะเป็นการเลี้ยงไก่พื้นเมืองเพื่อใช้เป็นอาหาร และที่เลี้ยงกันโดยมีวัตถุประสงค์อย่างอื่นบ้างเช่นเพื่อการพนันชนไก่ แต่ก็เป็นส่วนน้อย จนกระทั่งในระยะเวลาประมาณ 30 ปีที่ผ่านมา เทคโนโลยีการผลิตสัตว์ชนิดต่าง ๆ ได้เจริญก้าวหน้าไปมาก โดยเฉพาะพันธุ์ไก่และการเลี้ยง ประเทศไทยได้ยอมรับเทคโนโลยีการผลิตไก่สมัยใหม่เข้ามาในประเทศไทยนานกว่า 20 ปี และได้มีการพัฒนาการเลี้ยงไก่ในระบบอุตสาหกรรม จนกระทั่งปัจจุบันนี้ได้มีการเลี้ยงเพื่อใช้บริโภคในประเทศ และส่งออกนารายได้เป็นจำนวนมากในแต่ละปี [1]

โรงเรือนจัดเป็นปัจจัยที่มีอิทธิพลต่อสุขภาพของสัตว์ที่สำคัญปัจจัยหนึ่ง การสร้างโรงเรือนที่ไม่ถูกแบบและไม่ถูกหลักสุขาภิบาลสัตว์ จะมีผลกระทบต่อสุขภาพของสัตว์และก่อให้เกิดความสิ้นเปลือง ดังนั้นโรงเรือนที่ดีจะต้องสามารถควบคุมอุณหภูมิภายในโรงเรือนได้ [2]

เนื่องจากการนำความร้อนของผนังเป็นส่วนหนึ่งที่มีผลต่ออุณหภูมิภายในโรงเรือน ผู้ทำวิจัยจึงต้องการศึกษาการนำความร้อนจากภายนอกสู่ภายในโรงเรือน เพื่อนำไปปรับปรุงโรงเรือนให้มีอุณหภูมิที่เหมาะสมกับการเลี้ยงสัตว์ปีกในประเทศไทย โดยนำแนวความคิดมาจากจอห์น บอลแลนด์ (John Boland) [3] ที่อธิบายการถ่ายเทความร้อนที่ไหลผ่านผนังของที่อยู่อาศัย ซึ่งแสดงในรูปสมการดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial t} v(x, t) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, t) \quad , \quad 0 < x < \ell \quad (2-1)$$

$$K \frac{\partial}{\partial x} v(0, t) + H_{in} [s(t) - v(0, t)] = 0 \quad (2-2)$$

$$-K \frac{\partial}{\partial x} v(\ell, t) + H_{out} [v_{out}(t) - v(\ell, t)] = 0 \quad (2-3)$$

$$v(x, 0) = 0 \quad (2-4)$$

$$Mc \frac{d}{dt} s(t) + \Delta H_{in} [s(t) - v(0, t)] = 0 \quad (2-5)$$

เมื่อ	$v(x,t)$	แทน	อุณหภูมิในผนังที่ลึกเข้าไป $x$ หน่วย ณ เวลา $t$ ใดๆ ( $^{\circ}\text{C}$ )
	$k$	แทน	ค่าการแพร่กระจายทางความร้อนของผนัง ( $\text{m}^2/\text{s}$ )
	$K$	แทน	ค่าการนำความร้อนที่ผนัง ( $\text{W}/^{\circ}\text{Cm}$ )
	$H_{\text{in}}, H_{\text{out}}$	แทน	สัมประสิทธิ์การแผ่และการพาความร้อนร่วมกันในอาคารและนอกอาคาร ตามลำดับ ( $\text{W}/^{\circ}\text{Cm}^2$ )
	$s(t)$	แทน	อุณหภูมิของอากาศในอาคาร ( $^{\circ}\text{C}$ )
	$v_{\text{out}}(t)$	แทน	อุณหภูมิของอากาศนอกอาคาร ( $^{\circ}\text{C}$ )
	$M$	แทน	มวลของอากาศในอาคาร (kg)
	$c$	แทน	ค่าความร้อนจำเพาะของอากาศในอาคาร ( $\text{kJ}/\text{kg}^{\circ}\text{C}$ )
	$A$	แทน	พื้นที่ผนัง ( $\text{m}^2$ )

John Boland ได้นำทฤษฎีของดูฮามเอล (Duhamel's Theorem) และวิธีการแก้สมการ Volterra Integro-Differential Equations มาหาผลเฉลยที่อธิบายการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิในบริเวณสิ่งก่อสร้าง 1 บริเวณ

เนื่องจากปัญหาข้างต้นมีเงื่อนไขขอบเขตและลักษณะรูปแบบของปัญหาที่มีความซับซ้อนยากแก่หาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ ประกอบกับในปัจจุบันประสิทธิภาพของเครื่องคอมพิวเตอร์ ทำให้วิธีเชิงตัวเลขได้รับความนิยมและใช้กันอย่างกว้างขวาง และวิธีเชิงตัวเลขสามารถแก้ปัญหาที่มีเงื่อนไขขอบเขตและรูปแบบที่มีความซับซ้อนได้เป็นอย่างดี ดังนั้นในงานวิจัยนี้ได้นำวิธีของครังก์-นิโคลสัน (Crank-Nicolson Method) มาหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาการนำความร้อนในโรงเรือนเลี้ยงสัตว์ปีกที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขตที่ซับซ้อน

## 1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1.2.1 เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขต

1.2.2 เพื่อศึกษาการถ่ายเทความร้อนที่ไหลจากภายนอกสู่ภายในโรงเรือน

1.2.3 เพื่อเขียนโปรแกรมเมทแล็บ (MATLAB) จำนวนหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับแบบจำลองการนำความร้อนจากภายนอกสู่ภายในโรงเรือนเลี้ยงสัตว์ปีก

1.2.4 เพื่อศึกษาการนำความร้อนของวัสดุชนิดต่าง ๆ ที่นำมาปลูกสร้างโรงเรือนเลี้ยงสัตว์ปีก

### 1.3 ขอบเขตของการวิจัย

การนำความร้อนใน 1 มิติ จากภายนอกสู่ภายในโรงเรือนซึ่งโรงเรือนประกอบด้วยผนังด้านข้าง หลังคา และพื้น โดยที่หลังคาอยู่ในแนวขนานกับพื้น

### 1.4 วิธีการศึกษาวิจัย

1.4.1 ศึกษาการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขต

1.4.2 ศึกษาวิธีเชิงตัวเลขในการประมาณค่าผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขต

1.4.3 เลือกวิธีเชิงตัวเลขที่เหมาะสมกับการประมาณค่าผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขต โดยมีเงื่อนไขขอบเขตอยู่ในรูปเชิงอนุพันธ์

1.4.4 เขียนโปรแกรม MATLAB เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขต

1.4.5 ตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมกับปัญหาที่มีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

1.4.6 นำโปรแกรม MATLAB มาคำนวณหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาในงานวิจัย

### 1.5 ประโยชน์ของการวิจัย

1.5.1 นำปัญหาในงานภาคอุตสาหกรรมที่อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขตมาหาผลเฉลยเชิงตัวเลขได้

1.5.2 ได้โปรแกรม MATLAB เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับแบบจำลองการนำความร้อนจากภายนอกสู่ภายในโรงเรือนเลี้ยงสัตว์ปีก

1.5.3 เป็นข้อมูลในการตัดสินใจว่าจะเลือกใช้วัสดุชนิดใดสร้างโรงเรือน เพื่อให้เหมาะสมกับภูมิประเทศและสภาพความเป็นอยู่ของสัตว์ปีกแต่ละชนิด และเป็นการประหยัดต้นทุน

1.5.4 เพื่อเป็นแนวทางในการวิจัยปัญหาอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการอุตสาหกรรมทำฟาร์มเลี้ยงสัตว์ปีกได้

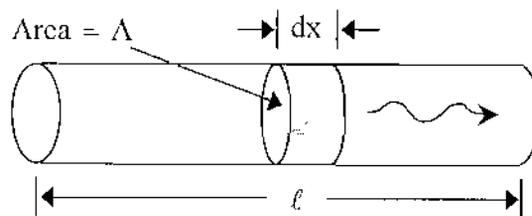
1.5.5 สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการออกแบบปลูกสร้างอาคารสถานที่ต่าง ๆ เช่น โรงงานอุตสาหกรรม บ้านที่อยู่อาศัย และอื่น ๆ ได้

## บทที่ 2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

### 2.1 ปัญหาการนำความร้อนในสถานะไม่คงตัว (Unsteady State Heat Conduction Problems)

สถานะไม่คงตัว (Unsteady State หรือ Transient State) หมายถึง อุณหภูมิที่จุด ๆ หนึ่ง ในวัตถุมีการเปลี่ยนแปลงเมื่อเวลาเปลี่ยนไป สถานะไม่คงตัวเกิดขึ้นเมื่อตอนที่เริ่มมีการถ่ายเทความร้อนให้แก่วัตถุ จะทำให้อุณหภูมิของวัตถุไม่คงที่ และมีการเปลี่ยนแปลงเมื่อเวลาเปลี่ยนไป

ปัญหาการนำความร้อนในสถานะไม่คงตัว มีรูปแบบสมการเป็นสมการพาราโบลิก เมื่อพิจารณาการนำความร้อนแบบ 1 มิติ (สถานะไม่คงตัว) ดังภาพที่ 2-1 แสดงแท่งโลหะ ซึ่งวางตัวตามแนวแกน  $x$  โดยมีพื้นที่หน้าตัดเป็น  $A$  และให้  $v(x,t)$  เป็นอุณหภูมิตามตำแหน่งต่าง ๆ ซึ่งเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา  $t$



ภาพที่ 2-1 แสดงการนำความร้อนผ่านแท่งโลหะแบบ 1 มิติ ในสถานะไม่คงตัว

กำหนดให้ แท่งโลหะมีค่าการนำความร้อน (Thermal Conductivity) เท่ากับค่าคงที่  $K$  โดยไม่เปลี่ยนแปลงไปตามอุณหภูมิ และไม่ขึ้นอยู่กับการตำแหน่ง  $x$  ใด ๆ บนแท่งโลหะนั้น ค่าความหนาแน่นของมวล (Mass Density) เท่ากับ  $\rho$  ค่าความร้อนจำเพาะ (Specific Heat) เท่ากับ  $c$  การสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของปัญหาดังกล่าวโดยการพิจารณาแท่งโลหะชิ้นเล็ก ๆ และใช้หลักความจริงของการถ่ายเทความร้อนภายใต้สถานะไม่คงตัวดังนี้

$$\left( \begin{array}{c} \text{อัตราการไหลเข้า} \\ \text{ของความร้อน} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{อัตราการไหลออก} \\ \text{ของความร้อน} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{อัตราการสะสม} \\ \text{ความร้อน} \end{array} \right) \quad (2-1)$$

โดยที่

$$\text{อัตราการไหลเข้าของความร้อน} = -KA \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2-2)$$

$$\text{อัตราการไหลออกของความร้อน} = -KA \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \right) \quad (2-3)$$

$$\text{อัตราการสะสมความร้อน} = cp(A dx) \frac{\partial v}{\partial t} \quad (2-4)$$

แทนสมการ (2-2) สมการ (2-3) และสมการ (2-4) ลงในสมการ (2-1) จะได้

$$-KA \frac{\partial v}{\partial x} - \left[ -KA \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \right) \right] = cp(A dx) \frac{\partial v}{\partial t} \quad (2-5)$$

จัดรูปสมการ จะได้

$$\frac{\partial}{\partial t} v(x, t) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, t) \quad (2-6)$$

เมื่อ  $\kappa = \frac{K}{cp}$

ผลเฉลยของปัญหาข้างต้น ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขตด้วย สำหรับปัญหาการนำความร้อนใน 1 มิติ นั้น เงื่อนไขเริ่มต้นจะระบุค่าของอุณหภูมิของแท่งโลหะ ที่จุดต่าง ๆ ในขณะที่เริ่มพิจารณา (หรือที่  $t = 0$ ) นั่นคือ

$$v(x, 0) = f(x) \quad (2-7)$$

สำหรับเงื่อนไขขอบเขตจะระบุค่าของอุณหภูมิที่ปลายทั้งสองของแท่งโลหะ ซึ่งส่วนใหญ่จะเกี่ยวข้องกับอัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิกับระยะทาง (Temperature Gradient) และอาจจะขึ้นอยู่กับตัวแปรเวลาด้วย นั่นคือ

$$\Lambda_1 v(0, t) + B_1 \frac{\partial}{\partial x} v(0, t) = F_1(t) \quad (2-8)$$

$$\Lambda_2 v(\ell, t) + B_2 \frac{\partial}{\partial x} v(\ell, t) = F_2(t) \quad (2-9)$$

ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (2-6) ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น (2-7) เงื่อนไขขอบเขต (2-8) และเงื่อนไขขอบเขต (2-9) คือ [4]

$$v(x, t) = \int_0^\ell f(\xi) G(x, \xi, t) d\xi - \frac{\kappa}{B_1} \int_0^t F_1(\tau) G(x, 0, t - \tau) d\tau + \frac{\kappa}{B_2} \int_0^t F_2(\tau) G(x, \ell, t - \tau) d\tau \quad (2-10)$$

$$\text{เมื่อ } G(x, \xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|y_n\|^2} y_n(x) y_n(\xi) e^{-\kappa \alpha_n^2 t} \quad (2-11)$$

$$y_n(x) = \cos(\alpha_n x) - \frac{\Lambda_1}{\alpha_n B_1} \sin(\alpha_n x) \quad (2-12)$$

$$\|y_n\|^2 = \frac{\Lambda_2}{2B_2 \alpha_n^2} \frac{(B_1 \alpha_n)^2 + A_1^2}{(B_2 \alpha_n)^2 + \Lambda_2^2} - \frac{\Lambda_1}{2B_1 \alpha_n^2} + \frac{\ell}{2} \left[ 1 + \left( \frac{\Lambda_1}{B_1 \alpha_n} \right)^2 \right] \quad (2-13)$$

โดยที่  $\alpha_n$  คือ รากที่เป็นบวก (Positive Roots) ของสมการต่อไปนี้

$$\frac{\tan(\alpha \ell)}{\alpha} = \frac{\Lambda_2 B_1 - A_1 B_2}{B_1 B_2 \alpha^2 + \Lambda_1 \Lambda_2} \quad (2-14)$$

## 2.2 การประมาณค่าของอนุพันธ์เชิงผลต่างสืบเนื่อง

### (Finite Difference Approximations to Derivatives)

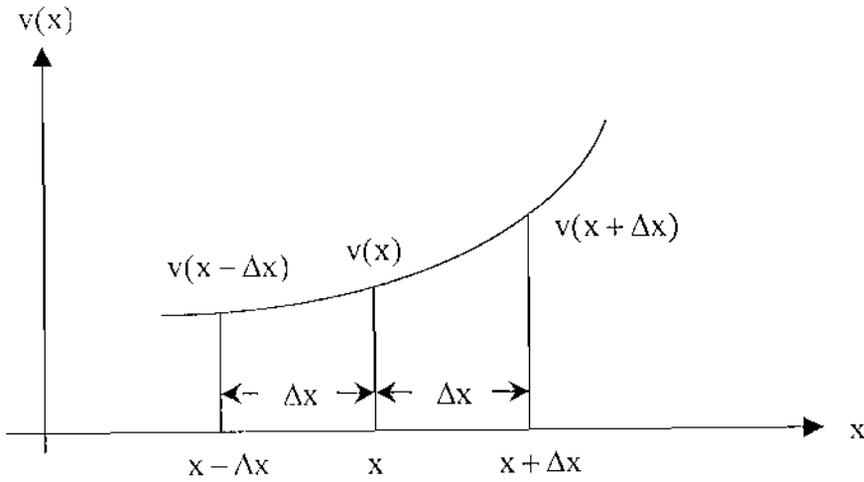
กำหนดให้ฟังก์ชัน  $v$  และอนุพันธ์ของ  $v$  เป็นฟังก์ชันค่าเดียว (Single-Valued Function) ฟังก์ชันมีขอบเขต (Finite) และเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ของ  $x$  โดยทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ [5] จะได้ว่า

$$v(x + \Delta x) = v(x) + \Delta x v'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} v''(x) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} v'''(x) + \frac{(\Delta x)^4}{4!} v^{(4)}(x) + \dots \quad (2-15)$$

และ

$$v(x - \Delta x) = v(x) - \Delta x v'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} v''(x) - \frac{(\Delta x)^3}{3!} v'''(x) + \frac{(\Delta x)^4}{4!} v^{(4)}(x) - \dots \quad (2-16)$$

ซึ่งแสดงดังภาพที่ 2-2



ภาพที่ 2-2 แสดงสัญลักษณ์ที่ใช้ในอนุกรมเทย์เลอร์

นำสมการ (2-15) ลบด้วยสมการ (2-16) จะได้

$$v(x + \Delta x) - v(x - \Delta x) = 2\Delta x v'(x) + \frac{2(\Delta x)^3}{3!} v'''(x) + \dots \quad (2-17)$$

ดังนั้น สามารถประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งได้ดังนี้

$$v'(x) = \frac{v(x + \Delta x) - v(x - \Delta x)}{2\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{3!} v'''(x) - \dots \quad (2-18)$$

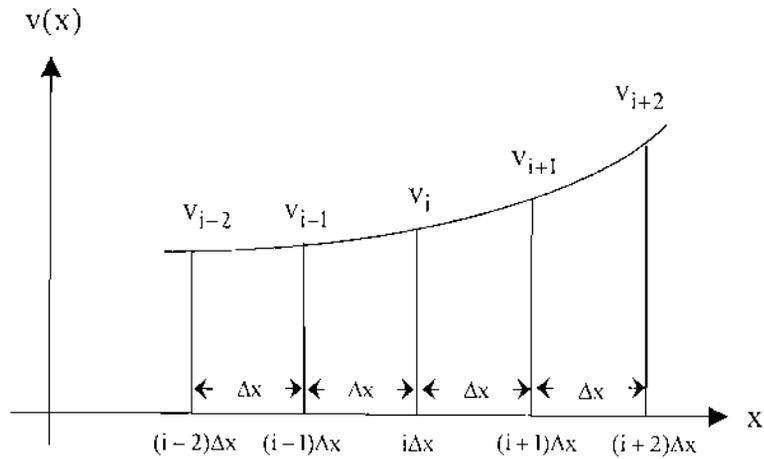
หรือเขียนได้ว่า

$$v'(x) = \frac{v(x + \Delta x) - v(x - \Delta x)}{2\Delta x} + O[(\Delta x)^2] \quad (2-19)$$

เรียกว่า สูตรผลต่างกลาง (Central Difference Formula) ที่ให้ค่าความผิดพลาดอันดับ  $(\Delta x)^2$  และใช้สัญลักษณ์ [6]

$$\begin{aligned} x &= i\Delta x & ; & & x + \Delta x &= (i+1)\Delta x & ; & & x - \Delta x &= (i-1)\Delta x \\ v(x) &= v_i & ; & & v(x + \Delta x) &= v_{i+1} & ; & & v(x - \Delta x) &= v_{i-1} \end{aligned}$$

ซึ่งแสดงดังภาพที่ 2-3



ภาพที่ 2-3 แสดงสัญลักษณ์ที่ใช้ในการแทนผลต่างสี่เหลี่ยมของ  $v(x)$

ดังนั้นการประมาณผลต่างสี่เหลี่ยมของอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชัน  $v(x)$  ที่จุด  $x$  กำหนดโดยสมการ

$$v'_i = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2\Delta x} + O[(\Delta x)^2] \quad (2-20)$$

ในการประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสูงขึ้น เช่น อนุพันธ์อันดับสอง สามารถทำได้เช่นกัน โดยนำสมการ (2-15) มาเทียบกับสมการ (2-16) จะได้

$$v(x + \Delta x) + v(x - \Delta x) = 2v(x) + \frac{2(\Delta x)^2}{2!} v''(x) + \frac{2(\Delta x)^4}{4!} v^{(4)}(x) + \dots \quad (2-21)$$

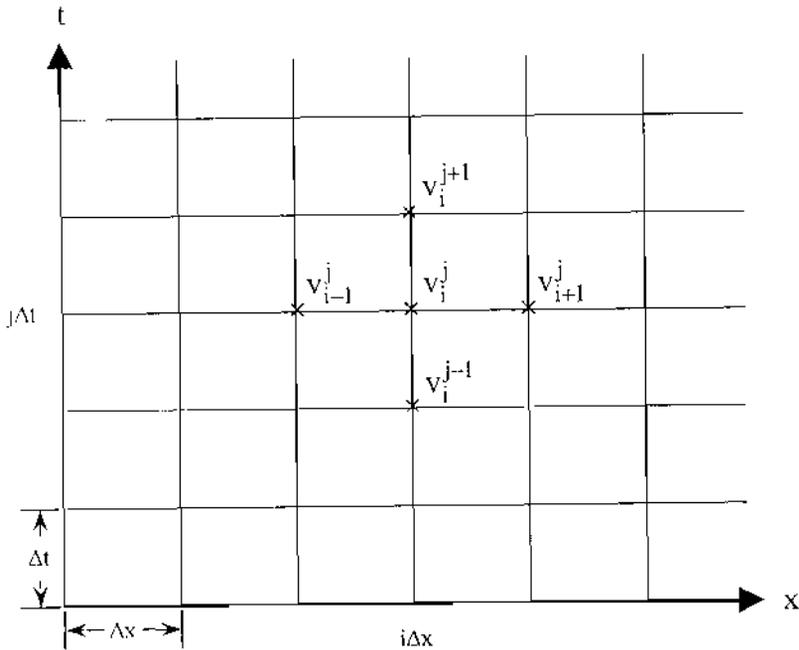
จัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$v''(x) = \frac{v(x - \Delta x) - 2v(x) + v(x + \Delta x)}{(\Delta x)^2} - \frac{(\Delta x)^2}{12} v^{(4)}(x) - \dots \quad (2-22)$$

หรือเขียนได้ว่า

$$v''_i = \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2] \quad (2-23)$$

เมื่อกำหนดให้  $v$  เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ  $x$  และ  $t$  แบ่งระนาบ  $x-t$  เป็นช่อง ๆ ซึ่งมีขนาดเท่ากับ  $\Delta x$  และ  $\Delta t$  ในทิศโคออร์ดิเนต  $x$  และ  $t$  ตามลำดับ ช่องเหล่านี้ประกอบกันขึ้นเป็นตาราง ซึ่งเชื่อมกันที่จุดต่อ (Grid Point) ที่อยู่ในตำแหน่งต่าง ๆ กัน ดังแสดงในภาพที่ 2-4



ภาพที่ 2-4 แสดงการแบ่งระนาบ  $x-t$  เป็นตารางสี่เหลี่ยมเพื่อใช้กับวิธีการผลต่างสี่บเนื้อง

การกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน  $v(x+\Delta x, t)$  และ  $v(x-\Delta x, t)$  ที่จุด  $(x, t)$  คือ [7]

$$v(x + \Delta x, t) = v(x, t) + \Delta x \frac{\partial}{\partial x} v(x, t) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, t) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} v(x, t) + \dots \tag{2-24}$$

$$v(x - \Delta x, t) = v(x, t) - \Delta x \frac{\partial}{\partial x} v(x, t) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, t) - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} v(x, t) + \dots \tag{2-25}$$

สามารถประมาณค่า  $\frac{\partial}{\partial x} v(x, t)$  ได้โดยนำสมการ (2-24) ลบด้วยสมการ (2-25) นั่นคือ

$$v(x + \Delta x, t) - v(x - \Delta x, t) = 2\Delta x \frac{\partial}{\partial x} v(x, t) + \frac{2(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} v(x, t) + \dots \tag{2-26}$$

นำ  $2\Delta x$ หารทั้ง 2 ข้าง แล้วจัดรูปสมการใหม่ ได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x} v(x, t) = \frac{v(x + \Delta x, t) - v(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} v(x, t) - \dots \tag{2-27}$$

ในการทำงานเดียวกัน สามารถประมาณค่าของ  $\frac{\partial}{\partial t}v(x, t)$  ได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial t}v(x, t) = \frac{v(x, t + \Delta t) - v(x, t - \Delta t)}{2\Delta t} - \frac{(\Delta t)^2}{3!} \frac{\partial^3}{\partial t^3}v(x, t) - \dots \quad (2-28)$$

ใช้สัญลักษณ์

$$\begin{aligned} x &= i\Delta x & ; & & x + \Delta x &= (i+1)\Delta x & ; & & x - \Delta x &= (i-1)\Delta x \\ t &= j\Delta t & ; & & t + \Delta t &= (j+1)\Delta t & ; & & t - \Delta t &= (j-1)\Delta t \\ v(x, t) &= v_i^j & ; & & v(x + \Delta x, t) &= v_{i+1}^j & ; & & v(x - \Delta x, t) &= v_{i-1}^j \\ v(x, t + \Delta t) &= v_i^{j+1} & ; & & v(x, t - \Delta t) &= v_i^{j-1} \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการ (2-27) และสมการ (2-28) สามารถเขียนใหม่ได้ตามลำดับ ดังนี้

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{v_{i+1}^j - v_{i-1}^j}{2\Delta x} + O[(\Delta x)^2] \quad (2-29)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{i,j} = \frac{v_i^{j+1} - v_i^{j-1}}{2\Delta t} + O[(\Delta t)^2] \quad (2-30)$$

ในการประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง ทำได้โดยนำสมการ (2-24) บวกกับสมการ (2-25) นั่นคือ

$$\begin{aligned} v(x + \Delta x, t) + v(x - \Delta x, t) &= 2v(x, t) + \frac{2(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2}v(x, t) \\ &+ \frac{2(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4}{\partial x^4}v(x, t) + \dots \end{aligned} \quad (2-31)$$

จัดรูปสมการใหม่ จะได้  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(x, t)$  ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2}v(x, t) &= \frac{v(x - \Delta x, t) - 2v(x, t) + v(x + \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} \\ &- \frac{(\Delta x)^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial x^4}v(x, t) - \dots \end{aligned} \quad (2-32)$$

หรือเขียนได้ว่า

$$\left. \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{v_{i-1}^j - 2v_i^j + v_{i+1}^j}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2] \quad (2-33)$$

2.3 วิธีของเครงก์-นิโคลสันสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

(Crank-Nicolson Method for the Partial Differential Equation)

วิธีของเครงก์-นิโคลสันเป็นวิธีการแบบปริยาย (Implicit Scheme) แบบหนึ่ง คิดค้นโดยจอห์น เครงก์ (John Crank) และฟิไลส นิโคลสัน (Phyllis Nicolson) [8] ซึ่งสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการประมาณผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

$$\frac{\partial}{\partial t}v(x,t) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2}v(x,t) , 0 < x < \ell , t > 0 \tag{2-34}$$

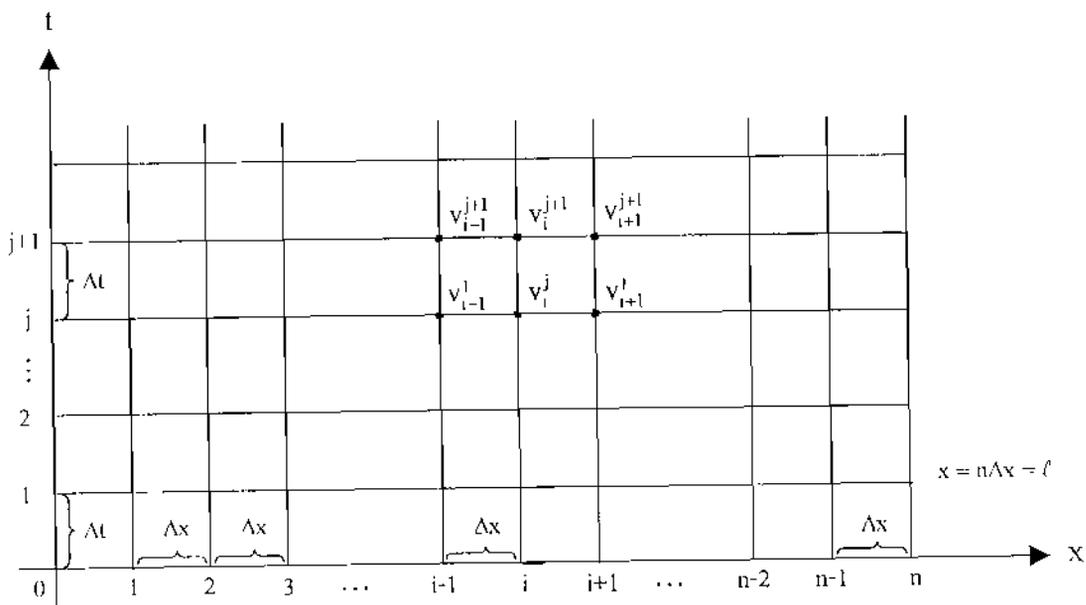
โดยแบ่งโดเมน  $x$  และ  $t$  เป็นช่วงเล็กๆ คือ  $\Delta x$  และ  $\Delta t$  ตามลำดับ ดังแสดงในภาพที่ 2-5 จากนั้นก็แทนพิกัด  $x$  และ  $t$  ดังนี้ [9]

$$x = i\Delta x ; \quad i = 0,1,2,\dots,n$$

$$t = j\Delta t ; \quad j = 0,1,2,\dots$$

เมื่อ

$$n = \frac{\ell}{\Delta x}$$



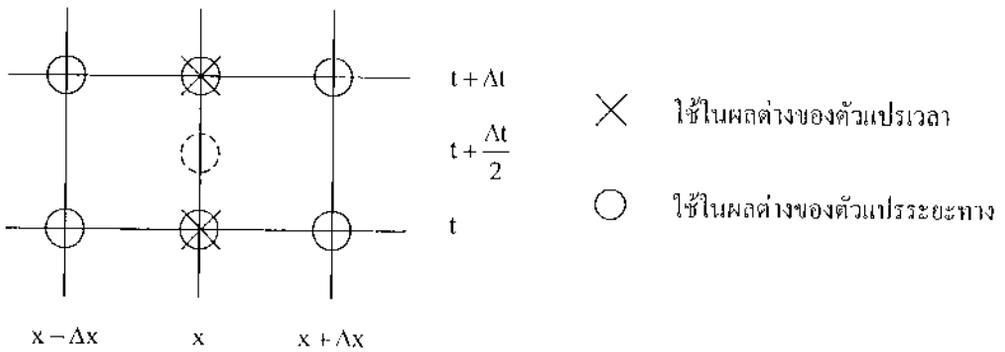
ภาพที่ 2-5 แสดงการแบ่งโดเมน  $xt$  เป็นช่วง  $\Delta x$  และ  $\Delta t$

และ  $v(x,t)$  ณ ตำแหน่ง  $x$  และเวลา  $t$  แทนด้วยสัญลักษณ์  $v_i^j$  นั่นคือ

$$v(x,t) = v(i\Delta x, j\Delta t) \equiv v_i^j \tag{2-35}$$

วิธีของแครงก์-นิโคลสัน จะประมาณผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (2-34) ที่จุด  $(x, t + \frac{\Delta t}{2})$  ซึ่งอยู่ระหว่างแถวในตาข่าย ดังภาพที่ 2-6 โดยการประมาณพจน์  $\frac{\partial}{\partial t} v(x, t + \frac{\Delta t}{2})$  จากสูตรผลต่างกลาง คือ

$$\frac{\partial}{\partial t} v(x, t + \frac{\Delta t}{2}) = \frac{v(x, t + \Delta t) - v(x, t)}{\Delta t} + O[(\Delta t)^2] \tag{2-36}$$



ภาพที่ 2-6 แสดงตำแหน่งการคำนวณสำหรับวิธีของแครงก์-นิโคลสัน

ส่วนการประมาณพจน์  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, t + \frac{\Delta t}{2})$  โดยวิธีของแครงก์-นิโคลสันหาได้จากค่าเฉลี่ยระหว่างพจน์  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, t)$  ดังสมการ (2-37) และ  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, t + \Delta t)$  ดังสมการ (2-38) ซึ่งมีความถูกต้องอันดับ  $O[(\Delta x)^2]$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, t) = \frac{v(x - \Delta x, t) - 2v(x, t) + v(x + \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2] \tag{2-37}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, t + \Delta t) = \frac{v(x - \Delta x, t + \Delta t) - 2v(x, t + \Delta t) + v(x + \Delta x, t + \Delta t)}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2] \tag{2-38}$$

นั่นคือ จะได้  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, t + \frac{\Delta t}{2})$  ดังนี้

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, t + \frac{\Delta t}{2}) = \frac{1}{2} \left[ \frac{v(x - \Delta x, t) - 2v(x, t) + v(x + \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} + \frac{v(x - \Delta x, t + \Delta t) - 2v(x, t + \Delta t) + v(x + \Delta x, t + \Delta t)}{(\Delta x)^2} \right] + O[(\Delta x)^2] \quad (2-39)$$

แทน  $v(x, t) = v_i^j$  และ  $v(x, t + \Delta t) = v_i^{j+1}$  ลงในสมการ (2-36) จะได้

$$\frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{i, j + \frac{1}{2}} = \frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\Delta t} + O[(\Delta t)^2] \quad (2-40)$$

และแทน

$$\begin{aligned} v(x, t) &= v_i^j & v(x - \Delta x, t) &= v_{i-1}^j & v(x + \Delta x, t) &= v_{i+1}^j \\ v(x, t + \Delta t) &= v_i^{j+1} & v(x - \Delta x, t + \Delta t) &= v_{i-1}^{j+1} & v(x + \Delta x, t + \Delta t) &= v_{i+1}^{j+1} \end{aligned}$$

ลงในสมการ (2-39) จะได้

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_{i, j + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{v_{i-1}^j - 2v_i^j + v_{i+1}^j}{(\Delta x)^2} + \frac{v_{i-1}^{j+1} - 2v_i^{j+1} + v_{i+1}^{j+1}}{(\Delta x)^2} \right] + O[(\Delta x)^2] \quad (2-41)$$

แทนสมการ (2-40) และสมการ (2-41) ลงในสมการ (2-34) โดยตัดพจน์ค่าคลาดเคลื่อน  $O[(\Delta x)^2]$  และ  $O[(\Delta t)^2]$  ออก จะได้สมการเชิงผลต่าง ดังนี้

$$\frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\Delta t} = \frac{\kappa}{2} \left[ \frac{v_{i-1}^j - 2v_i^j + v_{i+1}^j}{(\Delta x)^2} + \frac{v_{i-1}^{j+1} - 2v_i^{j+1} + v_{i+1}^{j+1}}{(\Delta x)^2} \right] \quad (2-42)$$

จัดสมการให้อยู่ในรูปอย่างง่าย จะได้

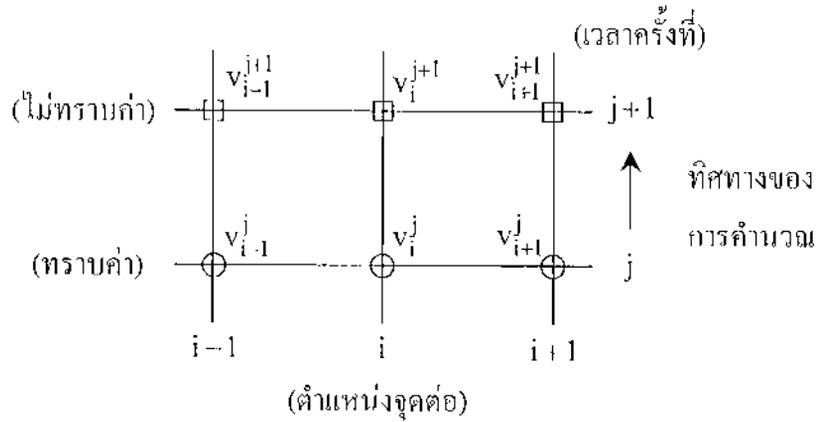
$$-\lambda v_{i-1}^{j+1} + (2 + 2\lambda)v_i^{j+1} - \lambda v_{i+1}^{j+1} = \lambda v_{i-1}^j + (2 - 2\lambda)v_i^j + \lambda v_{i+1}^j \quad (2-43)$$

เมื่อ  $i = 0, 1, 2, \dots, n$

โดยที่ 
$$\lambda = \frac{\kappa \Delta t}{(\Delta x)^2}$$

สมการ (2-43) นี้ ประกอบด้วย  $v$  ที่ไม่ทราบค่าที่จุดต่อ  $i-1, i$  และ  $i+1$  ณ เวลาครั้งที่  $j+1$  ซึ่งอยู่ทางด้านซ้ายของสมการ นั่นคือ  $v_{i-1}^{j+1}, v_i^{j+1}$  และ  $v_{i+1}^{j+1}$  โดยทางขวาของสมการ

ประกอบด้วย  $v$  ที่จุดต่อทั้งสามนี้เช่นกันซึ่งทราบค่ามาแล้วจากการคำนวณครั้งที่  $j$  นั่นคือ  $v_{i-1}^j, v_i^j$  และ  $v_{i+1}^j$  โดยสมการ (2-43) นี้ สามารถแสดงดังภาพที่ 2-7



ภาพที่ 2-7 แสดงการคำนวณโดยวิธีของมตรงค์-นิโกลสัน

หากประยุกต์สมการ (2-43) เข้ากับทุก ๆ จุดต่อภายในที่ต้องการคำนวณหา  $v$  จะก่อให้เกิดระบบสมการแบบสามแนวเฉียง (Tridiagonal System) ซึ่งสามารถเขียนได้ในรูปเมทริกซ์  $AV = B$  โดยที่  $A$  คือ เมทริกซ์สัมประสิทธิ์จัตุรัส (Coefficient Square Matrix) อันดับ  $n+1$

$V$  คือ เวกเตอร์ไม่ทราบค่า (Unknown Vector) อันดับ  $n+1$  ที่สถานะ  $j+1$

และ  $B$  คือ เวกเตอร์ทราบค่า (Known Vector) อันดับ  $n+1$  ซึ่งเป็นค่าของ  $V$  ที่สถานะ  $j$

### 2.4 สูตรผลต่างกลางสำหรับเงื่อนไขขอบเขต

#### (Central-Differences for the Boundary Conditions)

พิจารณาเงื่อนไขขอบเขต ต่อไปนี้

$$A_1 v(0, t) + B_1 \frac{\partial}{\partial x} v(0, t) = F_1 \tag{2-44}$$

$$A_2 v(l, t) + B_2 \frac{\partial}{\partial x} v(l, t) = F_2 \tag{2-45}$$

แทนผลต่างสี่เหลี่ยมกับเงื่อนไขขอบเขต (2-44) และเงื่อนไขขอบเขต (2-45) โดยใช้ผลต่างกลาง ได้ตามลำดับดังนี้

$$A_1 v_0^j + B_1 \left( \frac{v_1^j - v_{-1}^j}{2\Delta x} \right) = F_1 \tag{2-46}$$

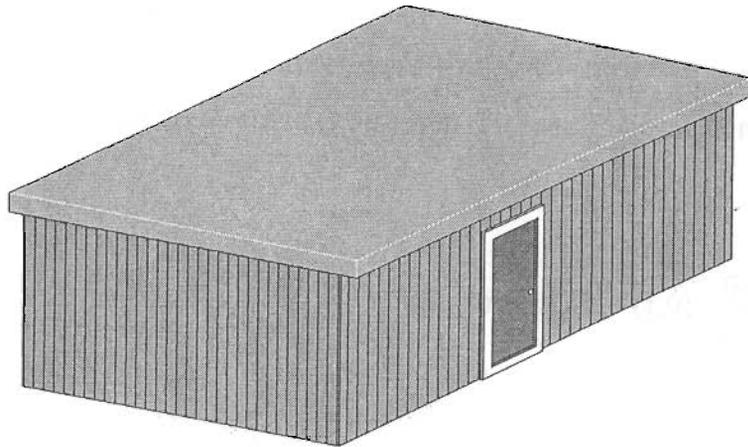
$$A_2 v_n^j + B_2 \left( \frac{v_{n+1}^j - v_{n-1}^j}{2\Delta x} \right) = F_2 \quad (2-47)$$

โดยที่  $v_{-1}^j$  และ  $v_{n+1}^j$  คือ ฟังก์ชันที่ไม่มีตัวจริง (Fictitious) ซึ่งอยู่นอกโดเมน  $x$

### บทที่ 3

#### กระบวนการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีของแครงก์-นิโคลสัน

ในงานวิจัยนี้ กล่าวถึงการนำวิธีของแครงก์-นิโคลสัน (Crank-Nicolson Method) มาหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาการนำความร้อนผ่านผนังแบบ 1 มิติ ในโรงเรือนเลี้ยงสัตว์ปีกเชิงพาณิชย์ โดยโรงเรือนประกอบด้วยผนังด้านข้าง 4 ด้าน หลังคาซึ่งกำหนดให้มีลักษณะขนานกับพื้น และพื้น ดังแสดงในภาพที่ 3-1



ภาพที่ 3-1 แสดงรูปแบบของโรงเรือนเลี้ยงสัตว์ปีก

โดยปัญหาการนำความร้อนของผนังและหลังคาโรงเรือน แสดงในรูปสมการดังนี้ [3]

$$\frac{\partial}{\partial t} v(x, t) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, t) \quad , \quad 0 < x < \ell \quad (3-1)$$

$$K \frac{\partial}{\partial x} v(0, t) + H_{in} [s(t) - v(0, t)] = 0 \quad (3-2)$$

$$-K \frac{\partial}{\partial x} v(\ell, t) + H_{out} [v_{out}(t) - v(\ell, t)] = 0 \quad (3-3)$$

$$v(x, 0) = f(x) \quad (3-4)$$

$$Mc \frac{d}{dt} s(t) + AH_{in} [s(t) - v(0, t)] = 0 \quad (3-5)$$

เมื่อ	$v(x, t)$	แทน	อุณหภูมิในผนัง และหลังคาโรงเรือน ที่ลึกเข้าไป $x$ หน่วย ณ เวลา $t$ ใดๆ ( $^{\circ}\text{C}$ )
	$\kappa$	แทน	การแพร่กระจายความร้อนของผนัง และหลังคาโรงเรือน ( $\text{m}^2/\text{s}$ )
	$K$	แทน	ค่าการนำความร้อนที่ผนัง และหลังคาโรงเรือน ( $\text{W}/^{\circ}\text{Cm}$ )
	$H_{\text{in}}, H_{\text{out}}$	แทน	สัมประสิทธิ์การแผ่และการพาความร้อนร่วมกันในโรงเรือนและนอกโรงเรือน ตามลำดับ ( $\text{W}/^{\circ}\text{Cm}^2$ )
	$s(t)$	แทน	อุณหภูมิของอากาศในโรงเรือน ( $^{\circ}\text{C}$ )
	$v_{\text{out}}(t)$	แทน	อุณหภูมิของอากาศนอกโรงเรือน ( $^{\circ}\text{C}$ )
	$M$	แทน	มวลของอากาศในโรงเรือน ( $\text{kg}$ )
	$c$	แทน	ความร้อนจำเพาะของอากาศในโรงเรือน ( $\text{kJ}/\text{kg}^{\circ}\text{C}$ )
	$A$	แทน	พื้นที่ผนัง และหลังคาโรงเรือน ( $\text{m}^2$ )

สำหรับปัญหาการนำความร้อนของพื้นโรงเรือน แสดงในรูปสมการดังนี้ [10]

$$\frac{\partial}{\partial t} v(x, t) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, t) \quad , \quad 0 < x < \ell \quad (3-6)$$

$$K \frac{\partial}{\partial x} v(0, t) + H_{\text{in}}[s - v(0, t)] = 0 \quad (3-7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \ell} v(x, t) = C_0 \quad (3-8)$$

$$v(x, 0) = f(x) \quad (3-9)$$

เมื่อ	$v(x, t)$	แทน	อุณหภูมิในพื้นที่โรงเรือน ที่ลึกลงไป $x$ หน่วย ณ เวลา $t$ ใดๆ ( $^{\circ}\text{C}$ )
	$\kappa$	แทน	การแพร่กระจายความร้อนของพื้นโรงเรือน ( $\text{m}^2/\text{s}$ )
	$K$	แทน	ค่าการนำความร้อนที่พื้นโรงเรือน ( $\text{W}/\text{Cm}$ )
	$H_{\text{in}}$	แทน	สัมประสิทธิ์การแผ่และการพาความร้อนร่วมกันในโรงเรือน ( $\text{W}/^{\circ}\text{Cm}^2$ )
	$s$	แทน	อุณหภูมิของอากาศในโรงเรือน ( $^{\circ}\text{C}$ )

ในที่นี้จะแบ่งปัญหาออกเป็น 3 กรณี ดังต่อไปนี้

1. ปัญหาการนำความร้อนของผนังและหลังคาโรงเรือนกรณีที่อยู่ภายในและภายนอกโรงเรือนคงที่
2. ปัญหาการนำความร้อนของพื้นโรงเรือนกรณีที่อยู่ภายในโรงเรือนคงที่
3. ปัญหาการนำความร้อนของผนังและหลังคาโรงเรือนกรณีที่อยู่ภายในและภายนอกโรงเรือนเปลี่ยนแปลง

### 3.1 ปัญหาการนำความร้อนของผนังและหลังคาโรงเรือนกรณีที่อยู่ภายในและภายนอกโรงเรือนคงที่

ลักษณะการถ่ายเทความร้อนผ่านผนังและหลังคาโรงเรือน เป็นการถ่ายเทความร้อนแบบนำความร้อน สำหรับการนำความร้อนกรณีที่อยู่ภายในและภายนอกโรงเรือนคงที่ นั่นคือให้  $s(t) = s$  และ  $v_{out}(t) = v_{out}$  ตามลำดับ จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial t} v(x, t) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, t) ; 0 < x < \ell \quad (3-10)$$

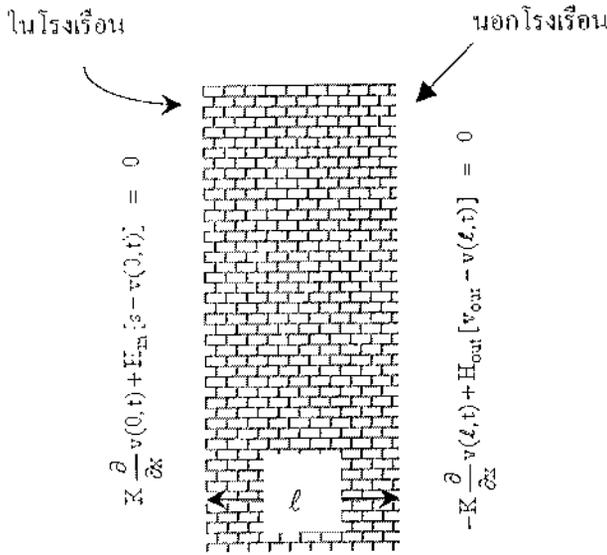
ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น

$$v(x, 0) = f(x) \quad (3-11)$$

และเงื่อนไขขอบเขต

$$K \frac{\partial}{\partial x} v(0, t) + H_{in} [s - v(0, t)] = 0 \quad (3-12)$$

$$-K \frac{\partial}{\partial x} v(\ell, t) + H_{out} [v_{out} - v(\ell, t)] = 0 \quad (3-13)$$



ภาพที่ 3-2 แสดงการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของผนังและหลังคาโรงเรือนกรณีให้อุณหภูมิภายในและภายนอกโรงเรือนคงที่

3.1.1 ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของอุณหภูมิ

ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของอุณหภูมิของปัญหาค่าเริ่มต้นและปัญหาค่าขอบข้างต้น คือ [4]

$$v(x,t) = \int_0^l f(\xi) G(x,\xi,t) d\xi + \frac{\kappa H_{in} s}{K} \int_0^t G(x,0,t-\tau) d\tau + \frac{\kappa H_{out} v_{out}}{K} \int_0^t G(x,l,t-\tau) d\tau \tag{3-14}$$

เมื่อ  $G(x,0,t-\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|y_n\|^2} y_n(x) e^{-\kappa \alpha_n^2 (t-\tau)}$  (3-15)

$$G(x,l,t-\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|y_n\|^2} y_n(x) y_n(l) e^{-\kappa \alpha_n^2 (t-\tau)} \tag{3-16}$$

$$y_n(x) = \cos(\alpha_n x) + \frac{H_{in}}{\alpha_n K} \sin(\alpha_n x) \tag{3-17}$$

$$\|y_n\|^2 = \frac{H_{out}}{2K\alpha_n^2} \frac{(K\alpha_n)^2 + H_{in}^2}{(K\alpha_n)^2 + H_{out}^2} + \frac{H_{in}}{2K\alpha_n^2} + \frac{\ell}{2} \left[ 1 + \left( \frac{H_{in}}{K\alpha_n} \right)^2 \right] \tag{3-18}$$

โดยที่  $\alpha_n$  เป็นรากที่เป็นบวกของสมการต่อไปนี้

$$\frac{\tan(\alpha \ell)}{\alpha} = \frac{K(H_{in} + H_{out})}{(\alpha K)^2 - H_{in} H_{out}} \tag{3-19}$$

### 3.1.2 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของอุณหภูมิต

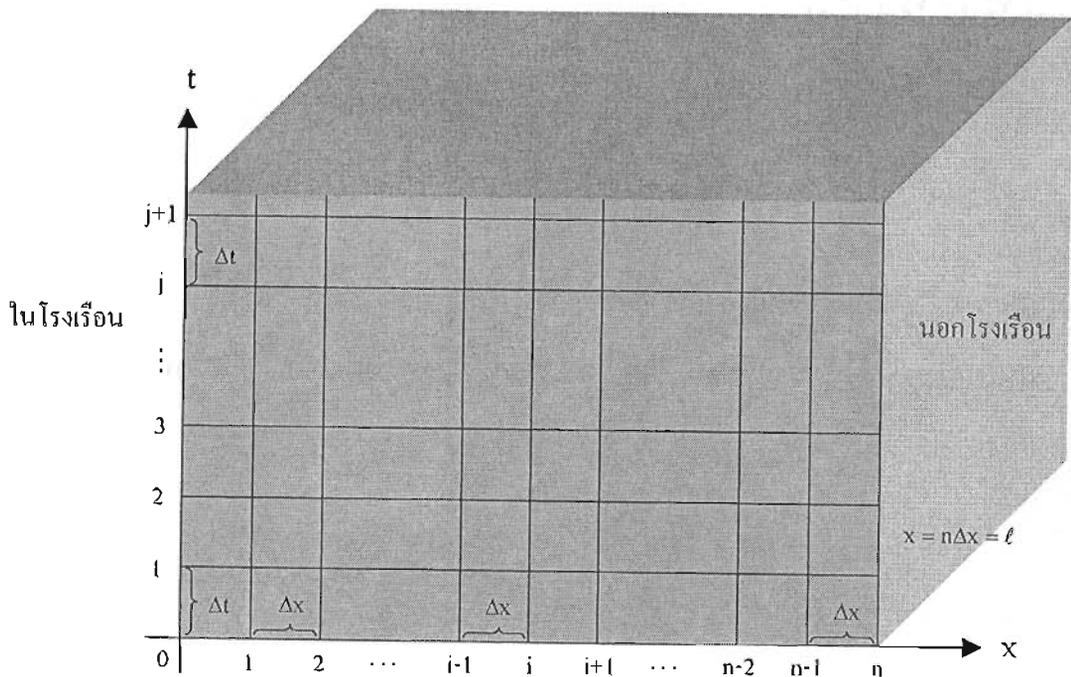
การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของอุณหภูมิต มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 แบ่งความหนาของผนังหรือหลังคาออกเป็น  $n$  ส่วน โดยแต่ละส่วนมีความยาว  $\Delta x$  และมีจุดต่อทั้งหมด  $n+1$  จุด ที่จุดต่อต่างๆ เหล่านี้ เป็นตำแหน่งที่จะคำนวณหาค่าของอุณหภูมิต  $v$  ซึ่งเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา  $t$  แสดงดังภาพที่ 3-3

ขั้นตอนที่ 2 พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ (3-10) แทนด้วยผลต่างสี่เหลี่ยม โดยใช้วิธีของแครังก์-นิโคลสัน ได้ดังสมการ (2-43) นั่นคือ

$$-\lambda v_{i-1}^{j+1} + (2+2\lambda)v_i^{j+1} - \lambda v_{i+1}^{j+1} = \lambda v_{i-1}^j + (2-2\lambda)v_i^j + \lambda v_{i+1}^j \quad (3-20)$$

ขั้นตอนที่ 3 จากเงื่อนไขเริ่มต้น (3-11) กำหนดอุณหภูมิตเริ่มต้นของทุก ๆ จุดต่อที่เวลา  $t=0$  เท่ากับ  $f(i\Delta x)$  นั่นคือ  $v_i^0 = f(i\Delta x) \equiv f_i$  ;  $i = 0, 1, 2, \dots, n$



ภาพที่ 3-3 แสดงการแบ่งผนังหรือหลังคาโรงเรือนเพื่อคำนวณหาอุณหภูมิต

ขั้นตอนที่ 4 พิจารณาเงื่อนไขขอบเขต (3-12) ใช้การประมาณของผลต่างกลาง จะได้

$$K \left( \frac{v_i^j - v_{i-1}^j}{2\Delta x} \right) + H_{in}(s - v_0^j) = 0 \quad (3-21)$$

นั่นคือ 
$$v_{-1}^j = v_i^j + \frac{2\Delta x H_{in}}{K} (s - v_0^j) \quad (3-22)$$

และ 
$$v_{-1}^{j+1} = v_i^{j+1} + \frac{2\Delta x H_{in}}{K} (s - v_0^{j+1}) \quad (3-23)$$

แทนสมการ (3-22) และสมการ (3-23) ลงในสมการ (3-20) เมื่อ  $i=0$  จะได้

$$(2 + 2\lambda + \frac{2\lambda\Delta x H_{in}}{K})v_0^{j+1} - 2\lambda v_{-1}^{j+1} = (2 - 2\lambda - \frac{2\lambda\Delta x H_{in}}{K})v_0^j + 2\lambda v_{-1}^j + \frac{4\lambda\Delta x H_{in}}{K}s \quad (3-24)$$

ขั้นตอนที่ 5 พิจารณาเงื่อนไขขอบเขต (3-13) ใช้การประมาณของผลต่างกลาง จะได้

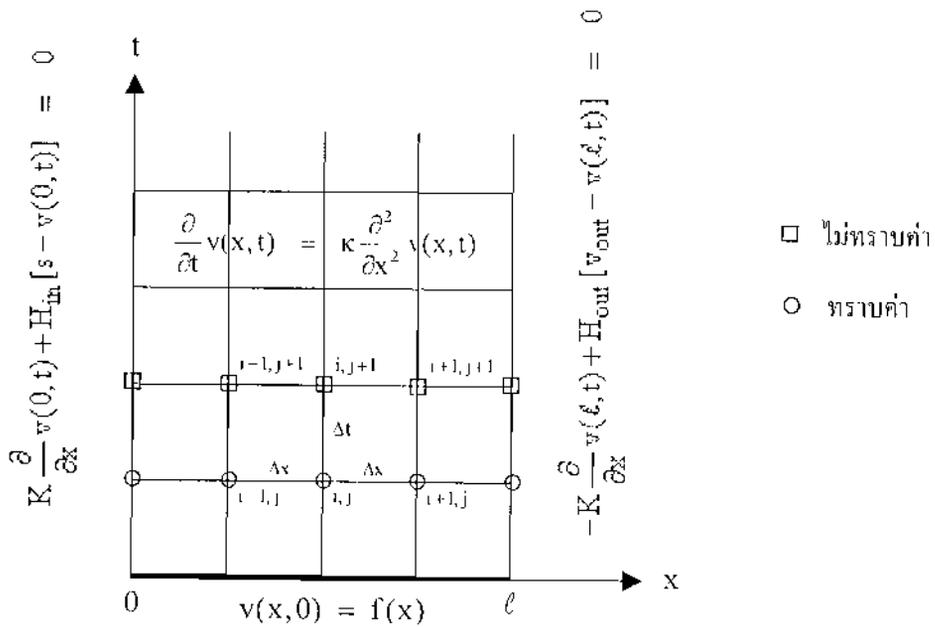
$$-K \left( \frac{v_{n+1}^j - v_n^j}{2\Delta x} \right) + H_{out}(v_{out} - v_n^j) = 0 \quad (3-25)$$

นั่นคือ 
$$v_{n+1}^j = v_n^j + \frac{2\Delta x H_{out}}{K} (v_{out} - v_n^j) \quad (3-26)$$

และ 
$$v_{n+1}^{j+1} = v_n^{j+1} + \frac{2\Delta x H_{out}}{K} (v_{out} - v_n^{j+1}) \quad (3-27)$$

แทนสมการ (3-26) และสมการ (3-27) ลงในสมการ (3-20) เมื่อ  $i=n$  จะได้

$$-2\lambda v_{n+1}^{j+1} + (2 + 2\lambda + \frac{2\lambda\Delta x H_{out}}{K})v_n^{j+1} = 2\lambda v_{n+1}^j + (2 - 2\lambda - \frac{2\lambda\Delta x H_{out}}{K})v_n^j + \frac{4\lambda\Delta x H_{out}}{K}v_{out} \quad (3-28)$$



ภาพที่ 3-4 แสดงการคำนวณหาการกระจายของอุณหภูมิในผนังและหลังคาโรงเรือนกรณีที่มีอุณหภูมิภายในและภายนอกโรงเรือนคงที่

ขั้นตอนที่ 6 คำนวณหาอุณหภูมิที่สถานะถัดไป นั่นคือ  $v_0^{j+1}, v_1^{j+1}, \dots, v_n^{j+1}$  ซึ่งสามารถคำนวณได้จากสมการ (3-24) สมการ (3-20) และสมการ (3-28) โดยจัดรูปใหม่ตามลำดับ ดังนี้ สำหรับ  $i=0$  ;

$$(2 + 2\lambda\beta_1)v_0^{j+1} - 2\lambda v_1^{j+1} = (2 - 2\lambda\beta_1)v_0^j + 2\lambda v_1^j + 4\lambda\gamma_1 \tag{3-29}$$

สำหรับ  $i=1, 2, 3, \dots, n-1$  ;

$$-\lambda v_{i-1}^{j+1} + (2 + 2\lambda)v_i^{j+1} - \lambda v_{i+1}^{j+1} = \lambda v_{i-1}^j + (2 - 2\lambda)v_i^j + \lambda v_{i+1}^j \tag{3-30}$$

สำหรับ  $i=n$  ;

$$-2\lambda v_{n-1}^{j+1} + (2 + 2\lambda\beta_2)v_n^{j+1} = 2\lambda v_{n-1}^j + (2 - 2\lambda\beta_2)v_n^j + 4\lambda\gamma_2 \tag{3-31}$$

เมื่อ

$$\beta_1 = 1 + \frac{\Delta x H_{in}}{K}$$

$$\beta_2 = 1 + \frac{\Delta x H_{out}}{K}$$

$$\gamma_1 = \frac{\Delta x H_{in} s}{K}$$

$$\gamma_2 = \frac{\Delta x H_{out} \cdot v_{out}}{K}$$

สมการ (3-29) สมการ (3-30) และสมการ (3-31) ที่เกิดขึ้นนี้ ประกอบด้วยอุณหภูมิที่ไม่ทราบค่าที่แต่ละจุดต่อ ณ สถานะ  $j+1$  จำนวน  $n+1$  ค่า ทางด้านซ้ายของสมการ นั้นคือ  $v_0^{j+1}, v_1^{j+1}, \dots, v_n^{j+1}$  โดยทางด้านขวาของสมการประกอบด้วยอุณหภูมิที่จุดต่อซึ่งทราบค่ามาแล้วจากการคำนวณสถานะที่  $j$  จำนวน  $n+1$  ค่า คือ  $v_0^j, v_1^j, \dots, v_n^j$  สำหรับช่วงเวลาที 1 ( $j = 0$ )

$$\begin{aligned} i = 0 & ; & (2 + 2\lambda\beta_1)v_0^1 - 2\lambda v_1^1 & = & (2 - 2\lambda\beta_1)v_0^0 + 2\lambda v_1^0 + 4\lambda\gamma_1 \\ i = 1 & ; & -\lambda v_0^1 + (2 + 2\lambda)v_1^1 - \lambda v_2^1 & = & \lambda v_0^0 + (2 - 2\lambda)v_1^0 + \lambda v_2^0 \\ i = 2 & ; & -\lambda v_1^1 + (2 + 2\lambda)v_2^1 - \lambda v_3^1 & = & \lambda v_1^0 + (2 - 2\lambda)v_2^0 + \lambda v_3^0 \\ i = 3 & ; & -\lambda v_2^1 + (2 + 2\lambda)v_3^1 - \lambda v_4^1 & = & \lambda v_2^0 + (2 - 2\lambda)v_3^0 + \lambda v_4^0 \\ & \vdots & & & \vdots \\ i = n - 1 & ; & -\lambda v_{n-2}^1 + (2 + 2\lambda)v_{n-1}^1 - \lambda v_n^1 & = & \lambda v_{n-2}^0 + (2 - 2\lambda)v_{n-1}^0 + \lambda v_n^0 \\ i = n & ; & -2\lambda v_{n-1}^1 + (2 + 2\lambda\beta_2)v_n^1 & = & 2\lambda v_{n-1}^0 + (2 - 2\lambda\beta_2)v_n^0 + 4\lambda\gamma_2 \end{aligned}$$

สำหรับช่วงเวลาที 2 ( $j = 1$ )

$$\begin{aligned} i = 0 & ; & (2 + 2\lambda\beta_1)v_0^2 - 2\lambda v_1^2 & = & (2 - 2\lambda\beta_1)v_0^1 + 2\lambda v_1^1 + 4\lambda\gamma_1 \\ i = 1 & ; & -\lambda v_0^2 + (2 + 2\lambda)v_1^2 - \lambda v_2^2 & = & \lambda v_0^1 + (2 - 2\lambda)v_1^1 + \lambda v_2^1 \\ i = 2 & ; & -\lambda v_1^2 + (2 + 2\lambda)v_2^2 - \lambda v_3^2 & = & \lambda v_1^1 + (2 - 2\lambda)v_2^1 + \lambda v_3^1 \\ i = 3 & ; & -\lambda v_2^2 + (2 + 2\lambda)v_3^2 - \lambda v_4^2 & = & \lambda v_2^1 + (2 - 2\lambda)v_3^1 + \lambda v_4^1 \\ & \vdots & & & \vdots \\ i = n - 1 & ; & -\lambda v_{n-2}^2 + (2 + 2\lambda)v_{n-1}^2 - \lambda v_n^2 & = & \lambda v_{n-2}^1 + (2 - 2\lambda)v_{n-1}^1 + \lambda v_n^1 \\ i = n & ; & -2\lambda v_{n-1}^2 + (2 + 2\lambda\beta_2)v_n^2 & = & 2\lambda v_{n-1}^1 + (2 - 2\lambda\beta_2)v_n^1 + 4\lambda\gamma_2 \end{aligned}$$

สำหรับช่วงเวลาอื่น ๆ สามารถเขียนได้ในลักษณะเดียวกัน

ขั้นตอนที่ 7 จากระบบสมการที่ได้จากขั้นตอนที่ 6 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์สามแนวเฉียง (Tridiagonal Matrix) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 2+2\lambda\beta_1 & -2\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 2+2\lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2+2\lambda & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 2+2\lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -2\lambda & 2+2\lambda\beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0^{j+1} \\ v_1^{j+1} \\ v_2^{j+1} \\ \vdots \\ v_{n-1}^{j+1} \\ v_n^{j+1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2-2\lambda\beta_1 & 2\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2-2\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2-2\lambda & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 2-2\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2\lambda & 2-2\lambda\beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0^j \\ v_1^j \\ v_2^j \\ \vdots \\ v_{n-1}^j \\ v_n^j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\lambda\gamma_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 4\lambda\gamma_2 \end{bmatrix} \\
 & \hspace{25em} (3-32)
 \end{aligned}$$

เมื่อ  $j = 0, 1, 2, \dots$

ขั้นตอนที่ 8 เขียนโปรแกรมเมทแล็บ (MATLAB) เพื่อคำนวณหา  $v_0^{j+1}, v_1^{j+1}, \dots, v_n^{j+1}$  โดยใช้วิธีการแก้ระบบสมการแบบสามแนวเฉียง เมื่อเมทริกซ์สามแนวเฉียงทางด้านซ้ายมือของสมการ (3-32) เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (Nonsingular) ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบทในภาคผนวก ข

การแทนผลต่างสี่เหลี่ยมของสมการการนำความร้อน (3-10) ด้วยวิธีของแลกรัง-นิโคลสัน ดังปรากฏในสมการ (3-20) ก่อให้เกิดความผิดพลาดจากการตัดปลาย (Truncation Error) อันดับ  $(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$  และสูตรผลต่างสี่เหลี่ยมของเงื่อนไขขอบเขต (3-12) และ (3-13) โดยใช้ผลต่างกลางดังสมการ (3-21) และสมการ (3-25) ตามลำดับ นั้นมีอันดับความผิดพลาดจากการตัดปลาย  $(\Delta x)^2$  ซึ่งจะก่อให้เกิดผลกัฟห้ที่มีความเที่ยงตรงมากขึ้น

3.2 ปัญหาการนำความร้อนของพื้นโรงเรือนกรณีที่อยู่อุณหภูมิภายในโรงเรือนคงที่

ถ้าเราพิจารณาการนำความร้อนของพื้นโรงเรือนกรณีที่อยู่อุณหภูมิภายในโรงเรือนคงที่ แสดงอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์คือ

$$\frac{\partial}{\partial t} v(x, t) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, t) ; 0 < x < \ell \tag{3-33}$$

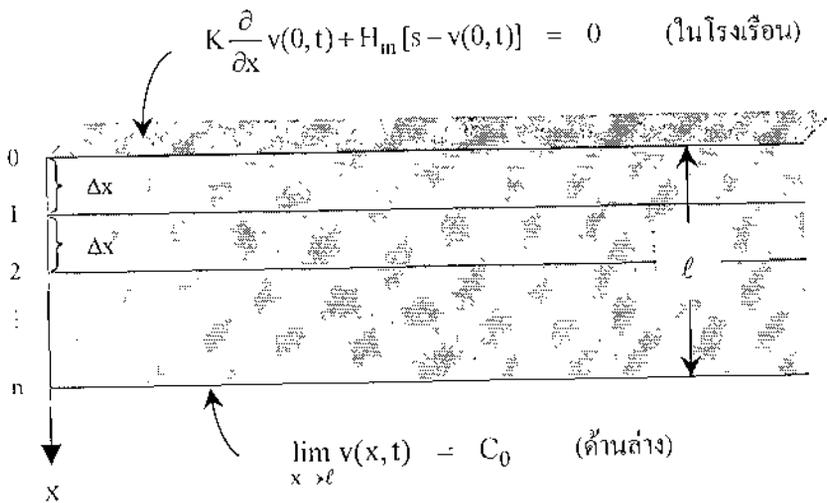
ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น

$$v(x, 0) = f(x) \tag{3-34}$$

และเงื่อนไขขอบเขต

$$K \frac{\partial}{\partial x} v(0, t) + H_m [s - v(0, t)] = 0 \tag{3-35}$$

$$\lim_{x \rightarrow \ell} v(x, t) = C_0 \tag{3-36}$$



ภาพที่ 3-5 แสดงการแบ่งความหนาของพื้นพร้อมกับการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต

การหาผลเฉลยเชิงตัวเลข มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

- ขั้นตอนที่ 1 แบ่งความหนาของพื้นทำนองเดียวกับการแบ่งความหนาของผนังหรือหลังคา
- ขั้นตอนที่ 2 แทนสมการเชิงอนุพันธ์ (3-33) ด้วยผลต่างสี่เหลี่ยมโดยวิธีของเครงก์-นิโคลสัน ได้ดังสมการ (3-20)
- ขั้นตอนที่ 3 จากเงื่อนไขเริ่มต้น (3-34) กำหนดอุณหภูมิเริ่มต้นของทุก ๆ จุดต่อที่เวลา  $t = 0$  เท่ากับ  $f(i\Delta x)$  นั่นคือ  $v_i^0 = f(i\Delta x) \equiv f_i ; i = 0, 1, 2, \dots, n$



สำหรับช่วงเวลาที่ 2 ( $j = 1$ )

$$\begin{aligned}
 i = 0 & \quad ; \quad (2 + 2\lambda\beta_1)v_0^2 - 2\lambda v_1^2 & = & (2 - 2\lambda\beta_1)v_0^1 + 2\lambda v_1^1 + 4\lambda\gamma_1 \\
 i = 1 & \quad ; \quad -\lambda v_0^2 + (2 + 2\lambda)v_1^2 - \lambda v_2^2 & = & \lambda v_0^1 + (2 - 2\lambda)v_1^1 + \lambda v_2^1 \\
 i = 2 & \quad ; \quad -\lambda v_1^2 + (2 + 2\lambda)v_2^2 - \lambda v_3^2 & = & \lambda v_1^1 + (2 - 2\lambda)v_2^1 + \lambda v_3^1 \\
 & \quad \vdots & & \vdots \\
 i = n-2 & \quad ; \quad -\lambda v_{n-3}^2 + (2 + 2\lambda)v_{n-2}^2 - \lambda v_{n-1}^2 & = & \lambda v_{n-2}^1 + (2 - 2\lambda)v_{n-1}^1 + \lambda v_n^1 \\
 i = n-1 & \quad ; \quad -\lambda v_{n-2}^2 + (2 + 2\lambda)v_{n-1}^2 & = & \lambda v_{n-2}^1 + (2 - 2\lambda)v_{n-1}^1 + 2\lambda C_0
 \end{aligned}$$

สำหรับช่วงเวลาอื่นๆ สามารถเขียนได้ในลักษณะเดียวกัน

ขั้นตอนที่ 7 จากระบบสมการที่ได้จากขั้นตอนที่ 6 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์สามแนวเฉียง ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 2 + 2\lambda\beta_1 & -2\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 2 + 2\lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 + 2\lambda & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 2 + 2\lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda & 2 + 2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0^{j+1} \\ v_1^{j+1} \\ v_2^{j+1} \\ \vdots \\ v_{n-2}^{j+1} \\ v_{n-1}^{j+1} \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} 2 - 2\lambda\beta_1 & 2\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2 - 2\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 - 2\lambda & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 2 - 2\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 2 - 2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0^j \\ v_1^j \\ v_2^j \\ \vdots \\ v_{n-2}^j \\ v_{n-1}^j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\lambda\gamma_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2\lambda C_0 \end{bmatrix} \\
 & \hspace{20em} (3-37)
 \end{aligned}$$

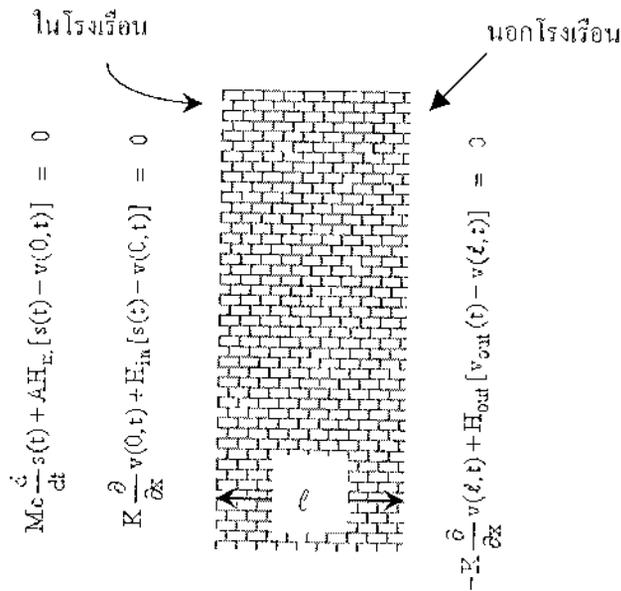
เมื่อ  $j = 0, 1, 2, \dots$

ขั้นตอนที่ 8 เขียนโปรแกรมเมทริกซ์ เพื่อคำนวณหา  $v_0^{j+1}, v_1^{j+1}, \dots, v_{n-1}^{j+1}$  โดยใช้วิธีการแก้ระบบสมการแบบสามแนวเฉียง เมื่อเมทริกซ์สามแนวเฉียงทางด้านซ้ายมือของสมการ (3-37) เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน

จะเห็นว่า อันดับความผิดพลาดจากการตัดปลายเป็นอันดับสองเช่นเดียวกับหัวข้อ 3.1

### 3.3 ปัญหาการนำความร้อนของผนังและหลังคาโรงเรือนกรณีที่อุณหภูมิภายในและภายนอกโรงเรือนเปลี่ยนแปลง

สำหรับการนำความร้อนของผนังและหลังคาโรงเรือนกรณีที่อุณหภูมิภายในและภายนอกโรงเรือนเปลี่ยนแปลง แสดงอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ (3-1) มีเงื่อนไขเริ่มต้นดังสมการ (3-4) และเงื่อนไขขอบเขตดังสมการ (3-2) สมการ (3-3) และสมการ (3-5) การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตแสดงดังภาพที่ 3-7



ภาพที่ 3-7 แสดงการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของผนังและหลังคาโรงเรือนกรณีที่อุณหภูมิภายในและภายนอกโรงเรือนเปลี่ยนแปลง

#### 3.3.1 ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของอุณหภูมิ

ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของอุณหภูมิของปัญหาในสมการ (3-1) ถึง (3-5) เมื่อกำหนดให้  $v(0,t) = g(t)$  คือ [4]

$$v(x,t) = \int_0^l f(\xi)G(x,\xi,t)d\xi + \frac{\kappa H_{in}}{K} \int_0^t s(\tau)G(x,0,t-\tau)d\tau + \frac{\kappa H_{out}}{K} \int_0^t v_{out}(\tau)G(x,l,t-\tau)d\tau \tag{3-38}$$

$$\text{เมื่อ } G(x,0,t-\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|y_n\|^2} y_n(x) e^{-\kappa \alpha_n^2(t-\tau)} \tag{3-39}$$

$$G(x, \ell, t - \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|y_n\|^2} y_n(x) y_n(\ell) e^{-\kappa \alpha_n^2 (t - \tau)} \quad (3-40)$$

$$y_n(x) = \cos(\alpha_n x) + \frac{H_{in}}{\alpha_n K} \sin(\alpha_n x) \quad (3-41)$$

$$\|y_n\|^2 = \frac{H_{out}}{2K\alpha_n^2} \frac{(K\alpha_n)^2 + H_{in}^2}{(K\alpha_n)^2 + H_{out}^2} + \frac{H_{in}}{2K\alpha_n^2} + \frac{\ell}{2} \left[ 1 + \left( \frac{H_{in}}{K\alpha_n} \right)^2 \right] \quad (3-42)$$

โดยที่  $\alpha_n$  เป็นรากที่เป็นบวกของสมการต่อไปนี้

$$\frac{\tan(\alpha \ell)}{\alpha} = \frac{K(H_{in} + H_{out})}{(\alpha K)^2 - H_{in} H_{out}} \quad (3-43)$$

และคำนวณหาค่าของอุณหภูมิภายในโรงเรือน  $s(t)$  ได้จากสมการต่อไปนี้

$$s(t) = e^{-\frac{AH_{in}}{Mc} t} \left[ \frac{AH_{in}}{Mc} \int e^{\frac{AH_{in}}{Mc} t} g(t) dt + C \right] \quad (3-44)$$

### 3.3.2 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของอุณหภูมิ

การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของอุณหภูมิมียุ่ขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 ห้ค่าเริ่มต้นกับขั้นตอนที่ 1 ในหัวข้อ 3.1.2

ขั้นตอนที่ 2 สมการเชิงอนุพันธ์ (3-1) แทนด้วยผลต่างสืบเนื่องโดยวิธีของแครงก์-นิโคลสัน ได้ดังสมการ (3-20)

ขั้นตอนที่ 3 จากเงื่อนไขเริ่มต้น (3-4) กำหนดอุณหภูมิเริ่มต้นของทุก ๆ จุดต่อที่เวลา  $t=0$  เท่ากับ  $f(i\Delta x)$  นั่นคือ  $v_i^0 = f(i\Delta x) \equiv f_i$  ;  $i = 0, 1, 2, \dots, n$

ขั้นตอนที่ 4 พิจารณาเงื่อนไขขอบเขต (3-2) ใช้การประมาณของผลต่างกลาง จะได้

$$K \left( \frac{v_i^j - v_{i-1}^j}{2\Delta x} \right) + H_{in}(s^j - v_0^j) = 0 \quad (3-45)$$

$$\text{นั่นคือ} \quad v_{-1}^j = v_i^j + \frac{2\Delta x H_{in}}{K} (s^j - v_0^j) \quad (3-46)$$

$$\text{และ} \quad v_{-1}^{j+1} = v_i^{j+1} + \frac{2\Delta x H_{in}}{K} (s^{j+1} - v_0^{j+1}) \quad (3-47)$$

แทนสมการ (3-46) และสมการ (3-47) ลงในสมการ (3-20) เมื่อ  $i=0$  จะได้

$$(2 + 2\lambda + \frac{2\lambda\Delta x H_{in}}{K})v_0^{j+1} - 2\lambda v_1^{j+1} - \frac{2\lambda\Delta x H_{in}}{K}s^{j+1} = (2 - 2\lambda - \frac{2\lambda\Delta x H_{in}}{K})v_0^j + 2\lambda v_1^j + \frac{2\lambda\Delta x H_{in}}{K}s^j \quad (3-48)$$

ขั้นตอนที่ 5 พิจารณาเงื่อนไขขอบเขต (3-3) ใช้การประมาณของผลต่างกลางจะได้

$$-K \left( \frac{v_{n+1}^j - v_n^j}{2\Delta x} \right) + H_{out}(v_{out}^j - v_n^j) = 0 \quad (3-49)$$

นั่นคือ 
$$v_{n+1}^j = v_n^j + \frac{2\Delta x H_{out}}{K}(v_{out}^j - v_n^j) \quad (3-50)$$

และ 
$$v_{n+1}^{j+1} = v_n^{j+1} + \frac{2\Delta x H_{out}}{K}(v_{out}^{j+1} - v_n^{j+1}) \quad (3-51)$$

แทนสมการ (3-50) และสมการ (3-51) ลงในสมการ (3-20) เมื่อ  $i=n$  จะได้

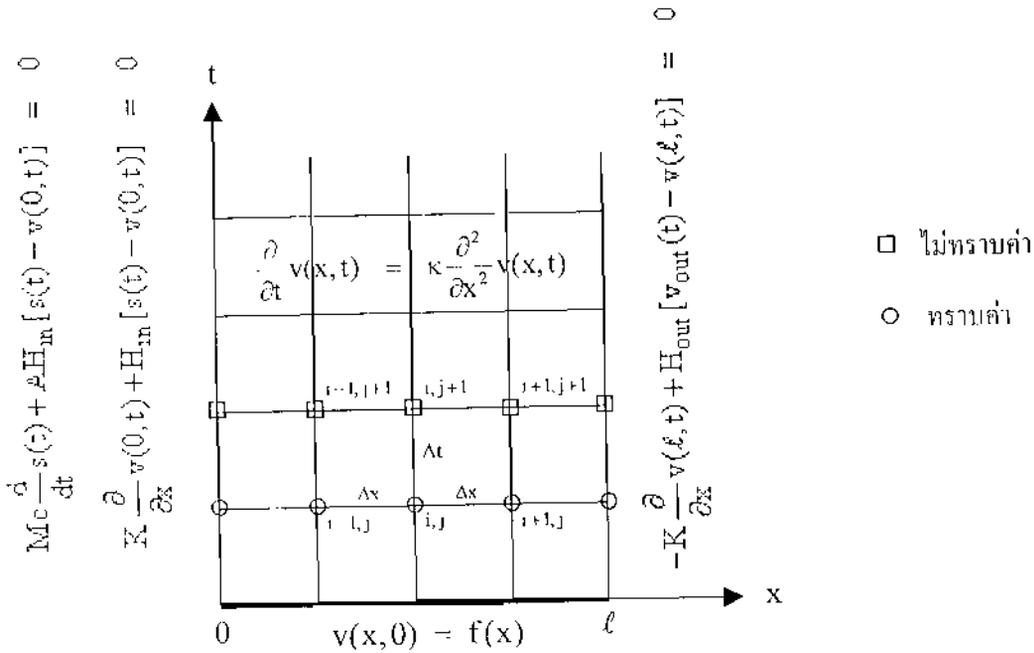
$$-2\lambda v_{n-1}^{j+1} + (2 + 2\lambda + \frac{2\lambda\Delta x H_{out}}{K})v_n^{j+1} = 2\lambda v_{n-1}^j + (2 - 2\lambda - \frac{2\lambda\Delta x H_{out}}{K})v_n^j + \frac{2\lambda\Delta x H_{out}}{K}(v_{out}^j + v_{out}^{j+1}) \quad (3-52)$$

ขั้นตอนที่ 6 พิจารณาเงื่อนไขขอบเขต (3-5) แทนด้วยผลต่างสี่เหลี่ยม โดยวิธีของ แกรงก์-นิโคลสัน จะได้

$$Mc \left( \frac{s^{j+1} - s^j}{\Delta t} \right) + \frac{1}{2} \Lambda H_{in} [(s^{j+1} - v_0^{j+1}) + (s^j - v_0^j)] = 0 \quad (3-53)$$

นั่นคือ

$$-\frac{1}{2} \Lambda H_{in} v_0^{j+1} + \left( \frac{Mc}{\Delta t} + \frac{1}{2} \Lambda H_{in} \right) s^{j+1} = \frac{1}{2} \Lambda H_{in} v_0^j + \left( \frac{Mc}{\Delta t} - \frac{1}{2} \Lambda H_{in} \right) s^j \quad (3-54)$$



ภาพที่ 3-8 แสดงการคำนวณหาการกระจายของอุณหภูมิในผนังและหลังคาโรงเรือนกรณีที่อุณหภูมิภายในและภายนอกเปลี่ยนแปลง

ขั้นตอนที่ 7    กำหนดหา  $v_0^{j+1}, v_1^{j+1}, \dots, v_n^{j+1}$  และ  $s^{j+1}$  ได้จากสมการ (3-48) , (3-54) , (3-20) และ (3-52) ซึ่งจัดรูปใหม่ได้ตามลำดับ ดังนี้  
 สำหรับ  $i = 0$  ;

$$(2 + 2\lambda\beta_1)v_0^{j+1} - 2\lambda v_1^{j+1} - 2\lambda\gamma_1 s^{j+1} = (2 - 2\lambda\beta_1)v_0^j + 2\lambda v_1^j + 2\lambda\gamma_1 s^j \tag{3-55}$$

$$\text{และ} \quad -\eta_1 v_0^{j+1} + (\eta_2 + \eta_1)s^{j+1} = \eta_1 v_0^j + (\eta_2 - \eta_1)s^j \tag{3-56}$$

สำหรับ  $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$  ;

$$-\lambda v_{i-1}^{j+1} + (2 + 2\lambda)v_i^{j+1} - \lambda v_{i+1}^{j+1} = \lambda v_{i-1}^j + (2 - 2\lambda)v_i^j + \lambda v_{i+1}^j \tag{3-57}$$

สำหรับ  $i = n$  ;

$$-2\lambda v_{n-1}^{j+1} + (2 + 2\lambda\beta_2)v_n^{j+1} = 2\lambda v_{n-1}^j + (2 - 2\lambda\beta_2)v_n^j + 2\lambda\gamma_2 (v_{out}^j + v_{out}^{j+1}) \tag{3-58}$$





ขั้นตอนที่ ๑ เขียนโปรแกรมเมทแอนด์ เพื่อคำนวณหา  $v_0^{j+1}, v_1^{j+1}, \dots, v_n^{j+1}$  และ  $s^{j+1}$  โดยใช้วิธีการแก้ระบบสมการแบบสามแนวเฉียง

จะเห็นว่า มีการแทนผลต่างสี่เหลี่ยมในเงื่อนไขขอบเขต (3-5) ด้วยวิธีของเกรง์-นิโคลสัน ได้ดังสมการ (3-53) ซึ่งก่อให้เกิดความผิดพลาดจากการตัดปลายอันดับ  $(\Delta t)^2$  ทำให้ทั้งระบบมีค่าความผิดพลาดเป็นอันดับสองทั้งกับเวลาและระยะทาง ผลเลขยกที่ได้ก็จะมีค่าเที่ยงตรงมากขึ้น

## บทที่ 4

### ผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาการนำความร้อน

ในบทนี้จะแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาการนำความร้อนทั้งกรณีที่อยู่ภายในและภายนอกโรงเรือนคงที่ และกรณีที่อยู่ภายในและภายนอกโรงเรือนเปลี่ยนแปลง นอกจากนี้จะพิจารณาการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิในผนัง หลังคา และพื้นโรงเรือนเมื่อมีการเปลี่ยนวัสดุที่ใช้ในการสร้างโรงเรือนด้วย

#### 4.1 ปัญหาการนำความร้อนในผนังและหลังคาโรงเรือนกรณีที่อยู่ภายในและภายนอกโรงเรือนคงที่

ต่อไปนี้จะทำการทดสอบประสิทธิภาพของโปรแกรมจากปัญหาที่มีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4-1 ปัญหาการนำความร้อน แสดงอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย [5]

$$\frac{\partial}{\partial t} v(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, t) \quad ; \quad 0 < x < 1 \quad (4-1)$$

ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น

$$v(x, 0) = 1 \quad ; \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4-2)$$

และเงื่อนไขขอบเขต

$$\frac{\partial}{\partial x} v(0, t) - v(0, t) = 0 \quad (4-3)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} v(1, t) - v(1, t) = 0 \quad (4-4)$$

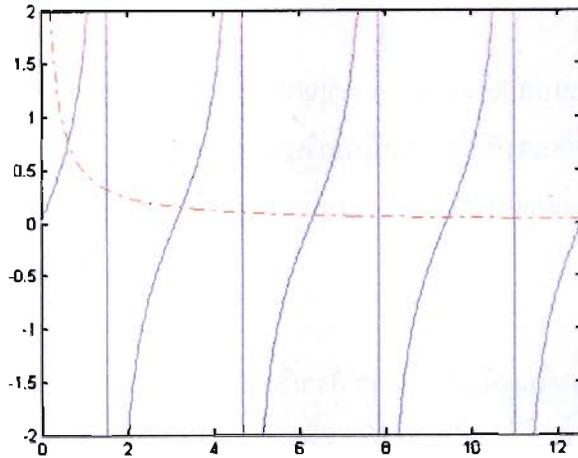
และผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของอุณหภูมิ  $v(x, t)$  คือ

$$v(x, t) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sec \alpha_n}{(3 + 4\alpha_n^2)} e^{-4\alpha_n^2 t} \cos 2\alpha_n \left(x - \frac{1}{2}\right) \right\} \quad ; \quad (0 < x < 1) \quad (4-5)$$

เมื่อ  $\alpha_n$  คือรากที่เป็นบวกของสมการ ต่อไปนี้

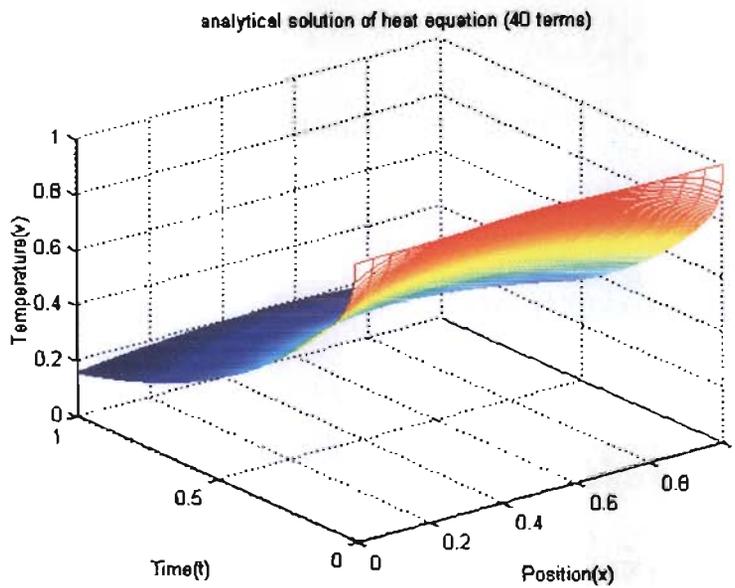
$$\alpha \tan \alpha = \frac{1}{2} \quad (4-6)$$

ซึ่งเขียนกราฟของรากได้ดังภาพที่ 4-1



ภาพที่ 4-1 กราฟแสดงรากของสมการ  $\alpha \tan \alpha = \frac{1}{2}$

สำหรับกราฟแสดงผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของอุณหภูมิแสดงดังภาพที่ 4-2

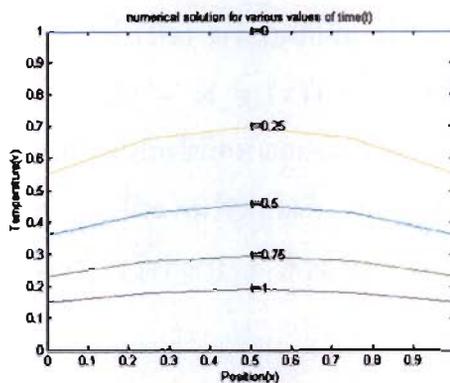
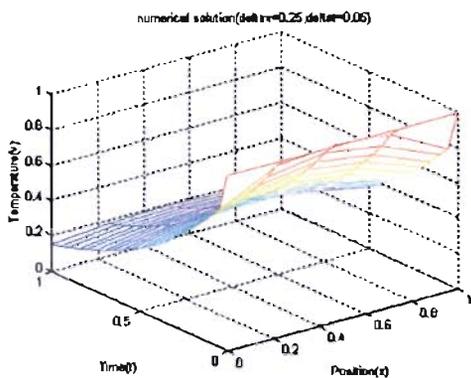


ภาพที่ 4-2 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของอุณหภูมิ เมื่อ  $n = 40$

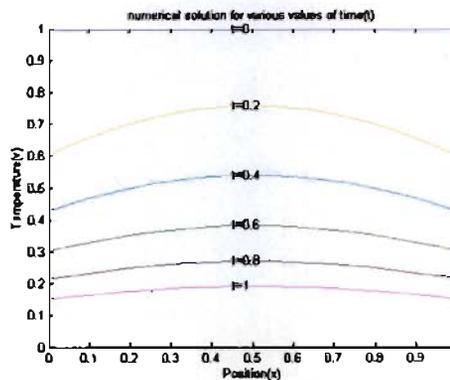
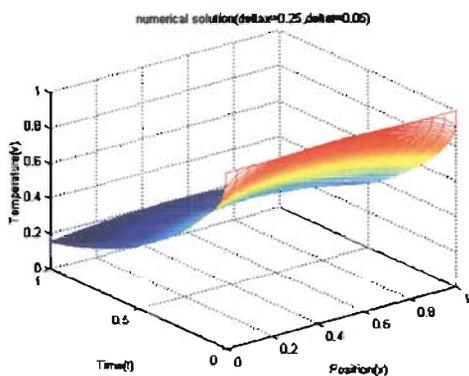
เปรียบเทียบสมการ (4-1) ถึงสมการ (4-4) กับสมการ (3-10) ถึงสมการ (3-13) ตามลำดับ จะได้ว่า  $\kappa = f(x) = K = H_{in} = H_{out} = 1$  และ  $s = v_{out} = 0$

กราฟแสดงอุณหภูมิซึ่งเป็นผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยใช้วิธีของแตรังก์-นิโคลสัน ซึ่งกำหนด  $\Delta x$  และ  $\Delta t$  ดังแสดงในภาพที่ 4-3 ทางด้านซ้ายมือ ส่วนกราฟ 2 มิติทางด้านขวามือเป็นกราฟแสดงอุณหภูมิ ณ ที่  $t$  บางค่าซึ่งอยู่ในช่วง  $0 \leq t \leq 1$

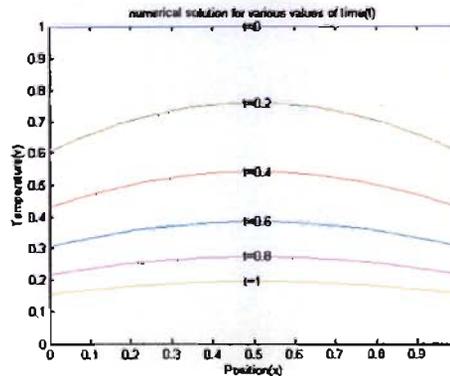
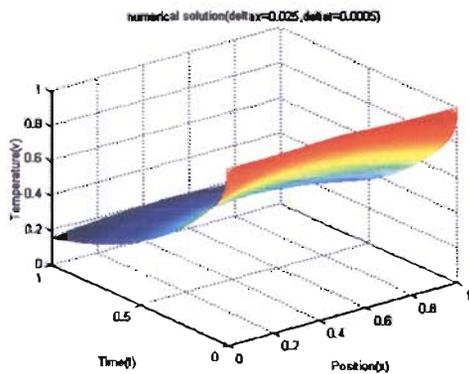




(a) เมื่อ  $\Delta x = 0.25$  ,  $\Delta t = 0.05$



(b) เมื่อ  $\Delta x = 0.05$  ,  $\Delta t = 0.005$



(c) เมื่อ  $\Delta x = 0.025$  ,  $\Delta t = 0.0005$

ภาพที่ 4-3 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของอุณหภูมิใน 3 มิติ (ซ้าย) และ 2 มิติ สำหรับ  $t$  บางค่า (ขวา) ในตัวอย่างที่ 4-1

จากภาพที่ 4-3 จะเห็นได้ชัดเจนจากกราฟรูปขวามือว่า อุณหภูมิที่ผิวของผนังโรงเรือนทั้งสองด้านจะมีค่าเท่ากัน นั่นคือจุดที่  $x=0$  ซึ่งเป็นผิวของผนังด้านใน และจุดที่  $x=1$  ซึ่งเป็นผิวของผนังด้านนอก เนื่องมาจากการกำหนดให้อุณหภูมิภายใน ( $s$ ) และภายนอก ( $v_{out}$ ) มีค่าคงที่เท่ากับศูนย์เท่ากัน และอุณหภูมิจะค่อย ๆ สูงขึ้นในช่วงกลาง ๆ ของผนัง นอกจากนี้ อุณหภูมิจะมีการเปลี่ยนแปลงตามระยะเวลาด้วย จากรูปจะเห็นว่าที่เวลาเริ่มต้น ( $t=0$ ) อุณหภูมิจะมีค่าคงที่เท่ากับ 1 ตลอดความลึกของผนัง เนื่องมาจากเงื่อนไขเริ่มต้นกำหนดให้อุณหภูมิเป็น 1 เมื่อเวลาเพิ่มขึ้นอุณหภูมิจะค่อย ๆ ลดต่ำลง

ตารางที่ 4-1 แสดงค่าความผิดพลาดของผลเฉลยเชิงตัวเลขของอุณหภูมิ

$\Delta t \quad \Delta x$	error = $\ v_{\text{exact}} - v_{\text{approx}}\ _{\infty}$					
	$5 \times 10^{-1}$	$2.5 \times 10^{-1}$	$5 \times 10^{-2}$	$2.5 \times 10^{-2}$	$5 \times 10^{-3}$	$2.5 \times 10^{-3}$
$5 \times 10^{-1}$	0.2681	0.3307	1.0682	1.9731	9.2651	18.4251
$2.5 \times 10^{-1}$	0.1608	0.2814	0.8942	1.6552	7.7694	15.4148
$5 \times 10^{-2}$	0.1050	0.0550	0.2915	0.5172	2.3347	4.6054
$2.5 \times 10^{-2}$	0.1412	0.0494	0.1612	0.2776	1.2057	2.3661
$5 \times 10^{-3}$	0.1443	0.0792	0.0411	0.0691	0.2690	0.5177
$2.5 \times 10^{-3}$	0.1443	0.0798	0.0155	0.0376	0.1389	0.2640
$5 \times 10^{-4}$	0.1443	0.0804	0.0164	0.0067	0.0313	0.0567
$2.5 \times 10^{-4}$	0.1443	0.0804	0.0175	0.0075	0.0174	0.0307

สำหรับปัญหาการนำความร้อนในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ (3-10) ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น  $v(x, 0) = 0$  และเงื่อนไขขอบเขต (3-12) และ (3-13) จะได้ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของอุณหภูมิดังนี้ [1]

$$v(x, t) = \frac{v_{out}}{2 + \ell h} \left\{ 1 + hx + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \cos \alpha_n x + h \sin \alpha_n x}{(\alpha_n^2 + h^2)\ell + 2h} \gamma_{2n} e^{-\alpha_n^2 t} \right\} + \frac{s}{2 + \ell h} \left\{ 1 + \ell h - hx + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \cos \alpha_n x + h \sin \alpha_n x}{(\alpha_n^2 + h^2)\ell + 2h} \gamma_{1n} e^{-\alpha_n^2 t} \right\} \quad (4-7)$$

เมื่อ 
$$h = \sqrt{\frac{H_{in} H_{out}}{K^2}} \quad (4-8)$$

$$\gamma_{1n} = \left( \frac{h^2}{\alpha_n^2} - 1 \right) \sin \alpha_n \ell - \frac{h^2 \ell}{\alpha_n} + \frac{2h}{\alpha_n} \cos \alpha_n \ell - \frac{2h}{\alpha_n} \quad (4-9)$$

$$\gamma_{2n} = \frac{h^2 \ell}{\alpha_n} \cos \alpha_n \ell - \left( h \ell + \frac{h^2}{\alpha_n^2} + 1 \right) \sin \alpha_n \ell \quad (4-10)$$

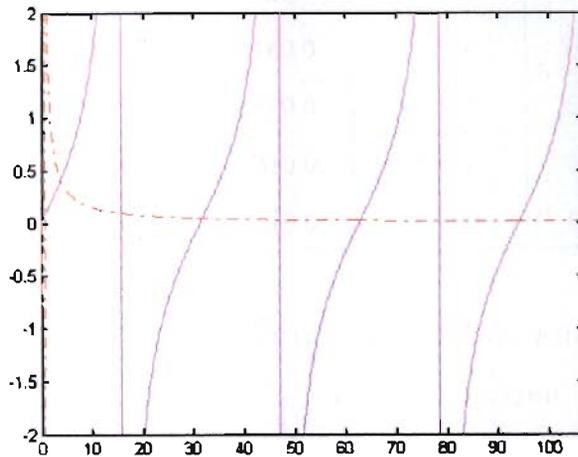
และ  $\alpha_n$  คือรากที่เป็นบวกของสมการต่อไปนี้

$$\tan \alpha \ell = \frac{2h\alpha}{\alpha^2 - h^2} \quad (4-11)$$

ตัวอย่างที่ 4-2 ปัญหาการนำความร้อนในผนังโรงเรือนโดยผนังหนา ( $\ell$ ) เท่ากับ 0.1 m และมีค่าคงที่  $\kappa = 0.66 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  ,  $K = 1.28 \text{ W}/^\circ\text{Cm}$  ,  $H_{in} = 1 \text{ W}/^\circ\text{Cm}^2$  ,  $H_{out} = 1 \text{ W}/^\circ\text{Cm}^2$  กำหนดอุณหภูมิภายในโรงเรือน ( $s$ ) เท่ากับ  $27^\circ\text{C}$  และอุณหภูมิภายนอกโรงเรือน ( $v_{out}$ ) เท่ากับ  $31^\circ\text{C}$  จะได้  $\alpha_n$  ซึ่งเป็นรากที่เป็นบวกของสมการต่อไปนี้

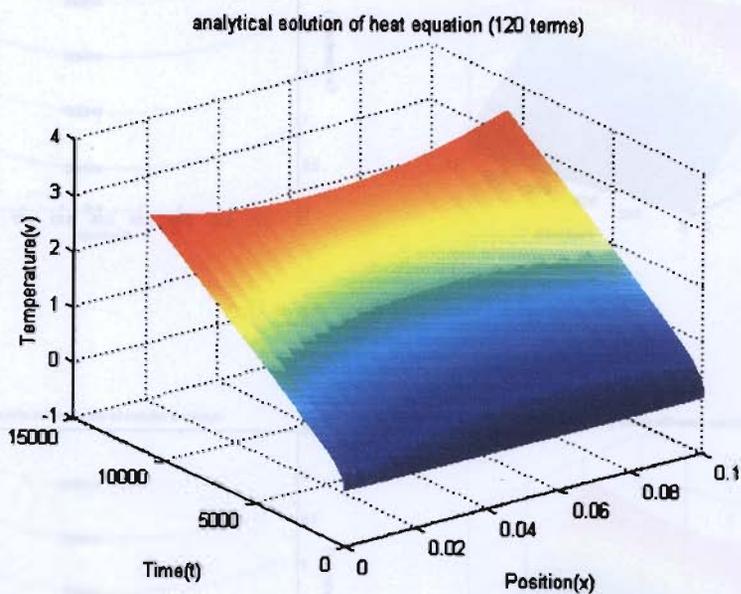
$$\tan(0.1\alpha) = \frac{2.56\alpha}{(1.28\alpha)^2 - 1} \quad (4-12)$$

สามารถเขียนกราฟของรากได้ดังภาพที่ 4-4



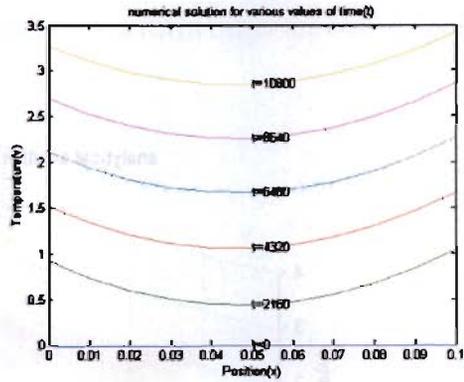
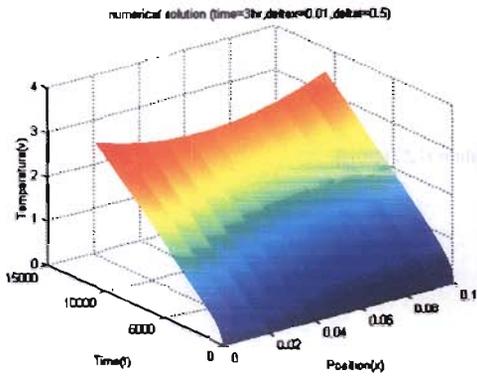
ภาพที่ 4-4 กราฟแสดงรากของสมการ  $\tan(0.1\alpha) = \frac{2.56\alpha}{(1.28\alpha)^2 - 1}$

และกราฟแสดงอุณหภูมิซึ่งเป็นผลเฉลยเชิงวิเคราะห์เมื่อ  $0 \leq t \leq 10800$  s. แสดงดังภาพที่ 4-5

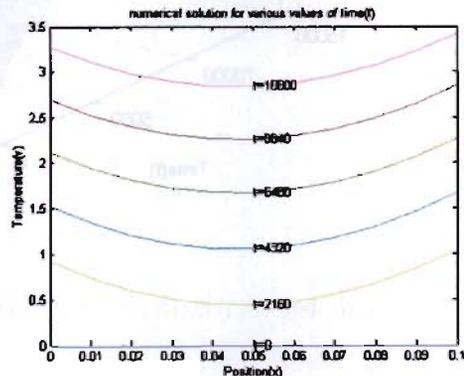
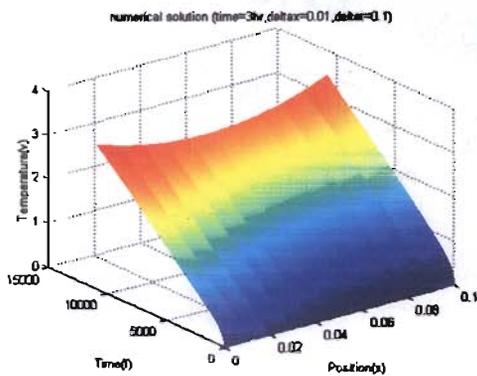


ภาพที่ 4-5 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของอุณหภูมิของผนัง เมื่อ  $n = 120$

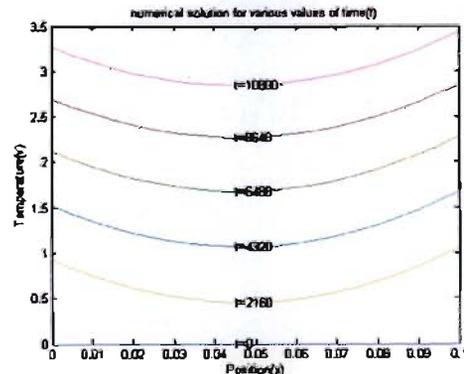
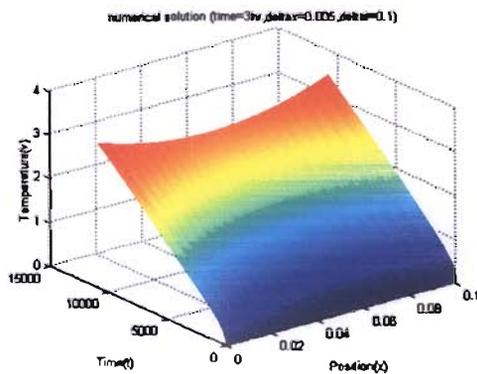
สำหรับกราฟแสดงอุณหภูมิในผนังซึ่งเป็นผลเฉลยเชิงตัวเลข แสดงดังภาพที่ 4-6



(a) เมื่อ  $\Delta x = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.5$



(b) เมื่อ  $\Delta x = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.1$



(c) เมื่อ  $\Delta x = 0.005$ ,  $\Delta t = 0.1$

ภาพที่ 4-6 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของอุณหภูมิของผนังโรงเรือนใน 3 มิติ (ซ้าย) และ 2 มิติ สำหรับ  $t$  บางค่า (ขวา) ในตัวอย่างที่ 4-2

จากภาพที่ 4-6 จะเห็นว่า อุณหภูมิที่ผิวของผนังด้านใน ( $x=0$ ) จะต่ำกว่าที่ผิวด้านนอก ( $x=0.1$ ) เล็กน้อย ส่วนอุณหภูมิภายในผนังในช่วงแรกจะต่ำกว่าอุณหภูมิที่ผิวผนังทั้งสองด้าน เมื่อเวลาเพิ่มขึ้นอุณหภูมิภายในผนังจะสูงขึ้นใกล้เคียงกับอุณหภูมิที่ผิวทั้งสองด้านซึ่งเห็นได้ชัดจากกราฟทางด้านขวามือ นอกจากนี้สังเกตได้ว่า ที่เวลาเริ่มต้น ( $t=0$ ) อุณหภูมิจะมีค่าคงที่เท่ากับ ศูนย์ตลอดความลึกของผนัง และอุณหภูมิก็จะเพิ่มสูงขึ้นอย่างรวดเร็วในช่วงแรก หลังจากนั้นก็ค่อย ๆ เพิ่มขึ้นอย่างช้า ๆ จนเกือบจะคงที่

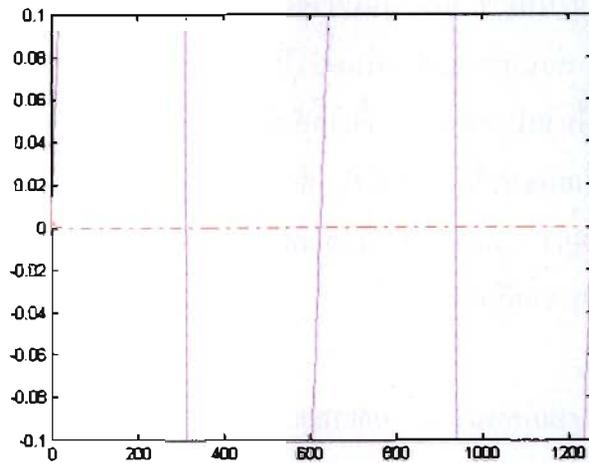
ตารางที่ 4-2 แสดงค่าความผิดพลาดของผลเฉลยเชิงตัวเลขซึ่งเป็นอุณหภูมิของผนัง

$\Delta t$	$\Delta x$	error = $\ v_{\text{exact}} - v_{\text{approx}}\ _{\infty}$					
		0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001
1620		0.2808	0.3757	0.7860	1.3566	2.4970	5.9107
720		0.3631	0.1124	0.3632	0.6330	1.1404	2.6315
360		0.3947	0.1694	0.2142	0.3575	0.6128	1.3952
180		0.3968	0.1909	0.0921	0.1955	0.3368	0.7483
90		0.4005	0.2002	0.0578	0.1096	0.1847	0.3893
45		0.4006	0.2028	0.0742	0.0459	0.0980	0.2057
20		0.4007	0.2040	0.0810	0.0314	0.0514	0.1197
10		0.4007	0.2040	0.0818	0.0378	0.0514	0.1197
0.5		0.4007	0.2040	0.0821	0.0411	0.0514	0.1197

ตัวอย่างที่ 4-3 ปัญหาการนำความร้อนของหลังคาโรงเรือนหนา ( $\ell$ ) เท่ากับ 0.005 m และมีค่าคงที่  $\kappa = 41.3 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  ,  $K = 112 \text{ W}/^\circ\text{Cm}$  ,  $H_{\text{in}} = 1 \text{ W}/^\circ\text{Cm}^2$  ,  $H_{\text{out}} = 1 \text{ W}/^\circ\text{Cm}^2$  กำหนดอุณหภูมิภายในโรงเรือน ( $s$ ) เท่ากับ  $27^\circ\text{C}$  และอุณหภูมิภายนอกโรงเรือน ( $v_{\text{out}}$ ) เท่ากับ  $31^\circ\text{C}$  จะได้กราฟของ  $\alpha_n$  ซึ่งเป็นรากที่เป็นบวกของสมการต่อไปนี้

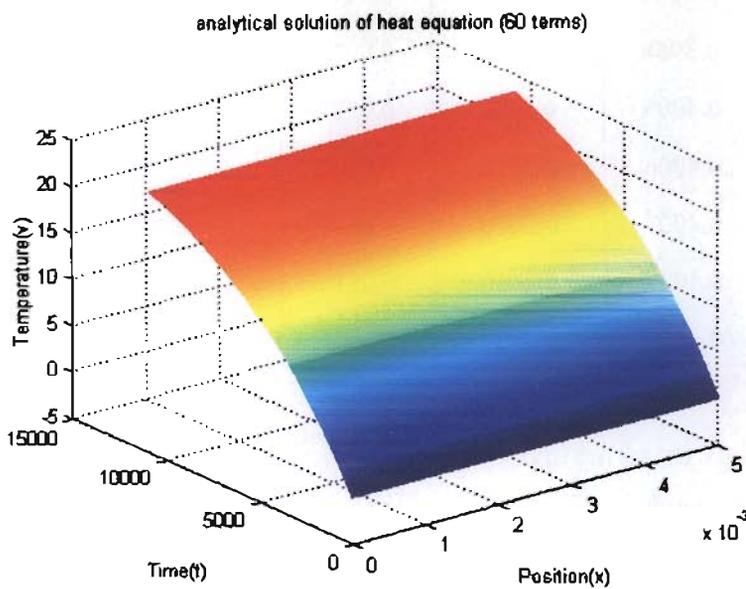
$$\tan(0.005\alpha) = \frac{224\alpha}{(112\alpha)^2 - 1} \quad (4-13)$$

ดังภาพที่ 4-7



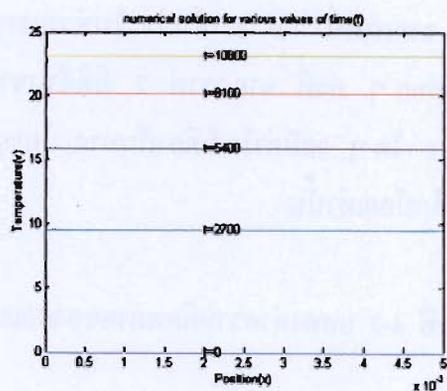
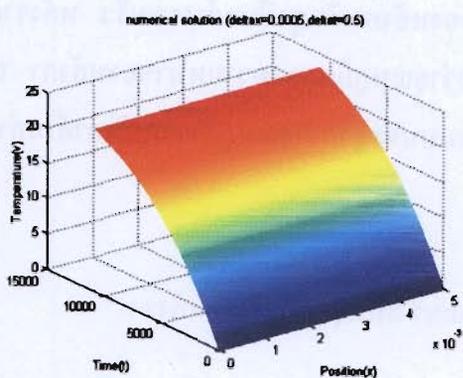
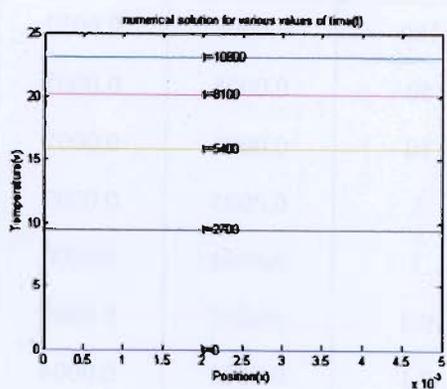
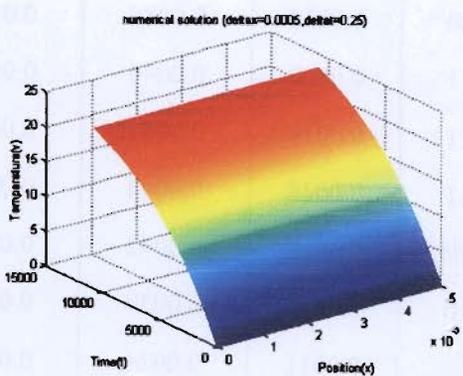
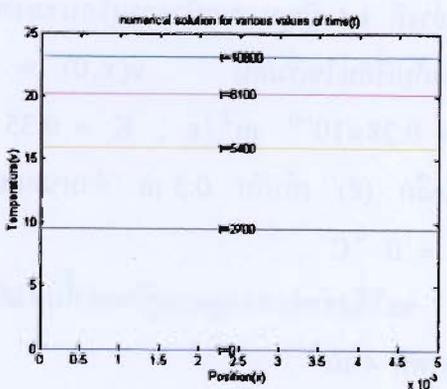
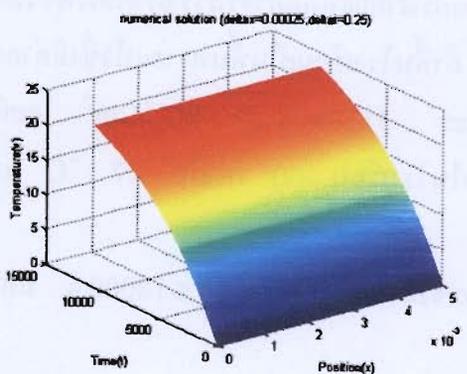
ภาพที่ 4-7 กราฟแสดงรากของสมการ  $\tan(0.005\alpha) = \frac{224\alpha}{(112\alpha)^2 - 1}$

และจะได้กราฟแสดงอุณหภูมิซึ่งเป็นผลเฉลยเชิงวิเคราะห์เมื่อ  $0 \leq t \leq 10800$  s. ดังภาพที่ 4-8



ภาพที่ 4-8 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของอุณหภูมิของหลังคา เมื่อ  $n = 60$

สำหรับกราฟแสดงอุณหภูมิของหลังคาซึ่งเป็นผลเฉลยเชิงตัวเลข แสดงดังภาพที่ 4-9

(a) เมื่อ  $\Delta x = 0.0005$ ,  $\Delta t = 0.5$ (b) เมื่อ  $\Delta x = 0.0005$ ,  $\Delta t = 0.25$ (c) เมื่อ  $\Delta x = 0.00025$ ,  $\Delta t = 0.25$ 

ภาพที่ 4-9 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของอุณหภูมิของหลังคาโรงเรือนใน 3 มิติ (ซ้าย) และ 2 มิติ สำหรับ  $t$  บางค่า (ขวา) ในตัวอย่างที่ 4-3

จากภาพที่ 4-9 จะเห็นว่า ในช่วงแรกอุณหภูมิของหลังคาเพิ่มสูงขึ้นอย่างรวดเร็ว หลังจากนั้นจึงค่อย ๆ คงที่ จากกราฟ 2 มิติด้านขวา จะเห็นว่าอุณหภูมิตลอดความหนาของหลังคา ณ เวลา  $t$  ใดๆ จะมีค่าใกล้เคียงกันมาก โดยอุณหภูมิด้านบนจะสูงกว่าอุณหภูมิด้านล่างเพียงเล็กน้อยเท่านั้น

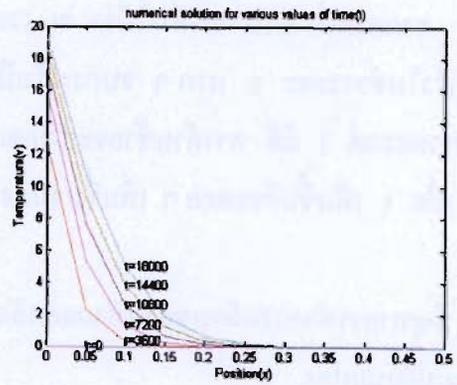
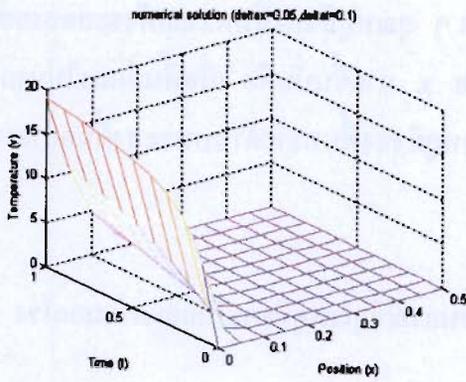
ตารางที่ 4-3 แสดงค่าความผิดพลาดของผลเฉลยเชิงตัวเลขซึ่งเป็นอุณหภูมิของหลังคา

$\Delta t$	$\Delta x$	error = $\ v_{\text{exact}} - v_{\text{approx}}\ _{\infty}$					
		0.0025	0.001	0.0005	0.00025	0.0001	0.00005
100		0.0006	0.0012	0.0020	0.0036	0.0086	0.0171
50		0.0005	0.0007	0.0011	0.0020	0.0046	0.0090
10		0.0005	0.0007	0.0011	0.0019	0.0044	0.0086
5		0.0005	0.0007	0.0011	0.0019	0.0044	0.0086
1		0.0004	0.0006	0.0010	0.0018	0.0042	0.0081
0.5		0.0003	0.0006	0.0010	0.0017	0.0039	0.0076
0.1		0.0002	0.0004	0.0006	0.0011	0.0024	0.0047

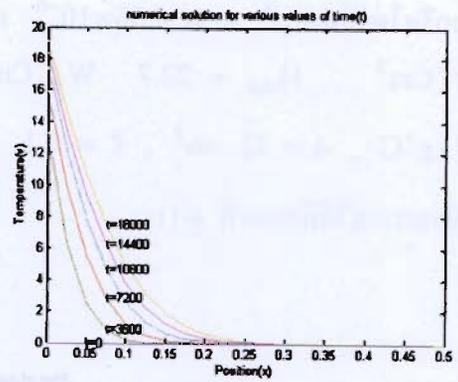
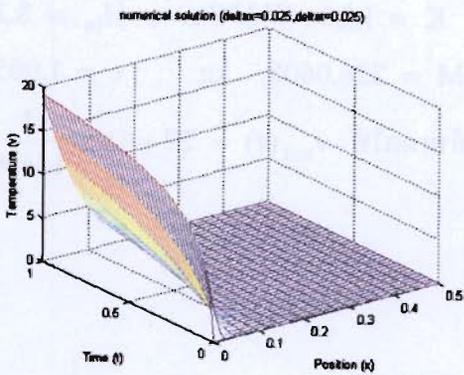
#### 4.2 ปัญหาการนำความร้อนของพื้นโรงเรือนกรณีที่อุณหภูมิภายในโรงเรือนคงที่

ตัวอย่างที่ 4-4 ปัญหาการนำความร้อนของพื้นโรงเรือนกรณีที่อุณหภูมิภายในโรงเรือนคงที่ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น  $v(x,0) = 0$  ถ้าพื้นโรงเรือนเป็นพื้นทรายแห้งซึ่งมีค่าคงที่  $\kappa = 0.28 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  ,  $K = 0.35 \text{ W}/^\circ\text{Cm}$  ,  $H_{\text{in}} = 8.29 \text{ W}/^\circ\text{Cm}^2$  โดยพื้นทรายลึก ( $\ell$ ) เท่ากับ  $0.5 \text{ m}$  กำหนดอุณหภูมิภายในโรงเรือน ( $s$ ) เท่ากับ  $27 \text{ }^\circ\text{C}$  และ  $C_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$

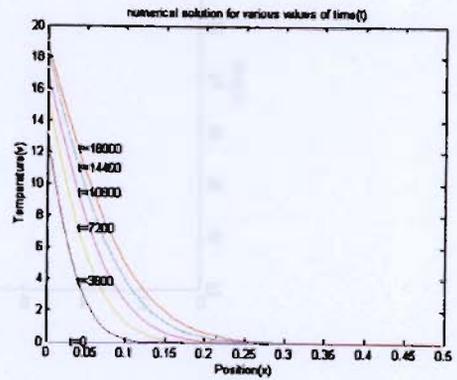
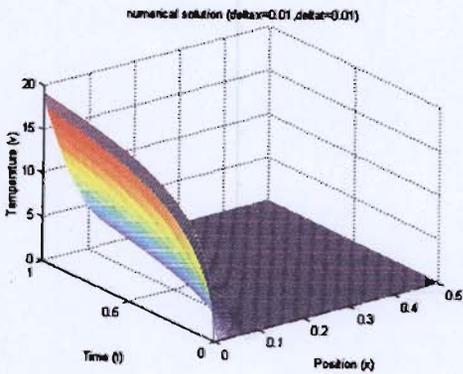
จะได้กราฟแสดงอุณหภูมิของพื้นซึ่งเป็นผลเฉลยเชิงตัวเลข เมื่อ  $0 \leq t \leq 18000 \text{ s}$ . แสดงดังภาพที่ 4-10



(a) เมื่อ  $\Delta x = 0.05$  ,  $\Delta t = 0.1$



(b) เมื่อ  $\Delta x = 0.025$  ,  $\Delta t = 0.025$



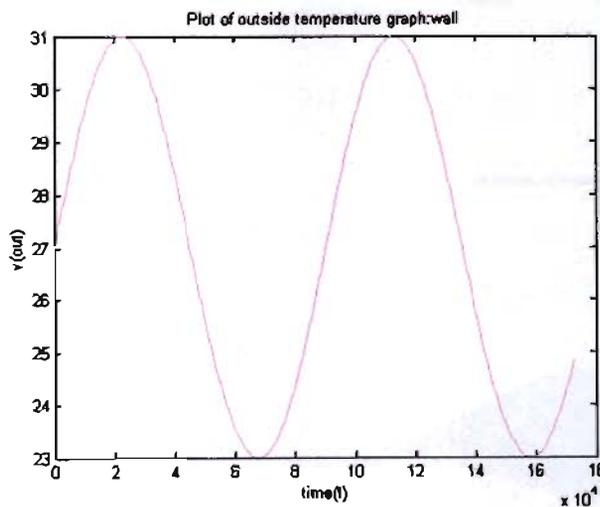
(c) เมื่อ  $\Delta x = 0.01$  ,  $\Delta t = 0.01$

ภาพที่ 4-10 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของอุณหภูมิของพื้นโรงเรือนใน 3 มิติ (ซ้าย) และ 2 มิติ สำหรับ t บางค่า (ขวา) ในตัวอย่างที่ 4-4

จากภาพที่ 4-10 จะเห็นได้ว่า ณ เวลา  $t$  ใดๆ อุณหภูมิของพื้นทรายแห้งจะลดลงอย่างรวดเร็วในช่วงระยะ  $x$  แรกๆ จนกระทั่งเป็นศูนย์เมื่อ  $x$  มากขึ้นนั่นคือ เมื่อพื้นลึกลงไปมากๆ และจากกราฟ 3 มิติ ทางด้านซ้ายจะสังเกตเห็นว่าอุณหภูมิของพื้นทรายด้านบนจะสูงขึ้นอย่างรวดเร็ว เมื่อ  $t$  เพิ่มขึ้นก็จะค่อยๆ เพิ่มขึ้นจนคงที่

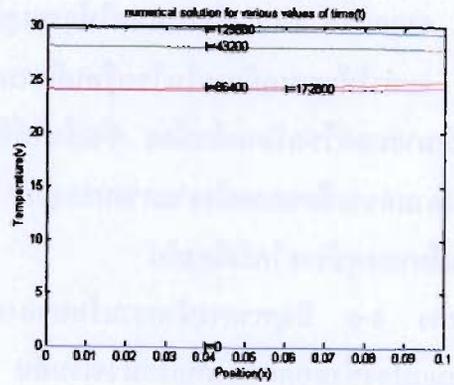
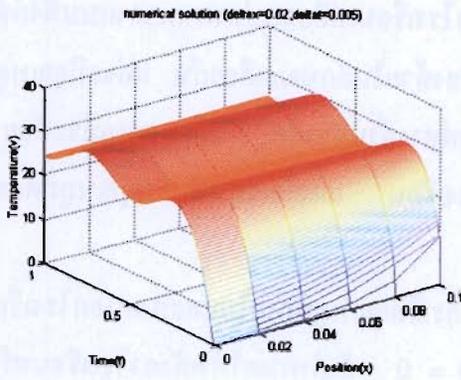
#### 4.3 ปัญหาการนำความร้อนของผนังและหลังคาโรงเรือนกรณีที่อยู่ภูมิภายในและภายนอกโรงเรือนเปลี่ยนแปลง

ตัวอย่าง 4-5 ปัญหาการนำความร้อนของผนังกรณีที่อยู่ภูมิภายในและภายนอกโรงเรือนเปลี่ยนแปลงซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น  $v(x,0) = 0$  ถ้ากำหนดให้ผนังโรงเรือนสร้างจากคอนกรีตโดยมีค่าคงที่  $\kappa = 0.66 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  ,  $K = 1.28 \text{ W}/^\circ\text{Cm}$  ,  $H_{in} = 8.29 \text{ W}/^\circ\text{Cm}^2$  ,  $H_{out} = 22.7 \text{ W}/^\circ\text{Cm}^2$  ,  $M = 226.0608 \text{ kg}$  ,  $c = 1.0057 \text{ kJ}/\text{kg}^\circ\text{C}$  ,  $A = 32 \text{ m}^2$  ,  $\ell = 0.1 \text{ m}$  และกำหนดให้  $v_{out}(t) = 27 + 4 \sin\left(\frac{t}{14400}\right)$  ซึ่งเขียนกราฟได้ดังภาพที่ 4-11

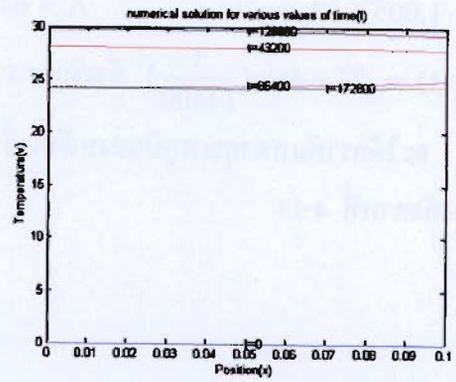
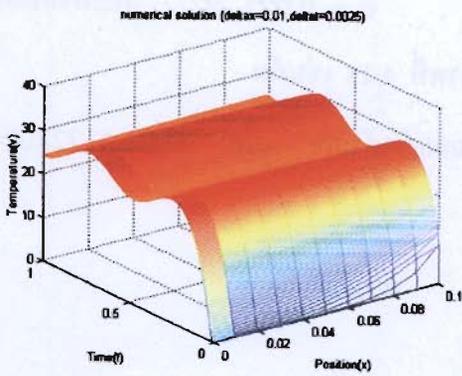


ภาพที่ 4-11 กราฟแสดงฟังก์ชัน  $v_{out}(t) = 27 + 4 \sin\left(\frac{t}{14400}\right)$  เมื่อ  $0 \leq t \leq 172800 \text{ s}$ .

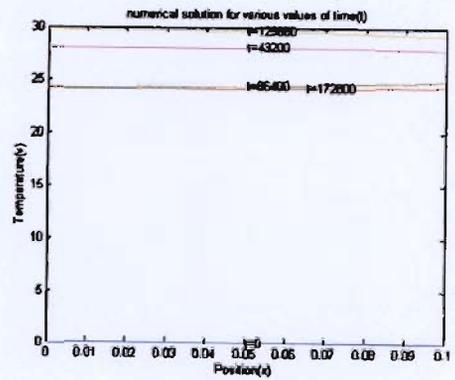
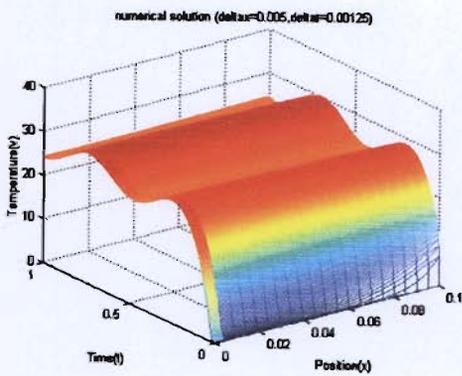
จะได้กราฟแสดงอุณหภูมิของผนังซึ่งเป็นผลเฉลยเชิงตัวเลข เมื่อ  $0 \leq t \leq 172800 \text{ s}$  แสดงดังภาพที่ 4-12



(a) เมื่อ  $\Delta x = 0.02$  ,  $\Delta t = 0.005$



(b) เมื่อ  $\Delta x = 0.01$  ,  $\Delta t = 0.0025$



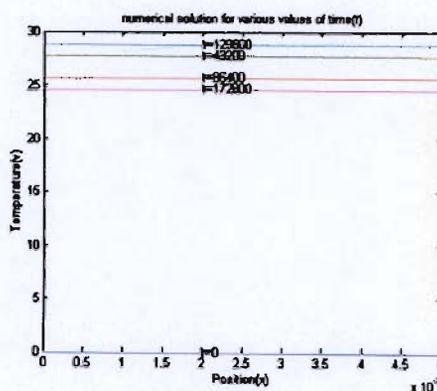
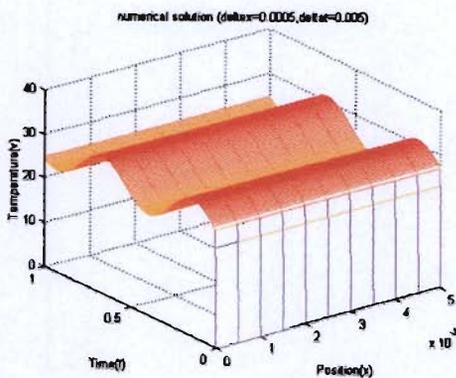
(c) เมื่อ  $\Delta x = 0.005$  ,  $\Delta t = 0.00125$

ภาพที่ 4-12 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของอุณหภูมิของผนังโรงเรือนใน 3 มิติ (ซ้าย) และ 2 มิติ สำหรับ  $t$  บางค่า (ขวา) ในตัวอย่างที่ 4-5

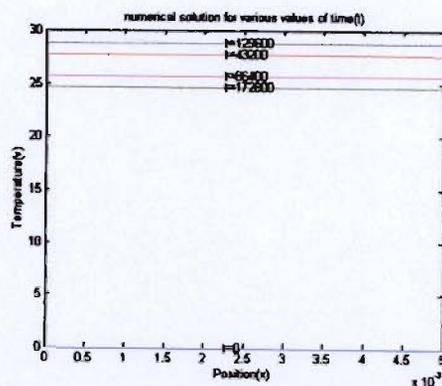
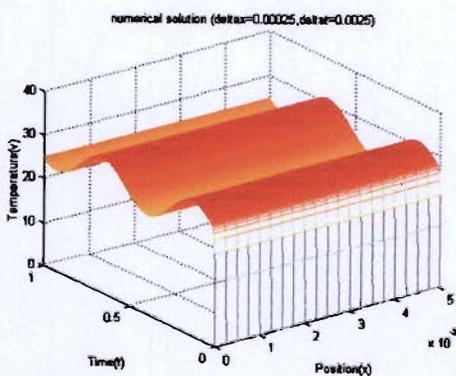
จากภาพที่ 4-12 เมื่อกำหนดให้อุณหภูมิภายนอกโรงเรือนเปลี่ยนแปลงตามเวลาแบบฟังก์ชันไซน์ จะทำให้อุณหภูมิภายในโรงเรือนมีการเปลี่ยนแปลงด้วยในลักษณะเดียวกัน แต่จะมีอุณหภูมิต่ำกว่าภายนอกโรงเรือนเล็กน้อย ซึ่งเห็นได้ชัดจากกราฟทางด้านขวามือ นั่นคืออุณหภูมิจะค่อย ๆ ลดลงตามความลึกของผนังจากภายนอกสู่ภายในผนังโรงเรือน แต่เมื่อเวลาเพิ่มขึ้นอุณหภูมิตลอดความลึกของผนังจะใกล้เคียงกัน

ตัวอย่าง 4-6 ปัญหาการนำความร้อนของหลังคา กรณีที่อุณหภูมิภายในและภายนอกโรงเรือนเปลี่ยนแปลงซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น  $v(x,0) = 0$  ถ้ากำหนดให้หลังคาโรงเรือนสร้างจากสังกะสีโดยมีค่าคงที่  $\kappa = 41.3 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  ,  $K = 112 \text{ W}/^\circ\text{Cm}$  ,  $H_{in} = 8.29 \text{ W}/^\circ\text{Cm}^2$  ,  $H_{out} = 22.7 \text{ W}/^\circ\text{Cm}^2$  ,  $M = 226.0608 \text{ kg}$  ,  $c = 1.0057 \text{ kJ}/\text{kg}^\circ\text{C}$  ,  $A = 64 \text{ m}^2$  ,  $\ell = 0.005 \text{ m}$  และกำหนดให้  $v_{out}(t) = 27 + 4 \sin\left(\frac{t}{14400}\right)$  ซึ่งเขียนกราฟได้ดังภาพที่ 4-11 เช่นกัน

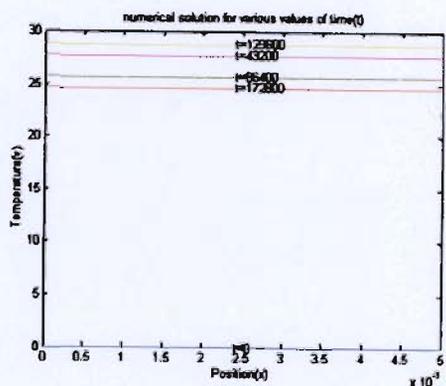
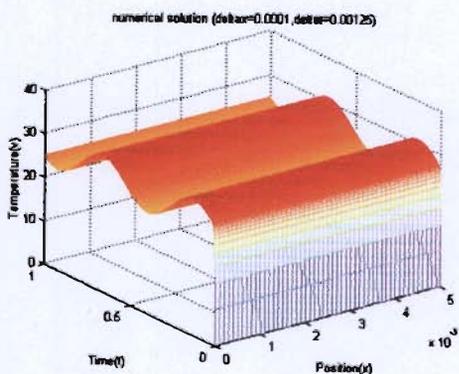
จะได้กราฟแสดงอุณหภูมิของหลังคาซึ่งเป็นผลเฉลยเชิงตัวเลข เมื่อ  $0 \leq t \leq 172800 \text{ s}$  แสดงดังภาพที่ 4-13



(a) เมื่อ  $\Delta x = 0.0005, \Delta t = 0.005$



(b) เมื่อ  $\Delta x = 0.00025, \Delta t = 0.0025$



(c) เมื่อ  $\Delta x = 0.0001, \Delta t = 0.00125$

ภาพที่ 4-13 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของอุณหภูมิของหลังคาโรงเรือนใน 3 มิติ (ซ้าย) และ 2 มิติ สำหรับ  $t$  บางค่า (ขวา) ในตัวอย่างที่ 4-6

## บทที่ 5

### สรุปผลและข้อเสนอแนะ

จากการนำวิธีเชิงตัวเลขมาใช้ในการแก้ปัญหาการนำความร้อนในโรงเรือนเลี้ยงสัตว์ปีก สามารถนำผลที่ได้นี้ มาเปรียบเทียบอุณหภูมิของผนังด้านข้าง หลังคา และพื้นโรงเรือน และนำมาเปรียบเทียบอุณหภูมิของอากาศภายในโรงเรือน เมื่อใช้วัสดุต่างชนิดกันสร้างโรงเรือน ซึ่งสามารถสรุปผลได้ดังนี้

#### 5.1 เปรียบเทียบอุณหภูมิในผนังโรงเรือนกรณีที่อุณหภูมิภายในและภายนอกโรงเรือนคงที่

ในที่นี้เป็นการเปรียบเทียบอุณหภูมิของผนังโรงเรือนเมื่อใช้วัสดุ 7 ชนิด คือ อิฐ คอนกรีต ต้นเฟอร์ (Fir) ต้นสนเหลือง (Yellow Pine) มาเปิ้ลหรือโอ๊ค (Maple or Oak) พิวีซีที่ 20 °C และพิวี่ซีที่ 30 °C เมื่อกำหนดให้อุณหภูมิภายในโรงเรือนเป็น 27 °C อุณหภูมิภายนอกโรงเรือนเป็น 31 °C โดยพิจารณา ณ เวลา  $t=3600$  s.,  $t=32400$  s. และ  $t=75600$  s. ได้ผลดังแสดงในภาพที่ 5-1 โดยที่

M = 0 แทน อิฐ

M = 1 แทน คอนกรีต

M = 2 แทน ต้นเฟอร์

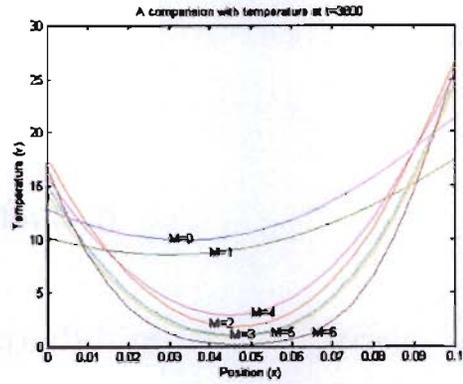
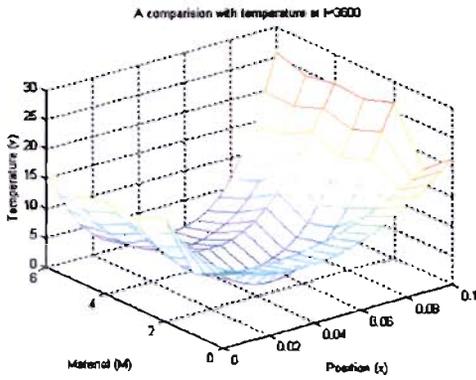
M = 3 แทน ต้นสนเหลือง

M = 4 แทน มาเปิ้ลหรือโอ๊ค

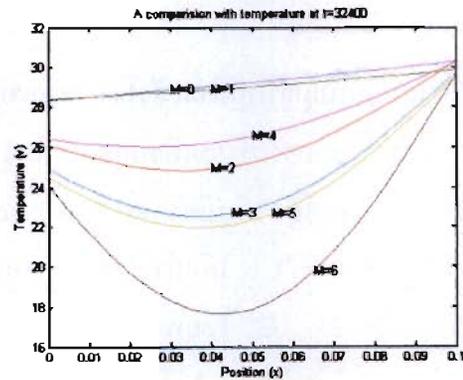
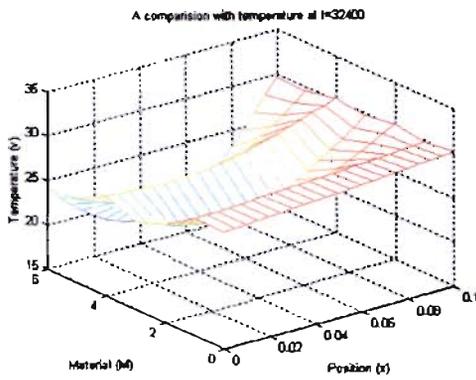
M = 5 แทน พิวีซีที่ 20 °C

M = 6 แทน พิวีซีที่ 30 °C

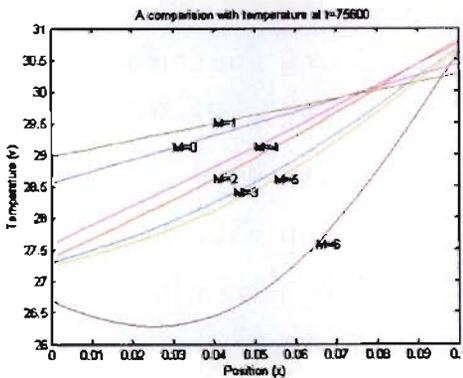
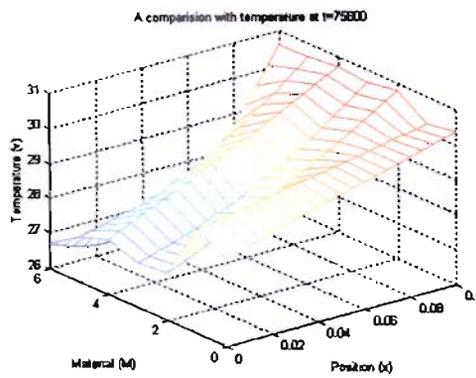
จากภาพจะเห็นว่า ที่ผิวด้านในของผนังซึ่งมีอุณหภูมิต่ำสุด ณ เวลา  $t=3600$  s. จะเป็นผนังคอนกรีต ณ เวลา  $t=32400$  s. และ  $t=75600$  s. จะเป็นผนังซึ่งทำจากพิวี่ซีที่ 30 °C จากรูปสังเกตได้ว่า ณ เวลา  $t$  ใด ๆ ช่วงกลาง ๆ ของผนังที่ใช้พิวี่ซีที่ 30 °C จะมีอุณหภูมิต่ำที่สุด



(a) เมื่อ  $t = 3600$  s. (1 hr.)



(b) เมื่อ  $t = 32400$  s. (9 hr.)



(c) เมื่อ  $t = 75600$  s. (21 hr.)

ภาพที่ 5-1 กราฟแสดงอุณหภูมิของผนังโรงเรือนเมื่อใช้วัสดุชนิดต่างๆ กรณีที่อุณหภูมิภายในและภายนอกโรงเรือนคงที่

## 5.2 เปรียบเทียบอุณหภูมิในหลังคาโรงเรือนกรณีที่อยู่อุณหภูมิภายในและภายนอกโรงเรือนคงที่

แสดงการเปรียบเทียบอุณหภูมิของวัสดุที่ใช้ทำหลังคาโรงเรือนซึ่งประกอบด้วย อลูมิเนียมบริสุทธิ์ อลูมิเนียมผสมทองแดง 3-5% อลูมิเนียมผสมซิลิกอน 20-22% สังกะสีที่ 0 °C และสังกะสีที่ 20 °C กำหนดให้อุณหภูมิภายในโรงเรือนเป็น 27 °C อุณหภูมิภายนอกโรงเรือนเป็น 31 °C โดยพิจารณา ณ เวลา  $t=3450$  s.,  $t=46650$  s. และ  $t=75450$  s. ได้ผลดังแสดงในภาพที่ 5-2 โดยที่

M=0 แทน อลูมิเนียมบริสุทธิ์

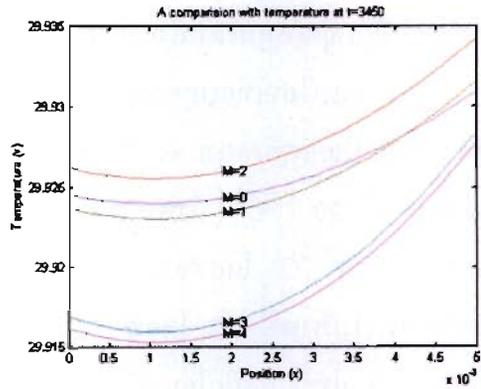
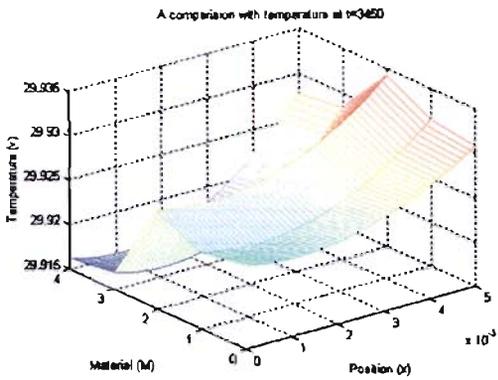
M=1 แทน อลูมิเนียมผสมทองแดง 3-5%

M=2 แทน อลูมิเนียมผสมซิลิกอน 20-22%

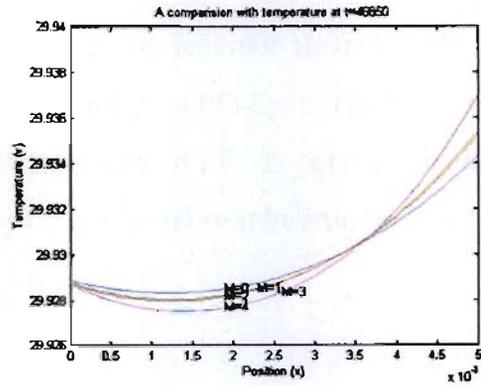
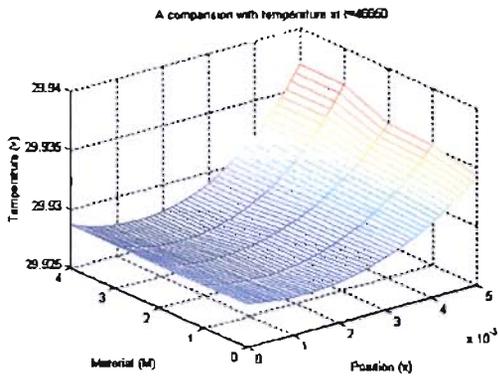
M=3 แทน สังกะสีที่ 0 °C

M=4 แทน สังกะสีที่ 20 °C

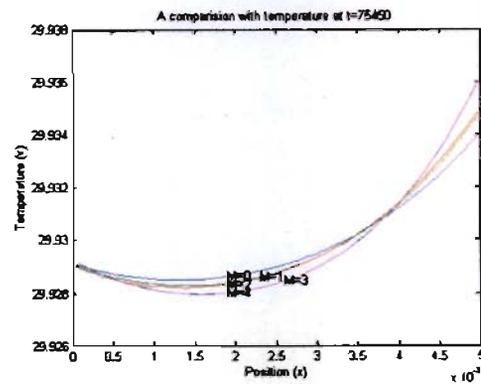
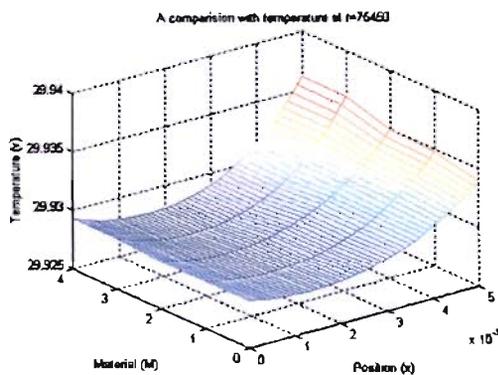
จะเห็นว่า ที่เวลา  $t=3450$  s. อุณหภูมิของหลังคาที่ทำจากอลูมิเนียมผสมซิลิกอน 20-22% จะสูงที่สุด ณ เวลา  $t$  อื่น ๆ อุณหภูมิของผิวหลังคาด้านในจะใกล้เคียงกันทุกวัสดุแต่อุณหภูมิที่ผิวหลังคาด้านนอกซึ่งทำจากสังกะสีค่อนข้างสูงกว่าที่ทำจากวัสดุอื่น ๆ



(a) เมื่อ  $t = 3450$  s. (57 min. 30 s.)



(b) เมื่อ  $t = 46650$  s. (12 hr. 57 min. 30 s.)



(c) เมื่อ  $t = 75450$  s. (20 hr. 57 min. 30 s.)

ภาพที่ 5-2 กราฟแสดงอุณหภูมิของหลังคาโรงเรือนเมื่อใช้วัสดุชนิดต่าง ๆ กรณีที่อุณหภูมิภายในและภายนอกโรงเรือนคงที่

### 5.3 เปรียบเทียบอุณหภูมิในพื้นที่โรงเรือนกรณีที่อยู่อุณหภูมิภายในโรงเรือนคงที่

เป็นการเปรียบเทียบอุณหภูมิของวัสดุที่ใช้ทำพื้นโรงเรือนซึ่งประกอบด้วย คอนกรีต คอนกรีตผสมขี้เถ้าและหินในอัตราส่วน 1-2-4 ทรายแห้ง หินปูน หินทราย หินแกรนิต และ หินอ่อน เมื่อกำหนดอุณหภูมิภายในโรงเรือนเป็น  $27^{\circ}\text{C}$  โดยพิจารณา ณ เวลา  $t=3600\text{ s}$ ,  $t=32400\text{ s}$ . และ  $t=75600\text{ s}$ . ได้ผลดังแสดงในภาพที่ 5-3 โดยที่

$M=0$  แทน คอนกรีต

$M=1$  แทน คอนกรีตผสมขี้เถ้าและหินในอัตราส่วน 1-2-4

$M=2$  แทน ทรายแห้ง

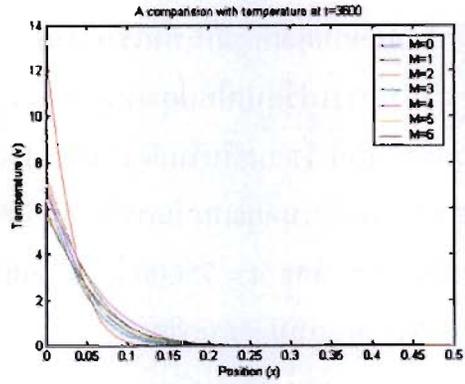
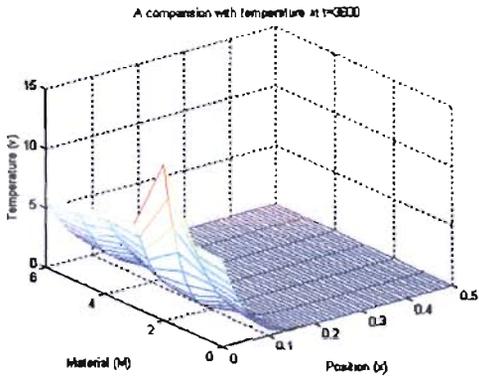
$M=3$  แทน หินปูน

$M=4$  แทน หินทราย

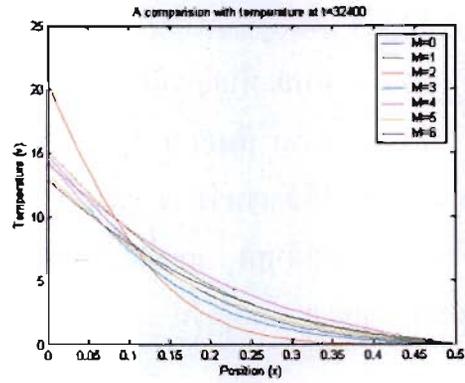
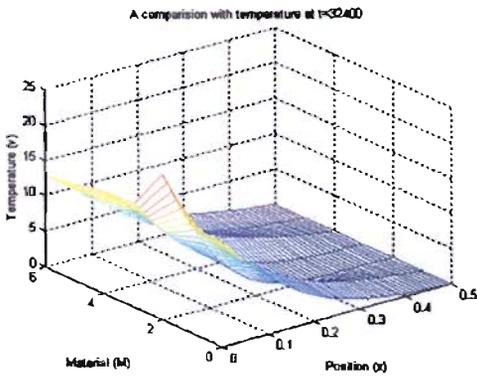
$M=5$  แทน หินแกรนิต

$M=6$  แทน หินอ่อน

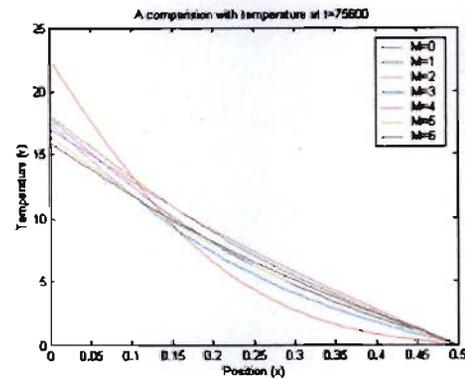
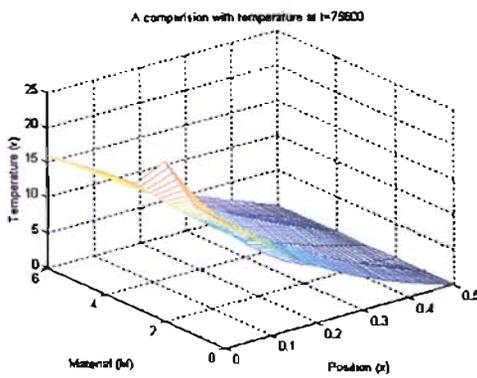
จากภาพจะเห็นได้ชัดเจนว่า ณ เวลา  $t$  ใด ๆ อุณหภูมิบนพื้นทรายแห้งจะสูงที่สุด ส่วนอุณหภูมิตั้งบนพื้นหินอ่อนจะต่ำสุด และไม่ว่าจะเป็นวัสดุชนิดใดอุณหภูมิข้างในจะต่ำมากในช่วงแรก หลังจากนั้นก็จะค่อย ๆ เพิ่มขึ้น



(a) เมื่อ  $t = 3600$  s. (1 hr.)



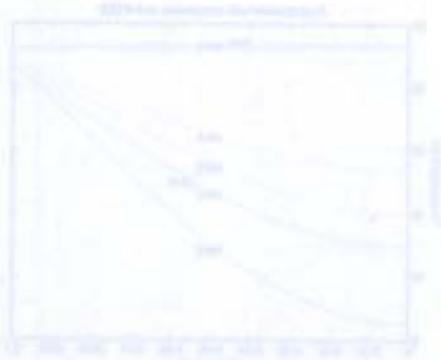
(b) เมื่อ  $t = 32400$  s. (9 hr.)

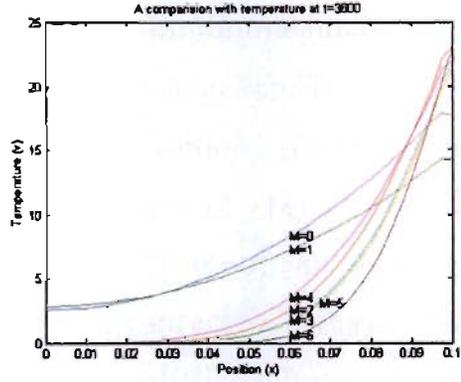
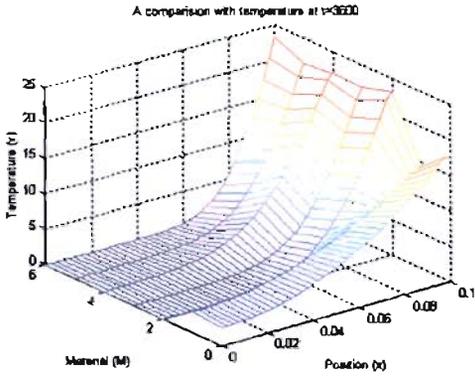


(c) เมื่อ  $t = 75600$  s. (21 hr.)

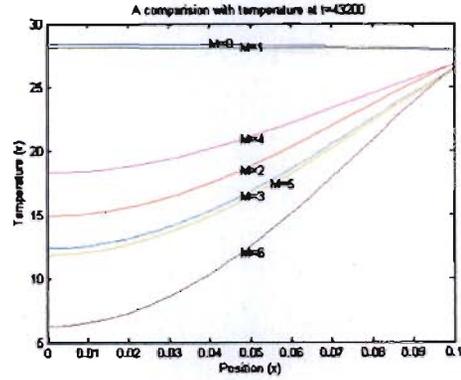
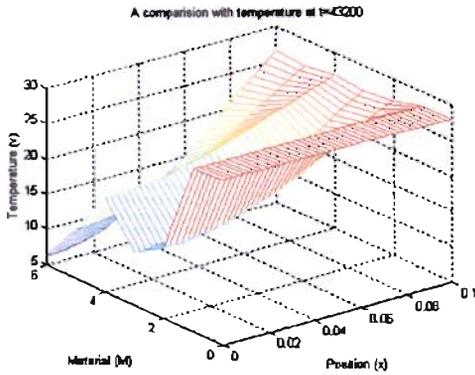
ภาพที่ 5-3 กราฟแสดงอุณหภูมิของพื้นโรงเรือนเมื่อใช้วัสดุชนิดต่าง ๆ กรณีที่อุณหภูมิภายในโรงเรือนคงที่

5.4 เปรียบเทียบอุณหภูมิในผนังโรงเรือนกรณีที่อุณหภูมิภายในและภายนอกโรงเรือนเปลี่ยนแปลง เป็นการเปรียบเทียบอุณหภูมิของวัสดุที่ใช้ทำผนังโรงเรือนซึ่งประกอบด้วย อีฐ ( $M=0$ ) คอนกรีต ( $M=1$ ) ดินเฟออร์ ( $M=2$ ) ดินสนเหลือง ( $M=3$ ) มาเบิลหรือโอ๊ค ( $M=4$ ) พีวีซีที่  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$  ( $M=5$ ) และพีวีซีที่  $30\text{ }^{\circ}\text{C}$  ( $M=6$ ) โดยพิจารณา ณ เวลา  $t=3600\text{ s}$ ,  $t=43200\text{ s}$ . และ  $t=86400\text{ s}$ . ได้ผลดังแสดงในภาพที่ 5-4 จะเห็นได้ว่าที่เวลา  $t=3600\text{ s}$ . ที่ผิวด้านในของผนังที่ทำจากอิฐและคอนกรีตจะมีอุณหภูมิก่อนข้างสูงกว่าที่ทำจากวัสดุชนิดอื่น หลังจากนั้นอุณหภูมิที่ผิวด้านในของผนังที่ทำจากพีวีซีที่  $30\text{ }^{\circ}\text{C}$  จะต่ำที่สุด ส่วนผนังที่ทำจากอิฐและคอนกรีตยังคงมีอุณหภูมิสูงที่สุดเช่นเดิม

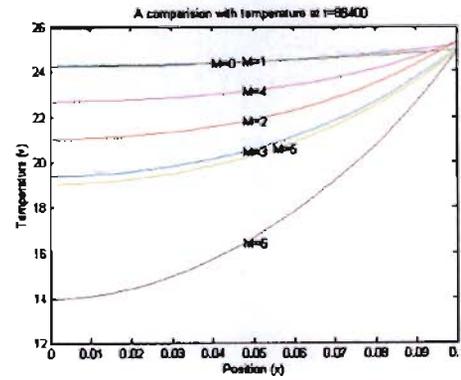
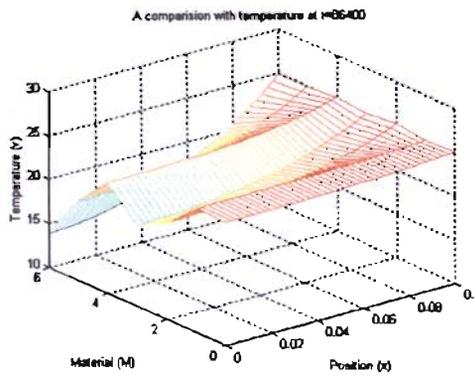




(a) เมื่อ  $t = 3600$  s. (1 hr.)



(b) เมื่อ  $t = 43200$  s. (12 hr.)

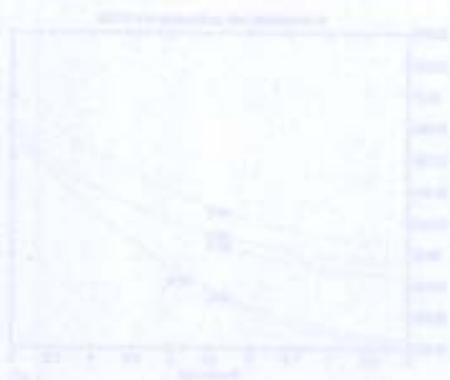


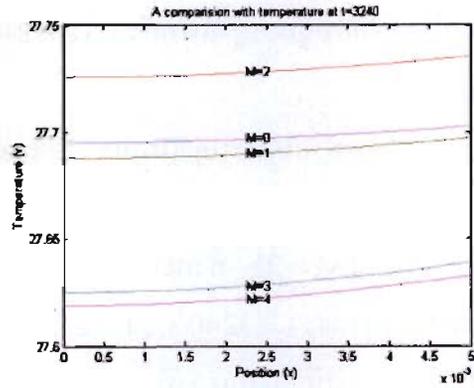
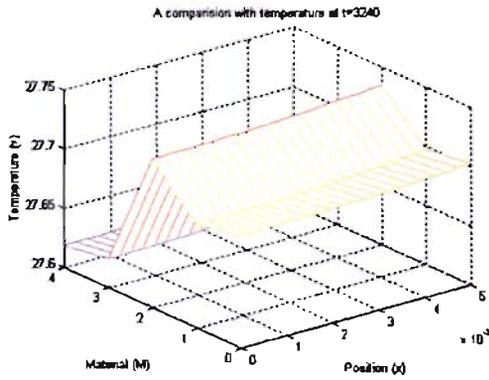
(c) เมื่อ  $t = 86400$  s. (24 hr.)

ภาพที่ 5-4 กราฟแสดงอุณหภูมิของผนังโรงเรือนเมื่อใช้วัสดุชนิดต่างๆ กรณีที่อุณหภูมิภายในและภายนอกโรงเรือนเปลี่ยนแปลง

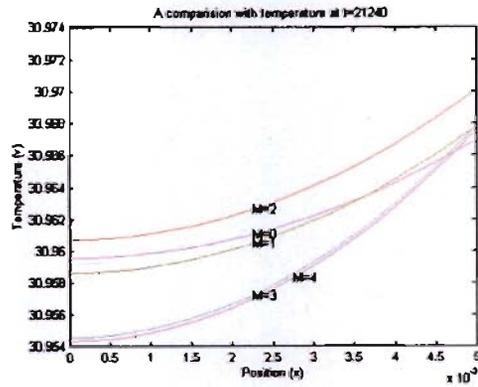
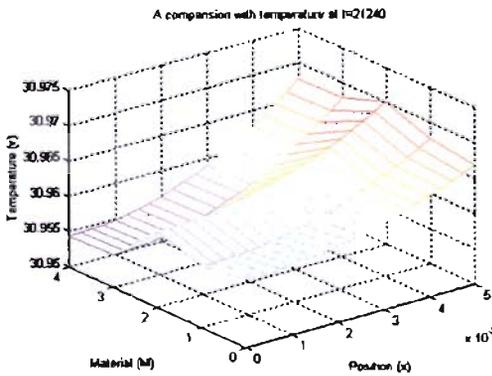
### 5.5 เปรียบเทียบอุณหภูมิในหลังคาโรงเรือนกรณีที่อุณหภูมิภายในและภายนอกโรงเรือนเปลี่ยนแปลง

เป็นการเปรียบเทียบอุณหภูมิของวัสดุที่ใช้ทำหลังคาโรงเรือนซึ่งประกอบด้วย อลูมิเนียมบริสุทธิ์ ( $M=0$ ) อลูมิเนียมผสมทองแดง 3–5 % ( $M=1$ ) อลูมิเนียมผสมซิลิกอน 20–22 % ( $M=2$ ) สังกะสีที่  $0^{\circ}\text{C}$  ( $M=3$ ) และสังกะสีที่  $20^{\circ}\text{C}$  ( $M=4$ ) โดยพิจารณา ณ เวลา  $t=3240$  s,  $t=21240$  s และ  $t=86040$  s. ได้ผลดังแสดงในภาพที่ 5-5 จะเห็นว่า อุณหภูมิของหลังคาที่ทำจากสังกะสีจะต่ำที่สุด

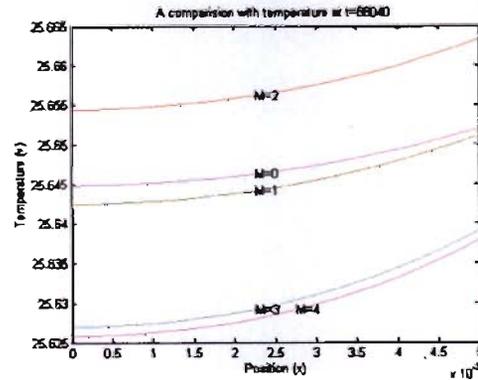
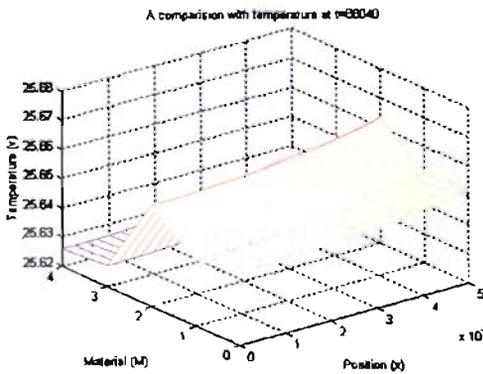




(a) เมื่อ  $t = 3240$  s. (54 min.)



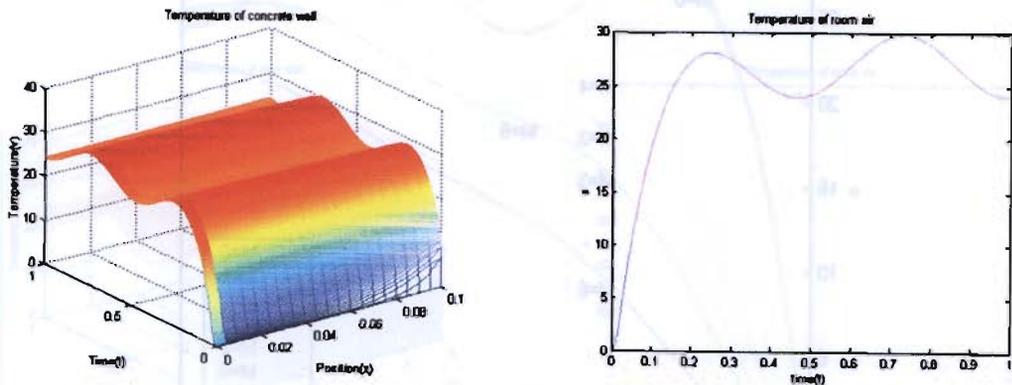
(b) เมื่อ  $t = 21240$  s. (5 hr. 54 min.)



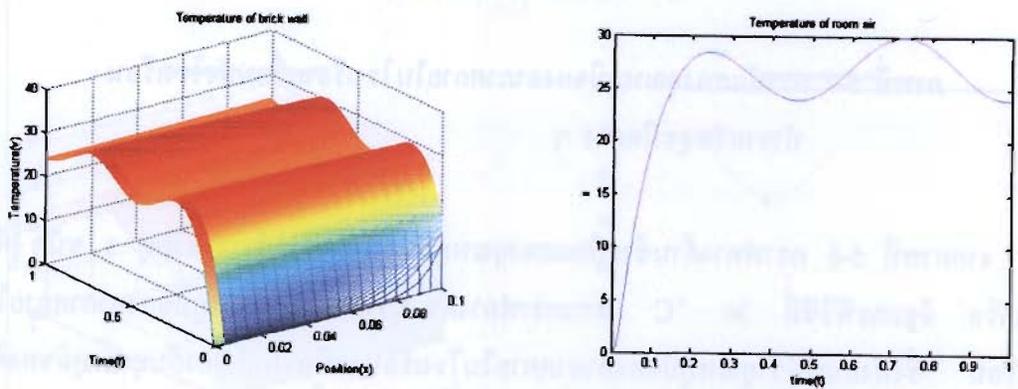
(c) เมื่อ  $t = 86040$  s. (23 hr. 54 min.)

ภาพที่ 5-5 กราฟแสดงอุณหภูมิของหลังคาโรงเรือนเมื่อใช้วัสดุชนิดต่าง ๆ กรณีที่อุณหภูมิภายในและภายนอกโรงเรือนเปลี่ยนแปลง

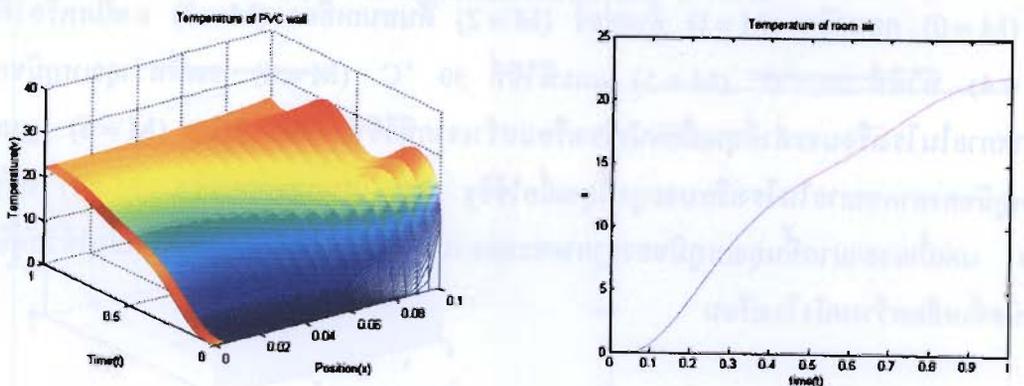
## 5.6 เปรียบเทียบอุณหภูมิของอากาศภายในโรงเรียนเมื่อใช้วัสดุชนิดต่าง ๆ ทำผนังโรงเรียน



(a) ผนังคอนกรีต



(b) ผนังอิฐ



(c) ผนังพีวีซีที่ 30 °C

ภาพที่ 5-6 กราฟแสดงอุณหภูมิของผนัง (ซ้าย) และอุณหภูมิของอากาศภายในโรงเรียน (ขวา)

ตาราง 5-1 (ต่อ) ผลการทดสอบสมมติฐาน

สมมติฐาน	ผลการวิจัย
- ภาวะผู้นำของหัวหน้างานแบบมีส่วนร่วมมีความสัมพันธ์กับความผูกพันต่อองค์การด้านสมาชิกยอมรับในค่านิยมและเป้าหมายขององค์การของพนักงานโรงงานอุตสาหกรรมผลิตชิ้นงานพลาสติก	ยอมรับ
- ภาวะผู้นำของหัวหน้างานแบบมุ่งความสำเร็จมีความสัมพันธ์กับความผูกพันต่อองค์การด้านสมาชิกยอมรับในค่านิยมและเป้าหมายขององค์การของพนักงานโรงงานอุตสาหกรรมผลิตชิ้นงานพลาสติก	ยอมรับ
สมมติฐานย่อยที่ 2.2 ภาวะผู้นำของหัวหน้างานมีความสัมพันธ์กับความผูกพันต่อองค์การด้านสมาชิกมีความเต็มใจที่จะปฏิบัติงานเพื่อองค์การอย่างเต็มที่ของพนักงานโรงงานอุตสาหกรรมผลิตชิ้นงานพลาสติก	ยอมรับ
- ภาวะผู้นำของหัวหน้างานแบบบงการมีความสัมพันธ์กับความผูกพันต่อองค์การด้านสมาชิกมีความเต็มใจที่จะปฏิบัติงานเพื่อองค์การอย่างเต็มที่ของพนักงานโรงงานอุตสาหกรรมผลิตชิ้นงานพลาสติก	ปฏิเสธ
- ภาวะผู้นำของหัวหน้างานแบบสนับสนุนมีความสัมพันธ์กับความผูกพันต่อองค์การด้านสมาชิกมีความเต็มใจที่จะปฏิบัติงานเพื่อองค์การอย่างเต็มที่ของพนักงานโรงงานอุตสาหกรรมผลิตชิ้นงานพลาสติก	ยอมรับ
- ภาวะผู้นำของหัวหน้างานแบบมีส่วนร่วมมีความสัมพันธ์กับความผูกพันต่อองค์การด้านสมาชิกมีความเต็มใจที่จะปฏิบัติงานเพื่อองค์การอย่างเต็มที่ของพนักงานโรงงานอุตสาหกรรมผลิตชิ้นงานพลาสติก	ยอมรับ
- ภาวะผู้นำของหัวหน้างานแบบมุ่งความสำเร็จมีความสัมพันธ์กับความผูกพันต่อองค์การด้านสมาชิกมีความเต็มใจที่จะปฏิบัติงานเพื่อองค์การอย่างเต็มที่ของพนักงานโรงงานอุตสาหกรรมผลิตชิ้นงานพลาสติก	ยอมรับ
สมมติฐานย่อยที่ 2.3 ภาวะผู้นำของหัวหน้างานมีความสัมพันธ์กับความผูกพันต่อองค์การด้านสมาชิกมีความปรารถนาที่จะปฏิบัติงานในองค์การนั้นต่อไปของพนักงานโรงงานอุตสาหกรรมผลิตชิ้นงานพลาสติก	ยอมรับ
- ภาวะผู้นำของหัวหน้างานแบบบงการมีความสัมพันธ์กับความผูกพันต่อองค์การด้านสมาชิกมีความปรารถนาที่จะปฏิบัติงานในองค์การนั้นต่อไปของพนักงานโรงงานอุตสาหกรรมผลิตชิ้นงานพลาสติก	ปฏิเสธ

ตาราง 5-1 (ต่อ) ผลการทดสอบสมมติฐาน

สมมติฐาน	ผลการวิจัย
- ภาวะผู้นำของหัวหน้าแบบสนับสนุนมีความสัมพันธ์กับความผูกพันต่อองค์การด้านสมาชิกมีความปรารถนาที่จะปฏิบัติงานในองค์การนั้นต่อไปของพนักงานโรงงานอุตสาหกรรมผลิตชิ้นงานพลาสติก	ยอมรับ
- ภาวะผู้นำของหัวหน้างานแบบมีส่วนร่วมมีความสัมพันธ์กับความผูกพันต่อองค์การด้านสมาชิกมีความปรารถนาที่จะปฏิบัติงานในองค์การนั้นต่อไปของพนักงานโรงงานอุตสาหกรรมผลิตชิ้นงานพลาสติก	ยอมรับ
- ภาวะผู้นำของหัวหน้างานแบบมุ่งความสำเร็จมีความสัมพันธ์กับความผูกพันต่อองค์การด้านสมาชิกมีความปรารถนาที่จะปฏิบัติงานในองค์การนั้นต่อไปของพนักงานโรงงานอุตสาหกรรมผลิตชิ้นงานพลาสติก	ยอมรับ

จากการสมมติฐานที่ 1 ผู้วิจัยได้พิจารณาจากภาพรวมของผลการทดสอบสมมติฐานทั้งหมด ซึ่งโดยรวมแล้วผลการวิจัยจะปฏิเสธสมมติฐานที่ตั้งไว้ มีเพียงสมมติฐานย่อยที่ 1.4 เท่านั้นที่ยอมรับสมมติฐาน คือพนักงานโรงงานอุตสาหกรรมผลิตชิ้นงานพลาสติกที่มีระดับการศึกษาต่างกันมีความผูกพันต่อองค์การด้านความผูกพันต่อองค์การที่เป็นรายด้านสมาชิกมีความปรารถนาที่จะปฏิบัติงานในองค์การนั้นต่อไปแตกต่างกัน ดังนั้นผู้วิจัยจึงขอสรุปเป็นลักษณะของภาพรวมว่าผลการวิจัยปฏิเสธสมมติฐานที่ตั้งไว้

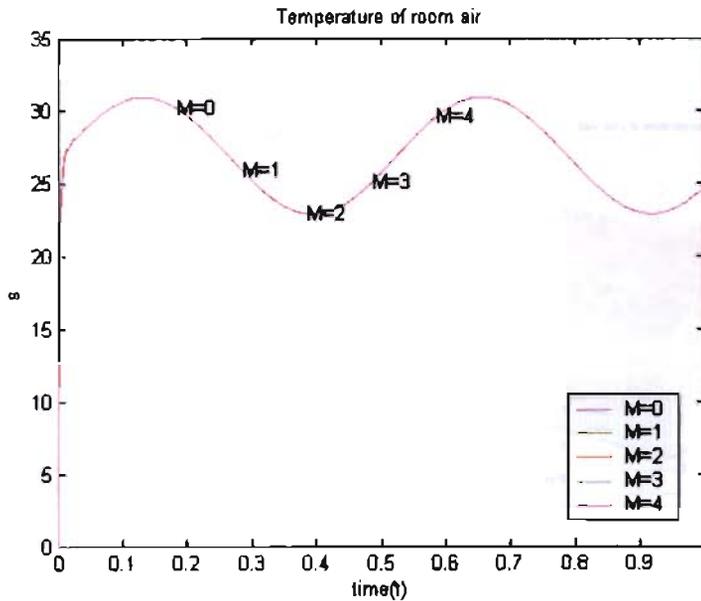
## 5.2 อภิปรายผลการวิจัย

สมมติฐานในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยตั้งสมมติฐานไว้ 2 สมมติฐานและผลการทดสอบปรากฏผลดังต่อไปนี้คือ

สมมติฐานที่ 1 พนักงานโรงงานอุตสาหกรรมผลิตชิ้นงานพลาสติกที่มีปัจจัยส่วนบุคคลต่างกันมีความผูกพันต่อองค์การแตกต่างกัน

สมมติฐานย่อยที่ 1.1 พนักงานโรงงานอุตสาหกรรมผลิตชิ้นงานพลาสติกที่มีเพศต่างกันมีความผูกพันต่อองค์การโดยรวมแตกต่างกัน

จากการทดสอบสมมติฐานด้วยการทดสอบค่าที (t - test) พบว่า พนักงานที่มีเพศต่างกันมีความผูกพันต่อองค์การโดยรวมไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และเมื่อพิจารณาจากรายด้าน พบว่า พนักงานที่มีเพศต่างกันมีความผูกพันต่อองค์การด้านสมาชิกยอมรับในค่านิยมและเป้าหมายขององค์การของพนักงาน ด้านสมาชิกมีความเต็มใจที่จะปฏิบัติงานเพื่อองค์การอย่างเต็มที่ และด้านสมาชิกมีความปรารถนาที่จะปฏิบัติงานใน



ภาพที่ 5-9 กราฟแสดงอุณหภูมิของอากาศภายในโรงเรือนเมื่อหลังคาโรงเรือน ทำจากวัสดุชนิดต่าง ๆ

จากภาพที่ 5-8 กราฟทางด้านซ้ายมือแสดงอุณหภูมิของหลังคาซึ่งทำจากวัสดุ 3 ชนิด คือ สังกะสีที่  $20^{\circ}\text{C}$  อลูมิเนียมผสมทองแดง 3–5 % และอลูมิเนียมบริสุทธิ์ ส่วนกราฟทางด้านขวามือแสดงอุณหภูมิของอากาศภายในโรงเรือน สังเกตได้ว่าไม่ว่าจะใช้วัสดุชนิดใดทำหลังคา อุณหภูมิของอากาศภายในโรงเรือนจะมีค่าใกล้เคียงกัน ซึ่งเห็นได้ชัดเจนจากกราฟในภาพที่ 5-9 โดยในภาพนี้เปรียบเทียบให้เห็นอุณหภูมิของอากาศภายในโรงเรือนเมื่อใช้วัสดุ 5 ชนิด ทำหลังคานั้นคือ อลูมิเนียมบริสุทธิ์ (M=0) อลูมิเนียมผสมทองแดง 3–5 % (M=1) อลูมิเนียมผสมซิลิกอน 20–22 % (M=2) สังกะสีที่  $0^{\circ}\text{C}$  (M=3) และสังกะสีที่  $20^{\circ}\text{C}$  (M=4)

การที่จะเลือกวัสดุชนิดใดมาสร้างโรงเรือนเลี้ยงสัตว์ปีก สามารถทำได้โดยดูจากอุณหภูมิของอากาศภายในโรงเรือน โดยพิจารณาว่าสัตว์ปีกแต่ละชนิดเจริญเติบโตและให้ผลผลิตได้ดีในสภาพอากาศแบบไหนแล้วจึงเลือกวัสดุมารสร้างโรงเรือน ทั้งนี้ก็ต้องคำนึงถึงราคาของวัสดุแต่ละชนิดและรวมถึงค่าใช้จ่ายอย่างอื่นด้วย

### 5.8 ข้อเสนอแนะ

ผลวิจัยนี้ สามารถนำไปประยุกต์ใช้และนำไปประกอบในงานด้านการออกแบบและการปลูกสร้างโรงเรือน โดยจะต้องอาศัยองค์ประกอบอย่างอื่นมาพิจารณาว่าควรจะใช้วัสดุชนิดใดสร้างโรงเรือน ซึ่งสิ่งที่ต้องใช้ประกอบการพิจารณาได้แก่ อุณหภูมิที่เหมาะสมของสัตว์แต่ละวัย ทำเลที่ตั้งของโรงเรือนว่าอยู่ภูมิภาคไหน การเลือกสรรวัสดุที่มาจากภูมิภาคนั้น ทั้งนี้ก็เพื่อเป็นการลดค่าใช้จ่ายในการปลูกสร้างและการจัดหาอุปกรณ์อย่างอื่นมาปรับให้อุณหภูมิมีความเหมาะสมกับความต้องการของสัตว์มากที่สุด นอกจากนี้การนำผลการวิจัยนี้ไปขยายผลให้ครอบคลุมปัญหาอื่น ๆ ที่อยู่นอกขอบเขตการวิจัย เป็นเรื่องที่น่าสนใจมาก เช่น ปัญหาการนำความร้อนในสิ่งก่อสร้างอื่น ๆ ปัญหาการนำความร้อนใน 2 มิติ และ 3 มิติ ปัญหาการถ่ายเทความร้อนรูปแบบอื่น ปัญหาการถ่ายเทความร้อนทั้งระนาบ เป็นต้น การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย มีหลายรูปแบบให้เลือก วิธีที่เลือกใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ เป็นเพียงแนวทางหนึ่งเท่านั้น

ผู้วิจัยหวังเป็นอย่างยิ่งว่าข้อเสนอแนะนี้คงจะเป็นประโยชน์ต่อนักวิจัยอื่น ๆ ที่จะทำการขยายผลการวิจัยนี้ ตามแนวทางที่กล่าวมาข้างต้น

## เอกสารอ้างอิง

1. มานพ ม่วงใหญ่. การเลี้ยงสัตว์. สารระสังเขป สืบค้นวันที่ 1 กันยายน 2549 จาก  
<http://pioneer.netserv.chula.ac.th/~vsuntare/docum/rued42.htm>
2. สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา. แผนการจัดการเรียนรู้วิชาการผลิตสัตว์ปีก. สารระสังเขป สืบค้นวันที่ 22 มกราคม 2549 จาก  
<http://www.agmassmedia.com/News/knowledge/articles53.htm>
3. Boland, J. "The analytic solution of the differential equations describing heat flow in houses." Building and Environment. 37, (2002) : 1027-1035.
4. Polyanin, Andrei D. Handbook of linear partial differential equations for engineers and scientists. The United States of America : chapman & Hall/CRC, 2002.
5. Smith, G.D. Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods. New York : Oxford University Press, 1985.
6. ÖZISIK, M. Necati. Heat conduction. Canada : John Wiley & Sons, 1980.
7. Ames, William F. Numerical Methods for Partial Differential Equations. 2<sup>nd</sup> ed. New York San Francisco : Academic Press, 1977.
8. Mathews, John H and Fink, Kurtis D. Numerical Methods Using MATLAB. 4<sup>th</sup> ed. The United States of America : Pearson Education, Inc., 2004.
9. ÖZISIK, M. Necati. Heat Transfer a Basic Approach. Singapore : McGraw-Hill, 1985.
10. Boland, J. "simplifying the solution of the differential equations which describe heat flows in domestic dwellings." Building and Environment. 32(5), (1997c) : 479-484.
11. Burden, Richard L and Faires, J. Douglas. Numerical Analysis. 7<sup>th</sup> ed. The United States of America : Thomson Learning, Inc., 2001.

ภาคผนวก ก

ค่าความผิดพลาด

### ความผิดพลาด (Error) ของผลเฉลยเชิงตัวเลข

ค่าความผิดพลาดของผลเฉลยเชิงตัวเลข นิยามดังนี้

$$\|E\|_{\infty} = \max_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m}} |v_{\text{exact}}(x_i, t_j) - v_{\text{approx}}(x_i, t_j)|$$

โดยที่  $E$  คือ ผลต่างระหว่างผลเฉลยเชิงวิเคราะห์กับผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีของ แครงก์-นิโคลสัน

$v_{\text{exact}}$  คือ ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

$v_{\text{approx}}$  คือ ผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีของแครงก์-นิโคลสัน

### Crank-Nicolson Equations [5]

It is easily shown that the Crank-Nicolson equations for the problem just considered propagate any perturbation or rounding error by the recursion formula

$$c_{j+1} = (4A^{-1} - I)c_j$$

where  $c$  is perturbation or error vector,  $I$  is the unit matrix, and

$$A = \begin{bmatrix} 2 + 2\lambda(1 + \frac{\Delta x H_{in}}{K}) & -2\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 2 + 2\lambda & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 2 + 2\lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -2\lambda & 2 + 2\lambda(1 + \frac{\Delta x H_{out}}{K}) \end{bmatrix}$$

The spectral radius of  $4A^{-1} - I \leq 1$  if the eigenvalues of  $A \geq 2$  ( $\mu \geq 2$ ). By the circle theorem,

$$\left| \mu - \left\{ 2 + 2\lambda \left( 1 + \frac{\Delta x H_{in}}{K} \right) \right\} \right| \leq 2\lambda$$

giving 
$$2 + 2\lambda \frac{\Delta x H_{in}}{K} \leq \mu$$

Similarly, the remaining rows give that  $2 \leq \mu$  and  $2 + 2\lambda \frac{\Delta x H_{out}}{K} \leq \mu$ . Hence the equations are unconditionally stable.

ภาคผนวก ข

Tridiagonal Matrix

ทฤษฎีบท สมมติ  $A$  เป็นเมทริกซ์สามแนวเฉียง (Tridiagonal) ซึ่งมี  $a_{i,i-1}a_{i,i+1} \neq 0$  สำหรับ  
 ทุก ๆ  $i = 2, 3, \dots, n-1$  ถ้า  $|a_{11}| > |a_{12}|$ ,  $|a_{ii}| \geq |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}|$  สำหรับทุก ๆ  
 $i = 2, 3, \dots, n-1$  และ  $|a_{nn}| > |a_{n,n-1}|$  แล้ว  $A$  จะเป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (Nonsingular)  
 [11]

ภาคผนวก ค

MATLAB Code

**MATLAB Code**

ในงานวิจัยนี้ได้เขียนโปรแกรม MATLAB เพื่อประมาณค่าผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ และ คำนวณหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาการนำความร้อนจากภายนอกสู่ภายในโรงเรือนเลี้ยงสัตว์ ซึ่งเป็นการนำความร้อนในสถานะไม่คงตัวแบบ 1 มิติ โดยใช้วิธีของตรงกึ่ง-นิโคลสัน ประกอบด้วยโปรแกรมดังต่อไปนี้

1. โปรแกรม AnaConWall\_10.m สำหรับวาดกราฟและประมาณค่าผลเฉลยเชิงวิเคราะห์

```
function AnaConWall_10
%sum 120 terms
L=0.1;
T=10800;
h=0.005;
k=0.1;
n=1./h;
m=T/k;
for x=1:n+1
    for t=1:m+1
        exact(t,x)=twallth((x-1)*h,(t-1)*k);
    end
end
vval=exact(2,1)
for xx=1:n+1
    for yy=1:m+1
        x(xx,yy)=(xx-1)*h;
        y(xx,yy)=(yy-1)*k;
        z(xx,yy)=exact(yy,xx);
    end
end
xg=x ; yg=y ; zg=z ;
mesh(xg,yg,zg);
```

```

xlabel('Position(x)');
ylabel('Time(t)');
zlabel('Temperature(v)');

title('analytical solution of heat equation (120 terms)');

function fn=twallth(x,t)
kappa=0.66*10^(-6);
conduct=1.28;
combin=1;
combout=1;
s=27;
vout=31;
L=0.1;
hh= sqrt((combin*combout)/conduct^2);
%หน้าจอกี่ล้ะ 31
alpha(1)=3.92729589272551;
alpha(2)=31.90555532156833;
alpha(3)=63.07954353183348;
alpha(4)=94.41327163141972;
alpha(5)=1.257879215603115e+002;
alpha(6)=1.571790407891831e+002;
alpha(7)=1.885784155198413e+002;
alpha(8)=2.199825138254642e+002;
alpha(9)=2.513895666156576e+002;
alpha(10)=2.827985900188186e+002;
alpha(11)=3.142089933048183e+002;
alpha(12)=3.456204003761212e+002;
alpha(13)=3.770325604155743e+002;
alpha(14)=4.084452997365408e+002;
alpha(15)=4.398584942531228e+002;
alpha(16)=4.712720529552286e+002;

```

alpha(17) = 5.026859075770618e+002;  
alpha(18) = 5.341000059102711e+002;  
alpha(19) = 5.655143073451058e+002;  
alpha(20) = 5.969287798190995e+002;  
alpha(21) = 6.283433976808424e+002;  
alpha(22) = 6.597581401639196e+002;  
alpha(23) = 6.911729902769372e+002;  
alpha(24) = 7.225879339830328e+002;  
alpha(25) = 7.540029595844651e+002;  
alpha(26) = 7.854180572548692e+002;  
alpha(27) = 8.168332186794332e+002;  
alpha(28) = 8.482484367750232e+002;  
alpha(29) = 8.796637054702690e+002;  
alpha(30) = 9.110790195311455e+002;  
alpha(31) = 9.424943744214305e+002;  
alpha(32) = 9.739097661901681e+002;  
alpha(33) = 1.005325191380231e+003;  
alpha(34) = 1.036740646953505e+003;  
alpha(35) = 1.068156130229274e+003;  
alpha(36) = 1.099571638833169e+003;  
alpha(37) = 1.130987170654622e+003;  
alpha(38) = 1.162402723811219e+003;  
alpha(39) = 1.193818296618686e+003;  
alpha(40) = 1.225233887565483e+003;  
alpha(41) = 1.256649495291217e+003;  
alpha(42) = 1.288065118568210e+003;  
alpha(43) = 1.319480756285700e+003;  
alpha(44) = 1.350896407436246e+003;  
alpha(45) = 1.382312071103990e+003;  
alpha(46) = 1.413727746454479e+003;

alpha(47)=1.445143432725819e+003;  
alpha(48)=1.476559129220955e+003;  
alpha(49)=1.507974835300917e+003;  
alpha(50)=1.539390550378898e+003;  
alpha(51)=1.570806273915029e+003;  
alpha(52)=1.602222005411785e+003;  
alpha(53)=1.633637744409910e+003;  
alpha(54)=1.665053490484809e+003;  
alpha(55)=1.696469243243336e+003;  
alpha(56)=1.727885002320938e+003;  
alpha(57)=1.759300767379100e+003;  
alpha(58)=1.790716538103062e+003;  
alpha(59)=1.822132314199771e+003;  
alpha(60)=1.853548095396042e+003;  
alpha(61)=1.884963881436901e+003;  
alpha(62)=1.916379672084094e+003;  
alpha(63)=1.947795467114738e+003;  
alpha(64)=1.979211266320101e+003;  
alpha(65)=2.010627069504496e+003;  
alpha(66)=2.042042876484278e+003;  
alpha(67)=2.073458687086931e+003;  
alpha(68)=2.104874501150240e+003;  
alpha(69)=2.136290318521532e+003;  
alpha(70)=2.167706139056983e+003;  
alpha(71)=2.199121962620988e+003;  
alpha(72)=2.230537789085582e+003;  
alpha(73)=2.261953618329908e+003;  
alpha(74)=2.293369450239733e+003;  
alpha(75)=2.324785284706995e+003;  
alpha(76)=2.356201121629400e+003;

alpha(77)=2.387616960910035e+003;  
alpha(78)=-2.419032802457021e+003;  
alpha(79) 2.450448646183194e+003;  
alpha(80)=-2.481864492005799e+003;  
alpha(81) 2.513280339846220e+003;  
alpha(82) -2.544774277775744e+003;  
alpha(83) -2.576112041285227e+003;  
alpha(84) 2.607527894745062e+003;  
alpha(85)=-2.638943749944792e+003;  
alpha(86)=2.670359606823009e+003;  
alpha(87) -2.701775465321161e+003;  
alpha(88) -2.733191325383388e+003;  
alpha(89)=2.764607186956373e+003;  
alpha(90) -2.796023049989188e+003;  
alpha(91)=-2.827438914433174e+003;  
alpha(92) 2.858854780241810e+003;  
alpha(93) -2.890270647370596e+003;  
alpha(94) -2.921686515776948e+003;  
alpha(95) -2.953102385420091e+003;  
alpha(96)=-2.984518256260970e+003;  
alpha(97)=3.015934128262156e+003;  
alpha(98)=3.047350001387763e+003;  
alpha(99) -3.078765875603371e+003;  
alpha(100)=-3.110181750875949e+003;  
alpha(101) 3.141597627173789e+003;  
alpha(102) 3.173013504466436e+003;  
alpha(103) -3.204429382724633e+003;  
alpha(104)=-3.235845261920257e+003;  
alpha(105)=-3.267261142026267e+003;  
alpha(106)=-3.298677023016651e+003;

```

alpha(107) = 3.330092904866382e+003;
alpha(108) = 3.361508787551363e+003;
alpha(109) = 3.392924671048396e+003;
alpha(110) = 3.424340555335130e+003;
alpha(111) = 3.455756440390027e+003;
alpha(112) = 3.487172326192326e+003;
alpha(113) = 3.518588212722008e+003;
alpha(114) = 3.550004099959762e+003;
alpha(115) = 3.581419987886955e+003;
alpha(116) = 3.612835876485602e+003;
alpha(117) = 3.644251765738336e+003;
alpha(118) = 3.675667655628387e+003;
alpha(119) = 3.707083546139552e+003;
alpha(120) = 3.738499437256172e+003;
bSum1 = zeros(size(x));
bSum2 = zeros(size(x));
for ncount = 1:120
    b1 = (alpha(ncount)*cos(x*alpha(ncount)) + hh*sin(x*alpha(ncount)))/...
        (((alpha(ncount))^2 + hh^2)*L + 2*hh);
    b2 = exp(-kappa*(alpha(ncount))^2*t);
    gam1 = (hh^2/(alpha(ncount))^2 - 1)*sin(L*alpha(ncount)) - (hh^2*L)/...
        alpha(ncount) + (2*hh/alpha(ncount))*cos(L*alpha(ncount)) - ...
        2*hh/alpha(ncount);
    gam2 = (hh^2*L/alpha(ncount))*cos(L*alpha(ncount)) - (hh*L + hh^2)/...
        (alpha(ncount))^2 + 1)*sin(L*alpha(ncount));
    Aon1 = b1 .* b2 .* gam2;
    bSum1 = bSum1 + Aon1;
    Aon2 = b1 .* b2 .* gam1;
    bSum2 = bSum2 + Aon2;
end

```

```

vval = (vout/(2+L*hh))*(1+hh*x + 2*bSum1) + (s/(2+L*hh))*(1+L*hh-hh*x + 2*bSum2);
fprintf('x = %4.4f t = %4.4f vval = %4.14f\n',x,t,vval)
fin=vval;
%%กำหนดค่า alpha โดยใช้
%function y = f_tancon1(alpha)
% L=0.1;
% conduct=1.28;
% combin=1;
% combout=1;
% hh=sqrt((combin*combout)/conduct^2);
% y = tan(alpha*L)-2*hh*alpha/(alpha.^2-hh^2);
%% run
% alpha=fzero(@f_tancon1,13)
%% check
% feval('f_tancon1',alpha)

```

2. โปรแกรม heat\_wall\_new\_crank\_const23.m สำหรับวาดกราฟและคำนวณผลเฉลยเชิงตัวเลข กรณีที่อุณหภูมิภายในและภายนอกโรงเรือนคงที่

```

function heat_wall_new_crank_const23(D)
% function heat_wall_new_crank_const23(T)
% ใช้ x = THOMAS(A,B|C)
% solve v_t = kappa*v_xx      กรณีอุณหภูมิภายในและภายนอกคงที่
% IC: v(x,0) = 0      for 0<=x<=L
% BC: Kv_x(0,t)+H_in(s-v(0,t))-0
%      -Kv_x(L,t)+H_out(vout-v(L,t))-0
% n = number of subintervals for x
% m = number of subintervals for t
%----- กำหนดค่าตัวแปรให้โปรแกรม -----
hr=3;
L = 0.1;

```

```

T = 3600*hr;
h = 0.01; % ปรับค่าความละเอียดในแกน X
k = 0.5;%0.5 ปรับค่าความละเอียดในแกน Y
kappa = 0.66*10^(-6); % 0.66*10^-6 ค่า Diffusivity ของผนัง
conduct = 1.28; % 1.28 Wall heat conductivity (K)
combin = 1; % 8.29 summer (Hi)
combout = 1; % 22.7 summer (Ho)
s = 27;
vout = 31;
n = L/h
m = T/k
lambda = kappa*k/(h^2)
beta1 = 1 + h*combin/conduct;
beta2 = 1 + h*combout/conduct;
gamma1 = h*combin*s/conduct;
gamma2 = h*combout*vout/conduct;
% เมตริกซ์ A จาก AX=B+C
DCA=sparse(diag([2+2*lambda*beta1 (2+2*lambda)*ones(1,n-1) 2+2*lambda*beta2]));
DUA=sparse(diag([-2*lambda -lambda*ones(1,n-1)],1));
DLA=sparse(diag([-lambda*ones(1,n-1) -2*lambda],-1));
A=DCA+DUA+DLA;
% เมตริกซ์ B จาก AX = B+C
DCB_coef=sparse(diag([2-2*lambda*beta1 (2-2*lambda)*ones(1,n-1) 2-2*lambda*beta2]));
DUB_coef=sparse(diag([2*lambda lambda*ones(1,n-1)],1));
DLB_coef=sparse(diag([lambda*ones(1,n-1) 2*lambda],-1));
B_coef = DCB_coef+DUB_coef+DLB_coef;
% เมตริกซ์ C จาก AX=B+C
C = sparse([4*lambda*gamma1;zeros(n-1,1);4*lambda*gamma2]);
% ----- เริ่มคำนวณหาค่าในโปรแกรม -----
for j = 0:m

```

```

t = j*k;
if j == 0 % กรณีที่ t=0
    for i = 1:n+1
        v(i) = feval(f,(i-1)*h);
        vv(j+1,i) = v(i);
        vvg(j+1,i) = v(i);
    end
else % กรณีที่ t > 0
    B=B + coef*transpose(vv);
    sol = thomas(A,(B + C));
    for jj = 1:n+1
        vv(1,jj) = sol(jj);
        vvg(j+1,jj) = sol(jj);
    end
end
end
end
% -----เริ่มการแสดงผลตัวเลข-----
% line1 %ขีดเส้น
% fprintf(' t \ x ')
% for j = 0:n
%     v1 = j*h;
%     fprintf('%22.3f,v1)
% end
%     fprintf('\n')
% line1 %ขีดเส้น
% for j = 0:m
%     t=j*k;
%     fprintf('\n%5.8f      ',t);%แสดงตัวแรกซ้ายสุดเลย
%     for i=1:n+1
%         fprintf('%10.14f      ',vvg(j+1,i));

```

```

% end

% end

% -----จบการแสดงผลตัวเลข-----
% ----- เริ่ม Plot graph -----

% plot graph tem. in 3-D
figure(1);
for xxx = 1:n+1
    for yyy = 1:m+1
        x(xxx,yyy) = (xxx-1)*h;
        y(xxx,yyy) = (yyy-1)*k;
        z(xxx,yyy) = vvg(yyy,xxx);
    end
end

xg = x ; yg = y ; zg = z;
mesh(xg,yg,zg)
xlabel('Position(x)'); ylabel('Time(t)'); zlabel('Temperature(v)');
title('numerical solution (deltax=0.01,deltat=0.5)');

% plot graph various t in 2-D
figure(2);
for yyy = 1:4320:m+1
    for xxx = 1:n+1
        xx(xxx,yyy) = (xxx-1)*h;
        yy(xxx,yyy) = (yyy-1)*k;
        zz(xxx,yyy) = vvg(yyy,xxx);
    end
end

end

plot(xx,zz)
nn=6;
mm1=1;
mm2=4321;

```

```

mm3=8641;
mm4=12961;
mm5=17281;
mm6=21601;
text(xx(nn,mm1),zz(nn,mm1),'t=0')
text(xx(nn,mm2),zz(nn,mm2),'t=2160')
text(xx(nn,mm3),zz(nn,mm3),'t=4320')
text(xx(nn,mm4),zz(nn,mm4),'t=6480')
text(xx(nn,mm5),zz(nn,mm5),'t=8640')
text(xx(nn,mm6),zz(nn,mm6),'t=10800')
xlabel('Position(x)');
ylabel('Temperature(v)');
title('numerical solution for various values of time(t)');
%----- 01) Plot graph -----
function f=f(x)
    f=0;
function line1
for i=0:160
    fprintf(' ')
end
    fprintf('\n')
function x = thomas(varargin)
% THOMAS  Solves a tridiagonal linear system
%  x = THOMAS(A,d) solves a tridiagonal linear system using the very efficient
%  Thomas Algorithm. The vector x is the returned answer.
%  A*x = d;
%  - The matrix A must be strictly diagonally dominant for a stable solution.
%  - This algorithm solves this system on (5n-4) multiplications/divisions and
%  (3n-3) subtractions.
%  x = THOMAS(a,b,c,d) where a is the diagonal, b is the upper diagonal, and c is

```

```

% the lower diagonal of A also solves  $A*x = d$  for x. Note that a is size n
% while b and c is size n-1.
% If  $\text{size}(a)=\text{size}(d)=[L \ C]$  and  $\text{size}(b)-\text{size}(c)=[L-1 \ C]$ , THOMAS solves the C
% independent systems simultaneously.
% ATTENTION : No verification is done in order to assure that A is a tridiagonal matrix.
% If this function is used with a non tridiagonal matrix it will produce wrong results.
[a,b,c,d] = parse_inputs(varargin{:});
% Initialization
m = zeros(size(a));
l = zeros(size(c));
y = zeros(size(d));
n = size(a,1);
%1. LU decomposition
m(1,:) = a(1,:);
y(1,:) = d(1,:); %2. Forward substitution ( $L*y=d$ , for y)
for i = 2 : n
    i_1 = i-1;
    l(i_1,:) = c(i_1,:)/m(i_1,:);
    m(i,:) = a(i,:) - l(i_1,:).*b(i_1,:);
    y(i,:) = d(i,:) - l(i_1,:).*y(i_1,:); %2. Forward substitution ( $L*y=d$ , for y)
end
%2. Forward substitution ( $L*y=d$ , for y)
%y(1) = d(1);
%for i = 2 : n
% y(i,:) = d(i,:) - l(i-1,:).*y(i-1,:);
%end
%3. Backward substitutions ( $U*x=y$ , for x)
x(n,:) = y(n,:)/m(n,:);
for i = n-1 : -1 : 1
    x(i,:) = (y(i,:) - b(i,:).*x(i+1,:))/m(i,:);

```

end

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
function [a,b,c,d] = parse_inputs(varargin)
```

```
if nargin == 4
```

```
    a = varargin{1};
```

```
    b = varargin{2};
```

```
    c = varargin{3};
```

```
    d = varargin{4};
```

```
elseif nargin == 2
```

```
    A = sparse(varargin{1});
```

```
    a = diag(A);
```

```
    b = diag(A,1);
```

```
    c = diag(A,-1);
```

```
    d = varargin{2};
```

```
else
```

```
    error('Incorrect number of inputs.')
```

```
end
```

3. โปรแกรม normError\_wallConcr\_const09.m สำหรับคำนวณค่าความผิดพลาดของผลเฉลยเชิงตัวเลข

```
%main Function
```

```
% ใช้คำสั่ง sparse
```

```
function normError wallConcr_const09
```

```
%sum 120 terms
```

```
L = 0.1;
```

```
T = 32400;
```

```
h = [0.05 0.025 0.01 0.005 0.0025 0.001]; % ปรับค่าความละเอียดในแกน X
```

```
k = 5; % ปรับค่าความละเอียดในแกน Y
```

```
kappa = 0.66*10^(-6); %ค่า Diffusivity ของผนัง
```

```
conduct = 1.28; % 1.28 Wall heat conductivity (K)
```

```

combin=1; % 8.29 summer (Hi)
combout=1; % 22.7 summer (Ho)
s=27;
vout=31;
MaxH = 6;
for (hi=1:MaxH)
n = L/h(hi);          m = T/k;
    exact = analy_wall(L, T, h(hi), k, n, m, kappa, s, vout, conduct, combin, combout);
    Approx = heat_wall_new_crank_const('f, L, T, h(hi), k, n, m, kappa, s, vout, conduct, ...
        combin, combout);
    error = norm(transpose(exact) - Approx, inf);
    lambdaa(hi) = kappa*k/(h(hi)^2);
    ceerror(hi) = error;
clc;
fprintf('\nk = %.2f ', k);
fprintf('\nDeltaX(%f/%f) = %.4f => %f%% ', hi, MaxH, h(hi), (hi/MaxH)*100);
end %    for (hi=1:5)
%แสดงผล-----
    fprintf('\nDeltaX ');
for (hi=1:MaxH) %แสดงผล
    fprintf('%f ', h(hi));
end %    for (hi=1:5)แสดงผล
fprintf('\nlamda ');
for (hi=1:MaxH) %แสดงผล
    fprintf('%f ', lambdaa(hi));
end %    for(hi=1:5) แสดงผล
fprintf('\nerror = ');
for (hi=1:MaxH) %แสดงผล
    fprintf('%f ', ceerror(hi));
end %    for (hi=1:5)แสดงผล

```

%การแก้สมการผล-----

```
function FA = analy_wall(L,T,h,k,n,m,kappa,s,vout,conduct,combin,combout)
    for(x=1:n+1)
        for(t=1:m+1)
            exact(x,t)= analy((x-1)*h,(t-1)*k,L,kappa,s,vout,conduct,combin,combout);
        end
    end
    FA = exact;
function fn= analy(x,t,L,kappa,s,vout,conduct,combin,combout)
%function fn=analy(L,T,h,k,n,m,kappa,s,vout,conduct,combin,combout)
alpha(1)=3.92729589272551;
alpha(2)=31.90555532156833;
alpha(3)=63.07954353183348;
alpha(4)=94.41327163141972;
alpha(5)=1.257879215603115e+002;
alpha(6)=1.571790407891831e+002;
alpha(7)=1.885784155198413e+002;
alpha(8)=2.199825138254642e+002;
alpha(9)=2.513895666156576e+002;
alpha(10)=2.827985900188186e+002;
alpha(11)=3.142089933048183e+002;
alpha(12)=3.456204003761212e+002;
alpha(13)=3.770325604155743e+002;
alpha(14)=4.084452997365408e+002;
alpha(15)=4.398584942531228e+002;
alpha(16)=4.712720529552286e+002;
alpha(17)=5.026859075770618e+002;
alpha(18)=5.341000059102711e+002;
alpha(19)=5.655143073451058e+002;
alpha(20)=5.969287798190995e+002;
```

alpha(21)=6.283433976808424e+002;  
alpha(22)=6.597581401639196e+002;  
alpha(23)=6.911729902769372e+002;  
alpha(24)=7.225879339830328e+002;  
alpha(25)=7.540029595844651e+002;  
alpha(26)=7.854180572548692e+002;  
alpha(27)=8.168332186794332e+002;  
alpha(28)=8.482484367750232e+002;  
alpha(29)=8.796637054702690e+002;  
alpha(30)=9.110790195311455e+002;  
alpha(31)=9.424943744214305e+002;  
alpha(32)=9.739097661901681e+002;  
alpha(33)=1.005325191380231e+003;  
alpha(34)=1.036740646953505e+003;  
alpha(35)=1.068156130229274e+003;  
alpha(36)=1.099571638833169e+003;  
alpha(37)=1.130987170654622e+003;  
alpha(38)=1.162402723811219e+003;  
alpha(39)=1.193818296618686e+003;  
alpha(40)=1.225233887565483e+003;  
alpha(41)=1.256649495291217e+003;  
alpha(42)=1.288065118568210e+003;  
alpha(43)=1.319480756285700e+003;  
alpha(44)=1.350896407436246e+003;  
alpha(45)=1.382312071103990e+003;  
alpha(46)=1.413727746454479e+003;  
alpha(47)=1.445143432725819e+003;  
alpha(48)=1.476559129220955e+003;  
alpha(49)=1.507974835300917e+003;  
alpha(50)=1.539390550378898e+003;

alpha(51)=1.570806273915029e+003;  
alpha(52)=1.602222005411785e+003;  
alpha(53)=1.633637744409910e+003;  
alpha(54)=1.665053490484809e+003;  
alpha(55)=1.696469243243336e+003;  
alpha(56)=1.727885002320938e+003;  
alpha(57)=1.759300767379100e+003;  
alpha(58)=1.790716538103062e+003;  
alpha(59)=1.822132314199771e+003;  
alpha(60)=1.853548095396042e-003;  
alpha(61)=1.884963881436901e+003;  
alpha(62)=1.916379672084094e+003;  
alpha(63)=1.947795467114738e+003;  
alpha(64)=1.979211266320101e+003;  
alpha(65)=2.010627069504496e+003;  
alpha(66)=2.042042876484278e+003;  
alpha(67)=2.073458687086931e+003;  
alpha(68)=2.104874501150240e+003;  
alpha(69)=2.136290318521532e-003;  
alpha(70)=2.167706139056983e+003;  
alpha(71)=2.199121962620988e-003;  
alpha(72)=2.230537789085582e+003;  
alpha(73)=2.261953618329908e+003;  
alpha(74)=2.293369450239733e+003;  
alpha(75)=2.324785284706995e+003;  
alpha(76)=2.356201121629400e+003;  
alpha(77)=2.387616960910035e+003;  
alpha(78)=2.419032802457021e+003;  
alpha(79)=2.450448646183194e+003;  
alpha(80)=2.481864492005799e+003;

alpha(81)=2.513280339846220e-003;  
alpha(82)=2.544774277775744e+003;  
alpha(83)=2.576112041285227e+003;  
alpha(84)=2.607527894745062e+003;  
alpha(85)=2.638943749944792e+003;  
alpha(86)=2.670359606823009e+003;  
alpha(87)=2.701775465321161e+003;  
alpha(88)=2.733191325383388e+003;  
alpha(89)=2.764607186956373e+003;  
alpha(90)=2.796023049989188e+003;  
alpha(91)=2.827438914433174e+003;  
alpha(92)=2.858854780241810e+003;  
alpha(93)=2.890270647370596e+003;  
alpha(94)=2.921686515776948e+003;  
alpha(95)=2.953102385420091e+003;  
alpha(96)=2.984518256260970e+003;  
alpha(97)=3.015934128262156e+003;  
alpha(98)=3.047350001387763e+003;  
alpha(99)=3.078765875603371e+003;  
alpha(100)=3.110181750875949e+003;  
alpha(101)=3.141597627173789e+003;  
alpha(102)=3.173013504466436e+003;  
alpha(103)=3.204429382724633e+003;  
alpha(104)=3.235845261920257e+003;  
alpha(105)=3.267261142026267e+003;  
alpha(106)=3.298677023016651e+003;  
alpha(107)=3.330092904866382e+003;  
alpha(108)=3.361508787551363e+003;  
alpha(109)=3.392924671048396e+003;  
alpha(110)=3.424340555335130e+003;

```

alpha(111)=3.455756440390027e+003;
alpha(112)=3.487172326192326e+003;
alpha(113)=3.518588212722008e+003;
alpha(114)=3.550004099959762e+003;
alpha(115)=3.581419987886955e+003;
alpha(116)=3.612835876485602e+003;
alpha(117)=3.644251765738336e+003;
alpha(118)=3.675667655628387e+003;
alpha(119)=3.707083546139552e+003;
alpha(120)=3.738499437256172e+003;
hh=sqrt(combin*combout/(conduct^2));
bSum1 = zeros(size(x));
bSum2 = zeros(size(x));
for ncount = 1 : 120
    b1=(alpha(ncount)*cos(x*alpha(ncount)) + hh*sin(x*alpha(ncount)))/...
        (((alpha(ncount))^2+hh^2))*L * 2*hh);
    b2=exp(-kappa*(alpha(ncount))^2*t);
    gam1=(hh^2/(alpha(ncount))^2-1)*sin(L*alpha(ncount))-(hh^2*L)/...
        alpha(ncount)+(2*hh/alpha(ncount))*cos(L*alpha(ncount))-...
        2*hh/alpha(ncount);
    gam2=(hh^2*L/alpha(ncount))*cos(L*alpha(ncount))-(hh*L + hh^2/...
        (alpha(ncount))^2-1)*sin(L*alpha(ncount));
    Aon1= b1 .* b2 .* gam2 ;
    bSum1 = bSum1 + Aon1;
    Aon2 = b1 .* b2 .* gam1;
    bSum2 = bSum2 + Aon2;
end
vval = (vout/(2+L*hh))*(1 + hh*x + 2*bSum1) + s/(2+L*hh)*(1+L*hh-hh*x + 2*bSum2);
fprintf('x = %4.4f t = %4.4f vval = %4.14f\n',x,t,vval);
fin=vval;

```

```

%Approx = heat_wall_crank_const(f,L,T,h,k,n,m,kappa,s,voutut,conduct,combin,combout);
function fn1=heat_wall_new_crank_const(f,L,T,h,k,n,m,kappa,s,vout,conduct,combin,combout)
% function heat_wall_new_crank_const09_33('f')
% solve v_t = kappa*v_xx      กรณีอุณหภูมิภายในและภายนอกคงที่
% IC: v(x,0) = 0    for 0<=x<=L
% BC: Kv_x(0,t)+H_in(s-v(0,t))=0
% -Kv_x(L,t)+H_out(vout-v(L,t))-0
% n = number of subintervals for x
% m = number of subintervals for t
%----- กำหนดค่าตัวแปรให้โปรแกรม -----
lambda = kappa*k/(h^2);
%lambda = kappa*k/(h^2)
beta1=1+h*combin/conduct;
beta2=1+h*combout/conduct;
gamma1=h*combin*s/conduct;
gamma2=h*combout*vout/conduct;
% เมตริกซ์ A จาก AX=B+C
DCA=sparse(diag([2+2*lambda*beta1 (2+2*lambda)*ones(1,n-1) 2+2*lambda*beta2]));
DUA=sparse(diag([-2*lambda -lambda*ones(1,n-1)],1));
DLA=sparse(diag([-lambda*ones(1,n-1) -2*lambda],-1));
A=DCA+DUA+DLA;
% เมตริกซ์ B จาก AX=B+C
DCB_coef=sparse(diag([2-2*lambda*beta1 (2-2*lambda)*ones(1,n-1) 2-2*lambda*beta2]));
DUB_coef=sparse(diag([2*lambda lambda*ones(1,n-1)],1));
DLB_coef=sparse(diag([lambda*ones(1,n-1) 2*lambda],-1));
B_coef=DCB_coef+DUB_coef+DLB_coef;
% เมตริกซ์ C จาก AX=B+C
C=sparse([4*lambda*gamma1;zeros(n-1,1);4*lambda*gamma2]);
%----- เริ่มคำนวณหาค่าในโปรแกรม -----
for j = 0:m

```

```

t=j*k;
if j == 0 % กรณีเป็น t=0
    for i=1:n+1
        v(i)=feval(f,(i-1)*h);
        vv(j+1,i) = v(i);
        vvg(j+1,i) = v(i);
    end
else % กรณี t > 0
    B=B_coef*transpose(vv);
    sol=A\ (B+C);
    for jj=1:n+1
        vv(1,jj) = sol(jj);
        vvg(j+1,jj) = sol(jj);
    end
end
end
fn1 = vvg;
function f=f(x)
    f=0;

```

4. โปรแกรม heat\_wall\_new\_crank\_tchange\_074.m สำหรับวาดกราฟและคำนวณผลเฉลยเชิงตัวเลขกรณีที่อุณหภูมิภายในและภายนอกโรงเรือนเปลี่ยนแปลง

```

function heat_wall_new_crank_tchange_074(f,g1)
% function heat_wall_new_crank_tchange_074('f','g1') complete
% ผังคอนกรีต
% ใช้คำสั่ง sparse
% solve v_t - kappa*v_xx      กรณีที่อุณหภูมิภายในและภายนอกไม่คงที่ plot graph รูปใหญ่
% IC: v(x,0) = 0      for 0<=x<=L
% BC: Kv_x(0,t)+H_in(s-v(0,t))=0
% -Kv_x(L,t)+H_out(vout-v(L,t))=0

```

```

%   Mcs(t)+AHi(s(t)-v(0,t))=0
%   n = number of subintervals for x
%   m = number of subintervals for t
%----- กำหนดค่าตัวแปรให้โปรแกรม -----
num_hr=1;
L = 0.1 ;
T = 3600*num_hr;
h = 0.005;%ปรับค่าความละเอียดในแกน X
k = 60*num_hr; %ปรับค่าความละเอียดในแกน Y
kappa = 0.66*10^-6; % ค่า Diffusivity ของผนัง
conduct = 1.28; % Wall heat conductivity (K)
combin = 8.29; % summer (H_in)
combout = 22.7; % summer (H_out)
mass = 226.0608; % Mass of the room air (M)
spec = 1.0057; % Specific heat of the room air (c)
area = 32; %Wall area (A)
n = L/h
m = T/k
lambda = kappa*k/(h^2)
beta1=1+h*combin/conduct;
beta2=1+h*combout/conduct;
gamma1=h*combin/conduct;
gamma2=h*combout/conduct;
neta1=1/2*area*combin;
neta2=mass*spec/k;
s=0 ;
% เมตริกซ์ A จาก AX=B+C
DCA=sparse(diag([2+2*lambda*beta1 0 -lambda*ones(1,n-1) 0]));
DUA=sparse(diag([-2*lambda zeros(1,n)],1));
DLA1=sparse(diag([-neta1 (2+2*lambda)*ones(1,n-1) 2+2*lambda*beta2],-1));

```

```

DLA2=sparse(diag([-lambda*ones(1,n-1) -2*lambda],-2));
CFA=sparse([-2*lambda*gamma1;neta2+neta1;zeros(n,1)]);
A=sparse(DCA+DUA+DLA1+DLA2+[zeros(n+2,n+1) CFA]);
% เมตริกซ์ B จาก AX=B+C
DCB_coef=sparse(diag([2*lambda*beta1 0 lambda*ones(1,n-1) 0]));
DUB_coef=sparse(diag([2*lambda zeros(1,n)],1));
DLB_coef1=sparse(diag([neta1 (2*lambda)*ones(1,n-1) 2*lambda*beta2],-1));
DLB_coef2=sparse(diag([lambda*ones(1,n-1) 2*lambda],-2));
CFB_coef=sparse([2*lambda*gamma1;neta2-neta1;zeros(n,1)]);
B_coef=sparse(DCB_coef+DUB_coef+DLB_coef1+DLB_coef2+[zeros(n+2,n+1) CFB_coef]);
% ----- เริ่มคำนวณหาค่าใน โปรแกรม -----
for j = 0:m
    t(j+1) = j*k;
    if j == 0 % กรณีเป็น t=0
        for i = 1:n+1
            v(i) = feval(f,(i-1)*h);
            vv(j+1,i) = v(i);
            vvg(j+1,i) = v(i);
        end
    else % กรณี t > 0
        vj = [vv s];
        B = B_coef*transpose(vj);
        % เมตริกซ์ C จาก AX=B+C
        vout(j) = feval(g1,(j-1)*k);
        vout(j+1) = feval(g1,j*k);
        C = sparse([zeros(n+1,1); 2*lambda*gamma2*(vout(j)+vout(j+1))]);
        sol = A \ (B + C);
        for jj = 1:n+2
            if jj == -n+2
                s = sol(jj);
            end
        end
    end
end

```

```

        else
            vv(1,jj) = sol(jj);
            vvg(j+1,jj) = sol(jj);
        end
    end
end
end
sg(j+1)=s;
end
% -----เริ่มการแสดงผลตัวเลข-----
% line1 %ขีดเส้น
% fprintf(' t \ x ')
% for j = 0:n
%     v1 = j * h;
%     fprintf('%22.2f,v1)
% end
%     fprintf('\n')
% line1 %ขีดเส้น
% for j = 0:m
%     t1=j*k;
%     fprintf('\n%5.4f    ',t1);%แสดงตัวแรกซ้ายสุดเลย
%     for i=1:n+1
%         fprintf('%10.4f    ',vvg(j+1,i));
%     end
% end
% end
% -----จบการแสดงผลตัวเลข-----
%----- เริ่ม Plot graph -----
% plot graph tem. in 3-D
figure(1);
for xxx = 1:n+1
    for yyy = 1:m+1

```

```

    x(xxx,yyy) = (xxx-1)*h;
    y(xxx,yyy) = (yyy-1)*k;
    z(xxx,yyy) = vvg(yyy,xxx);
end
end
xg = x ; yg = y ; zg = z;
mesh(xg,yg,zg)
xlabel('Position(x)'); ylabel('Time(t)'); zlabel('Temperature(v)');
title('numerical solution (time=1hr,deltax=0.005,deltat =60*1)')
%title('The solution for concrete wall ')
%title({'Graph of heat wall ',date})
% plot graph various t in 2-D
figure(2);
for yyy = 1:12:m-1
    for xxx = 1:n-1
        xx(xxx,yyy) = (xxx-1)*h;
        yy(xxx,yyy) = (yyy-1)*k;
        zz(xxx,yyy) = vvg(yyy,xxx);
    end
end
plot(xx,zz)
nn=12;
mm1=1;
mm2=13;
mm3=25;
mm4=37;
mm5=49;
mm6=61;
text(xx(nn,mm1),zz(nn,mm1),'t=0')
text(xx(nn,mm2),zz(nn,mm2),'t=720')

```

```

text(xx(nn,mm3),zz(nn,mm3),'t=1440')
text(xx(nn,mm4),zz(nn,mm4),'t=2220')
text(xx(nn,mm5),zz(nn,mm5),'t=2940')
text(xx(nn,mm6),zz(nn,mm6),'t=3600')
xlabel('Position(x)');
ylabel('Temperature(v)');
title('numerical solution for various values of time(t)');

    % plot graph inside tem. in 2-D
figure(3);
for i = 1:m+1
    tt(i) = t(i);
end
plot(tt,sg)
xlabel('time(t)'); ylabel('s');
title('Plot of inside temperature graph:wall(h=0.005,60*1)')

% plot graph outside tem. in 2-D
figure(4);
for i = 1:m+1
    tt(i) = t(i);
end
plot(tt,vout)
xlabel('time(t)'); ylabel('v(out)');
title('Plot of outside temperature graph:wall')

%----- 11 Plot graph -----

function f=f(x)
f=0;
%f= -(1.5*x).^2+27;
%f=exp(30*x)+9;
function g1=g1(t)
g1=27+4*sin(1/(1200*12)*t);

```

104

```
%g1=(-10^-6*(t-2000).^2+31);
```

```
function line1
```

```
for i=0:160
```

```
    fprintf('%d')
```

```
end
```

```
    fprintf('\n')
```

ภาคผนวก ง

ตารางค่าคุณสมบัติวัสดุ

ตารางที่ ง-1 แสดงค่าคุณสมบัติของวัสดุต่าง ๆ

วัสดุ	อุณหภูมิ	Thermal Diffusivity	Thermal conductivity	Specific heat
ตัวแปร	T	$\kappa$	K	c
หน่วย	$^{\circ}\text{C}$	$\times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$	$\text{W}/^{\circ}\text{Cm}$	$\text{kJ}/\text{kg}^{\circ}\text{C}$
อิฐก่อสร้างอาคาร	20	0.52	0.69	0.84
”	204.4	0.516		
คอนกรีต	20	0.66	1.28	-
คอนกรีตผสมซีเมนต์และหิน ในอัตราส่วน 1-2-4	20	0.82-0.68	1.37	0.88
ต้นสน (Fir)	23	0.096	0.11	2.72
ต้นสน (Yellow pine)	23	0.082	0.147	2.8
ต้นสน (White pine)	30	-	0.112	-
มาเปิลหรือโอ๊ค (Maple or oak)	30	0.128	0.166	2.4
ไม้บัลซ่า, 2.2 lb/ft <sup>3</sup>	32	-	0.04	-
ไม้ก๊อก (Cork)	20	1.5	0.07	
โพลีไวนิลคลอไรด์ (พีวีซี)	20	0.08	0.16	-
”	30	0.048	0.09	1.1
อลูมิเนียมบริสุทธิ์	0	85.9	202	-
”	20	84.18	204	0.896
อลูมิเนียมผสม 3-5 % Cu	20	66.76	164	0.883
อลูมิเนียมผสม 20-22 % Si	20	71.72	161	0.854
สังกะสี ((Zinc)	0	41.3	112	-
”	20	41.06	112.2	0.3843
ดินเหนียว (Clay)	30	-	1.3	0.88
ทรายแห้ง	20	0.28	0.35	-
ทราย (Sand)	30	-	0.027	0.8

ตารางที่ ง-1 (ต่อ) แสดงค่าคุณสมบัติของวัสดุต่าง ๆ

วัสดุ	อุณหภูมิ	Thermal Diffusivity	Thermal conductivity	Specific heat
ตัวแปร	T	$\kappa$	K	c
หน่วย	$^{\circ}\text{C}$	$\times 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$	$\text{W} / ^{\circ}\text{C m}$	$\text{kJ} / \text{kg} ^{\circ}\text{C}$
หินทราย (Sandstone)	40	1.12-1.19	1.83	0.71
หินปูน (Limestone)	100-300	0.56-0.59	1.26-1.33	0.9
หินแกรนิต (Granite)	-	0.8-1.8	1.73-3.98	0.82
หินอ่อน (Marble)	-	1.0-1.36	2.07-2.94	0.80
ซีเมนต์	23	-	0.059	-
ไม้ที่ชุบ (ซีกบ)	23	-	0.059	-
เศษไม้	30	-	0.087	1.59
อากาศ (Air)	20	19.38	0.025	-
”	27	22.16	0.02624	1.0057

## ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ : นางสาวพวงรัตน์ ฉันทวีโรจน์  
 ชื่อวิทยานิพนธ์ : ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับแบบจำลองการนำความร้อนจากภายนอกสู่ภายในโรงเรือนเลี้ยงสัตว์ปีก  
 สาขาวิชา : คณิตศาสตร์ประยุกต์

### ประวัติ

ประวัติส่วนตัว เกิดวันเสาร์ที่ 8 เมษายน พ.ศ. 2521 ที่อำเภอสีชล จังหวัดนครศรีธรรมราช เป็นบุตรของนายวิโชติ ฉันทวีโรจน์ กับนางอาภรณ์ ฉันทวีโรจน์

ประวัติการศึกษา สำเร็จการศึกษาระดับประถมศึกษาที่โรงเรียนบ้านยางโพรง ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่โรงเรียนสิชลคุุณาธารวิทยา ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่โรงเรียนเบญจมราชูทิศ นครศรีธรรมราช และระดับปริญญาตรี สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ประวัติการทำงาน ตั้งแต่ พ.ศ. 2544 จนถึงปัจจุบัน เป็นอาจารย์ประจำสำนักวิชาศึกษาทั่วไป มหาวิทยาลัยปทุมธานี

สถานที่ติดต่อ บ้านเลขที่ 26/97 หมู่บ้านวรารังกุลคลอง 3 หมู่ 10 ตำบลลาดสวาย อำเภอลำลูกกา จังหวัดปทุมธานี 12150